РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 64, № 1, 2018

Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала на Общероссийском математическом портале: http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. М. Варфоломеев*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев*
Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Подписано в печать 20.02.2018. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 25,11. Тираж 150 экз. Заказ 206.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 64, No. 1, 2018
Differential and Functional Differential Equations

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003
Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website at *All-Russian Mathematical Portal*: http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: ***E. M. Varfolomeev***
Computer design: ***E. M. Varfolomeev***

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Printing run 150 copies.

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 1–19

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-1-19 УДК 517.9

УСТОЙЧИВАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© 2018 г. **А. АШЫРАЛИЕВ, Х. БЕЛАКРУМ**

Аннотация. Рассматривается нелокальная краевая задача для уравнения в частных производных третьего порядка

$$\begin{cases} \dfrac{d^3u(t)}{dt^3} + A\dfrac{du(t)}{dt} = f(t), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = \gamma u(\lambda) + \varphi, \quad u'(0) = \alpha u'(\lambda) + \psi, \quad |\gamma| < 1, \\ u''(0) = \beta u''(\lambda) + \xi, \quad |1 + \beta\alpha| > |\alpha + \beta|, \quad 0 < \lambda \leqslant 1, \end{cases}$$

с самосопряженным положительно определенным оператором A в гильбертовом пространстве H. Приводится устойчивая трехшаговая разностная схема для приближенного решения задачи. Для этой разностной схемы доказывается основная теорема об устойчивости. В качестве приложений, для трех нелокальных краевых задач для уравнений в частных производных третьего порядка получены оценки устойчивости приближенных решений, полученных при помощи разностных схем.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Нелокальные краевые задачи для уравнений в частных производных являются основным направлением исследования в различных областях науки и техники (в особенности, в тех задачах прикладной математики, в которых невозможно определить граничные значения неизвестной функции). Растущий интерес, проявленный в течение последнего столетия к локальным и нелокальным краевым задачам для уравнений в частных производных с временными и пространственными аргументами, обусловлен их важностью для теории науки и промышленности (см., например, [2,7,13,22–24,27,29,30]). Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений в частных производных третьего порядка широко изучены (см., например, [1,3–5,9–11,16,17,21,25,26,28]). Однако теория разностных схем для уравнений в частных производных третьего порядка еще не получила достаточного развития. Этим обосновывается важность поиска устойчивых разностных схем с реализацией их на компьютере.

В работах [14,15] локальные и нелокальные краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + c(t)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b(t)\frac{dy(t)}{dt} + a(t)y(t) = f(t)$$

исследованы при гладких функциях $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$, заданных на отрезке $[0,T]$. Представлены трехточечные разностные схемы. Эти трехточечные разностные схемы строятся на основе тейлоровских разложений по четырем точкам. На примере с периодическими по времени параметрами показано, что полученные результаты хорошо применимы к численному решению локальных и нелокальных краевых задач.

Различные нелокальные краевые задачи для уравнениях в частных производных третьего порядка приводятся к нелокальной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка в гильбертовом пространстве H с самосопряженным положительно определенным оператором A:

$$\begin{cases} \dfrac{d^3u(t)}{dt^3} + A\dfrac{du(t)}{dt} = f(t), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = \gamma u(\lambda) + \varphi, \quad u'(0) = \alpha u'(\lambda) + \psi, |\gamma| < 1, \\ u''(0) = \beta u''(\lambda) + \xi, \quad |1 + \beta\alpha| > |\alpha + \beta|, 0 < \lambda \leqslant 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

В работе [20] рассматривается нелокальная краевая задача (1.1) для нелокального уравнения с частными производными третьего порядка.

Функция $u(t)$ есть *решение* задачи (1.1), если выполнены следующие условия:

1. $u(t)$ трижды непрерывно дифференцируема на интервале $(0,1)$ и дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$;
2. элемент $u'(t)$ принадлежит $D(A)$ для всех t из отрезка $[0,1]$, а функция $Au'(t)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$;
3. $u(t)$ удовлетворяет уравнению и нелокальным краевым условиям (1.1).

Следующая основная теорема об устойчивости, представляющая оценку решения нелокальной краевой задачи (1.1), установлена при предположении, что

$$|1 + \alpha\beta| > |\alpha + \beta|. \tag{1.2}$$

Чтобы сформулировать результаты об устойчивости нелокальной краевой задачи (1.1), дадим определение отрицательной степени $A^{-\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ самосопряженного положительно определенного оператора A следующей формулой (см. [6]):

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha}\int_0^\infty s^{-\alpha}(A + sI)^{-1}\,ds.$$

Оператор $A^{-\alpha}$ ограничен, и $A^{-\alpha}x \to x$ для любого $x \in H$ при $\alpha \to 0$. Положительная степень определяется как $(A^{-\alpha})^{-1}$, она неограничена. Для любых вещественных α и β выполняется фундаментальное свойство степеней $A^\alpha A^\beta x = A^\beta A^\alpha x = A^{\alpha+\beta}x$ при $x \in D(A^\theta)$, где $\theta = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$.

Теорема 1.1 (см. [20])**.** *Предположим, что* $\varphi \in H, \psi \in D(A), \xi \in D(A^{1/2})$, *а* $f(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке* $[0,1]$. *Тогда существует единственное решение задачи* (1.1) *и выполняются неравенства*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|u(t)\|_H \leqslant M_1\left\{\|\varphi\|_H + \left\|A^{-\frac{1}{2}}\psi\right\|_H + \left\|A^{-1}\xi\right\|_H + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\|A^{-1}f(t)\right\|_H\right\}, \tag{1.3}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\|\frac{d^3u(t)}{dt^3}\right\|_H + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\|A\frac{du}{dt}\right\|_H \leqslant M_2\left\{\|A\psi\|_H + \left\|A^{\frac{1}{2}}\xi\right\|_H + \|f(0)\|_H + \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\|f'(t)\right\|_H\right\}, \tag{1.4}$$

где M_1, M_2 *не зависят от* $f(t)$, φ, ψ, ξ.

Далее рассмотрим приложения основных результатов к исследованию устойчивости трех нелокальных краевых задач для уравнений с частными производными третьего порядка.

Во-первых, для приложения теоремы 1.1 рассмотрим нелокальную краевую задачу для уравнения с частными производными третьего порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3} - (a(x)u_{tx})_x + \delta u_t(t,x) = f(t,x), \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < l, \\ u(0,x) = \gamma u(\lambda,x) + \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \alpha u_t(\lambda,x) + \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ u_{tt}(0,x) = \beta u_{tt}(\lambda,x) + \xi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 < \lambda \leqslant 1, \\ u_t(t,0) = u_t(t,l), \quad u_{tx}(t,0) = u_{tx}(t,l), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{1.5}$$

Здесь $a(x)$ $(x \in (0,l))$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$ $(x \in [0,l])$ и $f(t,x)$ $(t \in (0,1)$, $x \in (0,l))$ — достаточно гладкие функции, удовлетворяющие всем условиям согласования, гарантирующим существование и единственность гладкого решения $u(t,x)$ задачи (1.5). Будем считать, что $a(x) \geqslant a > 0$, $x \in (0,l)$, $\delta > 0$, $a(l) = a(0)$.

Известно [6], что функцию $v(t,x)$, определенную на $[0,1] \times [0,l]$, можно рассматривать как абстрактную функцию $v(t)$, определенную на $[0,1]$, принимающую значения в $L_2[0,l]$. Это позволяет привести задачу (1.5) к абстрактной форме (1.1) в гильбертовом пространстве $H = L_2[0,l]$ всех квадратично интегрируемых функций на $[0,l]$ с самосопряженным положительно определенным оператором $A = A^x$, определенным по формуле

$$A^x u(x) = -\left(a(x)u_x\right)_x + \delta u(x) \tag{1.6}$$

с областью определения $D(A^x) = \{u(x) : u, u_x, (a(x)u_x)_x \in L_2[0,l], u(0) = u(l), u'(0) = u'(l)\}$. Здесь $f(t) = f(t,x)$ и $u(t) = u(t,x)$ — известная и неизвестная абстрактные функции на отрезке $[0,1]$ со значениями в $H = L_2[0,l]$. Тогда из теоремы 1.1 вытекает следующая теорема об устойчивости задачи (1.5).

Теорема 1.2 (см. [20]). *Для решения задачи* (1.5) *имеют место неравенства устойчивости*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \|u(t,.)\|_{L_2[0,l]} \leqslant M_3 \left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \|f(t,.)\|_{L_2[0,l]} + \|\varphi\|_{L_2[0,l]} + \|\psi\|_{L_2[0,l]} + \|\xi\|_{L_2[0,l]}\right], \tag{1.7}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(t,.)\right\|_{W_2^2[0,l]} + \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left\|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t,.)\right\|_{L_2[0,l]} \leqslant$$
$$\leqslant M_3 \left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \|f_t(t,.)\|_{L_2[0,l]} + \|f(0,.)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi\|_{W_2^2[0,l]} + \|\xi\|_{W_2^1[0,l]}\right] \tag{1.8}$$

где M_3 не зависит от $f(t,x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$. Здесь $W_2^1[0,l]$ и $W_2^2[0,l]$ — пространства Соболева всех квадратично интегрируемых функций $\psi(x)$ на $[0,l]$ с нормами

$$\|\psi\|_{W_2^1[0,l]} = \left\{\int_0^l \left[\psi^2(x) + \psi_x^2(x)\right] dx\right\}^{1/2} \quad \text{и} \quad \|\psi\|_{W_2^2[0,l]} = \left\{\int_0^l \left[\psi^2(x) + \psi_{xx}^2(x)\right] dx\right\}^{1/2}.$$

Во-вторых, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная открытая область с гладкой границей S, $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$. В области $[0,1] \times \Omega$ рассмотрим краевую задачу для уравнения с частными производными третьего порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3} - \sum\limits_{r=1}^{n} \left(a_r(x)u_{tx_r}\right)_{x_r} = f(t,x), \quad x = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega, \quad 0 < t < 1, \\ u(0,x) = \gamma u(\lambda,x) + \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \alpha u_t(\lambda,x) + \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u_{tt}(0,x) = \beta u_{tt}(\lambda,x) + \xi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad 0 < \lambda \leqslant 1, \\ u_t(t,x) = 0, \quad x \in S, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{1.9}$$

где $a_r(x)$, $(x \in \Omega)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$ $\left(x \in \bar{\Omega}\right)$ и $f(t,x)$ $(t \in (0,1)$, $x \in \Omega)$ — заданные гладкие функции, а $a_r(x) > 0$. Аналогично, функцию $v(t,x)$ на $[0,1] \times \bar{\Omega}$ можно рассматривать как абстрактную функцию $v(t)$ на $[0,1]$ со значениями в $L_2\left(\bar{\Omega}\right)$. Тогда задачу (1.9) можно записать в абстрактной форме (1.1) в гильбертовом пространстве $H = L_2\left(\bar{\Omega}\right)$ квадратично интегрируемых функций на $\bar{\Omega}$ с самосопряженным положительно определенным оператором $A = A^x$:

$$A^x u(x) = \sum_{r=1}^{n} \left(a_r(x)u_{x_r}\right)_{x_r} \tag{1.10}$$

с областью определения $D(A^x) = \left\{u(x) : u, u_{x_r}, (a_r(x)u_{x_r}) \in L_2\left(\bar{\Omega}\right), 1 \leqslant r \leqslant n, u(x) = 0, x \in S\right\}$. Здесь $f(t) = f(t,x)$ и $u(t) = u(t,x)$ — известная и неизвестная абстрактные функции, определенные на $\bar{\Omega}$ со значениями в $L_2\left(\bar{\Omega}\right)$. Тогда из теоремы 1.1 и неравенства коэрцитивности для решения эллиптической дифференциальной задачи в $L_2\left(\bar{\Omega}\right)$ вытекает следующая теорема об устойчивости задачи (1.9).

Теорема 1.3 (см. [20]). *Для решения задачи* (1.9) *имеют место неравенства устойчивости*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|u(t,.)\|_{L_2(\bar\Omega)} \leqslant M_4\left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|f(t,.)\|_{L_2(\bar\Omega)}+\|\varphi\|_{L_2(\bar\Omega)}+\|\psi\|_{L_2(\bar\Omega)}+\|\xi\|_{L_2(\bar\Omega)}\right], \tag{1.11}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|u(t,.)\|_{W_2^2(\bar\Omega)}+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t,.)\right\|_{L_2(\bar\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant M_4\left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|f_t(t,.)\|_{L_2(\bar\Omega)}+\|f(0,.)\|_{L_2(\bar\Omega)}+\|\psi\|_{W_2^2(\bar\Omega)}+\|\xi\|_{W_2^1(\bar\Omega)}\right] \tag{1.12}$$

где M_4 не зависит от $f(t,x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$. Здесь и далее $W_2^1(\overline{\Omega})$ и $W_2^2(\overline{\Omega})$ будут обозначать пространства Соболева квадратично интегрируемых функций $\psi(x)$ на $\overline{\Omega}$ с нормами

$$\|\psi\|_{W_2^1(\overline{\Omega})}=\left(\int\cdots\int_{x\in\overline{\Omega}}\left[|\psi(x)|^2+\sum_{r=1}^{n}|\psi_{x_r}(x)|^2\right]dx_1\ldots dx_n\right)^{\frac12},$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(\overline{\Omega})}=\left(\int\cdots\int_{x\in\overline{\Omega}}\left[|\psi(x)|^2+\sum_{r=1}^{n}|\psi_{x_rx_r}(x)|^2\right]dx_1\ldots dx_n\right)^{\frac12}.$$

В-третьих, рассмотрим краевую задачу для уравнения с частными производными третьего порядка

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3}-\displaystyle\sum_{r=1}^{m}\left(a_r(x)u_{tx_r}\right)_{x_r}+\delta u_t(t,x)=f(t,x), \quad x=(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega, \quad 0<t<1,\\ u(0,x)=\gamma u(\lambda,x)+\varphi(x), \quad u_t(0,x)=\alpha u_t(\lambda,x)+\psi(x), \quad x\in\bar\Omega,\\ u_{tt}(1,x)=\beta u_{tt}(\lambda,x)+\xi(x), \quad x\in\bar\Omega, \quad 0<\lambda<1,\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial\vec{m}}(0,x)=0, \quad x\in S, \quad 0\leqslant t\leqslant 1,\end{cases} \tag{1.13}$$

где $a_r(x)$, $x\in\Omega$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$, $x\in\bar\Omega$ и $f(t,x)$ $(t\in(0,1)\,,\ x\in\Omega)$ — заданные гладкие функции, $a_r(x)>0$, а $\vec m$ — вектор нормали к S.

Аналогично, задачу (1.13) можно записать в абстрактной форме (1.1) в гильбертовом пространстве $H=L_2\left(\bar\Omega\right)$ квадратично интегрируемых функций на $\bar\Omega$ с самосопряженным положительно определенным оператором $A=A^x$:

$$A^x u(x)=-\sum_{r=1}^{m}\left(a_r(x)u_{x_r}\right)_{x_r}+\delta u(x) \tag{1.14}$$

с областью определения $D(A^x)=\left\{u(x): u, u_{x_r}, \left(a_r(x)u_{x_r}\right)_{x_r}\in L_2\left(\bar\Omega\right), 1\leqslant r\leqslant m, \dfrac{\partial u}{\partial\vec m}=0, x\in S\right\}$. Здесь $f(t)=f(t,x)$ и $u(t)=u(t,x)$ — известная и неизвестная абстрактные функции на $\bar\Omega$ со значениями в $L_2\left(\bar\Omega\right)$. Из теоремы 1.1 и неравенства коэрцитивности для решения эллиптической дифференциальной задачи в $L_2\left(\bar\Omega\right)$ вытекает следующая теорема об устойчивости задачи (1.13).

Теорема 1.4 (см. [20]). *Для решения задачи* (1.13) *имеют место неравенства устойчивости*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|u(t,.)\|_{L_2(\bar\Omega)} \leqslant M_5\left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|f(t,.)\|_{L_2(\bar\Omega)}+\|\varphi\|_{L_2(\bar\Omega)}+\|\psi\|_{L_2(\bar\Omega)}+\|\xi\|_{L_2(\bar\Omega)}\right] \tag{1.15}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|u(t,.)\|_{W_2^2(\bar\Omega)}+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(t,.)\right\|_{L_2(\bar\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant M_5\left[\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|f_t(t,.)\|_{L_2(\bar\Omega)}+\|f(0,.)\|_{L_2(\bar\Omega)}+\|\psi\|_{W_2^2(\bar\Omega)}+\|\xi\|_{W_2^1(\bar\Omega)}\right], \tag{1.16}$$

где M_5 не зависит от $f(t,x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(x)$.

В настоящей работе исследуются устойчивые разностные схемы, применяемые для приближенного решения задачи (1.1) при условии, что выполнено неравенство (1.2). Для приближенного решения задачи (1.1) представлена устойчивая трехшаговая разностная схема. Однако оценить устойчивость решения этой разностной схемы при предположении (1.2) пока не удалось. Применяя операторный подход монографии [19], справедливость утверждения основной теоремы об устойчивости для указанной разностной схемы удалось установить при следующем, более сильном, чем (1.2), предположении:

$$1 > |\alpha| \; |\beta| + |\alpha| + |\beta| \,. \tag{1.17}$$

Оценки устойчивости решений разностных схем получены для приближенных решений трех нелокальных краевых задач для уравнений в частных производных третьего порядка, возникающих в приложениях. Однако общность подхода, рассматриваемого в настоящей работе, позволяет рассматривать и более широкий класс многомерных задач. Представлены соответствующие численные результаты.

2. Разностная схема. Основная теорема об устойчивости

Рассмотрим следующую разностную схему первого порядка точности:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+2}-3u_{k+1}+3u_k-u_{k-1}}{\tau^3}+A\dfrac{u_{k+2}-u_{k+1}}{\tau}=f_k, \\ f_k=f(t_k), \quad 1\leqslant k\leqslant N-2, \quad N\tau=1, \\ u_0=\gamma u_m+\varphi, \quad \dfrac{u_1-u_0}{\tau}=\alpha\dfrac{u_m-u_{m-1}}{\tau}+\psi, \\ (I+\tau^2A)\dfrac{u_2-2u_1+u_0}{\tau^2}=\beta\dfrac{u_m-2u_{m-1}+u_{m-2}}{\tau^2}+\xi. \end{cases} \tag{2.1}$$

Она предназначена для приближенного решения нелокальной краевой задачи (1.1). Здесь и далее используется обозначение $m=[\lambda/\tau]$.

Теорема 2.1. *Предположим, что* $\lambda \geqslant 2\tau$, $\varphi\in H$, $\psi\in D(A)$, $\xi\in D\left(A^{1/2}\right)$ *и выполняется предположение* (1.17). *Тогда решение разностной схемы* (2.1) *удовлетворяет следующим неравенствам устойчивости*:

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|u_k\|_H\leqslant M_6\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\left\|A^{-1/2}f_k\right\|_H+\left\|A^{-1}\xi\right\|_H+\left\|A^{-1/2}\psi\right\|_H+\|\varphi\|_H\right\}, \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered}\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\left\|\frac{u_{k+2}-3u_{k+1}+3u_k-u_{k-1}}{\tau^3}\right\|_H+\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\left\|A\frac{u_{k+2}-u_{k+1}}{\tau}\right\|_H\leqslant \\ \leqslant M_7\left\{\max_{2\leqslant k\leqslant N-2}\frac{\|f_k-f_{k-1}\|_H}{\tau}+\|f_1\|_H+\left\|A^{1/2}\xi\right\|_H+\|A\psi\|_H\right\},\end{gathered} \tag{2.3}$$

где M_6, M_7 *не зависят от* $f_k, 1\leqslant k\leqslant N-2$, *и* φ, ψ,ξ.

Доказательство. Очевидно, трехшаговую разностную схему (2.1) можно переписать в виде эквивалентной ей системы из одношаговой и двухшаговой разностных схем:

$$\begin{cases} \dfrac{u_k-u_{k-1}}{\tau}=v_{k-1}, \quad u_0=\gamma u_m+\varphi, \quad 1\leqslant k\leqslant N, \\ \dfrac{v_{k+1}-2v_k+v_{k-1}}{\tau^2}+Av_{k+1}=f_k, \quad 1\leqslant k\leqslant N-2, \\ v_0=\alpha v_{m-1}+\psi, \quad (I+\tau^2A)\dfrac{v_1-v_0}{\tau}=\beta\dfrac{v_{m-1}-v_{m-2}}{\tau}+\xi. \end{cases}$$

Применяя операторный подход из монографии [19], можно установить оценки устойчивости

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N-1}\|v_k\|_H\leqslant M\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\left\|A^{-1/2}f_k\right\|_H+\left\|A^{-1}\xi\right\|_H+\left\|A^{-1/2}\psi\right\|_H+\|\varphi\|_H\right\}, \tag{2.4}$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\left\|\frac{v_{k+1}-2v_k+v_{k-1}}{\tau^2}\right\|_H+\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\|Av_{k+1}\|_H\leqslant$$

$$\leqslant M\left\{\max_{2\leqslant k\leqslant N-2}\frac{\|f_k-f_{k-1}\|_H}{\tau}+\|f_1\|_H+\left\|A^{1/2}\xi\right\|_H+\|A\psi\|_H\right\} \qquad (2.5)$$

для решений двухшаговых разностных схем

$$\begin{cases} \dfrac{v_{k+1}-2v_k+v_{k-1}}{\tau^2}+Av_{k+1}=f_k, \quad 1\leqslant k\leqslant N-2, \\ v_0=\alpha v_{m-1}+\psi, \quad (I+\tau^2A)\dfrac{v_1-v_0}{\tau}=\beta\dfrac{v_{m-1}-v_{m-2}}{\tau}+\xi. \end{cases}$$

Понятно, что для решения одношаговой разностной схемы $\dfrac{u_k-u_{k-1}}{\tau}=v_{k-1}$, $u_0=\gamma u_m+\varphi$, $1\leqslant k\leqslant N$, справедлива формула $u_k=\dfrac{\gamma}{1-\gamma}\sum\limits_{i=0}^{m-1}v_i\tau+\sum\limits_{i=0}^{k-1}v_i\tau+\dfrac{1}{1-\gamma}\varphi$. Отсюда получаем следующие оценки:

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|u_k\|_H\leqslant M_{10}\left\{\max_{0\leqslant k\leqslant N-1}\|v_k\|_H+\|\varphi\|_H\right\}, \qquad (2.6)$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\left\|A\frac{u_{k+2}-u_{k+1}}{\tau}\right\|_H\leqslant M_{11}\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\|Av_{k+1}\|_H. \qquad (2.7)$$

Оценка (2.2) следует из оценок (2.4) и (2.6). Применяя разностное уравнение

$$\frac{u_{k+2}-3u_{k+1}+3u_k-u_{k-1}}{\tau^3}+A\frac{u_{k+2}-u_{k+1}}{\tau}=f_k,$$

неравенство треугольника и оценку (2.6), получаем, что

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\left\|\frac{u_{k+2}-3u_{k+1}+3u_k-u_{k-1}}{\tau^3}\right\|_H\leqslant M\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\|Av_{k+1}\|_H+\max_{2\leqslant k\leqslant N-2}\frac{\|f_k-f_{k-1}\|_H}{\tau}+\|f_1\|_H\right\}. \qquad (2.8)$$

Следовательно, оценка (2.3) следует из оценок (2.5), (2.7) и (2.8), что и завершает доказательство теоремы 2.1. □

Отметим, что при выполнении условий теоремы 2.1 не удается получить оценку устойчивости для решения разностной схемы

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+2}-3u_{k+1}+3u_k-u_{k-1}}{\tau^3}+A\dfrac{u_{k+2}-u_{k+1}}{\tau}=f_k, \\ f_k=f(t_k), \quad 1\leqslant k\leqslant N-2, \quad N\tau=1, \\ u_0=\gamma u_m+\varphi, \quad \dfrac{u_1-u_0}{\tau}=\alpha\dfrac{u_m-u_{m-1}}{\tau}+\psi, \\ \dfrac{u_2-2u_1+u_0}{\tau^2}=\beta\dfrac{u_m-2u_{m-1}+u_{m-2}}{\tau^2}+\xi. \end{cases}$$

Приближение $(I+\tau^2A)\dfrac{u_2-2u_1+u_0}{\tau^2}$ для $u''(0)$ лучше, чем $\dfrac{u_2-2u_1+u_0}{\tau^2}$, с точки зрения устойчивости разностной схемы (2.1) и позволяет получить утверждение теоремы 2.1. Такой подход для гиперболических уравнений впервые был применен в работе [18] (более подробно см. в [19]).

3. Приложения

В этом разделе рассматриваются приложения теоремы 2.1. Вначале рассматривается следующая нелокальная краевая задача (1.5). Задачу дискретизации задачи (1.5) разобьем на два этапа. На первом определим пространственную сетку $[0,l]_h=\{x=x_n : x_n=nh,\ 0\leqslant n\leqslant M,\ Mh=l\}$ и введем гильбертовы пространства $L_{2h}=L_2([0,l]_h)$ и $W_{2h}^2=W_2^2([0,l]_h)$ сеточных функций $\varphi^h(x)=\{\varphi_n\}_0^M$, определенных на $[0,l]_h$, с нормами $\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}=\Big(\sum\limits_{x\in[0,l]_h}\left|\varphi^h(x)\right|^2h\Big)^{1/2}$ и $\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}=\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\Big(\sum\limits_{x\in[0,l]_h}\left|\varphi^h_{x\overline{x},j}(x)\right|^2h\Big)^{1/2}$ соответственно.

Дифференциальному оператору A^x, определенному формулами (1.5), поставим в соответствие разностный оператор A_h^x следующим образом:

$$A_h^x\varphi^h(x)=\{-(a(x)\varphi_{\overline{x}})_{x,n}+\delta\varphi_n\}_1^{M-1}. \qquad (3.1)$$

Этот оператор действует в пространстве сеточных функций $\varphi^h(x) = \{\varphi_n\}_0^M$, удовлетворяющих условиям $\varphi_0 = \varphi_M$, $\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_M - \varphi_{M-1}$. Хорошо известно, что A_h^x — самосопряженный положительно определенный оператор в L_{2h}. С помощью A_h^x получаем нелокальную краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d^3u^h(t,x)}{dt^3} + A_h^x \dfrac{du^h(t,x)}{dt} = f^h(t,x), \quad 0 < t < 1, \quad x \in [0,l]_h, \\ u^h(0,x) = \gamma u^h(\lambda,x) + \varphi^h(x), \quad u_t^h(0,x) = \alpha u_t^h(\lambda,x) + \psi^h(x), \\ u_{tt}^h(0,x) = \beta u_{tt}^h(\lambda,x) + \xi^h(x), \quad x \in [0,l]_h. \end{cases} \tag{3.2}$$

На втором шаге заменяем задачу (3.2) на разностную схему (2.1):

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+2}^h(x) - 3u_{k+1}^h(x) + 3u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau^3} + A_h^x \dfrac{u_{k+2}^h(x) - u_{k+1}^h(x)}{\tau} = f_k^h(x), \\ f_k^h(x) = f^h(t_k,x), \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leqslant k \leqslant N-2, \quad x \in [0,l]_h, N\tau = 1, \\ u_0^h(x) = \gamma u_m^h(x) + \varphi^h(x), \quad \dfrac{u_1^h(x) - u_0^h(x)}{\tau} = \alpha \dfrac{u_m^h(x) - u_{m-1}^h(x)}{\tau} + \psi^h(x), \\ (I_h + \tau^2 A_h^x) \dfrac{u_2^h(x) - 2u_1^h(x) + u_0^h(x)}{\tau^2} = \beta \dfrac{u_m^h(x) - 2u_{m-1}^h(x) + u_{m-2}^h(x)}{\tau^2} + \xi^h(x), \quad x \in [0,l]_h. \end{cases} \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. *Предположим, что* $\lambda \geqslant 2\tau$ *и выполнено условие* (1.17). *Тогда для решения* $\{u_k^h(x)\}_0^N$ *задачи* (3.3) *имеют место оценки устойчивости*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N} \|u_k^h\|_{L_{2h}} \leqslant M_{13} \left\{ \max_{1\leqslant k\leqslant N-2} \|f_k^h\|_{L_{2h}} + \| \varphi^h \|_{L_{2h}} + \| \psi^h \|_{L_{2h}} + \| \xi^h \|_{L_{2h}} \right\},$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N-2} \left\| \frac{u_{k+2}^h - 3u_{k+1}^h + 3u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau^3} \right\|_{L_{2h}} + \max_{1\leqslant k\leqslant N-2} \left\| \frac{u_{k+2}^h - u_{k+1}^h}{\tau} \right\|_{W_{2h}^2} \leqslant$$

$$\leqslant M_{14} \left\{ \max_{2\leqslant k\leqslant N-2} \left\| \frac{1}{\tau}\left(f_k^h - f_{k-1}^h\right) \right\|_{L_{2h}} + \| f_1^h \|_{L_{2h}} + \| \psi^h \|_{W_{2h}^2} + \| \xi^h \|_{W_{2h}^1} \right\},$$

где M_{13} *и* M_{14} *не зависят ни от* $\varphi^h(x), \psi^h(x), \xi^h(x)$, *ни от* $f_k^h(x), 1 \leqslant k \leqslant N-2$.

Доказательство. В гильбертовом пространстве L_{2h} разностную схему (3.3) можно записать в абстрактной форме

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+2}^h - 3u_{k+1}^h + 3u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau^3} + A_h \dfrac{u_{k+2}^h - u_{k+1}^h}{\tau} = f_k^h, \\ 1 \leqslant k \leqslant N-2, \quad N\tau = 1, \\ u_0^h = \gamma u_m^h + \varphi^h, \quad \dfrac{u_1^h - u_0^h}{\tau} = \alpha \dfrac{u_m^h - u_{m-1}^h}{\tau} + \psi^h, \\ (I_h + \tau^2 A_h) \dfrac{u_2^h - 2u_1^h + u_0^h}{\tau^2} = \beta \dfrac{u_m^h - 2u_{m-1}^h + u_{m-2}^h}{\tau^2} + \xi^h, \end{cases}$$

где $A_h = A_h^x$ — самосопряженный положительно определенный оператор, заданный формулой (3.1), а $f_k^h = f_k^h(x)$ и $u_k^h = u_k^h(x)$ — известная и неизвестная абстрактные сеточные функции, определенные на $[0,l]_h$, со значениями в $H = L_{2h}$. Значит, оценки теоремы 3.1 следуют из оценок (2.2) и (2.3), что завершает доказательство теоремы 3.1. □

Далее рассмотрим нелокальную краевую задачу (1.9). Разобьем дискретизацию задачи (1.9) на два этапа. На первом определим пространственную сетку $\overline{\Omega}_h = \{x = x_r = (h_1 j_1, \ldots, h_n j_n)$, $j = (j_1, \ldots, j_n)$, $0 \leqslant j_r \leqslant N_r$, $N_r h_r = 1$, $r = 1, \ldots, n\}$, $\Omega_h = \overline{\Omega}_h \cap \Omega$, $S_h = \overline{\Omega}_h \cap S$ (это обозначение будет использоваться и далее).

Введем банаховы пространства $L_{2h} = L_2(\overline{\Omega}_h)$ и $W_{2h}^2 = W_2^2(\overline{\Omega}_h)$ сеточных функций $\varphi^h(x) = \{\varphi(h_1 r_1, \ldots, h_m r_m)\}$, определенных на $\overline{\Omega}_h$, с нормами $\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}} = \Big(\sum\limits_{x\in\overline{\Omega}_h} \left|\varphi^h(x)\right|^2 h_1 \cdots h_m\Big)^{1/2}$ и $\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}} = \left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}} + \Big(\sum\limits_{x\in\overline{\Omega}_h}\sum\limits_{r=1}^{m} \left|\left(\varphi^h\right)_{x_r\overline{x}_r,j_r}\right|^2 h_1 \cdots h_m\Big)^{1/2}$ соответственно.

Дифференциальному оператору A^x, определенному соотношениями (1.9), поставим в соответствие разностный оператор A_h^x, определенный следующим образом:

$$A_h^x u^h = -\sum_{r=1}^{n}\left(\alpha_r(x) u_{x_r}^h\right)_{x_r,j_r}. \tag{3.4}$$

Это самосопряженный положительно определенный оператор в L_{2h}, действующий в пространстве сеточных функций $u^h(x)$, удовлетворяющих условиям $u^h(x) = 0$ для всех x из S_h. С помощью разностного оператора A_h^x получаем следующую нелокальную краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d^3 u^h(t,x)}{dt^3} + A_h^x \dfrac{du^h(t,x)}{dt} = f^h(t,x), \quad 0 < t < 1, \quad x \in [0,l]_h, \\ u^h(0,x) = \gamma u^h(\lambda,x) + \varphi^h(x), \quad u_t^h(0,x) = \alpha u_t^h(\lambda,x) + \psi^h(x), \\ u_{tt}^h(0,x) = \beta u_{tt}^h(\lambda,x) + \xi^h(x), \quad x \in [0,l]_h. \end{cases} \tag{3.5}$$

На следующем этапе задача (3.5) заменяется разностной схемой (2.1) для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+2}^h(x) - 3u_{k+1}^h(x) + 3u_k^h(x) - u_{k-1}^h(x)}{\tau^3} + A_h^x \dfrac{u_{k+2}^h(x) - u_{k+1}^h(x)}{\tau} = f_k^h(x), \\ f_k^h(x) = f^h(t_k,x), \ t_k = k\tau, \quad 1 \leqslant k \leqslant N-2, \quad x \in \Omega_h, \quad N\tau = 1, \\ u_0^h(x) = \gamma u_m^h(x) + \varphi^h(x), \quad \dfrac{u_1^h(x) - u_0^h(x)}{\tau} = \alpha \dfrac{u_m^h(x) - u_{m-1}^h(x)}{\tau} + \psi^h(x), \\ (I_h + \tau^2 A_h^x)\dfrac{u_2^h(x) - 2u_1^h(x) + u_0^h(x)}{\tau^2} = \beta \dfrac{u_m^h(x) - 2u_{m-1}^h(x) + u_{m-2}^h(x)}{\tau^2} + \xi^h(x), \quad x \in \overline{\Omega}_h. \end{cases} \tag{3.6}$$

Теорема 3.2. *Предположим, что $\lambda \geqslant 2\tau$ и выполнено условие* (1.17). *Тогда для решения $\left\{u_k^h(x)\right\}_0^N$ задачи* (3.6) *выполняются оценки устойчивости*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|u_k^h\|_{L_{2h}} \leqslant M_1(\gamma)\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\|f_k^h\|_{L_{2h}} + \|\ \varphi^h\ \|_{L_{2h}} + \|\ \psi^h\ \|_{L_{2h}} + \|\ \xi^h\ \|_{L_{2h}}\right\},$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\left\|\frac{u_{k+2}^h - 3u_{k+1}^h + 3u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau^3}\right\|_{L_{2h}} + \max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\left\|\frac{u_{k+2}^h - u_{k+1}^h}{\tau}\right\|_{W_{2h}^2} \leqslant$$

$$\leqslant M_2\left\{\max_{2\leqslant k\leqslant N-2}\left\|\frac{1}{\tau}\left(f_k^h - f_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}} + \|\ f_1^h\ \|_{L_{2h}} + \|\ \psi^h\ \|_{W_{2h}^2} + \|\ \xi^h\ \|_{W_{2h}^1}\right\},$$

где $M_1(\gamma)$ и M_2 не зависят ни от $\varphi^h(x), \psi^h(x), \xi^h(x)$, ни от $f_k^h(x)$, $1 \leqslant k \leqslant N-2$.

Доказательство. В гильбертовом пространстве $L_{2h} = L_2(\overline{\Omega}_h)$ с самосопряженным положительно определенным оператором $A_h = A_h^x$ разностную схему (3.6) можно записать в абстрактной форме (2.1) посредством формулы (3.4), где $f_k^h = f_k^h(x)$ и $u_k^h = u_k^h(x)$ — известная и неизвестная абстрактные сеточные функции, определенные на $\overline{\Omega}_h$, со значениями в $H = L_{2h}$. Следовательно, оценки теоремы 3.2 вытекают из оценок (2.2)-(2.3) и следующей теоремы о неравенстве коэрцитивности для решений эллиптической разностной задачи в L_{2h}. □

Теорема 3.3. *Для решений эллиптической разностной задачи* (*см.* [8])

$$\begin{cases} A_h^x u^h(x) = \omega^h(x), \ x \in \Omega_h, \\ u^h(x) = 0, \ x \in S_h, \end{cases}$$

выполняется неравенство коэрцитивности

$$\sum_{r=1}^{n}\left\|{u^h}_{x_r x_{\overline{r}}}\right\|_{L_{2h}} \leqslant M_{17}||\omega^h||_{L_{2h}},$$

где M_{17} *не зависит ни от* h, *ни от* ω^h.

Наконец, рассмотрим нелокальную краевую задачу (1.13). Разобьем дискретизацию задачи (1.13) на два этапа. На первом этапе дифференциальному оператору A^x, определенному соотношениями (1.13), поставим в соответствие разностный оператор A_h^x, действующий по формуле

$$A_h^x u^h = -\sum_{r=1}^{n}\left(\alpha_r(x)u_{x_r}^h\right)_{x_r,j_r} + \delta u^h. \tag{3.7}$$

Это самосопряженный положительно определенный оператор в L_{2h}, действующий в пространстве сеточных функций $u^h(x)$, удовлетворяющих условию $D^h u^h(x) = 0$ для всех x из S_h, где D^h — приближение оператора $\dfrac{\partial}{\partial\overrightarrow{p}}$. При помощи разностного оператора A_h^x получаем следующую нелокальную краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d^3u^h(t,x)}{dt^3} + A_h^x\dfrac{du^h(t,x)}{dt} = f^h(t,x), \quad 0<t<1, \quad x\in\Omega_h, \\ u^h(0,x) = \gamma u^h(\lambda,x)+\varphi^h(x), \quad u_t^h(0,x) = \alpha u_t^h(\lambda,x)+\psi^h(x), \\ u_{tt}^h(0,x) = \beta u_{tt}^h(\lambda,x)+\xi^h(x), \quad x\in\overline{\Omega}_h. \end{cases} \tag{3.8}$$

На втором этапе задача (3.8) заменяется разностной схемой (2.1) для бесконечной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{k+2}^h(x)-3u_{k+1}^h(x)+3u_k^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{\tau^3} + A_h^x\dfrac{u_{k+2}^h(x)-u_{k+1}^h(x)}{\tau} = f_k^h(x), \\ f_k^h(x) = f^h(t_k,x), \quad t_k = k\tau, \quad 1\leqslant k\leqslant N-2, \quad x\in\Omega_h, N\tau=1, \\ u_0^h(x) = \gamma u_m^h(x)+\varphi^h(x), \quad \dfrac{u_1^h(x)-u_0^h(x)}{\tau} = \alpha\dfrac{u_m^h(x)-u_{m-1}^h(x)}{\tau}+\psi^h(x), \\ (I_h+\tau^2A_h^x)\dfrac{u_2^h(x)-2u_1^h(x)+u_0^h(x)}{\tau^2} = \beta\dfrac{u_m^h(x)-2u_{m-1}^h(x)+u_{m-2}^h(x)}{\tau^2}+\xi^h(x), \quad x\in\overline{\Omega}_h. \end{cases} \tag{3.9}$$

Теорема 3.4. *Предположим, что* $\lambda \geqslant 2\tau$ *и выполнено условие* (1.17). *Тогда для решения* $\left\{u_k^h(x)\right\}_0^N$ *задачи* (3.9) *выполняются оценки устойчивости*

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|u_k^h\|_{L_{2h}} \leqslant M_{18}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\|f_k^h\|_{L_{2h}} + \|\,\varphi^h\,\|_{L_{2h}} + \|\,\psi^h\,\|_{L_{2h}} + \|\,\xi^h\,\|_{L_{2h}}\right\},$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\left\|\frac{u_{k+2}^h-3u_{k+1}^h+3u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau^3}\right\|_{L_{2h}} + \max_{1\leqslant k\leqslant N-2}\|\frac{u_{k+2}^h-u_{k+1}^h}{\tau}\|_{W_{2h}^2} \leqslant$$

$$\leqslant M_{19}\left\{\max_{2\leqslant k\leqslant N-2}\left\|\frac{1}{\tau}\left(f_k^h-f_{k-1}^h\right)\right\|_{L_{2h}} + \|\,f_1^h\,\|_{L_{2h}} + \|\,\psi^h\,\|_{W_{2h}^2} + \|\,\xi^h\,\|_{W_{2h}^1}\right\},$$

где M_{18} *и* M_{19} *не зависят ни от* $\varphi^h(x),\psi^h(x),\xi^h(x)$, *ни от* $f_k^h(x)$, $1\leqslant k\leqslant N-2$.

Доказательство. В гильбертовом пространстве $L_{2h} = L_2(\overline{\Omega}_h)$ с самосопряженным положительно определенным оператором $A_h = A_h^x$ разностную схему (3.9) можно записать в абстрактной форме (2.1) посредством формулы (3.7), где $f_k^h = f_k^h(x)$ и $u_k^h = u_k^h(x)$ — известная и неизвестная абстрактные сеточные функции, определенные на $\overline{\Omega}_h$, со значениями в $H = L_{2h}$. Следовательно, оценки теоремы 3.4 вытекают из оценок (2.2)-(2.3) и следующей теоремы о неравенстве коэрцитивности для решений эллиптической разностной задачи в L_{2h}. □

Теорема 3.5. *Для решений эллиптической разностной задачи* (*см.* [8])

$$\begin{cases} A_h^x u^h(x) = \omega^h(x), \ x \in \Omega_h, \\ D^h u^h(x) = 0, \ x \in S_h, \end{cases}$$

справедливо неравенство коэрцитивности

$$\sum_{r=1}^{n} \left\| {u^h}_{x_r x_{\overline{r}}} \right\|_{L_{2h}} \leqslant M_{20} ||\omega^h||_{L_{2h}},$$

где M_{20} *не зависит ни от* h, *ни от* ω^h.

4. Численные результаты

В случаях, когда аналитические методы не работают надлежащим образом, в прикладной математике важную роль играют численные методы отыскания приближенных решений уравнений в частных производных. В этом разделе численным образом представлены разностные схемы первого порядка точности, предназначенные для решения одномерных и двумерных уравнений в частных производных третьего порядка. Для решения задачи применяется гауссов метод исключения. Теоретические утверждения относительно решений указанных разностных схем опираются на результаты вычислительных экспериментов.

4.1. Одномерный случай. В качестве численного эксперимента, начнем наше рассмотрение с нелокальной краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3} - \dfrac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t \partial x^2} = f(t,x), \\ f(t,x) = -2e^{-t}\cos x, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0,x) = \dfrac{1}{4} u(1,x) + \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right)\cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u_t(0,x) = \dfrac{1}{4} u_t(1,x) - \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right)\cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u_{tt}(0,x) = \dfrac{1}{4} u_{tt}(1,x) + \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right)\cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ u_{tx}(t,0) = u_{tx}(t,\pi) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{4.1}$$

для одномерного уравнения в частных производных третьего порядка. Точное решение задачи (4.1) есть $u\,(t,x) = e^{-t}\cos x$.

Получаем следующую разностную схему первого порядка точности, предназначенную для приближенного решения нелокальной краевой задачи (4.1):

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^{k+2} - 3u_n^{k+1} + 3u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau^3} - \dfrac{u_{n+1}^{k+2} - u_{n+1}^{k+1} - 2\left(u_n^{k+2} - u_n^{k+1}\right) + u_{n-1}^{k+2} - u_{n-1}^{k+1}}{\tau h^2} = f(t_k, x_n), \\ f(t_k, x_n) = -2e^{-t_k}\cos x_n, \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leqslant k \leqslant N-2, \quad 1 \leqslant n \leqslant M-1, \\ N\tau = 1, \quad x_n = nh, \quad 1 \leqslant n \leqslant M-1, \quad Mh = \pi, \\ u_n^0 = \dfrac{1}{4} u_n^N + \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right)\cos x_n, \quad 0 \leqslant n \leqslant M, \\ \dfrac{u_n^1 - u_n^0}{\tau} = \dfrac{1}{4}\dfrac{u_n^N - u_n^{N-1}}{\tau} - \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right)\cos x_n, \quad 0 \leqslant n \leqslant M, \\ \dfrac{u_n^2 - 2u_n^1 + u_n^0}{\tau^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{u_n^N - 2u_n^{N-1} + u_n^{N-2}}{\tau^2} + \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right)\cos x_n, \quad 0 \leqslant n \leqslant M, \\ u_1^k - u_0^k - u_1^{k-1} + u_0^{k-1} = 0, u_M^k - u_{M-1}^k - u_M^{k-1} + u_{M-1}^{k-1} = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant N. \end{cases} \tag{4.2}$$

Это — система алгебраических уравнений, которую можно записать в матричном виде

$$\begin{cases} A\,u_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = D\varphi_n, \quad 1 \leqslant n \leqslant M-1, \\ Pu_0 = Qu_1 + T, \quad Pu_M = Qu_{M-1} - T. \end{cases} \tag{4.3}$$

где

$$T=\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{4e} \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1} \qquad P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$A=C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -a & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ b & -3b & 3b-c & b-c & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -3b & 3b-c & c-b & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -3b & 3b-c & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 3b-c & c-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & -3b & 3b-c & c-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & b & -3b & 3b-c & c-b \\ -\frac{1}{\tau} & \frac{1}{\tau} & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4\tau} & -\frac{1}{4\tau} \\ \frac{1}{\tau^2} & -\frac{2}{\tau^2} & \frac{1}{\tau^2} & 0 & 0 & \cdot & 0 & -\frac{1}{4\tau^2} & \frac{1}{2\tau^2} & -\frac{1}{4\tau^2} \end{bmatrix}_{(N+1)\times(N+1)},$$

$$a=\frac{1}{\tau h^2},\ b=-\frac{1}{\tau^3},\quad c=\frac{2}{\tau h^2},$$

$$\varphi_n=\begin{bmatrix} \varphi_n^0 \\ \cdot \\ \varphi_n^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}, \quad \left\{\begin{array}{l} \varphi_n^0=\left(1-\frac{1}{4e}\right)\cos x_n, 0\leqslant n\leqslant M, \\ \varphi_n^k=f(t_k,x_n)=-2e^{-t_k}\cos x_n, \\ t_k=k\tau, 1\leqslant k\leqslant N-2,\ 1\leqslant n\leqslant M-1, \\ \varphi_n^{N-1}=-\left(1-\frac{1}{4e}\right)\cos x_n, 0\leqslant n\leqslant M, \\ \varphi_n^N=\left(1-\frac{1}{4e}\right)\cos x_n, 0\leqslant n\leqslant M \end{array}\right\}$$

$D=I_{N+1}$ — тождественная матрица,

$$u_s=\begin{bmatrix} u_s^0 \\ \cdot \\ u_s^N \end{bmatrix}_{(N+1)\times 1}, \quad s=n,n\pm 1.$$

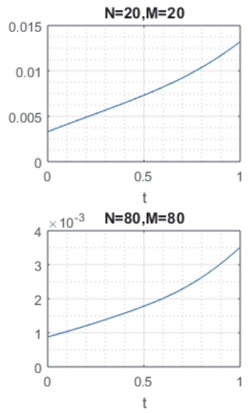

Рис. 4.1. Зависимость погрешности от t.

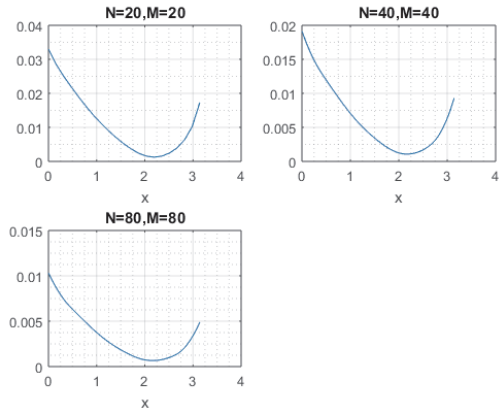

Рис. 4.2. Зависимость погрешности от x.

Поэтому, чтобы решить матричное уравнение (4.3), мы используем модифицированный метод исключения Гаусса. Решение матричного уравнения ищется в виде

$$u_n = \alpha_{n+1} u_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \dots, 1, 0, \tag{4.4}$$

где $u_M = (P - Q\alpha_M)^{-1} (Q\beta_M - T)$, α_j $(j = 2, \dots, M)$ — квадратные матрицы размерности $(N+1)\times(N+1)$, β_j $(j = 2, \dots, M)$ — матрицы-столбцы размерности $(N+1)\times 1$, $\alpha_1 = P^{-1}Q$, $\beta_1 = P^{-1}T$,

$$\alpha_{n+1} = -(B + C\alpha_n)^{-1} A, \tag{4.5}$$
$$\beta_{n+1} = (B + C\alpha_n)^{-1} (D\varphi_n - C\beta_n), n = 1, \dots, M-1.$$

Погрешность численного решения вычисляется по формуле

$$E_M^N = \max_{0 \leqslant k \leqslant N, 0 \leqslant n \leqslant M} \left| u(t_k, x_n) - u_n^k \right|, \tag{4.6}$$

где $u(t_k, x_n)$ — точное решение в точке (t_k, x_n), а u_n^k — численное решение в той же точке. Результаты этих вычислений приведены в следующей таблице:

Разностные схемы/N, M	$20, 20$	$40, 40$	$80, 80$
Разностная схема (4.2)	0,0609	0,0342	0,0181

(4.7)

Из численных результатов, приведенных в таблице (4.7), видно, что, если N и M удваиваются, то ошибка уменьшается примерно в два раза (в случае разностной схемы первого порядка).

На рис. 4.1 и 4.2 показаны графики точного и приближенного решений, а также график погрешности во всей области нахождения неизвестных функций. Как видно на рис. 4.2, погрешность уменьшается приблизительно в два раза вместе с уменьшением вдвое размера шагов по временной и пространственной координатам.

4.2. Двумерный случай. Теперь рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 u(t,x,y)}{\partial t^3} - \dfrac{\partial^3 u(t,x,y)}{\partial t \partial x^2} - \dfrac{\partial^3 u(t,x,y)}{\partial t \partial y^2} = f(t,x,y), \\ f(t,x,y) = -3e^{-t} \sin x \sin y, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0,x,y) = \dfrac{1}{4} u(1,x,y) + \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right) \sin x \sin y, \quad 0 \leqslant x, y \leqslant \pi, \\ u_t(0,x,y) = \dfrac{1}{4} u_t(1,x,y) - \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right) \sin x \sin y, \quad 0 \leqslant x, y \leqslant \pi, \\ u_{tt}(0,x,y) = \dfrac{1}{4} u_{tt}(1,x,y) + \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right) \sin x \sin y, \quad 0 \leqslant x, y \leqslant \pi, \\ u_t(t,0,y) = u_t(t,\pi,y) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \pi, \\ u_t(t,x,0) = u_t(t,x,\pi) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases} \tag{4.8}$$

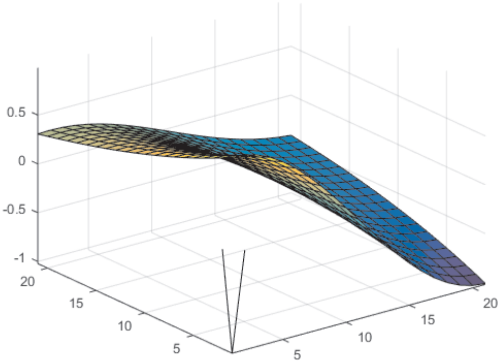

Рис. 4.3. Приближенное решение, $M = N = 20$.

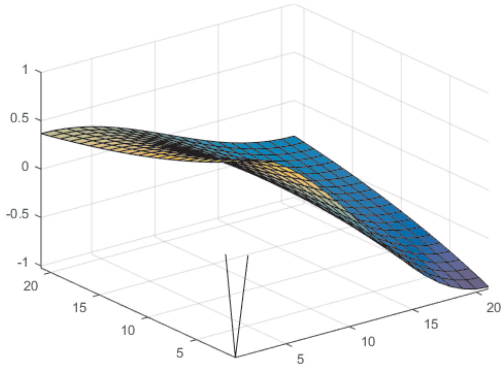

Рис. 4.4. Точное решение, $M = N = 20$.

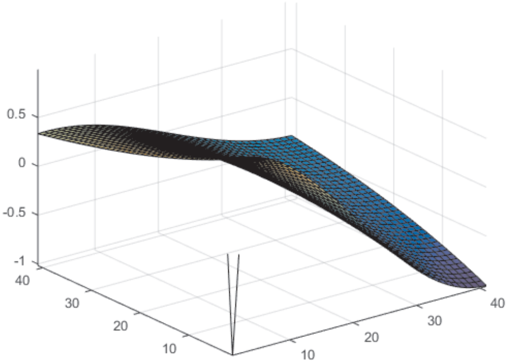

Рис. 4.5. Приближенное решение, $M = N = 40$.

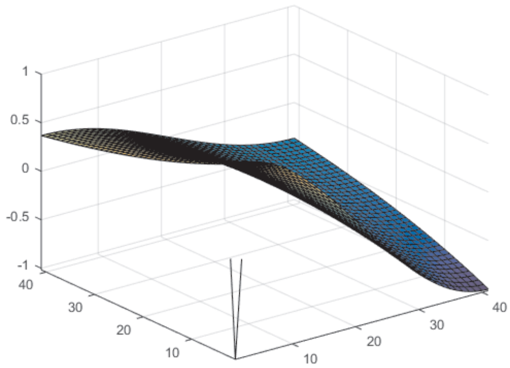

Рис. 4.6. Точное решение, $M = N = 40$.

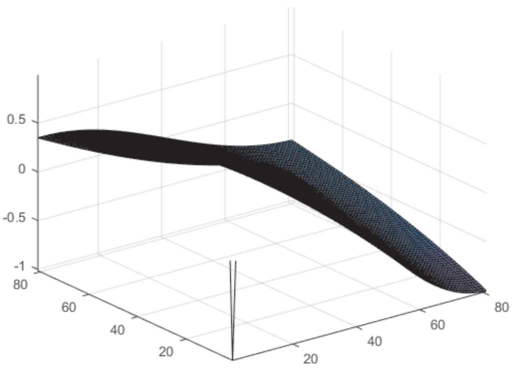

Рис. 4.7. Приближенное решение, $M = N = 80$.

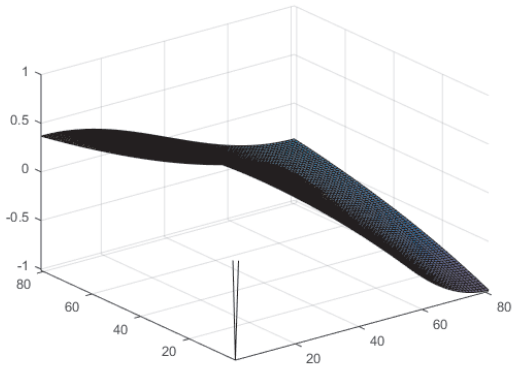

Рис. 4.8. Точное решение, $M = N = 80$.

для уравнения в частных производных третьего порядка. Точное решение задачи (4.8) есть $u\,(t,x) = e^{-t}\sin x \sin y$.

Учитывая, что $u_t(t,0,y) = u_t(t,\pi,y) = 0$, получим $u(t,0,y) = u(0,0,y) = u(1,0,y)$ и $u(t,\pi,y) = u(0,\pi,y) = u(1,\pi,y)$. Тогда из равенства $u(0,x,y) = \dfrac{1}{4}u(1,x,y) + \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right)\sin x \sin y$ при $0 \leqslant x$, $y \leqslant \pi$ следует $u(t,0,y) = u(t,\pi,y) = 0$. Аналогично получим равенства $u(t,x,0) = u(t,x,\pi) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ из условия $u_t(t,x,0) = u_t(t,x,\pi) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, а также из $u(0,x,y) = \dfrac{1}{4}u(1,x,y) + \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right)\sin x \sin y$, $0 \leqslant x, y \leqslant \pi$, следует, что $u(t,x,0) = u(t,x,\pi) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Тогда задачу (4.8) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^3 u(t,x,y)}{\partial t^3} - \dfrac{\partial^3 u(t,x,y)}{\partial t \partial x^2} - \dfrac{\partial^3 u(t,x,y)}{\partial t \partial y^2} = f(t,x,y), \\ f(t,x,y) = -3e^{-t} \sin x \sin y, \quad 0 < t < 1, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0,x,y) = \dfrac{1}{4} u(1,x,y) + \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right) \sin x \sin y, \quad 0 \leqslant x, y \leqslant \pi, \\ u_t(0,x,y) = \dfrac{1}{4} u_t(1,x,y) - \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right) \sin x \sin y, \quad 0 \leqslant x, y \leqslant \pi, \\ u_{tt}(0,x,y) = \dfrac{1}{4} u_{tt}(1,x,y) + \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right) \sin x \sin y, \quad 0 \leqslant x, y \leqslant \pi, \\ u(t,0,y) = u(t,\pi,y) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi, \\ u(t,x,0) = u(t,x,\pi) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases} \tag{4.9}$$

Получим следующую разностную схему первого порядка по t для приближенного решения нелокальной краевой задачи (4.9):

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n,m}^{k+2} - 3u_{n,m}^{k+1} + 3u_{n,m}^{k} - u_{n,m}^{k-1}}{\tau^3} - \dfrac{u_{n+1,m}^{k+2} - u_{n+1,m}^{k+1} - 2\left(u_{n,m}^{k+2} - u_{n,m}^{k+1}\right) + u_{n-1,m}^{k+2} - u_{n-1,m}^{k+1}}{\tau h^2} - \\ - \dfrac{u_{n,m+1}^{k+2} - u_{n,m+1}^{k+1} - 2\left(u_{n,m}^{k+2} - u_{n,m}^{k+1}\right) + u_{n,m-1}^{k+2} - u_{n,m-1}^{k+1}}{\tau h^2} = f(t_k, x_n, y_m), \\ f(t_k, x_n, y_m) = -3e^{-t_k} \sin x_n \sin y_m, \quad t_k = k\tau, \quad 1 \leqslant k \leqslant N-2, \quad 1 \leqslant n, m \leqslant M-1, \\ N\tau = 1, \quad x_n = nh, y_m = mh, \quad 1 \leqslant n, m \leqslant M-1, \quad Mh = \pi, \\ u_{n,m}^0 = \dfrac{1}{4}\ u_{n,m}^N + \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right) \sin x_n \sin y_m, \quad 0 \leqslant n, m \leqslant M, \\ \dfrac{u_{n,m}^1 - u_{n,m}^0}{\tau} = \dfrac{1}{4} \dfrac{u_{n,m}^N - u_{n,m}^{N-1}}{\tau} - \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right) \sin x_n \sin y_m, \quad 0 \leqslant n, m \leqslant M, \\ \dfrac{u_{n,m}^2 - 2u_{n,m}^1 + u_{n,m}^0}{\tau^2} = \dfrac{1}{4} \dfrac{u_{n,m}^N - 2u_{n,m}^{N-1} + u_{n,m}^{N-2}}{\tau^2} + \left(1 - \dfrac{1}{4e}\right) \sin x_n \sin y_m, \quad 0 \leqslant n, m \leqslant M, \\ u_{0,m}^k = u_{M,m}^k = 0, \quad u_{n,0}^k = u_{n,M}^k = 0, 1 \leqslant k \leqslant N, \quad 0 \leqslant n, m \leqslant M. \end{cases} \tag{4.10}$$

Это — система алгебраических уравнений, которую можно представить в матричном виде

$$\begin{cases} A\, u_{n+1} + Bu_n + Cu_{n-1} = R\varphi_n, \quad 1 \leqslant n \leqslant M-1, \\ u_0 = O, \ \ u_M = O, \end{cases} \tag{4.11}$$

где $u_s = \left[u_{s,0}^0, \cdots, u_{s,0}^N, u_{s,1}^0, \cdots, u_{s,1}^N, u_{s,M}^0, \cdots, u_{s,M}^N\right]^t_{(N+1)(M+1)\times 1}$, $s = n, n \pm 1$, A, B, C, I — квадратные матрицы размерности $(N+1)(M+1) \times (N+1)(M+1)$, I, R — тождественные матрицы,

$$a = \frac{1}{\tau h^2}, \quad b = -\frac{1}{\tau^3}, \quad c = \frac{2}{\tau h^2},$$

$$A = C = \begin{bmatrix} O & O & \cdot & O & O \\ O & E & \cdot & O & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O & \cdot & E & O \\ O & O & \cdot & O & O \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} Q & O & O & O & \cdot & O & O & O & O \\ E & D & E & O & \cdot & O & O & O & O \\ O & E & D & E & \cdot & O & O & O & O \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O & O & O & O & \cdot & O & E & D & E \\ O & O & O & O & \cdot & O & O & O & Q \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -a & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & a & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$
D = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\
b & -3b & 3b-2c & 2c-b & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b & -3b & 3b-2c & 2c-b & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & b & -3b & 3b-2c & 2c-b \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}
\end{bmatrix},
$$

$$
Q = I_{(N+1)\times(N+1)}, \quad O = O_{(N+1)\times(N+1)}, \quad \varphi^k_{m,n} = f(t_k, x_n, y_m),
$$

$$
f(t_k, x_n, y_m) = -3e^{-t_k}\sin(x_n)\sin(y_m), \quad k = \overline{1, N-2}, \quad n = \overline{1, M-1}, \quad m = \overline{1, M-1},
$$

$$
\varphi^0_{m,n} = (1 - \frac{1}{4e})\sin(x_n)\sin(y_m), \quad n = \overline{0, M}, \quad m = \overline{0, M},
$$

$$
\varphi^{N-1}_{m,n} = -(1 - \frac{1}{4e})\sin(x_n)\sin(y_m)\,\tau, \quad n = \overline{0, M}, \quad m = \overline{0, M},
$$

$$
\varphi^N_{m,n} = (1 - \frac{1}{4e})\sin(x_n)\sin(y_m)\,\tau^2, \quad n = \overline{0, M}, \quad m = \overline{0, M}.
$$

Следовательно, чтобы найти решение матричного уравнения (4.11), можно применить модифицированный метод исключения Гаусса. Решение матричного уравнения будем искать в виде

$$
u_n = \alpha_{n+1} u_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = M-1, \ldots, 1, \ u_M = O, \tag{4.12}
$$

где α_j $(j = 2, \ldots, M)$ — квадратные матрицы размерности $(N+1)(M+1) \times (N+1)(M+1)$, β_j $(j = 1, \ldots, M-1)$ — матрицы-столбцы размерности $(N+1)(M+1)\times 1$, α_1 и β_1 — нулевые матрицы,

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{n+1} = -\left(B + C\alpha_n\right)^{-1} A_n, \\
&\beta_{n+1} = \left(B + C\alpha_n\right)^{-1}\left(D\varphi_n - C\beta_n\right), n = 1, \ldots, M-1.
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

Погрешность численного решения вычисляется по формуле

$$
E^N_M = \max_{0\leqslant k\leqslant N, 1\leqslant n,m\leqslant M-1} \left| u(t_k, x_n, y_m) - u^k_{n,m} \right|, \tag{4.14}
$$

где $u(t_k, x_n, y_m)$ — точное решение в точке (t_k, x_n, y_m), а $u^k_{n,m}$ — численное решение в той же точке. Результаты этих вычислений приведены в следующей таблице:

Разностные схемы/N, M	$10, 10, 10$	$20, 20, 20$	$40, 40, 40$
Разностная схема (4.2)	0,0840	0,0446	0,0229

(4.15)

Из численных результатов, приведенных в таблице (4.15), видно, что, если N и M удваиваются, то ошибка уменьшается примерно в два раза (в случае разностной схемы первого порядка).

Здесь можно привести аналогичные графики точного и приближенного решений и погрешности на всей области определения искомых функций.

5. Выводы

Применяя предложенный подход, а также метод монографии [19], в гильбертовом пространстве H с самосопряженным оператором A можно исследовать следующую нелокальную краевую задачу для уравнения в частных производных третьего порядка:

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^3u(t)}{dt^3} + A\dfrac{du(t)}{dt} = f(t), \quad 0 < t < 1, \\
u(0) = \int\limits_0^\lambda \gamma(s)u(s)ds + \varphi, \quad u'(0) = \int\limits_0^\lambda \alpha(s)u'(s)ds + \psi, \\
u''(0) = \int\limits_0^\lambda \beta(s)u''(s)ds + \xi, \quad 0 < \lambda \leqslant 1.
\end{cases} \tag{5.1}
$$

Для получения приближенных решений задачи (5.1) можно применить устойчивую трехшаговую разностную схему. При определенных условиях на $\gamma(t)$, $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ справедлива теорема об устойчивости указанной разностной схемы. В качестве приложений получены оценки устойчивости решений разностных схем, применяемых для получения приближенных решений нелокальных краевых задач для уравнений в частных производных третьего порядка. Представлены численные результаты.

Благодарности. Авторы благодарят проф. Ч. Ашыралыева (университет Гумушэйн, Турция) и рецензента за полезные советы по улучшению настоящей статьи. Работа подготовлена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг. и была опубликована в рамках целевой программы BR05236656 Научного комитета Министерства образования и науки республики Казахстан.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амиров Ш., Кожанов А. И.* Смешанная задача для одного класса сильно нелинейных уравнений соболевского типа высокого порядка// Докл. РАН. — 2013. — *451*, № 5. — С. 492–494.
2. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
3. *Габов Г. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. — М.: Наука, 1986.
4. *Кожанов А. И.* Смешанная задача для некоторых классов нелинейных уравнений третьего порядка// Мат. сб. — 1982. — *118*, № 4. — С. 504–522.
5. *Кожанов А. И.* Смешанная задача для одного класса квазилинейных уравнений третьего порядка// В сб.: «Краевые задачи для нелинейных уравнений математической физики». — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982. — С. 118–128.
6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
7. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
8. *Соболевский П. Е.* Разностные методы приближенного решения дифференциальных уравнений. — Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1975.
9. *Apakov Y.* On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics// Ukr. Math. J. — 2012. — *64*, № 1. — С. 1–12.
10. *Apakov Y., Irgashev B.* Boundary-value problem for a generate high-odd order equation// Ukr. Math. J. — 2015. — *66*, № 10. — С. 1475–1490.
11. *Apakov Y., Rutkauskas S.* On a boundary value problem to third order PDE with multiple characteristics// Nonlinear Anal. Model. Control. — 2011. — *16*, № 3. — С. 255–269.
12. *Ashyralyev A.* Fractional spaces generated by the positivite differential and difference operator in a Banach space// В сб.: «Mathematical methods in engineering. Selected papers of the International Symposium, MME06, Ankara, Turkey, April 27–29, 2006». — Dordrecht: Springer, 2007. — С. 13–22.
13. *Ashyralyev C., Akyuz G., Dedeturk M.* Approximate solution for an inverse problem of multidimensional elliptic equation with multipoint nonlocal and Neumann boundary conditions// Electron. J. Differ. Equ. — 2017. — *2017*, № 197. — С. 1–16.
14. *Ashyralyev A., Arjmand D., Koksal M.* A note on the Taylor's decomposition on four points for a third-order differential equation// Appl. Math. Comput. — 2007. — *188*, № 2. — С. 1483–1490.
15. *Ashyralyev A., Arjmand D., Koksal M.* Taylor's decomposition on four points for solving third-order linear time-varying systems// J. Franklin Inst. — 2009. — *346*, № 7. — С. 651–662.
16. *Ashyralyev A., Belakroum Kh., Guezane-Lakoud A.* Stability of boundary-value problems for third order partial differential equations// Electron. J. Differ. Equ. — 2017. — *2017*, № 53. — С. 1–11.
17. *Ashyralyev A., Simsek S. N.* An operator method for a third-order partial differential equation// Numer. Funct. Anal. Optim. — 2017. — *38*, № 9. — С. 1–19.
18. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* A note on the difference schemes for hyperbolic equations// Abstr. Appl. Anal. — 2001. — *6*, № 2. — С. 63–70.
19. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* New difference schemes for partial differential equations. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2004.
20. *Belakroum Kh., Ashyralyev A., Guezane-Lakoud A.* A note on the nonlocal boundary value problem for a third order partial differential equation// AIP Conf. Proc. — 2016. — *1759*. — Article ID 020021.
21. *Denche M., Memou A.* Boundary value problem with integral conditions for a linear third-order equation// J. Appl. Math. — 2003. — *11*. — С. 533–567.

22. *Direk Z., Ashyraliyev M.* FDM for the integral-differential equation of the hyperbolic type// Adv. Difference Equ. — 2014. — *2014*, № 132. — С. 1–8.
23. *Fattorini H. O.* Second order linear differential equations in Banach spaces. — Amsterdam: Elsevier, 1985.
24. *Kalmenov T. S., Suragan B.* Initial-boundary value problems for the wave equation// Electron. J. Differ. Equ. — 2014. — *2014*, № 48. — С. 1–6.
25. *Kudu M., Amirali I.* Method of lines for third order partial differential equations// J. Appl. Math. Phys. — 2014. — *2*, № 2. — С. 33–36.
26. *Latrous C., Memou A.* A three-point boundary value problem with an integral condition for a third-order partial differential equation// Abstr. Appl. Anal. — 2005. — *2005*, № 1. — С. 33–43.
27. *Lunardi A.* Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1995.
28. *Niu J., Li P.* Numerical algorithm for the third-order partial differential equation with three-point boundary value problem// Abstr. Appl. Anal. — 2014. — *2014*. — Article ID 630671.
29. *Shakhmurov V., Musaev H.* Maximal regular convolution-differential equations in weighted Besov spaces// Appl. Comput. Math. — 2017. — *16*, № 2. — С. 190–200.
30. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional-differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

Allaberen Ashyralyev
Near East University, Nicosia, TRNC, Mersin 10, Turkey;
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6;
Институт математики и математического моделирования, 050010, Алматы, ул. Пушкина, д. 125
E-mail: allaberen.ashyralyev@neu.edu.tr, aallaberen@gmail.com

Kheireddine Belakroum
Fréres Mentouri University, Constantine, Algeria
E-mail: kheireddinebelakroum@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-1-19 UDC 517.9

A Stable Difference Scheme for a Third-Order Partial Differential Equation

© 2018 **A. Ashyralyev, Kh. Belakroum**

Abstract. The nonlocal boundary-value problem for a third order partial differential equation

$$\begin{cases} \dfrac{d^3u(t)}{dt^3} + A\dfrac{du(t)}{dt} = f(t), \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = \gamma u(\lambda) + \varphi, \quad u'(0) = \alpha u'(\lambda) + \psi, \quad |\gamma| < 1, \\ u''(0) = \beta u''(\lambda) + \xi, \quad |1 + \beta\alpha| > |\alpha + \beta|, \quad 0 < \lambda \leqslant 1 \end{cases}$$

in a Hilbert space H with a self-adjoint positive definite operator A is considered. A stable three-step difference scheme for the approximate solution of the problem is presented. The main theorem on stability of this difference scheme is established. In applications, the stability estimates for the solution of difference schemes of the approximate solution of three nonlocal boundary value problems for third order partial differential equations are obtained. Numerical results for one- and two-dimensional third order partial differential equations are provided.

REFERENCES

1. Sh. Amirov and A. I. Kozhanov, “Smeshannaya zadacha dlya odnogo klassa sil’no nelineynykh uravneniy sobolevskogo tipa vysokogo poryadka” [Mixed problem for one class of higher-order strongly nonlinear equations of Sobolev type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2013, **451**, No. 5, 492–494 (in Russian).
2. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral’nyy analiz funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).

3. G. A. Gabov and A. G. Sveshnikov, *Zadachi dinamiki stratifitsirovannykh zhidkostey* [Problems of Dynamics of Stratified Fluids], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. A. I. Kozhanov, "Smeshannaya zadacha dlya nekotorykh klassov nelineynykh uravneniy tret'ego poryadka" [Mixed problem for some classes of third-order nonlinear equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **118**, No. 4, 504–522 (in Russian).
5. A. I. Kozhanov, "Smeshannaya zadacha dlya odnogo klassa kvazilineynykh uravneniy tret'ego poryadka" [Mixed problem for one class of third-order quasilinear equations], In: *Kraevye zadachi dlya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems for Nonlinear Equations of Mathematical Physics], Inst. Math. Sib. Branch Acad. Sci. USSR, Novosibirsk, 1982, 118–128 (in Russian).
6. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
7. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
8. P. E. Sobolevskii, *Raznostnye metody priblizhennogo resheniya differentsial'nykh uravneniy* [Difference Methods for Approximate Solutions of Differential Equations], Voronezh State Univ., Voronezh, 1975 (in Russian).
9. Y. Apakov, "On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics," *Ukr. Math. J.*, 2012, **64**, No. 1, 1–12.
10. Y. Apakov and B. Irgashev, "Boundary-value problem for a generate high-odd order equation," *Ukr. Math. J.*, 2015, **66**, No. 10, 1475–1490.
11. Y. Apakov and S. Rutkauskas, "On a boundary value problem to third order PDE with multiple characteristics," *Nonlinear Anal. Model. Control*, 2011, **16**, No. 3, 255–269.
12. A. Ashyralyev, "Fractional spaces generated by the positivite differential and difference operator in a Banach space" [Fractional spaces generated by the positivite differential and difference operator in a Banach space], In: *Mathematical methods in engineering. Selected papers of the International Symposium, MME06, Ankara, Turkey, April* 27–29*,* 2006 [Mathematical methods in engineering. Selected papers of the International Symposium, MME06, Ankara, Turkey, April 27–29, 2006], Springer, Dordrecht, 2007, 13–22.
13. C. Ashyralyev, G. Akyuz, and M. Dedeturk, "Approximate solution for an inverse problem of multidimensional elliptic equation with multipoint nonlocal and Neumann boundary conditions," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2017, **2017**, No. 197, 1–16.
14. A. Ashyralyev, D. Arjmand, and M. Koksal, "A note on the Taylor's decomposition on four points for a third-order differential equation," *Appl. Math. Comput.*, 2007, **188**, No. 2, 1483–1490.
15. A. Ashyralyev, D. Arjmand, and M. Koksal, "Taylor's decomposition on four points for solving third-order linear time-varying systems," *J. Franklin Inst.*, 2009, **346**, No. 7, 651–662.
16. A. Ashyralyev, Kh. Belakroum, and A. Guezane-Lakoud, "Stability of boundary-value problems for third order partial differential equations," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2017, **2017**, No. 53, 1–11.
17. A. Ashyralyev, S. N. Simsek, "An operator method for a third-order partial differential equation," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2017, **38**, No. 9, 1–19.
18. A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii, "A note on the difference schemes for hyperbolic equations," *Abstr. Appl. Anal.*, 2001, **6**, No. 2, 63–70.
19. A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2004.
20. Kh. Belakroum, A. Ashyralyev, and A. Guezane-Lakoud, "A note on the nonlocal boundary value problem for a third order partial differential equation," *AIP Conf. Proc.*, 2016, **1759**, Article ID 020021.
21. M. Denche and A. Memou, "Boundary value problem with integral conditions for a linear third-order equation," *J. Appl. Math.*, 2003, **11**, 533–567.
22. Z. Direk and M. Ashyraliyev, "FDM for the integral-differential equation of the hyperbolic type," *Adv. Difference Equ.*, 2014, **2014**, No. 132, 1–8.
23. H. O. Fattorini, *Second-Order Linear Differential Equations in Banach Spaces*, Elsevier, Amsterdam, 1985.
24. T. S. Kalmenov and B. Suragan, "Initial-boundary value problems for the wave equation," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2014, **2014**, No. 48, 1–6.
25. M. Kudu and I. Amirali, "Method of lines for third order partial differential equations," *J. Appl. Math. Phys.*, 2014, **2**, No. 2, 33–36.
26. C. Latrous and A. Memou, "A three-point boundary value problem with an integral condition for a third-order partial differential equation," *Abstr. Appl. Anal.*, 2005, **2005**, No. 1, 33–43.

27. A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1995.
28. J. Niu, P. Li, "Numerical algorithm for the third-order partial differential equation with three-point boundary value problem," *Abstr. Appl. Anal.*, 2014, **2014**, Article ID 630671.
29. V. Shakhmurov and H. Musaev, "Maximal regular convolution-differential equations in weighted Besov spaces," *Appl. Comput. Math.*, 2017, **16**, No. 2, 190–200.
30. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

Allaberen Ashyralyev
Near East University, Nicosia, Turkey;
RUDN University, Moscow, Russia;
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: allaberen.ashyralyev@neu.edu.tr, aallaberen@gmail.com

Kheireddine Belakroum
Fréres Mentouri University, Constantine, Algeria
E-mail: kheireddinebelakroum@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 20–36

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-20-36 УДК 517.956.4

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ И ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

© 2018 г. **Е. А. БАДЕРКО, М. Ф. ЧЕРЕПОВА**

Аннотация. Рассмотрена смешанная задача для одномерной (по пространственной переменной) параболической системы второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами в области с негладкими боковыми границами. Методом граничных интегральных уравнений построено классическое решение этой задачи. Исследована гладкость решения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Теория решения краевых задач в областях с негладкими боковыми границами для параболических уравнений в пространствах Гельдера построена в работах [3–9, 19, 21, 28, 29, 31–33, 35]. Для параболических систем второго порядка с одной пространственной переменной x краевые задачи в криволинейных областях с негладкими боковыми границами в пространствах Гельдера рассматривались в работах [10–12, 14, 23, 25]. Естественно возникает вопрос о разрешимости параболических краевых задач, данные которых принадлежат топологически более слабым пространствам Дини—Гельдера. В работах [2, 20] установлена разрешимость (в классическом смысле) и исследована гладкость решения ряда краевых задач для одномерного (по x) параболического уравнения второго порядка с коэффициентами из класса Дини в криволинейных областях с негладкими границами, удовлетворяющими условию Дини—Гельдера. В [17] решена вторая краевая задача в классе Дини для одномерной (по x) параболической системы второго порядка в полуограниченной области с негладкой боковой границей. В [13] получена классическая разрешимость задачи Дирихле для одномерной (по x) параболической системы с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области с негладкой границей из класса Дини—Гельдера.

В настоящей работе рассматривается смешанная начально-краевая задача для одномерной (по x) параболической системы второго порядка с Дини-непрерывными коэффициентами. На одной границе области задано граничное условие первого рода, а на другой — граничное условие второго рода. Методом граничных интегральных уравнений, разработанным в [10, 12] для параболических систем второго порядка с одной пространственной переменной, строится классическое решение поставленной задачи для таких систем в криволинейной области Ω с негладкими боковыми границами из класса Дини—Гельдера. При этом от правой части граничного условия первого рода требуется лишь, чтобы у нее существовала непрерывная производная порядка 1/2, а от правой части граничного условия второго рода требуется только непрерывность. Доказывается, что найденное решение принадлежит пространству $\underset{0}{C}^{1,1/2}[0,T]$ функций, непрерывных вместе с производной по пространственной переменной и дробной производной порядка 1/2 по «временной» переменной t в

Работа второго автора выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00306).

замыкании области (определение пространства см. ниже в разделе 2). В силу ослабления условия на граничные функции предлагаемый результат является новым и в случае одного уравнения.

В работе получены также оценки для старших производных решения, характеризующие возможный рост к бесконечности этих производных вблизи боковых границ области.

Статья состоит из 5 разделов. В разделе 1 ставится краевая задача и приводятся необходимые сведения о фундаментальной матрице решений параболической системы. В разделе 2 определяются функциональные пространства и формулируется основная теорема существования решения и его гладкости. В разделе 3 устанавливается разрешимость системы граничных интегральных уравнений, к которой редуцируется исходная задача. В разделе 4 доказывается основная теорема. В разделе 5 доказываются оценки для старших производных решения.

1. Краевая задача; фундаментальная матрица решений

В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)\}$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $0 < T < +\infty$, рассматривается равномерно параболический по Петровскому (см. [22]) матричный оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{k=0}^{2} A^{(k)}(x,t)\partial_x^k u, \quad u = (u_1, \ldots, u_m),\ m \geqslant 1,$$

где $A^{(k)} = \left\| a_{ij}^{(k)} \right\|_{i,j=1}^{m}$ — матрицы размерности $m \times m$, элементы которых суть вещественные функции, определенные в $\overline{D}$ и удовлетворяющие условиям:

a) собственные числа μ_r матрицы $A^{(2)}$ подчиняются неравенству $\operatorname{Re}\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \overline{D}, r = \overline{1,m}$;

b) функции $a_{ij}^{(k)}$, $i,j = \overline{1,m}$, $k = 0,1,2$, ограничены в $\overline{D}$;

c) $\left| a_{ij}^{(k)}(x + \Delta x, t + \Delta t) - a_{ij}^{(k)}(x,t) \right| \leqslant \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2})$, $i,j = \overline{1,m}$, $k = 0,1,2$,

где ω_0 — модуль непрерывности такой, что $\widetilde{\widetilde{\omega}}_0 = \int\limits_0^z y^{-1} dy \int\limits_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1} d\xi < +\infty$, $z > 0$, и для некоторого $\varepsilon_0 \in (0,1)$ функция $\omega_0(z) z^{-\varepsilon_0}$, $z > 0$, почти убывает.

Функция $\nu(z)$ называется *почти убывающей*, если для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство $\nu(z_1) \leqslant C\nu(z_2)$ при $z_1 \geqslant z_2$. Следуя [15, с. 150-151], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную на $[0,+\infty)$ функцию ω такую, что $\omega(0) = 0$. Говорим, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если

$$\widetilde{\omega}(z) = \int\limits_0^z \omega(\xi)\xi^{-1} d\xi < +\infty, \quad z > 0. \tag{1.1}$$

Отметим некоторые известные свойства модуля непрерывности ω, которые понадобятся нам в дальнейшем. Имеет место оценка (см. [15, с. 152]) $\omega(\lambda z) \leqslant (\lambda + 1)\omega(z),\ \lambda \geqslant 0,\ z \geqslant 0$. Функция $\omega(z)/z,\ z > 0$, почти убывает, а именно, $\dfrac{\omega(z_1)}{z_1} \leqslant 2\dfrac{\omega(z_2)}{z_2},\ z_1 \geqslant z_2 > 0$. Отсюда, в частности, следует, что если $0 < z \leqslant z_0$, то $z \leqslant C(z_0)\omega(z)$, где $C(z_0) = 2z_0/\omega(z_0)$.

Далее, если модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Дини (1.1), то $\widetilde{\omega}$ — также модуль непрерывности, причем $\omega(z) \leqslant 2\widetilde{\omega}(z),\ z \geqslant 0$.

Если ω — модуль непрерывности, то функция $\omega^*(z) = \omega\left(z^{1/2}\right)$ также является модулем непрерывности. При этом, если ω удовлетворяет условию Дини, то ω^* также удовлетворяет условию Дини и имеет место равенство $\widetilde{\omega^*}(z) = 2\widetilde{\omega}(z^{1/2}),\ z \geqslant 0$.

Наконец, справедлива оценка (см. [18]) $\omega(|x|)\exp\{-|x|^2/t\} \leqslant C\omega(t^{1/2})\exp\{-c|x|^2/t\}$ для некоторых $C, c > 0$ и всех $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$.

В полосе D рассматриваем область $\Omega = \{(x,t) \in D : g_1(t) < x < g_2(t)\}$ с негладкими боковыми границами $\Sigma_k = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g_k(t)\}, k = 1,2$. Предполагаем, что функции $g_k, k = 1,2$, удовлетворяют условиям:

$$g_1(t) < g_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

$$|g_k(t+\Delta t) - g_k(t)| \leqslant C|\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2}), \quad t, t+\Delta t \in [0,T], \quad k=1,2, \tag{1.3}$$

где ω_1 — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (1.1), и для некоторого $\varepsilon_1 \in (0,1)$ функция $\omega_1(z)z^{-\varepsilon_1}, z > 0$, почти убывает.

В области Ω ставится задача отыскания классического решения системы

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1.4}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = 0, \quad g_1(0) \leqslant x \leqslant g_2(0), \tag{1.5}$$

и граничным условиям

$$u(g_1(t),t) = \psi_1(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.6}$$

$$\partial_x u(g_2(t),t) = \psi_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.7}$$

Известно (см. [16]) что при условиях a)–c) существует фундаментальная матрица решений системы $Lu = 0$, причем она имеет вид

$$\Gamma(x,t,\xi,\tau) = Z\left(x-\xi, t-\tau; A^{(2)}(\xi,\tau)\right) + W(x,t;\xi,\tau), \quad (x,t;\xi,\tau) \in \overline{D}\times\overline{D}, \quad t > \tau, \tag{1.8}$$

где $Z\left(x-\xi,t-\tau;A^{(2)}(\xi,\tau)\right)$ — фундаментальная матрица решений системы $\partial_t u - A^{(2)}(\xi,\tau)\partial_x^2 u = 0$ с «замороженными» в точке (ξ,τ) коэффициентами,

$$W(x,t;\xi,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Z\left(x-y, t-\eta; A^{(2)}(y,\eta)\right)\mu(y,\eta;\xi,\tau)dy. \tag{1.9}$$

Вектор-плотность μ в (1.9) находится из условия, чтобы столбцы матрицы $\Gamma(x,t,\xi,\tau)$ удовлетворяли по переменным (x,t) системе $Lu = 0$ в слое $\{\tau < t < T\}$. Матрица Z из (1.8) имеет вид (см. [27, с. 297], [1, с. 133])

$$Z\left(x,t;A^{(2)}(\xi,\tau)\right) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x}\exp\left\{-\sigma^2 A^{(2)}(\xi,\tau)t\right\}d\sigma, \quad t > 0. \tag{1.10}$$

Имеют место оценки (см. [16], [27, с. 298], [34, с. 67]):

$$|\partial_t^k\partial_x^l\Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\left\{-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\}, \tag{1.11}$$

$$|\partial_t^k\partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\left\{-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\}, \tag{1.12}$$

$$2k+l \leqslant 2, \quad x,\xi \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T;$$

$$|\partial_t^k\partial_x^l Z(x,t;A^{(2)}(\xi,\tau))| \leqslant C(k,l)t^{-(2k+l+1)/2}\exp\left\{-c\frac{x^2}{t}\right\}, \tag{1.13}$$

$$|\Delta_{\xi,\tau}\partial_t^k\partial_x^l Z(x,t;A^{(2)}(\xi,\tau))| \leqslant C(k,l)\omega_0(|\Delta\xi| + |\Delta\tau|^{1/2})t^{-(2k+l+1)/2}\exp\left\{-c\frac{x^2}{t}\right\}, \tag{1.14}$$

$$k,l \geqslant 0, \quad x,\xi,\xi+\Delta\xi \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \tau < \tau+\Delta\tau \leqslant T, \quad 0 < t \leqslant T;$$

$$|\Delta_t\partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\Delta t)^{1-l/2}\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-3/2}\exp\left\{-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\right\}, \tag{1.15}$$

$$l = 0,1, \quad x,\xi \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \tau < t < t+\Delta t \leqslant T, \quad \Delta t \leqslant t-\tau.$$

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от δ, T, кривых Σ_1, Σ_2 и коэффициентов оператора L.

Решение задачи (1.4)–(1.7) будем искать в виде суммы векторных параболических потенциалов простого слоя

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{2} U_k\varphi_k(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{2} \int_0^t \Gamma(x,t;g_k(\tau),\tau)\varphi_k(\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{1.16}$$

где Γ — матрица (1.8), непрерывные на $[0,T]$ вектор-функции $\varphi_k = (\varphi_{k1},\ldots,\varphi_{km}), k = 1,2$, подлежат определению. Вектор-функция (1.16) является классическим решением уравнения (1.4) в $D\backslash(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ и удовлетворяет начальному условию (1.5). Подставляя (1.16) в граничные условия (1.6), (1.7) и используя теорему о скачке пространственной производной потенциала простого слоя (см. [16, 24]), получаем систему граничных интегральных уравнений Вольтерры

$$\sum_{k=1}^{2} \int_0^t \Gamma(g_1(t),t;g_k(\tau),\tau)\varphi_k(\tau)d\tau = \psi_1(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{2}\left(A^{(2)}\right)^{-1}(g_2(t),t)\varphi_2(t) + \sum_{k=1}^{2} \int_0^t \partial_x\Gamma(g_2(t),t;g_k(\tau),\tau)\varphi_k(\tau)d\tau = \psi_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{1.18}$$

для отыскания неизвестных плотностей φ_1, φ_2.

2. Формулировка основного результата

Будем использовать следующие функциональные пространства: $C[0,T]$ — пространство непрерывных вектор-функций $\psi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ с нормой $||\psi;[0,T]||^0 = \max\limits_{[0,T]}|\psi|$ и $\underset{0}{C}[0,T] = \{\psi \in C[0,T] : \psi(0) = 0\}$. Здесь и далее для любого вектора b (или матрицы A) под $|b|$ (соответственно, $|A|$) понимаем максимум из модулей компонент b (элементов A).

Пусть

$$\partial^{1/2}\psi(t) \equiv (\partial_t^{1/2}\psi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}\psi(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T],$$

— оператор дробного дифференцирования порядка 1/2. Через $C^{1/2}[0,T]$ обозначим (см. [10, 12]) пространство вектор-функций $\psi \in C[0,T]$, для которых существует $\partial^{1/2}\psi \in C[0,T]$; при этом, $||\psi;[0,T]||^{1/2} = \max\limits_{[0,T]}|\psi| + \max\limits_{[0,T]}|\partial^{1/2}\psi|$. Через $\underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi \in C^{1/2}[0,T]$, для которых $\psi(0) = 0$ и $\partial^{1/2}\psi(0) = 0$.

Пусть ω — модуль непрерывности. Через $\underset{0}{H}{}^{1/2+\omega}[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$, для которых

$$|\psi;[0,T]|^{1/2+\omega} = ||\psi;[0,T]||^0 + \sup_{(0,T)}\left\{\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{|\Delta t|^{1/2}\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\} < \infty.$$

Замечание 2.1. Если $\psi \in \underset{0}{H}{}^{1/2+\omega}[0,T]$, где ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини (1.1), то $\psi \in \underset{0}{C}{}^{1/2}[0,T]$ (см. [2, 18]). Обратное, вообще говоря, неверно (см. [12]).

Пусть модуль непрерывности ω удовлетворяет условию:

$$\textit{для некоторого } \varepsilon \in (0,1) \textit{ функция } \omega(z)z^{-\varepsilon},\ z > 0, \textit{ почти убывает.} \tag{2.1}$$

Через $H^\omega[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi \in C[0,T]$, для которых

$$|\psi;[0,T]|^\omega = ||\psi;[0,T]||^0 + \sup_{(0,T)}\left\{\frac{\psi(t+\Delta t)-\psi(t)}{\omega(|\Delta t|^{1/2})}\right\} < \infty,$$

и $\underset{0}{H}{}^\omega[0,T] = \{\psi \in H^\omega[0,T] : \psi(0) = 0\}$.

Замечание 2.2. Для любой непрерывной на $[0,T]$ (вектор-)функции ψ существует модуль непрерывности ω, удовлетворяющий условию (2.1) и такой, что $|\psi;[0,T]|^{\omega} < \infty$. Другими словами, пространства $H^{\omega}[0,T]$ и $C[0,T]$ отличаются только нормами.

Действительно, если $\psi \equiv \mathrm{const}$ на $[0,T]$, утверждение очевидно. Пусть $\psi \not\equiv \mathrm{const}$ на $[0,T]$ и ω_{ψ} — модуль непрерывности (вектор-)функции ψ, т. е. $\omega_{\psi}(z) = \sup\limits_{t,t+\Delta t\in[0,T],|\Delta t|\leqslant z} |\psi(t+\Delta t) - \psi(t)|$, $z \in [0,T]$. Тогда (см. [15, с. 150]) $\omega_{\psi}(0) = 0$ и ω_{ψ} непрерывна, не убывает и полуаддитивна на $[0,T]$. Кроме того, $\dfrac{\omega_{\psi}(z_1)}{z_1} \leqslant 2\dfrac{\omega_{\psi}(z_2)}{z_2}, z_1 \geqslant z_2 > 0$.

Пусть $\alpha \in (0,1)$. Полагаем $\omega(z) = \omega_{\psi}^{\alpha}(z)$, если $0 \leqslant z \leqslant T$, и $\omega(z) = \omega_{\psi}^{\alpha}(T)$, если $T < z < +\infty$. Очевидно, что ω непрерывна и не убывает на $[0,T]$ и $\omega(0) = 0$. Покажем, что ω полуаддитивна.

Сначала заметим, что для любых $p, q > 0$ и $0 < \alpha < 1$ выполнено неравенство

$$(p+q)^{\alpha} \leqslant p^{\alpha} + q^{\alpha}. \tag{2.2}$$

Действительно, для любых $p_1, q_1 \geqslant 0$ и $r > 1$ имеем $(p_1+q_1)^r = (p_1+q_1)^{r-1}p_1 + (p_1+q_1)^{r-1}q_1 \geqslant p_1^r + q_1^r$. Следовательно, полагая $p_1 = p^{\alpha}, q_1 = q^{\alpha}, r = 1/\alpha$, при $\alpha \in (0,1)$ получим $(p^{\alpha}+q^{\alpha})^{1/\alpha} \geqslant p+q$, откуда и вытекает неравенство (2.2).

Используя (2.2), находим

$$\omega(z_1+z_2) \equiv [\omega_{\psi}(z_1+z_2)]^{\alpha} \leqslant [\omega_{\psi}(z_1)+\omega_{\psi}(z_2)]^{\alpha} \leqslant \omega_{\psi}^{\alpha}(z_1) + \omega_{\psi}^{\alpha}(z_2) \equiv \omega(z_1) + \omega(z_2),$$

т. е. ω полуаддитивна.

Далее, пусть $\alpha < \varepsilon < 1$. Тогда для $z_1 \geqslant z_2 > 0$ имеем:

$$\frac{\omega(z_1)}{z_1^{\varepsilon}} = \frac{1}{\omega_{\psi}^{\varepsilon-\alpha}(z_1)} \cdot \left[\frac{\omega_{\psi}(z_1)}{z_1}\right]^{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\omega_{\psi}^{\varepsilon-\alpha}(z_2)} \cdot \left[2\frac{\omega_{\psi}(z_2)}{z_2}\right]^{\varepsilon} = 2^{\varepsilon}\frac{\omega_{\psi}^{\alpha}(z_2)}{z_2^{\varepsilon}} \equiv C(\varepsilon)\frac{\omega(z_2)}{z_2^{\varepsilon}}.$$

Следовательно, ω удовлетворяет условию (2.1).

Наконец, так как $|\Delta t| \leqslant c|\Delta t|^{1/2}$, где $c = \max(1, T^{1/2})$, то

$$\begin{aligned}|\psi(t+\Delta t) - \psi(t)| &\leqslant \omega_{\psi}(|\Delta t|) \leqslant \omega_{\psi}(c|\Delta t|^{1/2}) \leqslant C\omega_{\psi}(|\Delta t|^{1/2}) = \\ &= C\omega_{\psi}^{\alpha}(|\Delta t|^{1/2})\omega_{\psi}^{1-\alpha}(|\Delta t|^{1/2}) \leqslant C_1\omega_{\psi}^{\alpha}(|\Delta t|^{1/2}) \equiv C_1\omega(|\Delta t|^{1/2}),\end{aligned}$$

где $C_1 = C\omega_{\psi}^{1-\alpha}\left(T^{1/2}\right)$. Следовательно, $|\psi;[0,T]|^{\omega} < +\infty$.

Не ограничивая общности, далее везде предполагаем, что ω удовлетворяет условию (2.1).

Через $C^{1/2,\omega}[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi \in C^{1/2}[0,T]$, для которых $\partial^{1/2}\psi \in H^{\omega}[0,T]$; при этом $||\psi;[0,T]||^{1/2,\omega} = ||\psi;[0,T]||^0 + |\partial^{1/2}\psi;[0,T]|^{\omega}$. Через $\underset{0}{C}^{1/2,\omega}[0,T]$ обозначим пространство вектор-функций $\psi \in C^{1/2,\omega}[0,T]$, для которых $\psi(0) = 0$ и $\partial^{1/2}\psi(0) = 0$.

Замечание 2.3. Если $\psi \in C^{1/2}[0,T]$, то $\psi \in C^{1/2,\omega}[0,T]$ для некоторого модуля непрерывности ω, удовлетворяющего условию (2.1) (см. замечание 2.2).

Через $\underset{0}{C}(\overline{\Omega})$ обозначим пространство вектор-функций $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$, непрерывных в $\overline{\Omega}$, для которых $u(x,0) = 0$. Через $\underset{0}{C}^{1,1/2}(\overline{\Omega})$ обозначим (см. [10, 12]) пространство вектор-функций $u \in \underset{0}{C}(\overline{\Omega})$, для которых существуют $\partial_x u, \partial_t^{1/2}u \in \underset{0}{C}(\overline{\Omega})$; при этом $||u;\Omega||^{1,1/2} = \sum\limits_{l\leqslant 1}\sup\limits_{\Omega}|\partial_x^l u| + \sup\limits_{\Omega}|\partial_t^{1/2}u|$. Под значениями (вектор-)функций и их производных на границе области Ω понимаем их предельные значения «изнутри» Ω.

Теорема 2.1. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям a)–c), а функции $g_k, k = 1,2$, задающие кривые, удовлетворяют Σ_k-условиям* (1.2), (1.3). *Тогда для любых вектор-функций $\psi_1 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ и $\psi_2 \in \underset{0}{C}[0,T]$ справедливы следующие утверждения*:

1) *классическим решением задачи* (1.4)–(1.7) *является сумма потенциалов простого слоя* (1.16)*, где $\{\varphi_k \in \underset{0}{C}[0,T], k = 1,2\}$ — единственное решение системы интегральных уравнений* (1.17)*,* (1.18);

2) *это решение принадлежит пространству* $\underset{0}{C}^{1,1/2}(\overline{\Omega})$ *и выполнена оценка*

$$||u;\Omega||^{1,1/2} \leqslant C\left(||\psi_1;[0,T]||^{1/2} + ||\psi_2;[0,T]||^0\right). \tag{2.3}$$

Замечание 2.4. Утверждение теоремы 2.1 является новым и в случае одного уравнения ($m=1$).

Замечание 2.5. Краевая задача для системы с ненулевой правой частью и ненулевым начальным условием сводится к задаче (1.4)–(1.7) с помощью плоского параболического потенциала и потенциала Пуассона (см. [34, с. 59, 104]).

3. Система граничных интегральных уравнений

В этом разделе исследуется система граничных интегральных уравнений Вольтерры (1.17), (1.18). Обозначим $\bar{A}_k(\tau) = A^{(2)}(g_k(\tau),\tau), k=1,2$. Используя представление (1.8)) для матрицы Γ, положим $\Gamma(g_1(t),t;\ g_1(\tau),\tau) = Z\left(0,t-\tau;\bar{A}_1(\tau)\right) + N_{11}(t,\tau)$, где $N_{11}(t,\tau) = [Z(g_1(t)-g_1(\tau),t-\tau;\bar{A}_1(\tau)) - Z(0,t-\tau;\bar{A}_1(\tau))] + W(g_1(t),t;g_1(\tau),\tau)$.

Обозначим $N_{12}(t,\tau) = \Gamma(g_1(t),t;g_2(\tau),\tau)$, $N_{2k}(t,\tau) = \partial_x\Gamma(g_2(t),t;g_k(\tau),\tau)$, $k=1,2$. Тогда систему (1.17), (1.18) можно записать в виде

$$\int\limits_0^t Z\left(0,t-\tau;\bar{A}_1(\tau)\right)\varphi_1(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^2\int\limits_0^t N_{1k}(t,\tau)\varphi_k(\tau)d\tau = \psi_1(t), \quad t\in[0,T], \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2}\bar{A}_2^{-1}(t)\varphi_2(t) + \sum_{k=1}^2\int\limits_0^t N_{2k}(t,\tau)\varphi_k(\tau)d\tau = \psi_2(t), \quad t\in[0,T]. \tag{3.2}$$

Пусть

$$M(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-y^2\bar{A}_1(\tau)\}dy \tag{3.3}$$

и $I^{1/2}\varphi(t) \equiv (I^{1/2}\varphi)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\varphi(\tau)d\tau$ — оператор дробного интегрирования порядка 1/2. Так как (см. (1.10))

$$Z\left(0,t-\tau;\bar{A}_1(\tau)\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}M(\tau), \tag{3.4}$$

уравнение (3.1) примет вид $\frac{1}{2}I^{1/2}(M\varphi_1)(t) + \sum\limits_{k=1}^2\int\limits_0^t N_{1k}(t,\tau)\varphi_k(\tau)d\tau = \psi_1(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Обозначим $\mathcal{H}_{sk}\varphi(t) = \int\limits_0^t N_{sk}(t,\tau)\varphi_k(\tau)d\tau, s,k=1,2, t\in[0,T]$, и перепишем систему (3.1), (3.2) в операторном виде

$$\frac{1}{2}I^{1/2}(M\varphi_1) + \sum_{k=1}^2\mathcal{H}_{1k}\varphi_k = \psi_1, \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{2}\bar{A}_2^{-1}\varphi_2 + \sum_{k=1}^2\mathcal{H}_{2k}\varphi_k = \psi_2. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда операторы* $\mathcal{H}_{1k}\varphi, k=1,2$, *суть ограниченные операторы из* $C[0,T]$ *в* $\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$, $\omega=\widetilde{\omega}_0+\omega_1$.

Доказательство. Достаточно доказать оценки

$$|\mathcal{H}_{1k}\varphi(t)| \leqslant C||\varphi||^0 t^{1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left(t^{1/2}\right) + \omega_1\left(t^{1/2}\right)\right], \tag{3.7}$$

$$|\Delta_t\mathcal{H}_{1k}\varphi(t)| \leqslant C||\varphi||^0(\Delta t)^{1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right) + \omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right], \tag{3.8}$$

$$t, t+\Delta t\in[0,T], \quad \Delta t>0, \quad k=1,2, \quad ||\varphi||^0 = ||\varphi;[0,T]||^0.$$

Заметим, что, в силу (1.2), (1.11) при $s \neq k$ справедлива оценка

$$\left|\partial_x^l \Gamma(g_s(t), t; g_k(\tau), \tau)\right| \leqslant C, l = 0, 1, 2, \tag{3.9}$$

поэтому

$$|N_{12}(t, \tau)| \leqslant C. \tag{3.10}$$

В силу (1.3), (1.13), получаем неравенство

$$\left|Z\left(g_1(t) - g_1(\tau), t - \tau; \bar{A}_1(\tau)\right) - Z\left(0, t - \tau; \bar{A}_1(\tau)\right)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-1/2}\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right),$$

которое вместе с (1.12) дает оценку

$$|N_{11}| \leqslant C(t-\tau)^{-1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right) + \omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)\right]. \tag{3.11}$$

Из (3.10), (3.11) вытекает требуемая оценка (3.7):

$$|\mathcal{H}_{1k}\varphi(t)| \leqslant C||\varphi||^0 \int\limits_0^t \left\{1 + (t-\tau)^{-1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right) + \omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)\right]\right\} d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C||\varphi||^0 t^{1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left(t^{1/2}\right) + \omega_1\left(t^{1/2}\right)\right], \quad k = 1, 2.$$

Неравенство (3.8) (в силу (3.7)) достаточно доказать в случае $0 < \Delta t < t$. Положим

$$\Delta_t \mathcal{H}_{sk}\varphi(t) = \sum_{i=0}^{1}(-1)^{i+1}\int\limits_{t-\Delta t}^{t+i\Delta t} N_{sk}(t + i\Delta t, \tau)\varphi(\tau)d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^{t-\Delta t}[\Delta_t N_{sk}(t, \tau)]\varphi(\tau)d\tau = R_{sk}^1 - R_{sk}^0 + R_{sk}^2, \quad s, k = 1, 2. \tag{3.12}$$

Из (3.10), (3.11) получаем оценку для R_{1k}^i при $i = 0, 1$ и $k = 1, 2$:

$$\left|R_{1k}^i\right| \leqslant C||\varphi||^0 \int\limits_{t-\Delta t}^{t+i\Delta t}\{1 + (t + i\Delta t - \tau)^{-1/2}[\widetilde{\omega}_0\left((t + i\Delta t - \tau)^{1/2}\right) +$$
$$+ \omega_1\left((t + i\Delta t - \tau)^{1/2}\right)]\}d\tau \leqslant C||\varphi||^0(\Delta t)^{1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right) + \omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right].$$

Рассмотрим $R_{1k}^2, k = 1, 2$. Используя теорему о среднем и (1.3), (1.13), имеем

$$\left|\Delta_t\left[Z\left(g_1(t) - g_1(\tau), t - \tau; \bar{A}_1(\tau)\right) - Z\left(0, t - \tau; \bar{A}_1(\tau)\right)\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant C\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)[(\Delta t)^{1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-1} + (\Delta t)(t-\tau)^{-3/2}].$$

Отсюда и из (1.15), следует, что

$$|\Delta N_{11}(t, \tau)| \leqslant C\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-1}\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right) +$$
$$+ (\Delta t)(t-\tau)^{-3/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right) + \omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)\right]\}. \tag{3.13}$$

В силу (1.2), (1.3), (1.11) справедливо неравенство

$$|\Delta N_{12}(t, \tau)| \leqslant C(\Delta t)^{1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right). \tag{3.14}$$

Из (3.13), (3.14) и в силу свойств функций ω_0 и ω_1 находим

$$|R_{1k}^2| \leqslant C||\varphi||^0\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\int\limits_0^t[1+(t-\tau)^{-1}\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)]d\tau+$$

$$+(\Delta t)^{1-\varepsilon_0/2}\widetilde{\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2}d\tau+(\Delta t)^{1-\varepsilon_1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-(3-\varepsilon_1)/2}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C||\varphi||^0(\Delta t)^{1/2}\left[\widetilde{\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)+\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right].$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда операторы* $\mathcal{H}_{2k}\varphi, k=1,2,$ *суть ограниченные операторы из* $C[0,T]$ *в* $\underset{0}{H}^{\omega}[0,T], \omega=\widetilde{\widetilde{\omega}}_0+\widetilde{\omega}_1$.

Доказательство. Утверждение леммы будет следовать из оценок

$$|\mathcal{H}_{2k}\varphi(t)|\leqslant C||\varphi||^0\left[\widetilde{\widetilde{\omega}}_0\left(t^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_1\left(t^{1/2}\right)\right], \tag{3.15}$$

$$|\Delta_t\mathcal{H}_{2k}\varphi(t)|\leqslant C||\varphi||^0\left[\widetilde{\widetilde{\omega}}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right], \tag{3.16}$$

$$t, t+\Delta t\in[0,T], \Delta t>0; k=1,2; ||\varphi||^0=||\varphi;[0,T]||^0.$$

Докажем оценку (3.15). Из неравенства (3.9) следует, что

$$|N_{21}(t,\tau)|\leqslant C. \tag{3.17}$$

В силу представления (1.8) имеем

$$N_{22}(t,\tau)=\partial_x Z\left(g_2(t)-g_2(\tau),t-\tau;\bar{A}_2(\tau)\right)+\partial_x W\left(g_2(t),t;g_2(\tau),\tau\right).$$

Поскольку

$$\partial_x Z\left(g_2(t)-g_2(\tau),t-\tau;\bar{A}_2(\tau)\right)=-\frac{g_2(t)-g_2(\tau)}{2(t-\tau)}(\bar{A}_2)^{-1}(\tau)Z\left(g_2(t)-g_2(\tau),t-\tau;\bar{A}_2(\tau)\right), \tag{3.18}$$

то в силу (1.3), (1.13) получим

$$\left|\partial_x Z\left(g_2(t)-g_2(\tau),t-\tau;\bar{A}_2(\tau)\right)\right|\leqslant C\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-1}.$$

Отсюда и из неравенства (1.12) имеем

$$|N_{22}(t,\tau)|\leqslant[\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)](t-\tau)^{-1}. \tag{3.19}$$

Следовательно, в силу (3.17) и (3.19), находим

$$|\mathcal{H}_{2k}\varphi(t)|\leqslant C||\varphi||^0\int\limits_0^t\{[\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)](t-\tau)^{-1}+1\}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C||\varphi||^0\left[\widetilde{\omega}_1\left(t^{1/2}\right)+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0\left(t^{1/2}\right)\right], k=1,2.$$

Оценку (3.16) для операторов $\mathcal{H}_{2k}\varphi, k=1,2$, доказываем с помощью представления (3.12). При этом (в силу (3.15)) можно считать, что $0<\Delta t<t$. Из (3.17) и (3.19) получаем оценку (3.16) для R_{2k}^i при $i=0,1$ и $k=1,2$:

$$|R_{2k}^i|\leqslant C||\varphi||^0\int\limits_{t-\Delta t}^{t+i\Delta t}\{[\widetilde{\omega}_0\left((t+i\Delta t-\tau)^{1/2}\right)+\omega_1\left((t+i\Delta t-\tau)^{1/2}\right)](t+i\Delta t-\tau)^{-1}+1\}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C||\varphi||^0\left[\widetilde{\widetilde{\omega}}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right].$$

Рассмотрим $R^2_{2k}, k=1,2$. Используя представление (3.18) и соотношения (1.3), (1.13), имеем

$$\left|\Delta_t \partial_x Z\left(g_2(t)-g_2(\tau), t-\tau; \bar{A}_2(\tau)\right)\right| \leqslant C[(\Delta t)^{1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-3/2}+(\Delta t)\omega_1\left((t-\tau)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-2}].$$

Отсюда и из неравенства (1.15), с учетом свойств функций ω_0 и ω_1, находим

$$|R^2_{22}| \leqslant C||\varphi||^0\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-3/2}d\tau +$$

$$+(\Delta t)\frac{\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)}{(\Delta t)^{1/2}}\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-3/2}d\tau + (\Delta t)^{(1-\varepsilon_0)/2}\widetilde{\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)\int\limits_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2}d\tau\} \leqslant$$

$$\leqslant C||\varphi||^0[\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)] \leqslant C||\varphi||^0\left[\widetilde{\widetilde{\omega}}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right].$$

Наконец, из соотношений (1.2), (1.3), (1.13), (1.15) следует, что

$$|\Delta_t\partial_x\Gamma(g_2(t),t;g_1(\tau),\tau)| \leqslant C(\Delta t)^{1/2}[\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)+\omega_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)] \leqslant C(\Delta t)^{1/2},$$

поэтому, используя свойства модуля непрерывности, находим

$$|R^2_{21}| \leqslant C||\varphi||^0(\Delta t)^{1/2} \leqslant C||\varphi||^0\left[\widetilde{\widetilde{\omega}}_0\left((\Delta t)^{1/2}\right)+\widetilde{\omega}_1\left((\Delta t)^{1/2}\right)\right].$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.3. *(* [2, 18]*). Пусть ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини* (1.1). *Тогда оператор $\partial^{1/2}$ есть ограниченный оператор из $\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$ в $\underset{0}{H}^{\widetilde{\omega}}[0,T]$.*

Лемма 3.4. *Оператор вложения $J: H^{\omega}[0,T] \to C[0,T]$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B} \subset H^{\omega}[0,T]$ — ограниченное множество. Тогда существует постоянная $C>0$ такая, что $|\varphi;[0,T]|^{\omega} \leqslant C$ для любой $\varphi \in \mathcal{B}$, т. е., $|\varphi(t)| \leqslant C$ и $|\Delta_t\varphi(t)| \leqslant C|\Delta t|^{\omega}$ для любой $\varphi \in \mathcal{B}$ и любых $t, t+\Delta t \in [0,T]$. Поэтому множество $\mathcal{B}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Следовательно, по теореме Арцела—Асколи, множество $\mathcal{B}$ предкомпактно в $C[0,T]$, значит J — компактный оператор. Лемма доказана. □

Лемма 3.5. *Пусть $\varphi \in \underset{0}{H}^{\omega}[0,T]$. Если существует постоянная $C>0$ такая, что для любого $t_0 \in (0,T]$ выполнено неравенство*

$$|\varphi;[0,t_0]|^{\omega} \leqslant C||\varphi;[0,t_0]||^0, \tag{3.20}$$

то $\varphi \equiv 0$ on $[0,T]$.

Доказательство. Для доказательства используем рассуждения из [12]. Фиксируем произвольное $t_0 \in (0,T]$ и положим

$$\varphi^0(t)=\varphi(t), \text{ если } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \text{ и } \varphi^0(t)=\varphi(t_0), \text{ если } t_0 < t \leqslant T. \tag{3.21}$$

Из неравенства (3.20) следует, что

$$|\varphi^0;[0,t_0]|^{\omega} \leqslant C||\varphi^0;[0,t_0]||^0. \tag{3.22}$$

Так как $\varphi \in \underset{0}{H}^{\omega}[0,T]$, то в силу неравенства (3.22) находим

$$\sup_{(0,t_0)}|\varphi^0(t)| = \sup_{(0,t_0)}|\varphi(t)| = \sup_{(0,t_0)}\left\{\frac{|\varphi(t)-\varphi(0)|}{\omega\left(t^{1/2}\right)}\omega\left(t^{1/2}\right)\right\} \leqslant \omega\left((t_0)^{1/2}\right)|\varphi;[0,t_0]|^{\omega} =$$

$$= \omega\left((t_0)^{1/2}\right)|\varphi^0;[0,t_0]|^{\omega} \leqslant C\omega\left((t_0)^{1/2}\right)||\varphi_0;[0,t_0]||^0,$$

где C — постоянная из (3.20). Для достаточно малого t_0 выполнено $C\omega\left((t_0)^{1/2}\right) \leqslant 1/2$, следовательно, $\varphi^0 \equiv \varphi \equiv 0$ на $[0,t_0]$.

Если $t_0 = T$, то лемма доказана. Если $t_0 < T$, то рассматриваем t_1 такое, что $t_1 = 2t_0$, если $2t_0 \leqslant T$, и $t_1 = T$, если $2t_0 > T$. Полагаем $\varphi^1(t) = \varphi(t)$, если $0 \leqslant t \leqslant t_1$ и $\varphi^1(t) = \varphi(t_1)$, если $t_1 < t \leqslant T$. Используя равенство $\varphi^1 \equiv 0$ на $[0, t_0]$, получим

$$\sup_{(0,t_1)} |\varphi^1(t)| = \sup_{(t_0,t_1)} |\varphi^1(t)| = \sup_{(t_0,t_1)} |\varphi(t)| = \sup_{(t_0,t_1)} \left\{ \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_0)|}{\omega\left((t-t_0)^{1/2}\right)} \omega\left((t-t_0)^{1/2}\right) \right\} \leqslant$$
$$\leqslant \omega\left((t_0)^{1/2}\right) |\varphi; [0,t_1]|^\omega = \omega\left((t_0)^{1/2}\right) |\varphi^1; [0,t_1]|^\omega \leqslant C\omega\left((t_0)^{1/2}\right) ||\varphi^1; [0,t_1]||^0,$$

где C — постоянная из (3.20). Поскольку $C\omega\left((t_0)^{1/2}\right) \leqslant 1/2$, то $\varphi^1 \equiv \varphi \equiv 0$ на $[0, t_1]$.

Если $t_1 < T$, то, продолжая этот процесс, через конечное число шагов получаем утверждение леммы. □

Следуя А. Н. Тихонову [26], назовем оператор $K : C[0,T] \to C[0,T]$ *вольтерровым*, если для любого $t \in [0,T]$ из равенства $\varphi_1 = \varphi_2$ на $[0,t]$ следует, что $K\varphi_1 = K\varphi_2$ на $[0,t]$.

Лемма 3.6. *Пусть $K : C[0,T] \to \underset{0}{H}^\omega[0,T]$ — линейный ограниченный вольтерров оператор. Тогда уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ имеет в $C[0,T]$ только решение $\varphi = 0$.*

Доказательство. Для доказательства используем рассуждения из [8, 12]. Пусть $\varphi \in C[0,T]$ — решение уравнения $\varphi + K\varphi = 0$. Тогда $\varphi = -K\varphi$, причем $K\varphi \in \underset{0}{H}^\omega[0,T]$. Следовательно, $\varphi \in \underset{0}{H}^\omega[0,T]$.

Фиксируем произвольное $t_0 \in (0,T]$. Поскольку $\varphi(t) = -(K\varphi^0)(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, где функция φ^0 определена в (3.21), то, в силу условия на K,

$$|\varphi; [0,t_0]|^\omega = |K\varphi^0; [0,t_0]|^\omega \leqslant |K\varphi^0; [0,T]|^\omega \leqslant ||K|| \cdot ||\varphi^0; [0,T]||^0 = ||K|| \cdot ||\varphi; [0,t_0]||^0.$$

Тогда из леммы 3.5 следует, что $\varphi = 0$. Лемма доказана. □

Из лемм 3.4, 3.6 вытекает

Лемма 3.7. *Пусть $K : C[0,T] \to \underset{0}{H}^\omega[0,T]$ — линейный ограниченный вольтерров оператор. Тогда для любой вектор-функции $\psi \in C[0,T]$ уравнение $\varphi + K\varphi = \psi$ имеет единственное решение $\varphi \in C[0,T]$ и справедлива оценка $||\varphi; [0,T]||^0 \leqslant C||\psi; [0,T]||^0$ для некоторой постоянной $C > 0$.*

Замечание 3.1. Для матрицы M, заданной формулой (3.3), имеет место равенство

$$M^2(\tau) = \bar{A}_1^{-1}(\tau), \quad \tau \in [0,T]. \tag{3.23}$$

Действительно (см. [23]), обозначим $I = Z\left(0, t; \bar{A}_1(\tau)\right)$. Из (3.4) следует, что

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} M(\tau). \tag{3.24}$$

С другой стороны,

$$I^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-(x^2+y^2)\bar{A}_1(\tau)t\} dxdy = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{+\infty} \exp\{-r^2 \bar{A}_1(\tau)t\} r dr =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\bar{A}_1^{-1}(\tau)}{2t} \exp\{-r^2 \bar{A}_1(\tau)t\} \right) dr =$$
$$= \frac{1}{2\pi} [-\lim_{r\to+\infty} \frac{\bar{A}_1^{-1}(\tau)}{2t} \exp\{-r^2\bar{A}_1(\tau)t\} + \lim_{r\to 0} \frac{\bar{A}_1^{-1}(\tau)}{2t} \exp\{-r^2\bar{A}_1(\tau)t\}] = \frac{1}{4\pi t} \bar{A}_1^{-1}(\tau).$$

Отсюда и из (3.24) получаем равенство (3.23).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда для любых вектор-функций* $\psi_1 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ *и* $\psi_2 \in \underset{0}{C}[0,T]$ *система* (1.17), (1.18) *имеет единственное решение* $\{\varphi_k \in \underset{0}{C}[0,T],$ $k = 1,2\}$ *и справедлива оценка*

$$||\varphi_k;[0,T]||^0 \leqslant C\left(||\psi_1;[0,T]||^{1/2} + ||\psi_2;[0,T]||^0\right), \quad k = 1,2. \tag{3.25}$$

Доказательство. Как показано выше, система (1.17), (1.18) может быть записана в виде (3.5), (3.6). Из условий b), c) и (1.3) следует, что матрица $M \in H^{\omega_0}[0,T]$; причем $|M;[0,T]|^{\omega_0} \leqslant C|\bar{A}_1;[0,T]|^{\omega_0} \leqslant C$. Применяя к уравнению (3.5) оператор дробного дифференцирования $\partial^{1/2}$, получим, в силу лемм 3.1, 3.3 и равенств $\partial^{1/2}I^{1/2}f = f$ и $I^{1/2}\partial^{1/2}f = f$, справедливых для любых $f \in C[0,T]$ и $f \in C^{1/2}[0,T] \cap \underset{0}{C}[0,T]$, соответственно, уравнение

$$M\varphi_1 + \sum_{k=1}^{2} 2\partial^{1/2}\mathcal{H}_{1k}\varphi_k = 2\partial^{1/2}\psi_1, \tag{3.26}$$

которое эквивалентно (3.5) для $\varphi_k \in C[0,T]$.

Из условий a), b) вытекает, что $\delta_1 \leqslant \det \overline{A}_1(\tau) \leqslant \delta_1'$ для некоторых $\delta_1, \delta_1' > 0$ и всех $\tau \in [0,T]$; кроме того, $\overline{A}_1 \in H^{\omega_0}[0,T]$. Поэтому существует обратная матрица $\overline{A}_1^{-1}$, причем для некоторых $\delta_2, \delta_2' > 0$ и всех $\tau \in [0,T]$ имеет место неравенство $\delta_2 \leqslant \det \overline{A}_1^{-1}(\tau) \leqslant \delta_2'$ и, кроме того, $\overline{A}_1^{-1} \in H^{\omega_0}[0,T]$. Отсюда и из равенства (3.23) следует, что $\delta_3 \leqslant \det M(\tau) \leqslant \delta_3'$ для некоторых $\delta_3, \delta_3' > 0$ и всех $\tau \in [0,T]$; кроме того, $M \in H^{\omega_0}[0,T]$. Тогда существует обратная матрица $M^{-1}(\tau)$ и для некоторого $\delta_4 > 0$ и всех $\tau \in [0,T]$ выполнено неравенство $\det M^{-1}(\tau) \geqslant \delta_4$. Кроме того, $M^{-1} \in H^{\omega_0}[0,T]$, причем

$$|M^{-1};[0,T]|^{\omega_0} \leqslant C|M;[0,T]|^{\omega_0} \leqslant C. \tag{3.27}$$

Умножая обе части (3.26) на M^{-1}, получим эквивалентное уравнение

$$\varphi_1 + \sum_{k=1}^{2} 2M^{-1}\partial^{1/2}\mathcal{H}_{1k}\varphi_k = 2M^{-1}\partial^{1/2}\psi_1. \tag{3.28}$$

Умножая обе части (3.6) на $2\bar{A}_2$, получим эквивалентное уравнение

$$\varphi_2 + \sum_{k=1}^{2} 2\bar{A}_2\mathcal{H}_{2k}\varphi_k = 2\bar{A}_2\psi_2. \tag{3.29}$$

Для решения системы (3.28), (3.29) введем обозначения:

$$\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}, \quad \widetilde{\psi} = 2\begin{pmatrix}M^{-1}\partial^{1/2}\\ \bar{A}_2\end{pmatrix}^{\top}\psi, \quad K = 2\begin{pmatrix}M^{-1}\partial^{1/2}\mathcal{H}_{11} & M^{-1}\partial^{1/2}\mathcal{H}_{12}\\ \bar{A}_2\mathcal{H}_{21} & \bar{A}_2\mathcal{H}_{22}\end{pmatrix}$$

и перепишем систему (3.28), (3.29) в виде

$$\varphi + K\varphi = \widetilde{\psi}, \tag{3.30}$$

где $\widetilde{\psi} \in \underset{0}{C}[0,T]$, причем $||\widetilde{\psi};[0,T]||^0 \leqslant C\left(||\psi_1;[0,T]||^{1/2} + ||\psi_2;[0,T]||^0\right)$.

Далее используем рассуждения из [8, 12]. Оператор K — вольтерров оператор. Кроме того, в силу лемм 3.1, 3.2, 3.3 и оценки (3.27), K — линейный ограниченный оператор из $C[0,T]$ в $\underset{0}{H}^{\omega}[0,T], \omega = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1$. Следовательно, по лемме 3.7 для любой $\widetilde{\psi} \in C[0,T]$ уравнение (3.30) имеет единственное решение $\varphi \in C[0,T]$ и справедлива оценка $||\varphi;[0,T]||^0 \leqslant C\left\|\widetilde{\psi};[0,T]\right\|^0$. Наконец, так как $K(C[0,T]) \subset \underset{0}{H}^{\omega}[0,T]$, $\omega = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1$ и $\widetilde{\psi}(0) = 0$, то решение φ уравнения (3.30) принадлежит $\underset{0}{C}[0,T]$. Теорема доказана. □

Замечание 3.2. Из равенства (3.30) и лемм 3.1, 3.2, 3.3 следует, что если $\psi_1 \in \underset{0}{C}^{1/2,\omega_2}[0,T]$ и $\psi_2 \in \underset{0}{C}^{\omega_3}[0,T]$, то решение φ уравнения (3.30) принадлежит $\underset{0}{H}^{\omega}[0,T]$, где $\omega = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1 + \omega_2 + \omega_3$, и выполнена оценка $|\varphi;[0,T]|^{\omega} \leqslant C(||\psi_1;[0,T]||^{1/2,\omega_2} + |\psi_2;[0,T]|^{\omega_3})$.

4. Доказательство теоремы 2.1

Доказательство теоремы 2.1. Решение задачи (1.4)–(1.7) ищем в виде суммы потенциалов (1.16), где вектор-плотности φ_1, φ_2 подлежат определению. Для любых непрерывных на $[0,T]$ плотностей φ_1, φ_2 вектор-функция (1.16) является классическим решением уравнения (1.4) и удовлетворяет начальному условию (1.5). Для отыскания неизвестных плотностей подставляем вектор-функцию (1.16) в граничные условия (1.6), (1.7), откуда получаем систему граничных интегральных уравнений Вольтерры (1.17), (1.18). Из теоремы 3.1 следует, что система (1.17), (1.18) имеет единственное решение $\{\varphi_k \in \underset{0}{C}[0,T], k=1,2\}$ и выполнена оценка (3.25). Поэтому существует классическое решение задачи (1.4)–(1.7), которое имеет вид суммы потенциалов простого слоя (1.16). Используя теперь результат о гладкости потенциала простого слоя с плотностью $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ полученный в [10, 12], заключаем, что найденное решение задачи (1.4)–(1.7) принадлежит пространству $\underset{0}{C}^{1,1/2}[\overline{\Omega}]$ и выполнена оценка (2.3). Теорема доказана. □

5. Оценки старших производных решения задачи

Пусть $G_+ = \{(x,t) \in D : x > g(t)\}$ и $G_- = \{(x,t) \in D : x < g(t)\}$ — полуограниченные области с негладкой боковой границей $\Sigma = \{(x,t) \in \overline{D} : x = g(t)\}$. Предполагаем, что для функции g выполнено условие

$$|g(t+\Delta t) - g(t)| \leqslant C|\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2}),\ t, t+\Delta t \in [0,T], \tag{5.1}$$

где ω_1 — модуль непрерывности из условия (1.3).

В G_+ и G_- рассмотрим потенциал простого слоя

$$U\varphi(x,t) = \int_0^t \Gamma(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau. \tag{5.2}$$

где Γ — матрица (1.8), $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — вектор-функция. Обозначим параболическое расстояние от точки $(x,t) \in \underset{(-)}{G_+}$ до боковой границы Σ через $d(x,t) = \inf\limits_{(\xi,\tau)\in\Sigma, \tau\leqslant t} \left\{|x-\xi| + |t-\tau|^{1/2}\right\}$.

Лемма 5.1. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия* a)–c) *и для функции g выполнено условие* (5.1). *Пусть вектор-функция φ принадлежит $\underset{0}{H}^{\omega}[0,T]$. Тогда для производной $\partial_x^2 U\varphi$ потенциала* (5.2) *имеет место оценка*

$$|\partial_x^2 U\varphi(x,t)| \leqslant C|\varphi;[0,T]|^{\omega}\omega_5(d(x,t))d^{-1}(x,t), \quad (x,t) \in G_+, \tag{5.3}$$

где $\omega_5 = \widetilde{\omega}_0 + \omega_1 + \omega$.

Замечание 5.1. Оценка (5.3) в случае одного уравнения ($m=1$) получена в [36].

Доказательство. Для доказательства используем метод работ [30, 36]. Обозначим $||\varphi||^0 = ||\varphi;[0,T]||^0$, $|\varphi|^{\omega} = |\varphi;[0,T]|^{\omega}$, $d = d(x,t)$ и $\bar{A}(\tau) = A^{(2)}(g(\tau),\tau)$. В соответствии с представлением (1.8) имеем:

$$\partial_x^2 U\varphi(x,t) = \int_0^t \partial_x^2 Z(x-g(\tau), t-\tau; \bar{A}(\tau))\varphi(\tau)d\tau + \int_0^t \partial_x^2 W(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau \equiv$$

$$\equiv U_0\varphi(x,t) + U_1\varphi(x,t), (x,t) \in G_+. \tag{5.4}$$

Оценим $U_1\varphi$. Из (1.12) следует неравенство

$$|U_1\varphi(x,t)| \leqslant C||\varphi||^0 \int_0^t \frac{\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-c\frac{|x-g(\tau)|^2}{t-\tau}\right\} d\tau.$$

Заметим, что

$$\exp\left\{-c\frac{|x-g(\tau)|^2}{t-\tau}\right\} = e^c \exp\left\{-c\frac{|x-g(\tau)|^2 + (t-\tau)}{t-\tau}\right\} \leqslant e^c \exp\left\{-\frac{c}{2}\frac{d^2(x,t)}{t-\tau}\right\} \tag{5.5}$$

для $(x,t) \in G_+$, $0 \leqslant \tau < t$. Кроме того, для модуля непрерывности ω, удовлетворяющего условию (2.1), справедлива оценка (см. [36]):

$$\int_0^t \frac{\omega\left((t-\tau)^{1/2}\right)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-c\frac{d^2}{t-\tau}\right\} d\tau \leqslant C\omega(d)d^{-1}, \quad t, d > 0. \tag{5.6}$$

Поэтому

$$|U_1\varphi(x,t)| \leqslant C||\varphi||^0 \widetilde{\omega}_0(d)d^{-1}. \tag{5.7}$$

Рассмотрим $U_0\varphi$. Положим

$$U_0(x,t) = \int_0^t [\partial_x^2 Z(x-g(\tau), t-\tau; \bar{A}(\tau))\varphi(\tau) - \partial_x^2 Z(x-g(t), t-\tau; \bar{A}(t))\varphi(t)]d\tau +$$

$$+ \int_0^t \partial_x^2 Z(x-g(t), t-\tau; \bar{A}(t))d\tau\varphi(t) \equiv U_{01}\varphi(x,t) + U_{02}\varphi(x,t).$$

Интеграл $U_{01}\varphi$ представим в виде

$$U_{01}\varphi(x,t) = \int_0^t [\partial_x^2 Z(x-g(\tau), t-\tau; \bar{A}(\tau)) - \partial_x^2 Z(x-g(t), t-\tau; \bar{A}(\tau))]\varphi(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t [\partial_x^2 Z(x-g(t), t-\tau; \bar{A}(\tau)) - \partial_x^2 Z(x-g(t), t-\tau; \bar{A}(t))]\varphi(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_0^t \partial_x^2 Z(x-g(t), t-\tau; \bar{A}(t))[\varphi(\tau) - \varphi(t)]d\tau.$$

Используя теорему о среднем, соотношения (1.13), (1.14), (5.1), (5.5), (5.6) и условие на φ, находим

$$|U_{01}\varphi(x,t)| \leqslant C|\varphi|^\omega \int_0^t \frac{(\omega_0 + \omega_1 + \omega)\left((t-\tau)^{1/2}\right)}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-c\frac{d^2}{t-\tau}\right\} d\tau \leqslant C|\varphi|^\omega(\omega_0 + \omega_1 + \omega)(d)d^{-1}. \tag{5.8}$$

Оценим $U_{02}\varphi$. Матрица $Z\left(x, t; A^{(2)}(y,\eta)\right)$ является решением системы $\partial_t Z - A^{(2)}(y,\eta)\partial_x^2 Z = 0$, поэтому для любых фиксированных $x, y \in \mathbb{R}, t \in (0,T], \eta \in [0,T]$ справедливо равенство

$$\int_0^t \partial_x^2 Z(x, t-\tau; A^{(2)}(y,\eta))d\tau = \left(A^{(2)}\right)^{-1}(y,\eta)Z(x,t; A^{(2)}(y,\eta)).$$

Подставим вместо y, η соответственно $g(t), t$. Тогда при $x > g(t)$ имеем

$$U_{02}\varphi(x,t) = \bar{A}^{-1}(t)Z(x-g(t), t; \bar{A}(t))\varphi(t).$$

В силу условий a), b) элементы матрицы $\bar{A}^{-1}$ ограничены на $[0,T]$. Отсюда и из (1.13) и неравенств $|x-g(t)| \geqslant d(x,t)$, $(x,t) \in G_+$, $|\varphi(t)| = |\varphi(t) - \varphi(0)| \leqslant |\varphi|^\omega \omega\left(t^{1/2}\right)$, $t \in [0,T]$, получим

$$|U_{02}\varphi(x,t)| \leqslant C|\varphi|^\omega \frac{\omega\left(t^{1/2}\right)}{t^{1/2}} \exp\left\{-c\frac{d^2}{t}\right\} \leqslant C|\varphi|^\omega \omega(d)d^{-1}. \tag{5.9}$$

Из (5.4), (5.7)–(5.9) следует требуемая оценка (5.3). □

Замечание 5.2. Аналогичное утверждение справедливо для области G_-.

Из теоремы 2.1, леммы 5.1, замечаний 2.2, 2.3, 3.2, 5.2 и результата о гладкости потенциала простого слоя в пространстве Дини, полученного в [16], вытекает следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и* $\psi_1 \in \underset{0}{C}^{1/2,\omega_2}[0,T]$, $\psi_2 \in \underset{0}{C}^{\omega_3}[0,T]$. *Тогда для решения* u *из теоремы* 2.1 *выполнены оценки*

$$|\partial_x^2 u(x,t)| \leqslant C\left(||\psi_1;[0,T]||^{1/2,\omega_2} + |\psi_2;[0,T]|^{\omega_3}\right)\omega_4(d(x,t))d^{-1}(x,t),$$
$$|\partial_t u(x,t)| \leqslant C\left(||\psi_1;[0,T]||^{1/2,\omega_2} + |\psi_2;[0,T]|^{\omega_3}\right)\omega_4(d(x,t))d^{-1}(x,t),$$

где $\omega_4 = \widetilde{\widetilde{\omega}}_0 + \widetilde{\omega}_1 + \omega_2 + \omega_3, (x,t) \in \Omega$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1984.
2. *Бадерко Е. А.* О решении методом потенциалов одной задачи теплопроводности с сосредоточенными теплоемкостями// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 7. — С. 1225–1234.
3. *Бадерко Е. А.* О разрешимости граничных задач для параболических уравнений высокого порядка в областях с криволинейными боковыми границами// Дифф. уравн. — 1976. — *12*, № 10. — С. 1781–1792.
4. *Бадерко Е. А.* О решении первой краевой задачи для параболических уравнений с помощью потенциала простого слоя// Докл. АН СССР. — 1985. — *283*, № 1. — С. 11–13.
5. *Бадерко Е. А.* О «почти» модельной краевой задаче для параболического уравнения высокого порядка// Дифф. уравн. — 1987. — *23*, № 1. — С. 22–29.
6. *Бадерко Е. А.* Метод теории потенциала в краевых задачах для $2m$-параболических уравнений в полуограниченной области// Дифф. уравн. — 1988. — *24*, № 1. — С. 3–9.
7. *Бадерко Е. А.* Решение задачи с косой производной для параболического уравнения методом граничных интегральных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 1. — С. 14–20.
8. *Бадерко Е. А.* О параболической краевой задаче в области простого вида// Дифф. уравн. — 1991. — *27*, № 1. — С. 17–29.
9. *Бадерко Е. А.* Краевые задачи для параболического уравнения и граничные интегральные уравнения// Дифф. уравн. — 1992. — *28*, № 1. — С. 17–23.
10. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами// Докл. РАН. — 2014. — *458*, № 4. — С. 379–381.
11. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Задача Бицадзе—Самарского для параболической системы на плоскости// Докл. РАН. — 2016. — *471*, № 5. — С. 517–519.
12. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 2. — С. 198–208.
13. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Задача Дирихле для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами на плоскости// Докл. РАН. — 2017. — *476*, № 1. — С. 7–10.
14. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Решение задачи Бицадзе—Самарского для параболической системы в полуограниченной области// Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 10. — С. 1327–1335.
15. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. — М.: Наука, 1977.
16. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини// Деп. ВИНИТИ РАН. — 16.04.92. — № 1294-В92.
17. *Зейнеддин М.* О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини// Дисс. к.ф.-м.н. — Москва, 1992.
18. *Камынин Л. И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини—Гельдера// Сиб. мат. ж. — 1970. — *11*, № 5. — С. 1017–1045.
19. *Камынин Л. И.* К теории Жевре для параболических потенциалов. VI// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 6. — С. 1015–1025.
20. *Камынин Л. И.* О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка// Сиб. мат. ж. — 1974. — *15*, № 4. — С. 806–834.
21. *Камынин Л. И.* Приложения параболических потенциалов Паньи к краевым задачам математической физики. I// Дифф. уравн. — 1990. — *26*, № 5. — С. 829–841.
22. *Петровский И. Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций// Бюлл. МГУ. Секц. А. — 1938. — *1*, № 7. — С. 1–72.
23. *Семаан Х. М.* О решении второй краевой задачи для параболических систем в областях на плоскости с негладкой боковой границей// Деп. ВИНИТИ РАН. — 26.02.99. — № 567-В99.
24. *Твердитинов В. А.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка// Деп. ВИНИТИ АН СССР. — 02.09.88. — № 6850-В88.

25. *Тверитинов В. А.* Решение второй краевой задачи для параболической системы с одной пространственной переменной методом граничных интегральных уравнений// Деп. ВИНИТИ АН СССР. — 15.11.89. — № 6906-В89.
26. *Тихонов А. Н.* О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики// Бюлл. МГУ. Секц. А. — 1938. — *1*, № 8. — С. 1–25.
27. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.
28. *Черепова М. Ф.* Решение методом потенциала I-ой краевой задачи для параболического уравнения 2-го порядка в нецилиндрической области// Деп. ВИНИТИ АН СССР. — 11.01.85. — № 361-85-Деп.
29. *Черепова М. Ф.* О задаче Бицадзе—Самарского для параболического уравнения// Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1986. — № 4. — С. 74–76.
30. *Черепова М. Ф.* Об оценках пространственных производных второго порядка для параболического потенциала простого слоя// Дифф. уравн. — 1996. — *32*, № 4. — С. 545–549.
31. *Черепова М. Ф.* О разрешимости краевых задач для параболического уравнения высокого порядка с растущими коэффициентами// Докл. РАН. — 2006. — *411*, № 2. — С. 171–172.
32. *Черепова М. Ф.* О разрешимости краевых задач для параболического уравнения с растущими вблизи границы коэффициентами// Дифф. уравн. — 2007. — *43*, № 1. — С. 110–121.
33. *Черепова М. Ф.* Краевые задачи для параболического уравнения высокого порядка с растущими коэффициентами// Дифф. уравн. — 2008. — *44*, № 4. — С. 507–516.
34. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. — М.: Наука, 1964.
35. *Baderko E. A.* Parabolic problems and boundary integral equations// Math. Methods Appl. Sci. — 1997. — *20*. — С. 449–459.
36. *Martynova K. K., Cherepova M. F.* Estimates for the derivative of parabolic simple layer potential in the Dini space// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2016. — *219*, № 6. — С. 973–993.

Е. А. Бадерко
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
E-mail: baderko.ea@yandex.ru

М. Ф. Черепова
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»,
111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14
E-mail: CherepovaMF@mpei.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-20-36 UDC 517.956.4

Mixed Problem for a Parabolic System on a Plane and Boundary Integral Equations

© 2018 **E. A. Baderko, M. F. Cherepova**

Abstract. We consider the mixed problem for a one-dimensional (with respect to the spatial variable) second-order parabolic system with Dini-continuous coefficients in a domain with nonsmooth lateral boundaries. Using the method of boundary integral equations, we find a classical solution of this problem. We investigate the smoothness of solution as well.

REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
2. E. A. Baderko, "O reshenii metodom potentsialov odnoy zadachi teploprovodnosti s sosredotochennymi teploemkostyami" [On application of the method of potentials to solution of one heat conduction problem with concentrated thermal conductivity], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 7, 1225–1234 (in Russian).

3. E. A. Baderko, "O razreshimosti granichnykh zadach dlya parabolicheskikh uravneniy vysokogo poryadka v oblastyakh s krivolineynymi bokovymi granitsami" [On solvability of boundary problems for higher-order parabolic equations in domains with nonsmooth lateral boundaries], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **12**, No. 10, 1781–1792 (in Russian).
4. E. A. Baderko, "O reshenii pervoy kraevoy zadachi dlya parabolicheskikh uravneniy s pomoshch'yu potentsiala prostogo sloya" [On solution of the first boundary-value problem for parabolic equations by means of the single layer potential], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1985, **283**, No. 1, 11–13 (in Russian).
5. E. A. Baderko, "O «pochti» model'noy kraevoy zadache dlya parabolicheskogo uravneniya vysokogo poryadka" [On "almost" model boundary-value problem for a higher-order parabolic equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1987, **23**, No. 1, 22–29 (in Russian).
6. E. A. Baderko, "Metod teorii potentsiala v kraevykh zadachakh dlya $2m$-parabolicheskikh uravneniy v poluogranichennoy oblasti" [The potential theory method in boundary-value problems for $2m$-parabolic equations in a semibounded domain], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1988, **24**, No. 1, 3–9 (in Russian).
7. E. A. Baderko, "Reshenie zadachi s kosoy proizvodnoy dlya parabolicheskogo uravneniya metodom granichnykh integral'nykh uravneniy" [Solution of a problem for a parabolic equation with an oblique derivative by means of the boundary integral equations method], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 1, 14–20 (in Russian).
8. E. A. Baderko, "O parabolicheskoy kraevoy zadache v oblasti prostogo vida" [On a parabolic boundary-value problem in a simple domain], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, No. 1, 17–29 (in Russian).
9. E. A. Baderko, "Kraevye zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya i granichnye integral'nye uravneniya" [Boundary-value problems for a parabolic equation and boundary integral equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1992, **28**, No. 1, 17–23 (in Russian).
10. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Pervaya kraevaya zadacha dlya parabolicheskikh sistem v ploskikh oblastyakh s negladkimi bokovymi granitsami" [The first boundary-value problem for parabolic systems in plane domains with nonsmooth lateral boundaries], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **458**, No. 4, 379–381 (in Russian).
11. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Zadacha Bitsadze—Samarskogo dlya parabolicheskoy sistemy na ploskosti" [The Bitsadze–Samarskii problem for a parabolic system on a plane], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2016, **471**, No. 5, 517–519 (in Russian).
12. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Potentsial prostogo sloya i pervaya kraevaya zadacha dlya parabolicheskoy sistemy na ploskosti" [The single layer potential and the first boundary-value problem for a parabolic system on a plane], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 2, 198–208 (in Russian).
13. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Zadacha Dirikhle dlya parabolicheskikh sistem s Dini-nepreryvnymi koeffitsientami na ploskosti" [The Dirichlet problem for parabolic systems with Dini-continuous coefficients of a plane], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2017, **476**, No. 1, 7–10 (in Russian).
14. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Reshenie zadachi Bitsadze—Samarskogo dlya parabolicheskoy sistemy v poluogranichennoy oblasti" [Solution of the Bitsadze–Samarskii problem for a parabolic system in a semibounded domain], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 10, 1327–1335 (in Russian).
15. V. K. Dzyadyk, *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsiy polinomami* [Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
16. M. Zeyneddin, "Gladkost' potentsiala prostogo sloya dlya parabolicheskoy sistemy vtorogo poryadka v klassakh Dini" [Smoothness of the single layer potential for a second-order parabolic system in the Dini classes], *VINITI RAN*, 16.04.92, No. 1294-V92 (in Russian).
17. M. Zeyneddin, "O potentsiale prostogo sloya dlya parabolicheskoy sistemy v klassakh Dini" [On the single layer potential for a parabolic system in the Dini classes], *PhD Thesis*, Moscow, 1992 (in Russian).
18. L. I. Kamynin, "Gladkost' teplovykh potentsialov v prostranstve Dini—Gel'dera" [Smoothness of the heat potentials in the Dini–Hölder space], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1970, **11**, No. 5, 1017–1045 (in Russian).
19. L. I. Kamynin, "K teorii Zhevre dlya parabolicheskikh potentsialov. VI" [To the Gevrey theory for parabolic potentials. VI], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 6, 1015–1025 (in Russian).
20. L. I. Kamynin, "O reshenii metodom potentsialov osnovnykh kraevykh zadach dlya odnomernogo parabolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka" [On the application of the potentials method to solution of principal boundary-value problems for a second-order one-dimensional parabolic equation], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1974, **15**, No. 4, 806–834 (in Russian).
21. L. I. Kamynin, "Prilozheniya parabolicheskikh potentsialov Pan'i k kraevym zadacham matematicheskoy fiziki. I" [Applications of the parabolic Pagni potentials to boundary-value problems in mathematical physics. I], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1990, **26**, No. 5, 829–841 (in Russian).

22. I. G. Petrovskiy, “O probleme Koshi dlya sistem lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi v oblasti neanaliticheskikh funktsiy” [On the Cauchy problem for systems of linear partial differential equations in the area of nonanalytic functions], *Byull. MGU. Sekts. A* [Bull. Moscow State Univ. Sec. A], 1938, **1**, No. 7, 1–72 (in Russian).
23. Kh. M. Semaan, “O reshenii vtoroy kraevoy zadachi dlya parabolicheskikh sistem v oblastyakh na ploskosti s negladkoy bokovoy granitsey” [On solution of the second boundary-value problem for parabolic systems in plane domains with nonsmooth lateral boundary], *VINITI RAN* [VINITI Russ. Acad. Sci.], 26.02.99, No. 567-V99.
24. V. A. Tveritinov, “Gladkost’ potentsiala prostogo sloya dlya parabolicheskoy sistemy vtorogo poryadka” [Smoothness of the single layer potential for a second-order parabolic system], *VINITI AN SSSR* [VINITI Acad. Sci. USSR], 02.09.88, No. 6850-V88.
25. V. A. Tveritinov, “Reshenie vtoroy kraevoy zadachi dlya parabolicheskoy sistemy s odnoy prostranstvennoy peremennoy metodom granichnykh integral’nykh uravneniy” [Solution of the second boundary-value problem for a parabolic system with one spatial variable by means of boundary integral equations], *VINITI AN SSSR* [VINITI Acad. Sci. USSR], 15.11.89, No. 6906-V89.
26. A. N. Tikhonov, “O funktsional’nykh uravneniyakh tipa Volterra i ikh primeneniyakh k nekotorym zadacham matematicheskoy fiziki” [On functional equations of Volterra type and their applications to some problems of mathematical physics], *Byull. MGU. Sekts. A* [Bull. Moscow State Univ. Sec. A], 1938, **1**, No. 8, 1–25 (in Russian).
27. A. Fridman, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial Differential Equations of Parabolic Type], Mir, Moscow, 1968 (in Russian).
28. M. F. Cherepova, “Reshenie metodom potentsiala I-oy kraevoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya 2-go poryadka v netsilindricheskoy oblasti” [Solution by the potential method of the first boundary-value problem for a second-order parabolic equation in a noncylindric domain], *VINITI AN SSSR* [VINITI Acad. Sci. USSR], 11.01.85, No. 361-85-Dep.
29. M. F. Cherepova, “O zadache Bitsadze—Samarskogo dlya parabolicheskogo uravneniya” [On the Bitsadze–Samarskii problem for a parabolic equation], *Vestnik Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1986, No. 4, 74–76 (in Russian).
30. M. F. Cherepova, “Ob otsenkakh prostranstvennykh proizvodnykh vtorogo poryadka dlya parabolicheskogo potentsiala prostogo sloya” [On estimates of second-order spatial derivatives for the parabolic single layer potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1996, **32**, No. 4, 545–549 (in Russian).
31. M. F. Cherepova, “O razreshimosti kraevykh zadach dlya parabolicheskogo uravneniya vysokogo poryadka s rastushchimi koeffitsientami” [On solvability of boundary-value problems for a higher-order parabolic equation with growing coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2006, **411**, No. 2, 171–172 (in Russian).
32. M. F. Cherepova, “O razreshimosti kraevykh zadach dlya parabolicheskogo uravneniya s rastushchimi vblizi granitsy koeffitsientami” [On solvability of boundary-value problems for a parabolic equation with growing near the boundary coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2007, **43**, No. 1, 110–121 (in Russian).
33. M. F. Cherepova, “Kraevye zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya vysokogo poryadka s rastushchimi koeffitsientami” [Boundary-value problems for a higher-order parabolic equation with growing coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2008, **44**, No. 4, 507–516 (in Russian).
34. S. D. Eydel’man, *Parabolicheskie sistemy* [Parabolic Systems], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
35. E. A. Baderko, “Parabolic problems and boundary integral equations,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 1997, **20**, 449–459.
36. K. K. Martynova and M. F. Cherepova, “Estimates for the derivative of parabolic simple layer potential in the Dini space,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2016, **219**, No. 6, 973–993.

E. A. Baderko
Lomonosov Moscow State University,
Faculty of Mechanics and Mathematics,
1 Leninskiye Gory, 119991 Moscow GSP-1, Russia
E-mail: baderko.ea@yandex.ru

M. F. Cherepova
National Research University “Moscow Power Engineering Institute,”
14 Krasnokazarmennaya st., 111250 Moscow, Russia
E-mail: CherepovaMF@mpei.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 37–59

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-37-59 УДК 517.958

ЭНТРОПИЯ ПО БОЛЬЦМАНУ И ПУАНКАРЕ, ЭКСТРЕМАЛИ БОЛЬЦМАНА И МЕТОД ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ В НЕГАМИЛЬТОНОВОЙ СИТУАЦИИ

© 2018 г. **В. В. ВЕДЕНЯПИН, С. З. АДЖИЕВ, В. В. КАЗАНЦЕВА**

Аннотация. В работе доказывается H-теорема для обобщений уравнений химической кинетики. Рассматриваются важные физические примеры такого обобщения: дискретные модели квантовых кинетических уравнений (уравнений Улинга—Уленбека) и квантовый марковский процесс (квантовое случайное блуждание). Доказывается совпадение временных средних с экстремалями по Больцману для всех таких уравнений, а также для уравнения Лиувилля. Это служит основой для выбора переменных действие—угол в методе Гамильтона—Якоби в негамильтоновой ситуации. Предлагается простейший вывод уравнения Гамильтона—Якоби из уравнений Лиувилля в конечномерном случае.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Метод Гамильтона—Якоби считается «самым могущественным методом нахождения общего интеграла уравнений движения» [31].

Этот метод использует две идеи: подходящая замена переменных и уравнение Гамильтона—Якоби как способ получения тех уравнений, где данная замена применима. Ранее было показано, что уравнение Гамильтона—Якоби получается из уравнения неразрывности или Лиувилля гидродинамической подстановкой, изобретенной для уравнения Власова и являющейся распределением Максвелла с нулевой температурой. Здесь мы обобщаем эту конструкцию на бесконечномерный случай, изучая возможность метода Гамильтона—Якоби в негамильтоновой ситуации. Для оптимального выбора замены переменных хорошо подходит теорема о совпадении временного среднего с экстремалями Больцмана. На этом пути удается показать, что часто существуют аналоги переменных действие—угол даже в неинтегрируемых ситуациях.

H-теорема впервые была рассмотрена Больцманом в работе «Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen» (1872) [6, 44]. Эту теорему, обосновывающую сходимость решений уравнений типа Больцмана к максвелловскому распределению, Больцман связал с законом возрастания энтропии.

Первую главу Больцман посвящает уравнению, которое мы сегодня назвали бы пространственно однородным уравнением Больцмана с зависимостью функции распределения только от модуля скорости (от квадрата скорости или энергии, которую он называет «живой силой»). Именно для этого уравнения Больцман доказывает H-теорему.

Вторая глава называется «Замена интегралов суммами» — там появляются простейшие дискретные модели уравнения Больцмана. Одна из них похожа на трехскоростную модель, которую мы назвали бы сейчас моделью Годунова—Султангазина, или одномерной моделью Бродуэлла [21] (см. систему (1.1) ниже).

В этой же главе появляется принцип максимума энтропии и объясняется, что стационар можно получать без решения уравнения. Итак, Больцман определяет здесь экстремаль Больцмана для простейшей дискретной модели.

В [6, гл. 2, сноска на с. 156] формулируется принцип максимума энтропии. Рассматривается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} &du_1/dt = B\left(u_2^2 - u_1u_3\right), \\ &\sqrt{2}du_2/dt = 2B\left(u_1u_3 - u_2^2\right), \\ &\sqrt{3}du_3/dt = B\left(u_2^2 - u_1u_3\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Доказывается, что функционал

$$E\left(u\right) = u_1 \ln u_1 + \sqrt{2}u_2 \ln u_2 + \sqrt{3}u_3 \ln u_3 \tag{1.2}$$

убывает в силу системы (1.1):

$$\frac{dE}{dt} = B\left(u_2^2 - u_1u_3\right) \ln \frac{u_1u_3}{u_2^2} \leqslant 0. \tag{1.3}$$

После этого делается вывод, что решения системы сходятся к своему стационару. Больцман использует сохраняющиеся линейные функционалы для поиска стационара по начальному условию. В случае уравнения (1.1) это

$$A\left(u\right) = u_1 + \sqrt{2}u_2 + \sqrt{3}u_3 = a, \quad B\left(u\right) = u_1 + 2\sqrt{2}u_2 + 3\sqrt{3}u_3 = b. \tag{1.4}$$

Отметим, что система (1.1), как и вообще дискретные модели в работе [6, 44], отличаются от уравнений химической кинетики (и от современных общепринятых дискретных моделей уравнения Больцмана) как формой коэффициентов уравнения, так и формой H-функции. Это связано с тем, что функция распределения в [6,44] зависит от квадрата скорости, а не от скорости или импульса.

Чтобы определить, к чему сходится произвольное решение уравнения (1.1), надо найти минимум функционала (1.2) при условиях (1.4), где постоянные a и b находятся из начальных условий. Это и есть экстремаль Больцмана. Фундаментальность этого понятия Больцман подчеркнул в работе [7, 45].

В [7, 45] из принципа максимума энтропии при фиксации энергии и числа частиц получается формула для наиболее вероятного распределения (теплового равновесия). Эта работа известна «статистикой Больцмана». Но во второй ее главе Больцман старается найти наиболее вероятное распределение и формулирует для этого следующий вариационный принцип (принцип Больцмана). Он выписывает три следующих интеграла один под другим:

$$M' = \int\limits_0^\infty f\left(x\right) \ln f\left(x\right) dx, \tag{1.5}$$

$$n = \int\limits_0^\infty f\left(x\right) dx, \tag{1.6}$$

$$L = \int\limits_0^\infty x f\left(x\right) dx. \tag{1.7}$$

Функция распределения $f\left(x\right)$ есть плотность кинетической энергии x, а выражения (1.5)–(1.7) суть соответственно энтропия с обратным знаком, число частиц и полная кинетическая энергия.

Больцман ищет минимум функционала

$$\int\limits_0^\infty \left[f\left(x\right) \ln f\left(x\right) + k f\left(x\right) + h x f\left(x\right)\right] dx \tag{1.8}$$

с неопределенными множителями Лагранжа k и h.

Варьирование этого выражения дает искомое распределение

$$f(x) = Ce^{-hx}. \tag{1.9}$$

Получающиеся из этого вариационного принципа (1.8) стационары (1.9) будем называть экстремалями Больцмана. Больцман исследует вторую вариацию, доказывает ее положительность и находит минимум функционала. Этот прием может быть использован во многих динамических задачах, что мы в дальнейшем и продемонстрируем.

В настоящей работе доказывается H-теорема для обобщений уравнений химической кинетики. Доказывается также, что понятие экстремали Больцмана существует и в этом случае. Однако появляются и новые особенности: в связи с тем, что функционал энтропии может быть невыпуклым, вообще говоря, стационар не единственный.

Итак, мы продолжаем линию работы Больцмана, стараясь расширить класс уравнений, для которых справедлив закон возрастания энтропии. Такая работа проводилась многими учеными в связи с несколькими вопросами. Доказательство H-теоремы делает поведение решения уравнения понятным, так как позволяет узнать, к чему сходится решение для данного уравнения при стремлении времени к бесконечности. Это можно сделать без решения уравнения на основе принципа максимума энтропии. Во-вторых, H-теорема обеспечивает устойчивость полученных стационарных решений (экстремалей по Больцману).

Кроме того, не иссякает интерес к пониманию энтропии и ее связям с парадоксами Лошмидта и Цермело—Пуанкаре. Вопрос Лошмидта — как из обратимых уравнений механики получается необратимость и рост энтропии? Вопрос Цермело — не противоречит ли рост энтропии теореме о возврате Пуанкаре? Вопросы были обращены к Больцману, давшему в работе [6, 44] доказательство H-теоремы. Ответом на эти возражения могло бы служить сравнение разных моделей, которые применяются для описания поведения большого числа объектов. В частности, сравнение уравнения Лиувилля с его дискретизацией: когда их свойства близки, и правильно ли одно дает асимптотику другого при времени, стремящемся к бесконечности?

Диссипативные свойства уравнения Лиувилля были «нащупаны» уже Пуанкаре в работе [37] в 1906 г. Работа Пуанкаре [37] показала на примерах, что, несмотря на сохранение энтропии для уравнения Лиувилля, асимптотически она растет при стремлении времени к бесконечности. Эти результаты были доказаны и обобщены на случай произвольной гамильтоновой системы в работах В. В. Козлова и Д. В. Трещева [27,29]. Оказывается, что понятие экстремали по Больцману можно перенести с уравнений типа Больцмана без изменений на уравнения Лиувилля. При этом сохраняется основное свойство — совпадение временного среднего с экстремалью по Больцману [1, 11]. В разделе 5 настоящей работы мы рассматриваем случай уравнения Лиувилля, обобщая результаты [1, 11]. Предел при времени, стремящемся к бесконечности, здесь не всегда существует, в отличие от уравнений типа дискретных моделей уравнения Больцмана. Но для уравнения Лиувилля всегда существует временное среднее (его называют иногда средним по Чезаро [1,11,27,29]) — это статистическая эргодическая теорема фон Неймана [38]. Но в случае наличия предела даже в слабой форме он совпадает с временным средним.

В случае обобщений уравнений химической кинетики, в разделах 2-3, мы доказываем сходимость к экстремалям по Больцману, и здесь не требуется средних по Чезаро, так как предел при времени, стремящемся к бесконечности, существует. Таким образом, показывается, что во всех описанных случаях система сходится «туда, куда нужно» — к стационару, выделяющемуся максимумом энтропии при условиях линейных законов сохранения.

Роль именно линейных законов сохранения остается несколько загадочной и удивительной. Эти общие свойства для обратимого уравнения Лиувилля и необратимых дискретных моделей уравнения Больцмана, возможно, проясняют связь между обратимостью и необратимостью. При дискретизации уравнения надо тщательно следить за линейными (и только такими) законами сохранения: их следует оставлять ровно столько, сколько в исходном уравнении Лиувилля (если вообще возможно говорить о сопоставлении конечномерного пространства интегралов компьютера и бесконечномерного пространства интегралов исходного уравнения Лиувилля). При дискретизации любого уравнения Лиувилля всегда требуют сохранении числа частиц и сохранения свойства положительности, а любой линейный оператор, удовлетворяющий этим двум свойствам в конечномерном случае, дает стохастическую матрицу и определяет марковский процесс. Периодические траектории при дискретизации по пространству как бы совсем теряются — в этом смысле труднее всего моделировать уравнение Лиувилля для осциллятора. Дальнейшая дискретизация времени дает марковские цепи и возвращает периодические траектории (см. [1]).

Цели настоящего обзора следующие.

1. Написать обыкновенные дифференциальные уравнения, для которых имеется теорема о росте энтропии (H-теорема Больцмана), максимально обобщив результаты работ [5–8, 10, 12, 15, 19, 21, 24, 30, 32, 33, 36, 39, 42, 44, 45, 48–50], для квантового вида энтропии в случаях Бозе и Ферми и для произвольного вида H-функции.
2. Вывести формулу для относительной энтропии в квантовом случае и в случае общего вида H-функции.
3. Получить формулу относительной энтропии для уравнения Лиувилля, определяемой произвольной выпуклой функцией, обобщая этим результаты работ [1, 11, 27, 29, 37, 38, 48, 50]. Относительная энтропия требуется для систем, у которых дивергенция скорости не равна нулю.
4. Проверить, что во всех этих случаях временные средние совпадают с экстремалями Больцмана, обобщая и упрощая результаты работ [1, 5–8, 10–12, 15, 18, 19, 21, 22, 24, 27, 29, 30, 32, 33, 36–39, 42, 44, 45, 48–50].
5. Вывести уравнение Гамильтона—Якоби простейшим способом в конечномерном случае и обосновать появление переменных действие—угол в неинтегрируемой ситуации с помощью экстремалей Больцмана.
6. Обобщить теорему о совпадении временных средних и экстремалей Больцмана на представления групп. Проиллюстрировать теорему о росте энтропии по Пуанкаре и парадоксы необратимости в простейших случаях.

2. Модели химической кинетики

Пусть есть смесь из n химически взаимодействующих веществ с пространственно однородными концентрациями. Обозначим через $f_i(t)$ концентрацию i-го вещества $(i = 1, 2, \dots, n)$ в момент времени t.

В общем виде уравнения для сложных химических реакций записываются в виде [5, 10, 19]:

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{(\alpha,\beta)\in\Im} (\beta_i - \alpha_i) \left(K_\beta^\alpha \mathbf{f}^\alpha - K_\alpha^\beta \mathbf{f}^\beta\right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.1}$$

Здесь через $\mathbf{f}^\alpha$ обозначено произведение $\mathbf{f}^\alpha = f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} \dots f_n^{\alpha_n}$, суммирование ведется по некоторому конечному множеству $\Im$ мультииндексов (α, β), $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — векторы с целочисленными неотрицательными компонентами. Мультииндекс (α, β) соответствует элементарной реакции

$$\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_n S_n \to \beta_1 S_1 + \beta_2 S_2 + \ldots + \beta_n S_n, \quad (\alpha, \beta) \in \Im,$$

S_i — химические символы реагирующих веществ, $K_\beta^\alpha \geqslant 0$ — коэффициенты скоростей реакций (константы реакций). Коэффициенты α_i, β_i называются *стехиометрическими коэффициентами*. Без ограничения общности можно считать множество $\Im$ симметричным относительно перестановок α и β. При этом некоторым парам (α, β) могут соответствовать нулевые коэффициенты скоростей реакций: $K_\beta^\alpha = 0$, при том, что возможно $K_\alpha^\beta > 0$ (допускается необратимость реакций). Например, для реакции $2S_1 + S_2 \to 2S_3$ имеем $\alpha = (2, 1, 0)$, $\beta = (0, 0, 2)$ и пару, симметричную ей. Тогда система (2.1) принимает вид:

$$df_1/dt = 2\left(k_2 f_3^2 - k_1 f_1 f_2^2\right),$$
$$df_2/dt = k_2 f_3^2 - k_1 f_1 f_2^2,$$
$$df_3/dt = 2\left(k_1 f_1 f_2^2 - k_2 f_3^2\right),$$

где k_1 — константа скорости прямой реакции $2S_1 + S_2 \to 2S_3$, а k_2 — обратной к ней: $2S_3 \to 2S_1 + S_2$.

Приведем еще пример: для реакции образования аммиака $N_2 + 3H_2 \to 2NH_3$ имеем $\alpha = (1, 3, 0)$, $\beta = (0, 0, 2)$ и пару, симметричную ей.

В [5, 10] представлена классификация уравнений химической кинетики (2.1) по энтропийному принципу: $S \subset D \subset E \subset C$, где через C обозначен класс всех систем (2.1) с конечным числом реакций, E — это класс систем, для которых выполняется условие динамического равновесия, и это, как показано в [5,10], гарантирует возрастание энтропии, D — класс систем (2.1) с детальным равновесием, S — класс систем с симметричными константами реакций, т. е. систем, для которых $K_\beta^\alpha = K_\alpha^\beta$. Эти понятия будут объяснены ниже в разделе 3 в более общей ситуации.

Если множество $\Im$ содержит только единичные векторы (т. е. векторы, у которых одна из компонент равна единице, а остальные равны нулю), то система (2.1) является линейной. Линейная система (2.1) — это уравнение марковского процесса.

Далее мы изучим системы уравнений более общего вида, чем (2.1). Важные физические примеры таких систем, которые будут рассмотрены в разделе 3 — дискретные модели квантовых кинетических уравнений и квантовые марковские процессы.

Все уравнения, которые мы привели выше, для которых имеет место H-теорема, обладают следующим фундаментальным свойством: для получения предела, к которому стремится решение при времени, стремящемся к бесконечности, нет необходимости решать уравнение, а можно найти условный максимум энтропии (H-функция с обратным знаком) при фиксированных линейных законах сохранения. Это мы проиллюстрируем в следующем разделе, а в дальнейшем мы расширим это свойство на произвольное уравнение Лиувилля и даже в теории представлений групп. Мы следуем в этих двух разделах статье [2], имея ввиду объединить результаты о совпадении временного среднего с экстремалями Больцмана этой статьи и понятия действие—угол из теории Гамильтона—Якоби.

3. Примеры

Пример 3.1. Дискретные модели квантовых кинетических уравнений (уравнений Улинга—Уленбека) [12] для смесей.

Пусть движение частиц происходит в d-мерном пространстве, $d = 1, 2, 3$. Пусть в классическом случае $f_i(t, \mathbf{x})$ — функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ в момент времени t, имеющих массу m_i и импульс $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Среди масс m_i могут быть и совпадающие. Про квантовый случай см. в [30]. Пусть скорость изменения функции $f_i(t, \mathbf{x})$ в результате взаимодействия частиц есть $F_i(f_1, \ldots, f_n)$. Тогда в пространственно однородном случае имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{df_i}{dt} = F_i(f_1, \ldots, f_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.1}$$

Если i-е вещество движется со скоростью $v_i \in \mathbb{R}^n$, то получаем следующую систему уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + (v_i, \frac{\partial f_i}{\partial x}) = F_i(f_1, \ldots, f_n).$$

Здесь $(v_i, \frac{\partial f_i}{\partial x})$ — скалярное произведение скорости v_i и градиента $\frac{\partial f_i}{\partial \vec{x}} = (\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n})$. Эта система называется *дискретной моделью* квантового кинетического уравнения, если F_i моделирует интеграл столкновений:

$$F_i(f_1, \ldots, f_n) = \sum_{k,l,j} \sigma_{kl}^{ij} (1 + \theta f_i)(1 + \theta f_j)(1 + \theta f_k)(1 + \theta f_l)(h_k h_l - h_i h_j), \tag{3.2}$$

где $i = 1, \ldots, n$, $h_i = f_i/(1 + \theta f_i)$, $\sigma_{kl}^{ij} = \sigma_{ij}^{kl} = \sigma_{kl}^{ji} = \sigma_{lk}^{ij}$; $\theta = 1$ для бозонов, $\theta = -1$ для фермионов, $\theta = 0$ для дискретных моделей уравнения Больцмана. Суммирование ведется по таким k, l, j, которые участвуют в выбранных заранее взаимодействиях (столкновениях, реакциях) $(i, j) \leftrightarrow (k, l)$: для них $\sigma_{kl}^{ij} \neq 0$. Это множество четверок индексов $((i, j), (k, l))$, являющихся неупорядоченными парами неупорядоченных пар индексов, обозначим через S. Выбранные столкновения таковы, что для каждого из них удовлетворяются законы сохранения импульса и энергии:

$$\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j = \mathbf{p}_k + \mathbf{p}_l, \quad \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + \frac{\mathbf{p}_j^2}{2m_j} = \frac{\mathbf{p}_k^2}{2m_k} + \frac{\mathbf{p}_l^2}{2m_l},$$

где $m_i = m_k$, $m_j = m_l$.

Подчеркнем, что запись (3.1), (3.2) с совпадающими массами удобна тем, что позволяет избежать двуиндексных обозначений: реальное количество разных масс значительно меньше n.

В классическом случае (т. е. при $\theta = 0$) дискретная модель (3.1), (3.2) является системой уравнений химической кинетики. Далее рассмотрим простейший пример уравнений такого вида.

Пример 3.2. Классическая и квантовая пространственно однородная модель Карлемана.

Пространственно однородная модель Карлемана [24] — это система двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{dt} = \sigma\left(f_2^2 - f_1^2\right), \\ \dfrac{df_2}{dt} = \sigma\left(f_1^2 - f_2^2\right). \end{cases} \tag{3.3}$$

Она является системой уравнений химической кинетики с одной обратимой реакцией вида $2S_1 \to 2S_2$: частицы одного сорта, взаимодействуя с собой, дают частицы второго сорта. (В данном случае константы прямой и обратной реакции равны — симметричный случай.)

Квантовая пространственно однородная модель Карлемана [12] — это система

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{dt} = \sigma\left(1+\theta f_1\right)^2\left(1+\theta f_2\right)^2\left(h_2^2 - h_1^2\right), \\ \dfrac{df_2}{dt} = \sigma\left(1+\theta f_1\right)^2\left(1+\theta f_2\right)^2\left(h_1^2 - h_2^2\right), \end{cases} \tag{3.4}$$

где $h_i = f_i/(1+\theta f_i)$ $(i = 1, 2)$, θ то же, что и в примере 3.1.

Отметим, что для модели Карлемана нет сохранения ни импульса, ни энергии, а есть только закон сохранения числа частиц: $f_1 + f_2 = \mathrm{const}$.

Следующий пример обобщает оба примера 3.1 и 3.2, а также уравнения химической кинетики (2.1) и уравнения квантовой химической кинетики с симметричными константами $(K_\beta^\alpha = K_\alpha^\beta)$ на случай произвольного вида энтропии. Это позволяет получить самый простой способ доказательства H-теоремы с единой точкой зрения на столь различные ситуации.

Пример 3.3 (см. [10, 15])**.** Обобщение уравнений химической кинетики на случай произвольной H-функции, включающий квантовую химическую кинетику, но с симметричными коэффициентами. Это, видимо, простейшее доказательство H-теоремы, когда общность резко упрощает доказательство.

Пусть $H(\mathbf{f})$ некоторая функция и

$$h_i = \exp\left(\partial H/\partial f_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Пусть $\sigma_\beta^\alpha(\mathbf{f})$ — набор положительных функций таких, что $\sigma_\beta^\alpha(\mathbf{f}) = \sigma_\alpha^\beta(\mathbf{f})$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{(\alpha,\beta)\in\Im}\left(\beta_i - \alpha_i\right)\sigma_\beta^\alpha(\mathbf{f})\left(\mathbf{h}^\alpha - \mathbf{h}^\beta\right). \tag{3.6}$$

Функционал H является убывающим в силу (3.6):

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{(\alpha,\beta)\in\Im}\sigma_\beta^\alpha(\mathbf{f})\left(\nabla H, \beta - \alpha\right)\left(\exp\left(\nabla H, \alpha\right) - \exp\left(\nabla H, \beta\right)\right) \leqslant 0. \tag{3.7}$$

вследствие неравенства $(x-y)\left(e^y - e^x\right) \leqslant 0$.

Если в качестве $H(\mathbf{f})$ взять стандартную энтропию со знаком минус: $H(\mathbf{f}) = \sum\limits_{i=1}^n f_i\left(\ln f_i - 1\right)$, $\dfrac{\partial H(\mathbf{f})}{\partial f_i} = \ln f_i$, то согласно (3.5) $\mathbf{h} = \mathbf{f}$, а если квантовую: $H(\mathbf{f}) = \sum\limits_{i=1}^n\left(f_i\ln f_i - \theta^{-1}\left(1+\theta f_i\right)\ln\left(1+\theta f_i\right)\right)$, $\dfrac{\partial H(\mathbf{f})}{\partial f_i} = \ln\left(f_i/(1+\theta f_i)\right)$, то $h_i = f_i/(1+\theta f_i)$. Мы получаем классические и квантовые модели, рассмотренные ранее, а неравенство (3.7) обеспечивает выполнение H-теоремы.

Далее рассмотрим примеры, в которых коэффициенты не симметричны. В рассмотренных дискретных моделях они были симметричны, поскольку такая симметрия присутствует в уравнении Больцмана и в уравнениях Улинга—Уленбека. Но если рассматривается задача рассеивания одного сорта частиц на частицах другого сорта с заданной функцией распределения, то в классическом случае получается линейное уравнение Больцмана для функции распределения частиц первого из сортов, а при его дискретизации (по импульсам) — марковский процесс (или случайное блуждание), где коэффициенты, вообще говоря, не симметричны. В квантовом случае получается квантовый марковский процесс. Их мы и рассмотрим в следующих примерах.

Пример 3.4. Случайное блуждание с двумя состояниями и его обобщения. Случайное блуждание (марковский процесс) с двумя состояниями описывается линейной системой двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{dt} = K_1^2 f_2 - K_2^1 f_1, \\ \dfrac{df_2}{dt} = K_2^1 f_1 - K_1^2 f_2, \end{cases} \tag{3.8}$$

квантовое случайное блуждание с двумя состояниями — системой

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{dt} = (1+\theta f_1)(1+\theta f_2)\left(K_1^2 h_2 - K_2^1 h_1\right), \\ \dfrac{df_2}{dt} = (1+\theta f_1)(1+\theta f_2)\left(K_2^1 h_1 - K_1^2 h_2\right), \end{cases} \tag{3.9}$$

где $h_i = f_i/(1+\theta f_i)$ $(i = 1, 2)$.

Функционал H, определяемый соотношениями (3.5), уже не будет убывающим в случае несимметричных коэффициентов. Поэтому запишем обобщение систем (3.8) и (3.9) в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{dt} = \sigma(\mathbf{f})\left(K_1^2 h_2 - K_2^1 h_1\right), \\ \dfrac{df_2}{dt} = \sigma(\mathbf{f})\left(K_2^1 h_1 - K_1^2 h_2\right), \end{cases} \tag{3.10}$$

где $h_i = \exp\left(\partial G(\mathbf{f})/\partial f_i\right)$ $(i = 1, 2)$.

Пусть ξ является стационарным решением (3.10):

$$K_1^2 \exp\left(\frac{\partial G(\xi)}{\partial f_2}\right) = K_2^1 \exp\left(\frac{\partial G(\xi)}{\partial f_1}\right).$$

Тогда функционал $H(\mathbf{f}) \equiv G(\mathbf{f}) - (\nabla G(\xi), \mathbf{f})$ убывает вдоль решений системы (3.10):

$$\frac{dH(\mathbf{f})}{dt} = \left(\left(\frac{\partial G(\mathbf{f})}{\partial f_1} - \frac{\partial G(\xi)}{\partial f_1}\right) - \left(\frac{\partial G(\mathbf{f})}{\partial f_2} - \frac{\partial G(\xi)}{\partial f_2}\right)\right) \times$$

$$\times \sigma(\mathbf{f})\left(K_1^2 \exp\left(\frac{\partial G(\mathbf{f})}{\partial f_2}\right) - K_2^1 \exp\left(\frac{\partial G(\mathbf{f})}{\partial f_1}\right)\right) =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial G(\mathbf{f})}{\partial f_1} - \frac{\partial G(\xi)}{\partial f_1}\right) - \left(\frac{\partial G(\mathbf{f})}{\partial f_2} - \frac{\partial G(\xi)}{\partial f_2}\right)\right) \sigma(\mathbf{f})\, K_1^2 \exp\left(\frac{\partial G(\xi)}{\partial f_2}\right) \times$$

$$\times \left(\exp\left(\frac{\partial G(\mathbf{f})}{\partial f_2} - \frac{\partial G(\xi)}{\partial f_2}\right) - \exp\left(\frac{\partial G(\mathbf{f})}{\partial f_1} - \frac{\partial G(\xi)}{\partial f_1}\right)\right) \leqslant 0.$$

в силу неравенства $(x-y)\left(e^y - e^x\right) \leqslant 0$.

Система (3.8) представляет собой систему уравнений химической кинетики с одной обратимой реакцией вида $S_1 \to S_2$. Система (3.9) также является системой уравнений химической кинетики, и ее еще называют системой уравнений квантовой химической кинетики. Условие, при котором справедлива H-теорема, для этого примера формулируется так: существует вектор ξ такой, что $K_2^1 \xi_1/(1+\theta\xi_1) = K_1^2 \xi_2/(1+\theta\xi_2)$, и с помощью его выбора можно получить любые K_1^2 и K_2^1.

Пример 3.5. Квантовый марковский процесс (квантовое случайное блуждание) с произвольным конечным числом состояний. Он описывается системой уравнений вида:

$$\frac{df_m}{dt} = \sum_j (1+\theta f_m)(1+\theta f_j)\left(K_m^j h_j - K_j^m h_m\right), \tag{3.11}$$

где $m = 1, \ldots, n$, $h_m = f_m/(1+\theta f_m)$.

Во всех этих случаях H-теорема позволяет находить стационарное решение, к которому стремится произвольное решение из принципа Больцмана условного максимума энтропии, т. е. не решая уравнения.

В следующих разделах мы предложим приложение данной идеологии к методу Гамильтона—Якоби в негамильтоновой ситуации. В разделе 4 будет выведено уравнение Гамильтона—Якоби из уравнения Лиувилля и при этом сразу в бесконечномерном случае. В разделе 5 мы получим теорему о совпадении временных средних с экстремалями Больцмана по аналогии с разделами 1–3. Это даст нам аналоги переменных действие—угол в негамильтоновой и неинтегрируемой ситуации. В разделе 6 мы рассмотрим этот вопрос для представлений групп.

4. Метод Гамильтона—Якоби в негамильтоновой ситуации

Связь между уравнениями Гамильтона и Гамильтона—Якоби известна и обсуждается во многих учебниках по механике [4,31], но со студенческой скамьи один из авторов (В. В. В.) не был удовлетворен ситуацией: сами уравнения вообще ниоткуда не следовали и был скрыт их геометрический смысл. На одной из лекций В. В. Козлова этот автор увидел, что уравнения Гамильтона—Якоби получаются из некоторого уравнения, названного В. В. Козловым уравнением Лэмба, но откуда берутся сами уравнения Лэмба, было неясно. Автор заподозрил, что уравнения могут быть получены из уравнения Лиувилля гидродинамической подстановкой, и это оправдалось. Сам Козлов ссылался на работы Аржаных и Долматова [3, 23], но в его последующих работах все было проще и короче [25, 26, 28]. Так получился простейший вывод уравнений Гамильтона—Якоби, при этом уравнения Лэмба были обобщены на негамильтонову ситуацию [13, 14, 16, 17, 52]. Был также прояснен смысл этих обобщенных уравнений Лэмба: это уравнение движения m-мерных поверхностей в n-мерном фазовом пространстве исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений. Уравнения Лэмба в гамильтоновом случае в средней размерности ведут к уравнениям Гамильтона—Якоби дальнейшей градиентной подстановкой (Аржаных—Долматов—Козлов) и таким образом приводят к лагранжевым многообразиям, введенным В. П. Масловым [34, 35]. Уравнения Лэмба обладают тем замечательным свойством, что для них, как правило, имеет место градиентная катастрофа или опрокидывание фронтов — одна из излюбленных тем В. И. Арнольда [4]: этим он занимался под влиянием Я. Б. Зельдовича, когда тот строил крупномасштабную теорию Вселенной (блинная теория Зельдовича). Об этом одному из авторов (В. В. В.) красочно рассказывал С. Ф. Шандарин: «*Арнольд мне присылает список особенностей, а я посчитаю, и говорю ему, что там есть еще. Он поищет аналитически, снова присылает список*». Так что теория гамильтоновых особенностей тоже связана с уравнениями типа Лэмба и гидродинамической подстановкой.

Рассмотрим Гамильтоновы канонические уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}}, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{p}$ — импульсы и $\mathbf{x}$ — пространственные переменные из $\mathbb{R}^n$.

Уравнение Лиувилля для функции распределения $f(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{t})$, полученное из (4.1), будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) = 0. \tag{4.2}$$

В уравнении Власова изучается подстановка $f(\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{t}) = \rho(\mathbf{x},\mathbf{t})\delta(\mathbf{p}-\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{t}))$ (так называемая *гидродинамическая подстановка*). Здесь $\delta(.)$ — функция Дирака, $\rho(\mathbf{x},\mathbf{t})$ и $\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{t})$ имеют смысл плотности частиц и импульса частиц в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t соответственно. Вывод уравнений для ρ и $\mathbf{Q}$ проводится прямым способом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{Q}) - \rho(\nabla\delta, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{t}}),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\delta - \rho(\nabla\delta, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i}) + \rho\frac{\partial \delta}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial f}{\partial p_i} = \rho\frac{\partial \delta}{\partial p_i}.$$

Собирая множители при δ-функции, получаем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial H}{\partial p_i}\right|_{p_i=Q_i}\frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho\,\mathrm{div}\left.\frac{\partial H}{\partial p_i}\right|_{p_i=Q_i}\right) = 0.$$

Здесь мы должны положить во 2-ом слагаемом после операции дифференцирования $\mathbf{p} = \mathbf{Q}$; обозначим для краткости $\mathbf{V} \equiv (\partial H/\partial \mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{Q}}$. Тогда получаем уравнение, совпадающее по виду с классическим уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho V_i) = 0,$$

так что по физическому смыслу можно называть величину $\mathbf{V} = (\partial \mathbf{H}(\mathbf{x},\mathbf{p})/\partial \mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{Q}(\mathbf{x},\mathbf{t})}$, введенную выше, «обобщенной скоростью».

Приравнивая выражения при производных дельта-функции, получаем второе уравнение:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} V_i\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} = \mathbf{F},$$

где $F_i(\mathbf{x},t) = -\partial H(\mathbf{x},\mathbf{Q}(\mathbf{x},t))/\partial x_i$ — компоненты обобщенной силы.

Итак, получаем систему уравнений (которую можно назвать редуцированной системой Эйлера или РСЭ), которая является точным следствием уравнения Лиувилля:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}}) = \mathbf{F}, \tag{4.3}$$

где обобщенные скорость $\mathbf{V}$ и сила $\mathbf{F}$ определены выше.

Рассмотрим альтернативный вышеизложенному вывод уравнений (4.3) с помощью уравнений моментов. Проинтегрируем уравнение Лиувилля (4.2), полагая $\rho = \int f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)d\mathbf{p}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}d\mathbf{p} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}d\mathbf{p}\right) = 0.$$

Второе слагаемое в скобках преобразуем, вынося $\partial/\partial x_i$ за знак интеграла, тогда учитывая, что $f = \rho(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{Q})$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int \frac{\partial H}{\partial p_i}\rho(\mathbf{x},t)\delta(\mathbf{p}-\mathbf{Q})\,d\mathbf{p} = \int \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i} f\,d\mathbf{p} + \int\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\,d\mathbf{p},$$

откуда имеем для второго слагаемого:

$$\int \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,d\mathbf{p} = \mathrm{div}(\rho\mathbf{V}) - \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i}(\mathbf{x},\mathbf{Q})\rho,$$

а третье слагаемое преобразуем, интегрируя по частям:

$$\int \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\,d\mathbf{p} = \rho\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial p_i}(\mathbf{x},\mathbf{Q}).$$

Это слагаемое сокращается с последним членом второго, и окончательно получаем уравнение неразрывности.

Чтобы получить второе из уравнений РСЭ, умножим (4.2) на $\mathbf{p}$ и, обозначая $\mathbf{Q}(\mathbf{x},t) = \rho^{-1}\int f(\mathbf{x},\mathbf{p},t)\mathbf{p}\,d\mathbf{p}$, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{Q}) + \sum_{i=1}^{n}\left(\int \mathbf{p}\frac{\partial f}{\partial x_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}d\mathbf{p} - \int \mathbf{p}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}d\mathbf{p}\right) = 0.$$

Делая преобразования, аналогичные рассмотренным выше при выводе уравнения неразрывности, имеем

$$\int \mathbf{p}\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}d\mathbf{p} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\mathbf{Q}V_i) - \rho\mathbf{Q}\frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial p_i}(\mathbf{x},\mathbf{Q}) - \int \mathbf{p}\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}d\mathbf{p} =$$

$$= \int \frac{\partial^2 H}{\partial x_i\partial p_i}\mathbf{p}\rho\delta(\mathbf{p}-\mathbf{Q})d\mathbf{p} + \rho\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x},\mathbf{Q}).$$

Получаем окончательно:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{Q})}{\partial t} + \int\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\mathbf{Q}V_i)\right) = \rho\mathbf{F}.$$

Последнее уравнение несколько отличается по внешнему виду от второго уравнения РСЭ (4.3), но приводится к таковому с привлечением уравнения неразрывности. Однако, вообще говоря, оно представляет и самостоятельный интерес, поэтому запишем РСЭ в новой форме:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad \frac{\partial(\rho\mathbf{Q})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{Q}\mathbf{V}) = \rho\mathbf{F}. \tag{4.4}$$

Второе из уравнений системы (4.3) совпадает с уравнением, выведенным в [25, 26, 28] из других соображений. Поэтому систему (4.3) или (4.4) можно считать выведенной из уравнений Гамильтона, как обоснование результатов этих работ. В работах [25, 26, 28] показывается, как из (4.3) получаются уравнения Гамильтона—Якоби. Во-первых, приведем второе уравнение (4.3) к форме Громеки—Лэмба [14, 25, 26, 28]:

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t} + V_i\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial x_i} - V_i\frac{\partial Q_i}{\partial\mathbf{x}} = -\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}} - \frac{\partial H}{\partial p_i}(\mathbf{x},\mathbf{Q})\frac{\partial Q_i}{\partial\mathbf{x}}. \tag{4.5}$$

Выражение $(\partial Q_i/\partial x_j)dx_i \wedge dx_j$ есть дифференциал от $Q_i dx_j$, и форма Громека показывает, что уравнение для ротора $R_{ij} = \partial Q_i/\partial x_j - \partial Q_j/\partial x_i$ имеет решение $\mathbf{R} \equiv 0$:

$$\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial t} + \operatorname{rot}[\mathbf{R},\mathbf{V}] = 0. \tag{4.6}$$

Мы воспользовались тем, что второе и третье слагаемое в левой части (4.5) — это компоненты векторного произведения $[\mathbf{R},\mathbf{V}]$, а справа стоит градиент функции:

$$\frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{Q})}{\partial x_i} = \frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{Q})}{\partial x_j} + \frac{\partial H(\mathbf{x},\mathbf{Q})}{\partial p_i}\frac{\partial Q_i}{\partial x_j}$$

(композиция $\operatorname{rot}\circ\operatorname{grad}$). Обратно, если ротор $\mathbf{Q}$ равен нулю, то $\mathbf{Q}$ есть градиент некоторой функции (в односвязной области): $Q_i = \partial S/\partial x_i$, и это свойство, как показывает уравнение (4.6), сохраняется со временем. Из (4.5) следует:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + H(\mathbf{x},\frac{\partial S}{\partial\mathbf{x}})\right) = 0.$$

Отсюда $\partial S/\partial t + H(\mathbf{x},\partial S/\partial\mathbf{x}) = f(t)$. Снова следуя [25, 26, 28] и делая замену $S = \tilde{S} + \int f(t)dt$, получаем чистое уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\mathbf{x},\frac{\partial S}{\partial\mathbf{x}}) = 0.$$

В частности, если $H = p^2/(2m) + U(\mathbf{x})$, то $\mathbf{V}(\mathbf{x},t) = (\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})/\partial\mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}/m$ (стандартная функция Гамильтона для классической частицы), $\mathbf{F} = -(\partial H(\mathbf{x},\mathbf{p})/\partial\mathbf{x})|_{\mathbf{p}=\mathbf{Q}} = -\partial U/\partial\mathbf{x}$. Система (4.3) в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{1}{m}\operatorname{div}(\rho\mathbf{Q}) = 0, \quad \frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{1}{m}(\nabla\mathbf{Q},\mathbf{Q}) = -\frac{\partial U}{\partial\mathbf{x}}.$$

Отметим, что в этом случае уравнение Гамильтона—Якоби имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S,\nabla S) + U(\mathbf{x}) = 0.$$

Итак, мы получили уравнение Гамильтона—Якоби простейшим способом. Аналогичные уравнения можно получить и для негамильтонова случая — гидродинамическая подстановка проходит (см. [16, 17, 52]). При этом класс получающихся уравнений совпадает с уравнениями с одинаковой главной частью.

Рассмотрим теперь общую (негамильтонову) автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в n-мерном пространстве:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}^1. \tag{4.7}$$

Введем вновь функцию распределения $f(\mathbf{x}, t)$ изображающих точек в n-мерном фазовом пространстве, представляющую собой вероятность пребывания точки траектории динамической системы в окрестности данной точки пространства $\mathbb{R}^n$ в момент времени t. Ее эволюция описывается обобщенным уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_n(\mathbf{v}f) = 0. \tag{4.8}$$

Чтобы описать движение m-мерной ($1 \leqslant m \leqslant n-1$) поверхности, представим вектор $\mathbf{x}$ как упорядоченную пару $(\mathbf{q}, \mathbf{p})^T$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n-m}$. Иначе говоря, разложим фазовое пространство системы в декартову сумму фазовых множеств, определяемых новыми переменными: $\mathbb{R}^n_{\mathbf{x}} = \mathbb{R}^m_{\mathbf{q}} \oplus \mathbb{R}^{n-m}_{\mathbf{p}}$. Перепишем систему (4.7) в этих переменных:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \frac{\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \tag{4.9}$$

где $\mathbf{w}(\mathbf{q},\ \mathbf{p})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{q},\ \mathbf{p})$ — это, соответственно, m первых и $n-m$ последних компонент векторной функции $\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ из (4.7) (т. е. $(\mathbf{w}, \mathbf{g})^T = \mathbf{v}$).

Будем искать решение уравнения Лиувилля (4.8), вновь используя гидродинамическую подстановку: $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \rho(\mathbf{q}, t)\delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}(\mathbf{q}, t))$. Здесь $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, t)$ — уравнение m-мерной поверхности в момент времени t, $\rho(\mathbf{q}, t)$ — плотность изображающих точек на ней. Подстановка данного представления $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ в уравнение (4.8) дает уравнение неразрывности и уравнение движения поверхности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial q_k}(\rho W_k) = 0, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{m} W_k \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial q_k} = \mathbf{G}. \tag{4.11}$$

Здесь $\mathbf{W}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{q}, t))$, $\mathbf{G}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \mathbf{P}(\mathbf{q}, t))$. Отсюда получаем уравнение Гамильтона—Якоби, как и выше в гамильтоновом случае.

Итак, в настоящем разделе мы получили вывод уравнения Гамильтона—Якоби простейшим способом. Метод Гамильтона—Якоби состоит из двух частей: уравнение Гамильтона—Якоби и выбор замены переменных. Мы получили, что на роль аналога уравнения Гамильтона—Якоби претендует любое из уравнений волновых фронтов (движения поверхностей) в евклидовом пространстве конечной размерности как в гамильтоновом, так и в негамильтоновом случаях. Действительно, уравнения Гамильтона—Якоби описывают движения n-мерных поверхностей в $2n$-мерном пространстве специального вида — лагранжевых, в терминологии В. П. Маслова и В. И. Арнольда [4, 20, 34]. В этом смысле уравнения волновых фронтов более общие и в гамильтоновой ситуации.

В следующем разделе мы обсуждаем вторую часть метода Гамильтона—Якоби: оптимальный выбор координат для данного уравнения. По сути, будет доказана теорема о существовании некого аналога переменных действие—угол в негамильтоновой неинтегрируемой ситуации.

5. Вариационный принцип для уравнения Лиувилля, экстремали Больцмана и переменные действие—угол

Специалисты по механике привыкли к тому, что переменные действие—угол появляются в интегрируемых случаях при наличии соответствующих интегралов в инволюции. Здесь, опираясь на теорему о совпадении временных средних с экстремалями Больцмана, мы предъявляем в негамильтоновом случае в неинтегрируемых ситуациях координаты, которые во многих случаях аналогичны переменным действие—угол. В каких смыслах — обсудим в конце раздела.

Рассмотрим систему n обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \tag{5.1}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}), \ldots, v_n(\mathbf{x}))$, $v_i(\mathbf{x})$ — непрерывно дифференцируемые функции.

Рассмотрим уравнение неразрывности или уравнение Лиувилля для этой системы:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} f\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0. \tag{5.2}$$

Пусть решение системы (5.1) существует и единственно при всех временах (т. е. в целом). Если она бездивергентна: $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$, то решение уравнения (5.2) можно записать в виде

$$f(t, \mathbf{x}) = f\left(0, \mathbf{g}^{-t}(\mathbf{x})\right), \tag{5.3}$$

где $\mathbf{g}^t(\mathbf{x})$ — положение точки, движущейся в силу системы (5.1), в момент времени t при условии, что при $t = 0$ она совпадала с $\mathbf{x}$: $\mathbf{g}^0(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}$.

Определим временные средние, или средние по Чезаро, решения уравнения (5.2) формулой

$$f_T(\mathbf{x}) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t, \mathbf{x})\, dt.$$

Правая часть (5.3) при фиксированном t задает оператор, действующий на функцию $f(\mathbf{x})$. Этот оператор линейный, и он сохраняет L_2-норму функции в случае, если $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$. Именно для таких операторов справедлива статистическая эргодическая теорема фон Неймана, которая утверждает, что предел f^C (Чезаро) функции f_T при T, стремящемся к бесконечности, существуют в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при любых начальных данных из этого же пространства.

В бездивергентном случае определим энтропию формулой

$$S(h) = -\int h(\mathbf{x}) \ln h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

как строго вогнутый функционал на положительных функциях $h(\mathbf{x})$ из $L_2(\mathbb{R}^n)$. Такие функционалы сохраняются для уравнения (5.2) в бездивергентном случае. Однако в работе Пуанкаре [37] обсуждался вопрос о росте энтропии для предельной функции на частном примере бесстолкновительного газа. В. В. Козловым и Д. В. Трещевым было доказано обобщение этого факта в [27, 29], т. е. что энтропия временного среднего не меньше, чем энтропия начального распределения для уравнений (5.2). В [11] было показано, что решение уравнения (5.2) сходится «туда, куда надо»: временные средние определяются условным принципом максимума энтропии (принцип Больцмана), и вместо стандартной энтропии $S(h) = -\int h(\mathbf{x}) \ln h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ можно брать вогнутые функционалы $S(h) = \int \phi(h(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}$, где ϕ — строго вогнутая функция. Первые попытки применить принцип Больцмана в этой ситуации содержатся в [10]. В настоящем разделе мы обобщим результат работы [11] на случай, когда дивергенция не равна нулю.

Пример 5.1 (см. [10]). Гармонический осциллятор.

Рассмотрим динамическую систему $dx/dt = v$, $dv/dt = -x$. Соответствующее уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial v} = 0.$$

Его решение, как и решение исходной динамической системы, осциллирует со временем и не стремится к стационару. Однако формула для экстремали Больцмана приводит к осмысленному результату: $f^B = exp(\lambda(H))$, где $H = (1/2)(v^2 + x^2)$ — энергия системы, $\lambda(H)$ — множитель Лагранжа (произвольная функция от энергии).

Если $\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) \neq 0$, но имеется не обращающееся в нуль стационарное решение $\xi(\mathbf{x})$ уравнения (5.2):

$$\operatorname{div}\xi\mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv 0, \tag{5.4}$$

то непосредственной подстановкой проверяется, что (5.2) равносильно уравнению бездивергентного вида:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \left(\mathbf{v}(\mathbf{x}), \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}\right) = 0, \tag{5.5}$$

где $F \equiv f/\xi$. Решение уравнения (5.5) можно записать в виде $F(t, \mathbf{x}) = F\left(0, \mathbf{g}^{-t}(\mathbf{x})\right)$. Поэтому решение уравнения (5.2) имеет вид:

$$f(t, \mathbf{x}) = \frac{\xi(x)}{\xi\left(\mathbf{g}^{-t}(\mathbf{x})\right)} f\left(0, \mathbf{g}^{-t}(\mathbf{x})\right). \tag{5.6}$$

Положительное стационарное решение $\xi(\mathbf{x})$ уравнения Лиувилля (5.2) определяет инвариантную меру $\xi d\mathbf{x}$. Для новой функции распределения F число частиц в области $G(t)$ записывается в виде: $N(G(t)) = \int\limits_{G(t)} F(t, \mathbf{x})\, \xi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Функция F не растет, так как полная производная от нее есть нуль, и поскольку число частиц сохраняется, то мера $\xi d\mathbf{x}$ сохраняется тоже:

$$\xi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \xi\left(\mathbf{g}^{-t}(\mathbf{x})\right) d\mathbf{g}^{-t}(\mathbf{x}). \tag{5.7}$$

В качестве энтропии для (5.2) требуется строго вогнутый функционал, не убывающий на решениях уравнения (5.2). Если стационарное решение $\xi(\mathbf{x})$ положительно для всех $\mathbf{x}$, то энтропией для (5.2) является функционал

$$S(h) = \int \xi \phi(h/\xi)\, d\mathbf{x} \tag{5.8}$$

на положительных функциях $h(\mathbf{x})$ из $L_2(\mathbb{R}^n)$, где ϕ — строго вогнутая функция, определенная при положительных значениях своего аргумента. Действительно, он не убывает на решениях уравнения (5.2):

$$S(f(t,\cdot)) = \int \xi(\mathbf{x})\, \phi(f(t, \mathbf{x})/\xi(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} = \int \xi(\mathbf{x})\, \phi\left(f\left(0, \mathbf{g}^{-t}(\mathbf{x})\right)/\xi\left(\mathbf{g}^{-t}(\mathbf{x})\right)\right) d\mathbf{x} =$$

$$= \int \xi\left(\mathbf{g}^{-t}(\mathbf{x})\right) \phi\left(f\left(0, \mathbf{g}^{-t}(\mathbf{x})\right)/\xi\left(\mathbf{g}^{-t}(\mathbf{x})\right)\right) d\mathbf{g}^{-t}(\mathbf{x}) = S(f(0,\cdot)).$$

Здесь мы сначала воспользовались (5.6), а потом (5.7).

Определим линейные законы сохранения уравнения неразрывности (5.2) как линейные функционалы $I_q(h) = \int q(\mathbf{x})\, h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = (q, h)$, сохраняющиеся в силу (5.2): $(q, f(t,\cdot))$ не зависит от времени на решениях $f(t, \mathbf{x})$ уравнения (5.2). Обозначим через I множество всех таких функций q из L_2 (интегралы).

Рассмотрим задачу Коши для (5.2) с положительными начальными условиями $f(0)$ из $L_2(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим экстремаль Больцмана $f^B = f^B(f(0))$ как функцию, где достигается максимум энтропии (5.8) при фиксированных законах сохранения: $S\left(f^B\right) = \max S(h)$ на множестве $L(I, f(0)) = \{h$ такие, что $(q, h - f(0)) = 0$ для всех q из $I\}$.

Норма функции $h(\mathbf{x})$ задается в $L_2(\mathbb{R}^n)$ выражением $\sqrt{\int h^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}}$, определенным только для функций из $L_2(\mathbb{R}^n)$. Потребуем от стационарного решения ξ, чтобы выражение

$$\sqrt{\int h^2(\mathbf{x})/\xi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}} \tag{5.9}$$

также давало норму $h(\mathbf{x})$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$, определенную только на функциях из $L_2(\mathbb{R}^n)$. Тогда справедлива следующая

Теорема 5.1. *Пусть на множестве* $L(I, f(0))$ *энтропия* (5.8) *определена, непрерывна, и если* $L(I, f(0))$ *неограниченно, то* $\lim\limits_{\substack{\|f\|_{L_2} \to +\infty \\ f \in L(I, f(0))}} S(f) = -\infty$.

Тогда:

1. *экстремаль Больцмана существует и единственна*;
2. *среднее Чезаро и экстремаль Больцмана совпадают*: $f^C = f^B$.

Доказательство. Норма (5.9) получается, если взять корень из «минус энтропии» (5.8) при $\phi(h) = -h^2$. В силу того, что энтропия сохраняется, норма (5.9) также сохраняется на решениях, т. е. при действии оператора (5.6). Значит, в силу условия на стационарное решение ξ оператор (5.6), действуя на функцию из L_2, снова дает функцию из L_2, и его норма, порожденная нормой функций (5.9), равна единице. Применив теорему из [11] или [1] для этого линейного оператора, получаем теорему 5.1. □

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1 *и существует базис гладких линейных законов сохранения* $\mathbf{q}(\mathbf{x}) \equiv \{q_1(\mathbf{x}), q_2(\mathbf{x}), \dots, q_k(\mathbf{x})\}$: *множество всех линейных законов сохранения* I *совпадает с множеством всех функций* $\lambda(q_1(\mathbf{x}), q_2(\mathbf{x}), \dots, q_k(\mathbf{x}))$ *из* $L_2(\mathbb{R}^n)$. *Тогда экстремаль Больцмана существует, единственна, совпадает с временным средним и имеет вид*:

$$f^B(\mathbf{x}) = N^{-1}\eta(\mathbf{q},\psi)\int g(\mathbf{q},\psi)\,J(\mathbf{q},\psi)\,d\psi\Big|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{x})}, \tag{5.10}$$

где $N \equiv \int \eta(\mathbf{q},\psi)\,J(\mathbf{q},\psi)\,d\psi$, $\psi(\mathbf{x}) \equiv \{\psi_1(\mathbf{x}), \psi_2(\mathbf{x}), \dots, \psi_{n-k}(\mathbf{x})\}$ — *координаты на множествах* $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$, *причем совокупность* $(\mathbf{q},\psi)$ *дает систему координат в* $\mathbb{R}^n$, $J(\mathbf{q},\psi)$ — *якобиан перехода к этой системе координат*, $g(\mathbf{q},\psi) \equiv f(0,\mathbf{x})$, $\eta(\mathbf{q},\psi) \equiv \xi(\mathbf{x})$.

Доказательство. Применим теорему 5.1 и получим экстремаль по Больцману:

$$f^B(\mathbf{x}) = \xi(\mathbf{x}) \cdot \left[\phi'\right]^{-1}\left(\lambda\left(q_1(\mathbf{x}), q_2(\mathbf{x}), \dots, q_k(\mathbf{x})\right)\right). \tag{5.11}$$

Определяем $\lambda(q_1(\mathbf{x}), q_2(\mathbf{x}), \dots, q_k(\mathbf{x}))$ из законов сохранения по начальным данным:

$$\int \gamma(\mathbf{q}(\mathbf{x}))\, f^B(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int \gamma(\mathbf{q}(\mathbf{x}))\, f(0,\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

где $\gamma(\mathbf{q}(\mathbf{x}))$ — произвольная функция из L_2 от функций $q_1(\mathbf{x})$, $q_2(\mathbf{x})$,..., $q_k(\mathbf{x})$.

Переходя к координатам $(\mathbf{q},\psi)$, с учетом (5.11) имеем:

$$\int \gamma(\mathbf{q}) \cdot \eta(\mathbf{q},\psi) \cdot \left[\phi'\right]^{-1}(\lambda(\mathbf{q})) \cdot J(\mathbf{q},\psi)\, d\mathbf{q} d\psi = \int \gamma(\mathbf{q}) \cdot g(\mathbf{q},\psi) \cdot J \cdot d\mathbf{q} d\psi.$$

В силу произвольности функции γ получаем:

$$\left[\phi'\right]^{-1}(\lambda(\mathbf{q})) \cdot \int \eta(\mathbf{q},\psi)\, J(\mathbf{q},\psi)\, d\psi = \int g(\mathbf{q},\psi)\, J(\mathbf{q},\psi)\, d\psi,$$

и отсюда (5.10). □

Отметим работу [22], в которой доказывалось, что при фиксированной непрерывной функции область значений временного среднего совпадает с областью значений пространственных средних. Пространственные средние, рассматриваемые в [22], и есть экстремали по Больцману.

Еще одно возможное приложение — это эргодическая гипотеза [18]. Например, для твердых шаров в ящике: это старая проблема о том, что при времени, стремящемся к бесконечности, функция распределения сходится только к функции от энергии. Тут две проблемы — доказать, что сходимость есть, и вычислить предел. Теоремы типа Пуанкаре—Козлова—Трещева [27, 29, 37] решают первую из них. Из теорем работ [1, 11] следует, что этот предел зависит только от интегралов — шажок в решении именно второй проблемы. Теперь задача сведена к рассмотрению интегралов, т. е. достаточно исследовать стационарное уравнение Лиувилля. Надо добавить граничное условие зеркального отражения на границе области и доказать, что решение такой граничной задачи в L_2 является функцией только кинетической энергии. Такая редукция к описанию множества интегралов в эргодической проблеме возможна и для других уравнений с помощью теорем из работ [1, 11] и настоящего раздела.

Функции $q(x) \equiv \{q_1(x), q_2(x), \dots, q_k(x)\}$, базис гладких линейных законов сохранения, и есть аналоги переменных действия, а дополнительные функции $\phi(x) \equiv \{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_{n-k}(x)\}$, координаты на множествах $q(x) = \mathrm{const}$ — это аналоги углов.

6. Энтропия и H-теорема в теории представлений групп

Назовем выпуклый функционал $S(x)$, $x \in V$, *энтропией* представления ρ группы G, если $S(gx) \geqslant S(x)$ для всех $g \in G$.

Лемма 6.1. *Энтропия сохраняется при действии G: если $S(gx) \geqslant S(x)$, то $S(gx) = S(x)$.*

Доказательство. $S(x) = S(g^{-1}gx) \geqslant S(gx)$, и мы доказали обратное неравенство, а потому и равенство. □

Такое свойство, когда любой убывающий функционал оказывается сохраняющимся, можно рассматривать как свойство обратимости динамики. Здесь обратимость оказывается просто связанной с групповым свойством динамики.

Введем понятие *среднего* (аналог временного среднего) для действия группы G:

$$[x] = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) x = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gx. \tag{6.1}$$

Здесь $|G|$ — количество элементов в группе.

Лемма 6.2. *Энтропия существует.*

Доказательство. Если $K(x)$ — произвольный выпуклый функционал, то $S(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} K(gx)$ — энтропия: $S(gx) = S(x)$. Действительно, линейная комбинация $\phi(x) = \sum \lambda_i \phi_i(x)$ выпуклых функционалов $\phi_i(x)$ с положительными коэффициентами λ_i является выпуклой. □

Теорема 6.1 (H-теорема для представлений групп)**.** $S([x]) \geqslant S(x)$.

Доказательство. $S([x]) = S\Big(\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gx\Big) \geqslant \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} S(gx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} S(x) = S(x)$; мы воспользовались выпуклостью $S(x)$. Это аналог теоремы Пуанкаре—Козлова—Трещева для уравнения Лиувилля [29, 37]. □

Эта теорема вместе с леммой 6.1 связывают обратимость и необратимость в наиболее ясном виде. Эта связь очень волновала классиков Больцмана, Лошмидта, Цермело, Пуанкаре [6,7,37,44,45], и возможно, являлась одной из мотивировок эргодической теории [38, 41, 53]. Она продолжает интересовать и современных исследователей [2, 29, 40]. Рост энтропии в теореме 6.1 связывается с усреднением: наблюдатель при быстром усреднении видит именно среднее, как спицы у вращающегося колеса или белый цвет вращающегося разноцветного волчка Максвелла. Это полностью согласуется с работами [29, 37], где группа — это действительные числа (аналог времени): там тоже при эволюции энтропия парадоксальным образом сохраняется, а ее предел больше или равен (но в примерах часто оказывается строго больше), чем эта сохраняющаяся величина. Отметим, что аналогия не буквальная, ибо в классических эргодических теоремах Биркгофа, фон Неймана, Рисса и Боголюбова речь всегда идет о полугруппах, так как усреднение происходит по положительной полуоси. В случае некомпактных групп необходимо заботиться о сходимости, но уже фон Нейманом и Риссом [38, 41, 53] была получена по сути альтернативная формулировка в форме проекционного метода, что мы проделаем в следующем разделе.

Пусть $I \subset V$ — линейное подпространство инвариантов: $I = \{x \in V \mid gx = x \ \forall g \in G\}$. Пусть $W \subset V$ — линейная оболочка элементов $x - gx$.

Лемма 6.3. *V есть прямая сумма I и W: $V = I \oplus W$.*

Доказательство. Каждый элемент $x \in V$ представим в виде $x = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gx + \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (x - gx)$. Здесь первая сумма — элемент подпространства I, а вторая — из W. □

Следствие 6.1. *Среднее $[x]$ совпадает с проекцией x на подпространство I: $[x] = P_I(x)$.*

В теоремах фон Неймана и Рисса [38, 41, 53] такая проекция ортогональна, так как действие группы сохраняет норму гильбертова пространства. Здесь проекция не ортогональна в общем случае, и все выводы не зависят от какой-либо нормы, а связаны только с линейностью пространства.

Пример. Рассмотрим представление группы $\mathbb{Z}_2 = \{e, g\}$ в двумерном пространстве. Для неединичного элемента g выполнено: $g^2 = e$.

Оператор $\rho(g) = \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а значит, вектор $(a, 2)$ инвариантен относительно действия $\rho(g)$, т. е. порождает пространство I, а вектор $(1, 0)$ переходит в $(-1, 0)$, т. е. порождает пространство W.

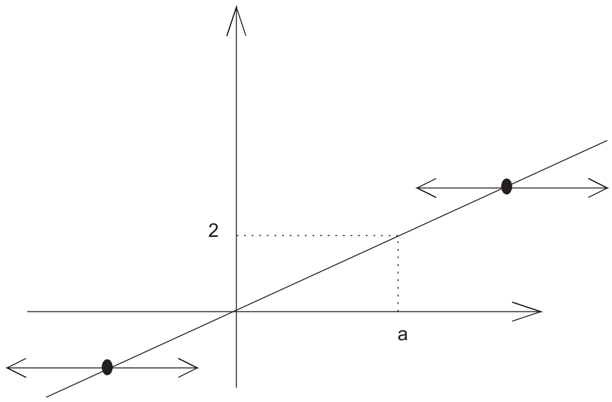

Рис. 1

Итак, здесь наше представление — это отражение (см. рис. 1), но не ортогональное в смысле обычной метрики. Отметим, что в теореме фон Неймана речь идет о группе $\mathbb{R}$, а в теореме Рисса — о группе $\mathbb{Z}$ (строго говоря, о положительных их частях, т. е. о полугруппах), а проекции ортогональны в смысле метрики гильбертова пространства.

Работы [6, 44] и [7, 45] — самые известные работы Больцмана. В работе [6, 44] доказывается H-теорема и на примере дискретной модели уравнения Больцмана «нащупывается» понятие экстремали энтропии при фиксированных линейных законах сохранения (с. 155-156 русского издания), к которому стремится решение уравнения при времени, стремящемся к бесконечности. В работе [7, 45] вводится то, что называется статистикой Больцмана, и экстремаль Больцмана уже используется как фундаментальное понятие и как рабочий инструмент: находится условный максимум энтропии с множителями Лагранжа при интегралах числа частиц и кинетической энергии, и получается максвелловское распределение (с. 209 русского издания). Определим это понятие в нашем случае представлений групп аналогичным образом, как условный экстремум энтропии при тех же инвариантах, что и исходный вектор пространства, где действует представление.

Обозначим через V_x множество векторов пространства V таких, что их проекция на подпространство I вдоль W совпадает с проекцией на I вектора x. Пусть энтропия (строго выпуклый инвариантный при действии группы функционал) $S(x)$ имеет единственную точку максимума на V_x. Точку, где достигается этот максимум, мы будем называть *экстремалью Больцмана* $\mathrm{Ext}^B(x)$: $\mathrm{Ext}^B_S(x) = \underset{y \in V_x}{\operatorname{argmax}}\, S(y)$.

Теорема 6.2. *Среднее по группе* $[x]$ *элемента* x *совпадает с экстремалью Больцмана*:

$$[x] = P_I(x) = \mathrm{Ext}^B(x).$$

Доказательство. Заметим, что в силу следствия 6.1 все элементы V_x имеют одно и то же среднее, а значит, в частности, среднее вектора x совпадает со средним для вектора $\mathrm{Ext}^B(x)$: $[x] = [\mathrm{Ext}^B(x)]$. Ясно, что $[x] \in V_x$, а значит, $S(\mathrm{Ext}^B(x)) \geqslant S([x])$. Но в силу теоремы 6.1 $S(\mathrm{Ext}^B(x)) \leqslant S([\mathrm{Ext}^B(x)]) = S([x])$. Значит, имеет место равенство $S(\mathrm{Ext}^B(x)) = S([x])$, и таким образом теорема доказана в силу единственности точки максимума. $\square$

Обобщим результаты на случай компактной группы. Для любой компактной группы существует мера Хаара, инвариантная относительно действия группы (обозначим ее μ). Пусть для компактной группы G задано представление $\rho : G \to Aut(V)$, где V — линейное пространство.

По аналогии с конечной группой определим *энтропию* $S(x), x \in V$ как неубывающий при действии группы G функционал на V.

Лемма 6.4. *Энтропия сохраняется при действии компактной группы G.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 6.1.

Введем понятие *среднего* для компактной группы G: $[x] = \frac{1}{\mu(G)} \int \rho(g) x \, d\mu = \frac{1}{\mu(G)} \int gx \, d\mu$.

Лемма 6.5. *Энтропия существует.*

Доказательство. Если $K(x)$ — произвольный выпуклый функционал, то $S(x) = \frac{1}{\mu(G)} \int K(gx) d\mu$ — энтропия: $S(gx) = S(x)$. □

Теорема 6.3 (H-теорема для представлений компактных групп). $S([x]) \geqslant S(x)$.

Доказательство. $S([x]) = S\Big(\frac{1}{\mu(G)} \int gx d\mu\Big) \geqslant \frac{1}{\mu(G)} \int S(gx) d\mu = \frac{1}{\mu(G)} \int S(x) d\mu = S(x)$ в силу выпуклости $S(x)$. □

Построим разложение фон Неймана—Рисса для представления компактной группы G в линейное пространство V. А именно, пусть $I \subset V$ — это пространство всех таких векторов $x \in V$, что $x = gx$ для любого $g \in G$, и пусть W — пространство всех векторов вида $x - gx$ и их пределов, где $x \in V$, $g \in G$, т. е. пространство W — замыкание линейной оболочки векторов вида $x - gx$. Заметим, что в случае конечномерного V подпространство $W = \{x - gx | \ \forall x \in V, \forall g \in G\}$ априори замкнуто.

Теорема 6.4. *Пространство $V = I \oplus W$ есть прямая сумма, и вектор $[x]$ есть проекция вектора $x \in V$ на подпространство I.*

Доказательство. Заметим, что линейная оболочка $\{x - gx\}$ (т. е. само пространство W) инвариантна относительно действия группы G: $h(x - gx) = h(x) - h(g(x)) = h(x) - hg(x) = (x - hg(x)) - (x - h(x))$, где $h, g \in G$.

Вектор $[x]$ лежит в I. Действительно:

$$g_0[x] = g_0 \left(\frac{1}{\mu(G)} \int gx d\mu \right) = \frac{1}{\mu(G)} \int g_0 gx d\mu = \frac{1}{\mu(G)} \int gx d\mu = [x].$$

Тогда любой вектор $x \in V$ представим в виде суммы $x = \frac{1}{\mu(G)} \int gx d\mu + \frac{1}{\mu(G)} \int (x - gx) d\mu$, где вектор $\frac{1}{\mu(G)} \int gx d\mu = [x]$ лежит в пространстве I, а вектор $\frac{1}{\mu(G)} \int (x - gx) d\mu$ в силу замкнутости линейной оболочки $\{x - gx\}$ лежит в пространстве W. Значит, $W = I \oplus W$. Отсюда получаем, что $[x]$ есть проекция вектора x на пространство I. □

Таким образом, результаты конечного случая могут быть полностью обобщены на случай компактной группы.

Что дает общая конструкция разделов 2–5 данной работы по сравнению с работой [11] для основного вопроса эргодической теории? Под основным вопросом эргодической теории понимаем, к чему сходится решение произвольной системы нелинейных уравнений с течением времени и соответствующего уравнения для плотности — уравнения Лиувилля.

Если в эргодических теоремах фон Неймана, Рисса, Биркгофа и Боголюбова доказывалось существование временных средних, то в [11] доказывается совпадение временных средних с экстремумом энтропии (в случаях Рисса и фон Неймана). Из конструкций этой работы вытекает, что не требуется сопряженных пространств и функционалов, а достаточно проекции Рисса, и это дает возможность упростить и обобщить все четыре эргодические теоремы с единой точки зрения.

Что могут дать двойственные пространства и законы сохранения? Уже из работы [11] следует, что эргодические компоненты (т. е. инвариантные множества исходной динамической системы) суть совместные линии уровня ее интегралов. Но интегралы — из L_2, поэтому линии уровня не существуют, и возникает вопрос о функциональном базисе этих интегралов. Отметим, что если есть инвариантные множества, то это означает наличие кусочно-постоянных интегралов, так что это укладывается в данную схему. Если в этих инвариантных множествах этот базис из непрерывных функций, то мы можем по крайней мере взять совместные линии уровня этих интегралов и проинтегрировать по ним начальное распределение, представив так в явном виде предел при времени, стремящемся к бесконечности (см. [2, формулы (45)-(46)]). Если же этот базис законов сохранения из гладких функций, то по теореме о неявной функции можно получить, что структура эргодических компонент — это многообразие соответствующей гладкости.

Таким образом, возникает классификация динамических систем по гладкости функционального базиса законов сохранения, и эргодическая проблема переходит на другой уровень. Эти законы сохранения могут быть полезны и в методе Гамильтона—Якоби в негамильтоновой ситуации [17, 52]. Именно они должны быть взяты в качестве переменных действия, а переменные углы — как раз дополнительные на их линиях уровня, как показывает та же [2, формула (46)].

Здесь же возникает вопрос, насколько переносятся конструкции из книг В. П. Маслова [34, 35], например, канонический оператор, на нелагранжевы многообразия? Возникает вопрос об асимптотике при времени, стремящемся к бесконечности, в квантовом случае и о его соответствии классическому случаю. Что результаты работ [1, 10, 11] и данной работы дают для метода Гиббса? Откуда возникает гиббсова экспонента? Это самая классическая больцмановская экстремаль из работы [7, 45]: именно там Больцман берет экстремум энтропии при условии двух законов сохранения числа частиц и кинетической энергии и получает максвелловское распределение. Но как можно получить эту экспоненту из динамики? Совпадение временных средних с экстремалями Больцмана показывает, что, вообще говоря, невозможно получить по двум причинам: так как и законов сохранения может быть больше, и можно получить при разных начальных условиях любую функцию от энергии. Физики объясняют эту экспоненту взаимодействием с термостатом. Термостат можно представить математической моделью с граничной задачей для этого же уравнения Лиувилля, например с классическим зеркально-диффузным максвелловским законом отражения [10, 35]. Таким образом, если мы связываем гиббсову экспоненту с граничными условиями, физика требует не дифференциального, а интегро-дифференциального уравнения, что тоже укладывается в идеологию теорем данной статьи, поскольку оператор эволюции остается линейным.

Таковы возможные перспективы развития последних двух разделов. Простейшие примеры группы $\mathbb{Z}_2$ показывают, каковы в этой ситуации переменные действия, а каковы углы. Также это дает простейшую иллюстрацию к сохранению энтропии примера Пуанкаре 1906 г. и возрастанию энтропии на бесконечности — т. е. иллюстрацию всех парадоксов необратимости.

7. Заключение

Проблема построения H-функции (т. е. убывающего функционала с доказательством H-теоремы) для квантовых случайных блужданий, для которых не выполняется условие детального баланса [2], остается открытой. В работах А. Пуанкаре [37], В. В. Козлова [27] и Д. В. Трещева [29] рассматривается новая форма H-теоремы. Она справедлива для уравнения Лиувилля и их обобщений [1, 11, 27, 29, 37] (раздел 5 настоящей работы). Понятие экстремали Больцмана там тоже работает [1, 11] (раздел 5 настоящей работы): она совпадает с временным средним (средним по Чезаро, чезаровским средним), и это делает его общематематическим и фундаментальным и как метод поиска стационаров широкого класса уравнений (линейных, типа уравнения Лиувилля, и нелинейных), и как широкое обобщение понятия энтропии. Введение этих представлений в теорию представлений групп (раздел 6 настоящей работы) проясняет и упрощает ситуацию, и ставит новые вопросы.

Представляет интерес обобщение полученных результатов на нелинейные системы с дискретным временем и перенесение условия Штюккельберга—Батищевой—Пирогова [5, 20, 32, 33] на дискретное время.

Другие новые задачи — это обобщение теорем о совпадении временного среднего с экстремалью по Больцману [1, 11] (раздел 5 настоящей работы) на случай уравнения Лиувилля, когда отсутствует инвариантная мера, и на нелинейный случай, а именно, для уравнений Власова.

Развитие метода Гамильтона—Якоби в негамильтоновой ситуации представляется перспективным в нескольких направлениях: изучение связи полученных в разделе 4 уравнений с классом квазилинейных уравнений с одинаковой главной частью, рассмотрение отдельных примеров гамильтоновых и негамильтоновых систем и поиски базиса законов сохранения, построение новых классов уравнений типа химической кинетики, обобщающих рассмотренные в разделах 1–3.

Представляет интерес обобщение результата раздела 4 на бесконечномерный случай. Как для пространств с нормой (банаховых) [9], так и без, со строгими определениями, возможно, в стиле работ [3, 23], а также H-теоремы для уравнений физико-химической кинетики (из разделов 2 и 3) на случай уравнений с бесконечным числом реакций. В первом случае суммы просто заменятся на интегралы, а вторая из тем уже начала развиваться в некоторых частных случаях [43, 46, 47].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аджиев С. З., Веденяпин В. В.* Временные средние и экстремали Больцмана для марковских цепей, дискретного уравнения Лиувилля и круговой модели Марка Каца// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2011. — *51*, № 11. — С. 2063–2074.
2. *Аджиев С., Веденяпин В.* Энтропия по Больцману и Пуанкаре// Усп. мат. наук. — 2014. — *69*, № 6. — С. 45–80.
3. *Аржаных И. С.* Поле импульсов. — Ташкент: Наука, 1965.
4. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
5. *Батищева Я. Г., Веденяпин В. В.* II-й закон термодинамики для химической кинетики// Мат. модел. — 2005. — *17*, № 8. — С. 106–110.
6. *Больцман Л.* Дальнейшие исследования теплового равновесия между молекулами газа// В сб.: «Избранные труды». — М.: Наука, 1984. — С. 125–189.
7. *Больцман Л.* О связи между вторым началом механической теории теплоты и теорией вероятностей в теоремах о тепловом равновесии// В сб.: «Избранные труды». — М.: Наука, 1984. — С. 190–235.
8. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел. — М.: Наука, 1990.
9. *Веденяпин В. В.* Дифференциальные формы в пространствах без нормы. Теорема о единственности H-функции Больцмана// Усп. мат. наук. — 1988. — *43*, № 1. — С. 159–179.
10. *Веденяпин В. В.* Кинетическая теория по Максвеллу, Больцману и Власову. Конспект лекций. — М.: МГОУ, 2005.
11. *Веденяпин В. В.* Временные средние и экстремали по Больцману// Докл. РАН. — 2008. — *422*, № 2. — С. 161–163.
12. *Веденяпин В. В., Мингалев И. В., Мингалев О. В.* О дискретных моделях квантового уравнения Больцмана// Мат. сб. — 1993. — *184*, № 11. — С. 21–38.
13. *Веденяпин В. В., Негматов М. А.* О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона—Якоби// Докл. РАН. — 2013. — *449*, № 5. — С. 521–526.
14. *Веденяпин В. В., Негматов М. А., Фимин Н. Н.* Уравнения типа Власова и Лиувилля, их макроскопические, энергетические и гидродинамические следствия// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2017. — *81*, № 3. — С. 45–82.
15. *Веденяпин В. В., Орлов Ю. Н.* О законах сохранения для полиномиальных гамильтонианов и для дискретных моделей уравнения Больцмана// Теор. мат. физ. — 1999. — *121*, № 2.. — С. 307–315.
16. *Веденяпин В. В., Фимин Н. Н.* Метод Гамильтона—Якоби для негамильтоновых систем// Нелин. динамика. — 2015. — *11*, № 2. — С. 279–286.
17. *Веденяпин В. В., Фимин Н. Н.* Метод Гамильтона—Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 2. — С. 136–139.
18. *Вершик А. М., Корнфельд И. П., Синай Я. Г.* Общая эргодическая теория групп преобразований с инвариантной мерой. I// Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1985. — *2*. — С. 5–111.
19. *Вольперт А. И., Худяев С. И.* Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. — М.: Наука, 1975.
20. *Гасников А. В.* (*ред.*) Введение в математическое моделирование транспортных потоков. — М.: МЦНМО, 2013.
21. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана// Усп. мат. наук. — 1971. — *26*, № 3. — С. 3–51.
22. *Гуревич Б. М., Темпельман А. А.* О множествах временных и пространственных средних для непрерывных функций на пространстве конфигураций// Усп. мат. наук. — 2003. — *58*, № 2. — С. 161-162.
23. *Долматов К. И.* Поле импульсов аналитической динамики// Дисс. канд. физ.-мат. наук. — Ташкент, 1950.
24. *Карлеман Т.* Математические вопросы теории газов. — М.: ИЛ, 1960.
25. *Козлов В. В.* Гидродинамика гамильтоновых систем// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1983. — *6*. — С. 10–22.
26. *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 1995.

27. *Козлов В.В.* Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре. — М.—Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2002.
28. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. — М.—Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2013.
29. *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Слабая сходимость решений уравнения Лиувилля для нелинейных гамильтоновых систем// Теор. мат. физ. — 2003. — *134*, № 3. — С. 388–400.
30. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Квантовая механика. Краткий курс теоретической физики. Кн. 2. — М.: Наука, 1972.
31. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. Т. 1. — М.: Наука, 1988.
32. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Теоретическая физика. Т. X. Физическая кинетика. — М.: Наука, 1979.
33. *Малышев В.А., Пирогов С.А.* Обратимость и необратимость в стохастической химической кинетике// Усп. мат. наук. — 2008. — *63*, №1. — С. 3–36.
34. *Маслов В.П.* Комплексные марковские цепи и континуальный интеграл Фейнмана (для нелинейных уравнений). — М.: Наука, 1976.
35. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
36. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. — М.: Мир, 1973.
37. *Пуанкаре А.* Замечания о кинетической теории газов// В сб.: «Пуанкаре А. Избранные труды». — М., 1974. — *3*.
38. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
39. *Санов Н.Н.* О вероятностях больших отклонений случайных величин// Мат. сб. — 1957. — *42*, № 1. — С. 11–44.
40. *Синай Я.Г.* Современные проблемы эргодической теории. — М.: Физматлит, 1995.
41. *Халмош П.Р.* Теория меры. — М.: ИЛ, 1953.
42. *Ченцов Н.Н.* Несимметричное расстояние между распределениями вероятностей, энтропия и теорема Пифагора// Мат. заметки. — 1968. — *4*, № 3. — С. 323–332.
43. *Ball J.M., Carr J.* Asymptotic behavior of solutions to the Becker—Doring equations for arbitrary initial data// Proc. Royal Soc. Edinburgh. — 1988. — *108A*. — С. 109–116.
44. *Boltzmann L.* Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen// Wien. Ber. — 1872. — *66*. — С. 275–370.
45. *Boltzmann L.* Uber die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der Mechanischen Warmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, respektive den Satzen uber das Warmegleichgewicht// Wien. Ber. — 1878. — *76*. — С. 373–435.
46. *Carr J.* Asymptotic behavior of solutions to the coagulation–fragmentation equations. I. The strong fragmentation case// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1992. — *121A*. — С. 231–244.
47. *Carr J., da Costa F.P.* Asymptotic behavior of solutions to the coagulation–fragmentation equations. I. Weak fragmentation// J. Stat. Phys. — 1994. — *77*, № 1/2. — С. 89–123.
48. *Csiszar I.* Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizitat von Markoffschen Ketten// Magyar. Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl. — 1963. — *8*. — С. 85–108.
49. *Kullback S., Leibler R.A.* On information and sufficiency// Ann. Math. Stat. — 1951. — *22*, № 1. — С. 79–86.
50. *Morimoto T.* Markov processes and the H-theorem// J. Phys. Soc. Jpn. — 1963. — *18*, № 3. — С. 328–331.
51. *Vedenyapin V. V.* Differential forms in spaces without a norm. A theorem on the uniqueness of Boltzmann's H-function// Russ. Math. Surv. — 1988. — *43*, № 1. — С. 193–219.
52. *Vedenyapin V. V., Fimin N.N.* The Hamilton—Jacobi method in the non-Hamiltonian situation and the hydrodynamic substitution// Dokl. Math. — 2015. — *91*, № 2. — С. 154–157.
53. *von Neumann J.* Zur Operatorenmethode in der Klassischen Mechanik// Ann. Math. (2). — 1932. — *33*. — С. 587–642.

Виктор Валентинович Веденяпин
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4
E-mail: vicveden@yahoo.com

Сергей Загирович Аджиев
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
119992, г. Москва, Воробьевы горы
E-mail: sergeyadzhiev@yandex.ru

Владлена Владимировна Казанцева

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН,
125047, г. Москва, Миусская пл., д. 4
E-mail: vladastar@inbox.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-37-59 UDC 517.958

Entropy in the Sense of Boltzmann and Poincare, Boltzmann Extremals, and the Hamilton–Jacobi Method in Non-Hamiltonian Context

© 2018 **V. V. Vedenyapin, S. Z. Adzhiev, V. V. Kazantseva**

Abstract. In this paper, we prove the H-theorem for generalized chemical kinetics equations. We consider important physical examples of such a generalization: discrete models of quantum kinetic equations (Uehling–Uhlenbeck equations) and a quantum Markov process (quantum random walk). We prove that time averages coincide with Boltzmann extremals for all such equations and for the Liouville equation as well. This gives us an approach for choosing the action–angle variables in the Hamilton–Jacobi method in a non-Hamiltonian context. We propose a simple derivation of the Hamilton–Jacobi equation from the Liouville equations in the finite-dimensional case.

REFERENCES

1. S. Z. Adzhiev and V. V. Vedenyapin, "Vremennye srednie i ekstremali Bol'tsmana dlya markovskikh tsepey, diskretnogo uravneniya Liuvillya i krugovoy modeli Marka Katsa" [Time averages and Boltzmann extremals for Markov chains, discrete Liouville equation, and the Kac circular model], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2011, **51**, No. 11, 2063–2074 (in Russian).
2. S. Adzhiev and V. Vedenyapin, "Entropiya po Bol'tsmanu i Puankare" [Entropy in the sense of Boltzmann and Poincare], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2014, **69**, No. 6, 45–80 (in Russian).
3. I. S. Arzhanykh, *Pole impul'sov* [Field of Impulses], Nauka, Tashkent, 1965 (in Russian).
4. V. I. Arnol'd, *Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki* [Mathematical Methods of Classical Mechanics], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
5. Ya. G. Batishcheva and V. V. Vedenyapin, "II-y zakon termodinamiki dlya khimicheskoy kinetiki" [The 2nd law of thermodynamics for chemical kinetics], *Mat. model.* [Math. Model.], 2005, **17**, No. 8, 106–110 (in Russian).
6. L. Bol'tsman, "Dal'neyshie issledovaniya teplovogo ravnovesiya mezhdu molekulami gaza" [Further investigation of thermal equilibrium between molecules of gas], In: *Izbrannye trudy* [Selected Works], Nauka, Moscow, 1984, pp. 125–189 (in Russian).
7. L. Bol'tsman, "O svyazi mezhdu vtorym nachalom mekhanicheskoy teorii teploty i teoriey veroyatnostey v teoremakh o teplovom ravnovesii" [On the relation between the second law of mechanical theory of heat and the probability theory in theorems on thermal equilibrium], In: *Izbrannye trudy* [Selected Works], Nauka, Moscow, 1984, pp. 190–235 (in Russian).
8. A. D. Bryuno, *Ogranichennaya zadacha trekh tel* [The Limited Three-Body Problem], Nauka, Moscow, 1990 (in Russian).
9. V. V. Vedenyapin, "Differentsial'nye formy v prostranstvakh bez normy. Teorema o edinstvennosti H-funktsii Bol'tsmana" [Differential forms in spaces without a norm. A theorem on the uniqueness of Boltzmann's H-function], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1988, **43**, No. 1, 159–179 (in Russian).
10. V. V. Vedenyapin, *Kineticheskaya teoriya po Maksvellu, Bol'tsmanu i Vlasovu. Konspekt lektsiy* [Kinetic Theory in the Sense of Maxwell, Boltzmann, and Vlasov. Lecture Notes], MGOU, Moscow, 2005 (in Russian).
11. V. V. Vedenyapin, "Vremennye srednie i ekstremali po Bol'tsmanu" [Time averages and Boltzmann extremals], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2008, **422**, No. 2, 161–163 (in Russian).
12. V. V. Vedenyapin, I. V. Mingalev, and O. V. Mingalev, "O diskretnykh modelyakh kvantovogo uravneniya Bol'tsmana" [On discrete models of the quantum Boltzmann equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1993, **184**, No. 11, 21–38 (in Russian).

13. V. V. Vedenyapin and M. A. Negmatov, “O topologii statsionarnykh resheniy gidrodinamicheskikh i vikhrevykh sledstviy uravneniya Vlasova i metod Gamil’tona—Yakobi” [On topology of stationary solutions of hydrodynamics and vortex consequences of the Vlasov equation and the Hamilton–Jacobi method], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2013, **449**, No. 5, 521–526 (in Russian).
14. V. V. Vedenyapin, M. A. Negmatov, and N. N. Fimin, “Uravneniya tipa Vlasova i Liuvillya, ikh makroskopicheskie, energeticheskie i gidrodinamicheskie sledstviya” [Vlasov and Liouville-type equations and their macroscopic, energetic, and hydrodynamics consequences], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2017, **81**, No. 3, 45–82 (in Russian).
15. V. V. Vedenyapin and Yu. N. Orlov, “O zakonakh sokhraneniya dlya polinomial’nykh gamil’tonianov i dlya diskretnykh modeley uravneniya Bol’tsmana” [Conservation laws for polynomial Hamiltonians and for discrete models of the Boltzmann equation], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1999, **121**, No. 2., 307–315 (in Russian).
16. V. V. Vedenyapin and N. N. Fimin, “Metod Gamil’tona—Yakobi dlya negamil’tonovykh sistem” [The Hamilton–Jacobi method for non-Hamiltonian systems], *Nelin. dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2015, **11**, No. 2, 279–286 (in Russian).
17. V. V. Vedenyapin and N. N. Fimin, “Metod Gamil’tona—Yakobi v negamil’tonovoy situatsii i gidrodinamicheskaya podstanovka” [The Hamilton–Jacobi method in non-Hamiltonian context and the hydrodynamical substitution], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2015, **461**, No. 2, 136–139 (in Russian).
18. A. M. Vershik, I. P. Kornfel’d, and Ya. G. Sinai, “Obshchaya ergodicheskaya teoriya grupp preobrazovaniy s invariantnoy meroy. I” [General ergodic theory of groups of transformations with invariant measure, I], *Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 1985, **2**, 5–111 (in Russian).
19. A. I. Vol’pert and S. I. Khudyaev, *Analiz v klassakh razryvnykh funktsiy i uravneniya matematicheskoy fiziki* [Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
20. A. V. Gasnikov (ed.), *Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov* [Introduction to Mathematical Modelling of Transport Flows], MTSNMO, Moscow, 2013 (in Russian).
21. S. K. Godunov and U. M. Sultangazin, “O diskretnykh modelyakh kineticheskogo uravneniya Bol’tsmana” [On discrete models of the kinetic Boltzmann equation], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1971, **26**, No. 3, 3–51 (in Russian).
22. B. M. Gurevich and A. A. Tempel’man, “O mnozhestvakh vremennykh i prostranstvennykh srednikh dlya nepreryvnykh funktsiy na prostranstve konfiguratsiy” [On sets of time and spatial averages for continuous functions on the space of configurations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2003, **58**, No. 2, 161-162 (in Russian).
23. K. I. Dolmatov, *Pole impul’sov analiticheskoy dinamiki* [Field of Impulses of Analytical Dynamics], PhD Thesis, Tashkent, 1950 (in Russian).
24. T. Carleman, *Matematicheskie voprosy teorii gazov* [Mathematical Problems of the Kinetic Theory of Gas], IL, M., 1960 (Russian translation).
25. V. V. Kozlov, “Gidrodinamika gamil’tonovykh sistem” [Hydrodynamics of Hamiltonian systems], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1983, **6**, 10–22 (in Russian).
26. V. V. Kozlov, *Simmetrii, topologiya i rezonansy v gamil’tonovoy mekhanike* [Symmetries, Topology, and Resonances in Hamiltonian Mechanics], Izd-vo Udmurtskogo gos. un-ta, Izhevsk, 1995 (in Russian).
27. V. V. Kozlov, *Teplovoe ravnovesie po Gibbsu i Puankare* [Thermal Equilibrium in the Sense of Gibbs and Poincare], In-t komp. issl., M.—Izhevsk, 2002 (in Russian).
28. V. V. Kozlov, *Obshchaya teoriya vikhrey* [General Theory of Vortexes], In-t komp. issl., M.—Izhevsk, 2013 (in Russian).
29. V. V. Kozlov and D. V. Treshchev, “Slabaya skhodimost’ resheniy uravneniya Liuvillya dlya nelineynykh gamil’tonovykh sistem” [Weak convergence of solutions of the Liouville equation for nonlinear Hamiltonian systems], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2003, **134**, No. 3, 388–400 (in Russian).
30. L. D. Landau and E. M. Livshits, *Kvantovaya mekhanika. Kratkiy kurs teoreticheskoy fiziki. Kn. 2* [Quantum Mechanics. Brief Course in Theoretical Physics. Book 2], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
31. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Mekhanika. T. 1* [Mechanics. V. 1], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
32. E. M. Lifshits and L. P. Pitaevskiy, *Teoreticheskaya fizika. T. X. Fizicheskaya kinetika* [Theoretical Physics. V. 10. Physical Kinetics], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
33. V. A. Malyshev and S. A. Pirogov, “Obratimost’ i neobratimost’ v stokhasticheskoy khimicheskoy kinetike” [Reversibility and irreversibility in stochastic chemical kinetics], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2008, **63**, No. 1, 3–36 (in Russian).

34. V. P. Maslov, *Kompleksnye markovskie tsepi i kontinual'nyy integral Feynmana* (*dlya nelineynykh uravneniy*) [Complex Markov Chains and Feynman Path Integral (for Nonlinear Equations)], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
35. V. P. Maslov and M. V. Fedoryuk, *Kvaziklassicheskoe priblizhenie dlya uravneniy kvantovoy mekhaniki* [Quasiclassical Approximation for Equations of Quantum Mechanics], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
36. J. Moser, *Lektsii o gamil'tonovykh sistemakh* [Lecture Notes on Hamiltonian Systems], Mir, Moscow, 1973 (Russian translation).
37. A. Puankare, "Zamechaniya o kineticheskoy teorii gazov" [Notes on the kinetic theory of gases] In: *Puankare A. Izbrannye trudy* [Poincare A. Selected Works], **3**, M., 1974.
38. F. Riesz and B. Sz.-Nagy, *Lektsii po funktsional'nomu analizu* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
39. N. N. Sanov, "O veroyatnostyakh bol'shikh otkloneniy sluchaynykh velichin" [On probabilities of large deviations of random values], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1957, **42**, No. 1, 11–44 (in Russian).
40. Ya. G. Sinai, *Sovremennye problemy ergodicheskoy teorii* [Contemporary Problems of Ergodic Theory], Fizmatlit, Moscow, 1995 (in Russian).
41. P. R. Halmos, *Teoriya mery* [Measure Theory], IL, Moscow, 1953 (Russian translation).
42. N. N. Chentsov, "Nesimmetrichnoe rasstoyanie mezhdu raspredeleniyami veroyatnostey, entropiya i teorema Pifagora" [Nonsymmetric distance between probability distributions, entropy, and Pythagorean theorem], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1968, **4**, No. 3, 323–332 (in Russian).
43. J. M. Ball and J. Carr, "Asymptotic behavior of solutions to the Becker—Doring equations for arbitrary initial data," *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 1988, **108A**, 109–116.
44. L. Boltzmann, "Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen," *Wien. Ber.*, 1872, **66**, 275–370.
45. L. Boltzmann, "Uber die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der Mechanischen Warmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, respektive den Satzen uber das Warmegleichgewicht," *Wien. Ber.*, 1878, **76**, 373–435.
46. J. Carr, "Asymptotic behavior of solutions to the coagulation–fragmentation equations. I. The strong fragmentation case," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1992, **121A**, 231–244.
47. J. Carr and F. P. da Costa, "Asymptotic behavior of solutions to the coagulation–fragmentation equations. I. Weak fragmentation," *J. Stat. Phys.*, 1994, **77**, No. 1/2, 89–123.
48. I. Csiszar, "Eine informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizitat von Markoffschen Ketten," *Magyar. Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.*, 1963, **8**, 85–108.
49. S. Kullback and R. A. Leibler, "On information and sufficiency," *Ann. Math. Stat.*, 1951, **22**, No. 1, 79–86.
50. T. Morimoto, "Markov processes and the H-theorem," *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1963, **18**, No. 3, 328–331.
51. V. V. Vedenyapin, "Differential forms in spaces without a norm. A theorem on the uniqueness of Boltzmann's H-function," *Russ. Math. Surv.*, 1988, **43**, No. 1, 193–219.
52. V. V. Vedenyapin and N. N. Fimin, "The Hamilton—Jacobi method in the non-Hamiltonian situation and the hydrodynamic substitution," *Dokl. Math.*, 2015, **91**, No. 2, 154–157.
53. J. von Neumann, "Zur Operatorenmethode in der Klassischen Mechanik," *Ann. Math. (2)*, 1932, **33**, 587–642.

Victor V. Vedenyapin
Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: vicveden@yahoo.com

Sergey Z. Adzhiev
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: sergeyadzhiev@yandex.ru

Vladlena V. Kazantseva
Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: vladastar@inbox.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 60–73

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-60-73 УДК 517.968.72

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

© 2018 г. **В. В. ВЛАСОВ, Н. А. РАУТИАН**

Аннотация. В работе изучается корректная разрешимость начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, а также проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактную форму линейных интегродифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории вязкоупругости и имеющих ряд других важных приложений. Установлена локализация и структура спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Работа посвящена исследованию интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Рассматриваемые уравнения представляют собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Эти уравнения могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости (см. [13, 17], а также как интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина (см. [15, 24, 25, 30]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью. Кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси, см. [3, 12]).

Перечисленные задачи можно объединить в достаточно широкий класс интегродифференциальных уравнений в частных производных, поэтому более естественно рассматривать интегродифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах (абстрактные интегродифференциальные уравнения), которые могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных. В настоящее время существует обширная литература по абстрактным интегродифференциальным уравнениям (см., например, работы [2–11, 21–23, 27–34] и цитированную в них литературу). В работах [1, 2, 21–23, 27, 34] (см. также цитированную в них литературу) изучались интегродифференциальные уравнения, главной частью которых является абстрактное параболическое уравнение. Интегродифференциальные уравнения, главной частью которых является абстрактное гиперболическое уравнение, изучены в меньшей степени (см., например, [5–11, 20, 28, 33]).

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A$, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01215).

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференцильного уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int\limits_0^t K\,(t-s)A^2u\,(s)\,ds = f\,(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{1.2}$$

где A — самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный.

Скалярная функция $K\,(t)$ имеет представление

$$K\,(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j R_j\,(t)\,, \tag{1.3}$$

где $c_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, функции $R_j\,(t)$ — дробно-экспоненицальные функции (см. [17, гл. 1]), которые имеют вид

$$R_j(t) = t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_j)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{1.4}$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма функция Эйлера. При этом предполагается, что последовательность $\{\beta_j\}$ удовлетворяет следующим условиям: $0 < \beta_j < \beta_{j+1},$, $j \in \mathbb{N}$, $\beta_j \to +\infty$, $j \to +\infty$. Кроме того, выполнены условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\beta_j} < 1, \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty. \tag{1.6}$$

Преобразование Лапласа функции $R_j(t)$ имеет вид $\hat{R}_j(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda^\alpha + \beta_j}$ (см. [17, гл. 1]). При этом под λ^α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ понимается главная ветвь многозначной функции $f(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}$, с разрезом по отрицательной действительной полуоси $\lambda^\alpha = |\lambda^\alpha| e^{i\alpha \arg \lambda}$, $-\pi < \arg \lambda < \pi$.

Следует также отметить, что уравнения рассматриваемого вида возникают в физических задачах. Широкий класс приложений — это задачи усреднения в многофазных средах, где одной из фаз является упругая (или вязкоупругая) среда, а другой — вязкая (сжимаемая или несжимаемая) жидкость (подробнее см. [18, 19]). Задача усреднения состоит в том, чтобы построить эффективную (усредненную) модель такой двухфазной среды, когда отдельные включения той или иной фазы быстро чередуются при изменении пространственных переменных. Предварительные исследования показывают, что одномерная модель распространения колебаний в такой усредненной (гомогенизированной) среде в абстрактной форме может быть записана как операторное уравнение, рассматриваемое в данной работе.

К уравнениям, близким по форме к рассматриваемым в этой статье, относится ряд уравнений и систем уравнений, возникающих в кинетической теории газов. В этих задачах интегральные слагаемые играют роль вязкости. Такое операторное представление вязкости возникает при выводе уравнений газовой динамики непосредственно из законов взаимодействия молекул (см. [16]).

Рассматривая преобразование Лапласа уравнения (1.1) при однородных начальных условиях, получаем оператор-функцию

$$L\,(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \hat{K}(\lambda)A^2, \tag{1.7}$$

которая является символом этого уравнения. Здесь $\hat{K}(\lambda)$ — преобразование Лапласа ядра $K(t)$, имеющие представление

$$\hat{K}(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda^\alpha + \beta_j}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{1.8}$$

В предлагаемой работе мы устанавливаем корректную разрешимость начальной задачи для уравнения (1.1) в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси и исследуем вопрос о локализации спектра для оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом указанного уравнения.

В наших предшествующих работах [4–11, 33] проводилось подробное исследование задачи (1.1), (1.2) в случае, когда ядро $K(t)$ было представимо рядом убывающих экспонент с положительными коэффициентами, что равносильно случаю $\alpha = 1$ в представлении (1.3). Наш подход к исследованию основывался на спектральном анализе оператор-функции (1.7), который также дает возможность получить результат о корректной разрешимости и представление решения указанной задачи в виде ряда по экспонентам, соответствующим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Отметим также, что результаты работ [4–8, 10, 11, 33] подытожены в главе 3 монографии [9].

Следует отметить, что метод, используемый нами для доказательства корректной разрешимости начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений, существенно отличается от более традиционного подхода, использованного Л. Пандолфи в работе [32], где разрешимость изучается в функциональном пространстве на конечном временном интервале $(0, T)$. В нашей работе разрешимость изучается в весовых пространствах Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$ вектор-функций на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, где A — положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Доказательство нашей теоремы 2.1 о резрешимости существенно использует гильбертову структуру пространств $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, а также теорему Пэли—Винера, в то время, как в работе [32] рассмотрения проводятся в банаховом функциональном пространстве гладких функций на конечном временном интервале $(0, T)$.

На протяжении всей работы выражение вида $D \lesssim E$ подразумевает неравенство $D \leqslant cE$, выполненное с некоторой положительной константой c, выражение $D \approx E$ означает $D \lesssim E \lesssim D$. Мы используем символы $:=$ и $=:$ для введения новых величин.

2. Формулировка результатов

Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A^\beta)$ оператора A^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{Dom}(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β.

2.1. Корректная разрешимость. Через $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t} \left(\left\| u^{(n)}(t) \right\|_H^2 + \|Au(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Подробнее о пространствах $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$ см. в монографии [14, гл. 1]. Для $n = 0$ полагаем $W^0_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^0\right) = L_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, H\right)$, где через $L_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, H\right)$ обозначено пространство измеримых функций со значениями в пространстве H, снабженное нормой

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|f(t)\|^2{}_H dt \right)^{1/2}.$$

Определение 2.1. Будем называть вектор-функцию u *сильным решением* задачи (1.1), (1.2), если она принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальному условию (1.2).

Следующая теорема дает достаточное условие корректной разрешимости задачи (1.1), (1.2).

Теорема 2.1. *Предположим, что вектор-функция $Af(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ для некоторого $\gamma_0 > 0$, ядро $K(t)$ представимо в виде* (1.3), (1.4) *с постоянной α ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$), а также выполняются условия* (1.5), (1.6) *и, кроме того, $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$. Тогда существует такое $\gamma_1 > \gamma_0$, что для всех $\gamma \geqslant \gamma_1$ задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение в пространстве $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d \left(\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^3\varphi_0\right\|_H + \left\|A^2\varphi_1\right\|_H \right), \tag{2.1}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

2.2. Спектральный анализ. Обозначим через a_j собственные значения оператора A ($Ae_j = a_je_j$), занумерованные в порядке возрастания (с учетом кратности): $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots, a_n \to +\infty$ ($n \to +\infty$). Соответствующие собственные векторы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис пространства H. Рассмотрим сужение оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n:

$$l_n(\lambda) = (L(\lambda) e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^\alpha + \beta_k}\right), \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнены условия (1.5), (1.6).

Теорема 2.2. *Пусть выполнено условие* (1.5). *Тогда спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежит в открытой левой полуплоскости.*

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* (1.5) *и $c_j = 0$ для всех j, больших некоторого $N \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ существует два невещественных комплексно-сопряженных нуля $\lambda_n{}^+ = \bar{\lambda}_n^-$ функции $l_n(\lambda)$, имеющих следующую асимптотику*:

$$\lambda_n^{\pm} = -\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_n^{1-\alpha}\frac{Q}{2} \pm i a_n \left(1 - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_n^{-\alpha}\frac{Q}{2}\right) + o\left(a_n^{1-\alpha}\right), \quad n \to +\infty, \tag{2.2}$$

где $Q = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j$.

Здесь уместно сделать важное замечание.

Замечание 2.1. При $\alpha = 1$ асимптотическая формула (2.2) переходит в ранее известную асимптотическую формулу (2.15) из работы [11] (см. также [9]).

Отметим, что оператор-функция вида (1.7) в случае, когда ядра интегральных операторов являются рядами убывающих экспонент с положительными коэффициентами, изучалась в [7]. Теоремы 2.1, 2.3 представляют собой естественное развитие результатов работы [7].

3. Доказательство основных результатов

Начнем с доказательства теоремы 2.1 в случае однородных (нулевых) начальных условий $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. При доказательстве теоремы 2.1 с нулевыми начальными условиями используется схема доказательства корректной разрешимости задачи Коши для уравнений гиперболического типа, основанная на применении преобразования Лапласа. В связи с этим, для удобства читателя, напомним широко известные факты, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Определение 3.1. Назовем *пространством Харди* $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ класс вектор-функций $\hat{f}(\lambda)$ со значениями в H, голоморфных в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \gamma \geqslant 0\}$, для которых

$$\sup_{x>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\|\hat{f}(x+iy)\right\|_H^2 dy < \infty \quad (\lambda = x + iy). \tag{3.1}$$

Сформулируем хорошо известную теорему Пэли—Винера для пространств Харди $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$.

Теорема (Пэли—Винер)**.**

1. *Пространство $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ совпадает с множеством вектор-функций* (*преобразований Лапласа*)*, допускающих представление*

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt, \tag{3.2}$$

где $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > \gamma \geqslant 0$.

2. *Для любой вектор-функции* $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ *существует и единственно представление* (3.2), *где вектор-функция* $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, *причем справедлива формула обращения*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\gamma + iy) e^{(\gamma+iy)t} dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \gamma \geqslant 0. \tag{3.3}$$

3. *Для вектор-функций* $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma, H)$ *и* $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, *связанных соотношением* (3.2), *справедливо равенство*:

$$\|\hat{f}\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma,H)} \equiv \sup_{x>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\|\hat{f}(x+iy)\right\|^2_H dy = \int\limits_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|f(t)\|^2_H dt \equiv \|f\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}. \tag{3.4}$$

Сформулированная теорема широко известна для скалярных функций. Однако она без труда обобщается на случай вектор-функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Доказательство теоремы 2.1. Вначале рассмотрим задачу (1.1), (1.2) с нулевыми начальными данными $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Применяя преобразование Лапласа к уравнению (1.1), получаем следующее представление для преобразования Лапласа решения задачи (1.1), (1.2):

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda). \tag{3.5}$$

Согласно теореме Пэли—Винера $A\hat{f}(\lambda) \in H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma; H)$, поскольку$Af(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$.

Перейдем к оценке оператор-функции $L^{-1}(\lambda)$ а правой полуплоскости. Разделим правую полуплоскость на две области

$$\Omega_1 = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = x > |y|, y = \operatorname{Im}\lambda\}, \quad \Omega_2 = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda = x < |y|, y = \operatorname{Im}\lambda\}, \ x > 0.$$

Вначале проведем оценки в области Ω_2. Преобразование Лапласа $\hat{K}(\lambda)$ допускает представление

$$\hat{K}(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[c_j \frac{(|\lambda|^\alpha \cos(\alpha\varphi) + \beta_j) - i|\lambda|^\alpha \sin(\alpha\varphi)}{(|\lambda|^\alpha \cos(\alpha\varphi) + \beta_j)^2 + (|\lambda|^\alpha \sin(\alpha\varphi))^2} \right]. \tag{3.6}$$

Рассмотрим следующие скалярные функции

$$\mathrm{M}_n(\lambda) = \frac{l_n(\lambda)}{a_n^2} = \frac{1}{a_n^2}(L(\lambda)e_n, e_n) = \frac{\lambda^2}{a_n^2} + 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^\alpha + \beta_k}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и выделим их вещественные и мнимые части

$$\operatorname{Re}\mathrm{M}_n(\lambda) = \frac{x^2 - y^2}{a_n^2} + 1 - \operatorname{Re}\hat{K}(\lambda), \quad \operatorname{Im}\mathrm{M}_n(\lambda) = \frac{2xy}{a_n^2} - \operatorname{Im}K(\lambda).$$

Тогда $\operatorname{Im}\mathrm{M}_n(\lambda)$ допускает следующую оценку снизу:

$$\operatorname{Im}\mathrm{M}_n(\lambda) = \frac{2xy}{a_n^2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{|\lambda|^\alpha \sin(\alpha\varphi)}{(|\lambda|^\alpha \cos(\alpha\varphi) + \beta_j)^2 + (|\lambda|^\alpha \sin(\alpha\varphi))^2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2xy}{a_n^2} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{y^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{4}\right)}{|\lambda|^{2\alpha} + 2\beta_j|\lambda|^\alpha + \beta_j^2} \geqslant \frac{2xy}{a_n^2} + c_1 \frac{y^\alpha \left(\sin\left(\frac{\alpha\pi}{4}\right)\right)}{(2y^\alpha + \beta_1)^2}.$$

Следовательно, для $y > x \geqslant \gamma > 0$ получаем неравенство

$$\frac{2xy}{a_n^2} + c_1 \frac{y^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{4}\right)}{(2y^\alpha + \beta_1)^2} \geqslant \frac{2xy}{a_n^2} + \frac{k_1}{y^\alpha} \geqslant \frac{2\gamma y^{1+\alpha} + k_1 a_n^2}{a_n^2 y^\alpha} \geqslant k_2 \frac{a_n y^{(1-\alpha)/2}}{a_n^2} \tag{3.7}$$

с положительными постоянными k_1 и k_2. В результате приходим к оценке

$$\frac{1}{|l_n(\lambda)|} \leqslant \frac{1}{a_n^2 |\operatorname{Im}\mathrm{M}_n(\lambda)|} \leqslant \frac{k_3}{a_n y^{(1-\alpha)/2}}. \tag{3.8}$$

Из неравенства (3.8) для всех $y > x \geqslant \gamma$ вытекает оценка

$$\frac{a_n}{|l_n(\lambda)|} \leqslant \frac{k_3}{y^{(1-\alpha)/2}}. \tag{3.9}$$

Совершенно аналогично, для всех $y < -x < -\gamma$ получим неравенство

$$\frac{a_n}{|l_n(\lambda)|} \leqslant \frac{k_4}{|y|^{(1-\alpha)/2}}. \tag{3.10}$$

В результате, объединяя два последних неравенства, приходим к тому, что в области $\Omega_2 \cap \{(x,y) : |y| > x > \gamma > 0\}$ выполнено неравенство

$$\frac{a_n}{|l_n(\lambda)|} \leqslant \frac{k_5}{|y|^{(1-\alpha)/2}}. \tag{3.11}$$

Оценим теперь $\operatorname{Re} \mathrm{M}_n(\lambda)$ в области Ω_1 для достаточно больших x. Заметим прежде всего, что в области Ω_1 справедливо неравенство $x^2 - y^2 \geqslant 0$. Тогда для достаточно больших $|\lambda|$ имеем

$$\operatorname{Re} \mathrm{M}_n(\lambda) \geqslant 1 - \operatorname{Re} \hat{K}(\lambda) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{|\lambda|^{\alpha} \cos(\alpha\varphi) + \beta_j}{(|\lambda|^{\alpha} \cos(\alpha\varphi) + \beta_j)^2 + |\lambda|^{2\alpha} \sin^2(\alpha\varphi)} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{|\lambda|^{\alpha} + \beta_j}{|\lambda|^{2\alpha} + 2|\lambda|^{\alpha}\beta_j \cos\left(\frac{\alpha\pi}{4}\right) + \beta_j^2} \geqslant 1 - \frac{d_1}{|\lambda|^{\alpha}}. \tag{3.12}$$

Следовательно, для заданного δ $(0 < \delta < 1)$ можно выбрать такое $R_0 > 0$, что для $\lambda : |\lambda| > R_0$ будет выполнена оценка

$$\operatorname{Re} \mathrm{M}_n(\lambda) > 1 - \delta.$$

Таким образом, для всех $|\lambda| > R_0$, $\lambda \in \Omega_1$ получаем следующее неравенство:

$$\frac{a_n}{|l_n(\lambda)|} \leqslant \frac{a_n}{|\operatorname{Re} \mathrm{M}_n(\lambda)|\, a_n^2} \leqslant \frac{\mathrm{const}}{a_n}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.13}$$

с постоянной const, не зависящей от n.

В теореме 2.2 настоящей статьи независимо установлено, что в замкнутой правой полуплоскости отсутствует спектр оператор-функции $L(\lambda)$ и, следовательно, функции $\dfrac{a_n}{l_n(\lambda)}$ являются аналитическими (регулярными) в открытой правой полуплоскости. По теореме Вейерштрасса отсюда немедленно вытекает, что функции $\dfrac{a_n}{l_n(\lambda)}$ будут являться ограниченными на множестве $\{\lambda : \lambda \in \Omega_1 \cap \{0 < \gamma < |\lambda| < R_0\}\}$. Таким образом неравенство (3.13) будет справедливо в области $\Omega_1 \cap \{\lambda : \{|\lambda| > \gamma > 0\}\}$.

Из оценок (3.11) и (3.13) следует, что существует такая константа $d > 0$, для которой справедливо неравенство

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda > \gamma} \left| \frac{a_n}{l_n(\lambda)} \right| \leqslant d < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.14}$$

В свою очередь, из неравенства (3.14) имеем

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda > \gamma} \left\| A L^{-1}(\lambda) \right\| \leqslant d < \infty. \tag{3.15}$$

Перейдем к доказательству однозначной разрешимости задачи (1.1), (1.2) в пространстве $W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ с нулевыми начальными данными $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Покажем вначале, что вектор-функция $A^2 u(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$.

Легко видеть, что

$$A^2 \hat{u}(\lambda) = A^2 L^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda) = A L^{-1}(\lambda) A \hat{f}(\lambda). \tag{3.16}$$

Согласно условиям теоремы 2.1, вектор-функция $A^2 f(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$. Следовательно, по теореме Пэли—Винера вектор-функция $A\hat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству $H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma_0, H)$ и справедливо следующее равенство:

$$\|Af\|_{L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)} = \left\| A\hat{f} \right\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda > \gamma_0, H)}. \tag{3.17}$$

Согласно (3.14)–(3.17) мы получаем цепочку неравенств

$$\left\|A^2u\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} = \left\|A^2\hat{u}\right\|^2_{H_2(\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma,H)} = \left\|AL^{-1}(\lambda)\,A\hat{f}(\lambda)\right\|^2_{H_2(\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma,H)} \leqslant d^2\left\|Af\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}. \tag{3.18}$$

Таким образом, вектор-функция $A^2u(t)$ принадлежит пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)$ и справедлива следующая оценка:

$$\left\|A^2u\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant d\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}. \tag{3.19}$$

Покажем теперь, что вектор-функция $\lambda^2\hat{u}(\lambda)$ также принадлежит пространству $H_2(\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma,H)$. Заметим, что при $\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma$ справедливо представление

$$I = \lambda^2L^{-1}(\lambda) + \left(1-\hat{K}(\lambda)\right)A^2L^{-1}(\lambda). \tag{3.20}$$

Следовательно, при $\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma$ имеем

$$\hat{f}(\lambda) = \lambda^2\hat{u}(\lambda) + \left(1-\hat{K}(\lambda)\right)A^2L^{-1}(\lambda)\,\hat{f}(\lambda). \tag{3.21}$$

В силу предположений относительно функции $K(t)$ функция $1-\hat{K}(\lambda)$ является ограниченной и аналитической в полуплоскости $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda>\gamma\}$. В самом деле, справедливо следующее неравенство:

$$\left|1-\hat{K}(\lambda)\right| \leqslant 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{|\lambda^\alpha+\beta_j|} \leqslant \mathrm{const}.$$

Регулярность (аналитичность) вытекает, согласно (1.6), из равномерной сходимости ряда. Оценим вектор-функцию $\lambda^2\hat{u}(\lambda)$ в пространстве Харди $H_2(\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma,H)$.

Из представления (3.21), неравенства (3.14) и предыдущей оценки получаем

$$\begin{aligned}\left\|\lambda^2\hat{u}(\lambda)\right\|_{H_2(\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma,H)} \leqslant \left\|\hat{f}(\lambda)\right\|_{H_2(\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma,H)} + \left|1-\hat{K}(\lambda)\right|\left\|AL^{-1}(\lambda)\,Af(\lambda)\right\|_{H_2(\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma,H)} \leqslant \\ \leqslant \mathrm{const}\left\|Af(\lambda)\right\|_{H_2(\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma,H)}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

Таким образом, из теоремы Пэли—Винера вытекает неравенство

$$\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant d_1\left\|Af\right\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}. \tag{3.23}$$

Наконец, объединяя оценки (3.19) и (3.23), мы получаем, что вектор-функция $u(t)$ принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)$, и справедлива оценка

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d_2\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}. \tag{3.24}$$

Рассмотрим теперь задачу (1.1), (1.2) с неоднородными начальными данными φ_0 и φ_1. Положим

$$u(t) = \cos(At)\,\varphi_0 + A^{-1}\sin(At)\,\varphi_1 + w(t). \tag{3.25}$$

Тогда вектор-функция $w(t)$ является решением задачи

$$\frac{d^2w}{dt^2} + A^2w(t) - \int_0^t K(t-s)A^2w(s)\,ds = f_1(t), \tag{3.26}$$

$$w(+0) = w^{(1)}(+0) = 0, \tag{3.27}$$

где $f_1(t) = f(t) - h(t)$, $h(t) = \int_0^t K(t-s)A^2\left(\cos(As)\,\varphi_0 + A^{-1}\sin(As)\,\varphi_1\right)ds.$

Для доказательства теоремы достаточно установить следующее неравенство:

$$\|Af_1\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|Ah\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} < \infty. \tag{3.28}$$

Оценим вектор-функцию $Ah(t)$. С этой целью оценим вектор-функцию $A\hat{h}(\lambda)$ в пространстве Харди $H_2(\mathrm{Re}\,\lambda>\gamma,H)$. Вектор-функция $A\hat{h}(\lambda)$ допускает представление

$$A\hat{h}(\lambda) = \hat{K}(\lambda)\,A\left[\lambda\left(\lambda^2I+A^2\right)^{-1}A^2\varphi_0 + A\left(\lambda^2I+A^2\right)^{-1}A\varphi_1\right] =$$

$$= \hat{K}(\lambda)\left[\lambda\left(\lambda^2 I + A^2\right)^{-1} A^3\varphi_0 + A\left(\lambda^2 I + A^2\right)^{-1} A^2\varphi_1\right]. \tag{3.29}$$

В дальнейшем мы будем использовать следующее известное предложение (см., например, [7]).

Предложение 3.1. *Для $\kappa > 0$ в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \kappa\}$ справедливы неравенства*

$$\left\|A\left(\lambda^2 I + A^2\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\operatorname{Re}\lambda}, \qquad \left\|\lambda\left(\lambda^2 I + A^2\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\operatorname{Re}\lambda}. \tag{3.30}$$

Легко видеть, что в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \kappa > 0\}$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{|\lambda^\alpha + \beta|^2} = \frac{1}{\left(x_0^2 + y^2\right)^\alpha + 2\left(x_0^2 + y^2\right)^{\alpha/2}\beta\cos(\alpha\varphi) + \beta^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{y^{2\alpha}\left(1 + \dfrac{x_0^2}{y^2}\right)^\alpha \left(1 + \dfrac{2\cos(\alpha\varphi)\,\beta}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{\alpha/2}} + \dfrac{\beta^2}{\left(x_0^2 + y^2\right)^\alpha}\right)} \leqslant \frac{\mathrm{const}}{y^{2\alpha} + 1} \tag{3.31}$$

здесь $\lambda = x_0 + iy$, $x_0 = |\lambda|\cos\varphi$, $y = |\lambda|\sin\varphi$, $x_0 > \kappa$, $y > 0$, $\beta > 0$. Следовательно, в силу предположения (1.6) и неравенства (3.30) мы получаем оценку

$$\left|\hat{K}(x_0 + iy)\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|y|^\alpha + 1}. \tag{3.32}$$

Вначале оценим вектор-функцию $Ah_1(\lambda) = \hat{K}(\lambda)\left[\lambda\left(\lambda^2 I + A^2\right)^{-1} A^3\varphi_0\right]$. Из неравенств (3.30) и (3.32) получаем

$$\left\|A\hat{h}_1(\lambda)\right\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\kappa, H)} = \sup_{x_0>\kappa}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|K(x_0+iy)(x_0+iy)\left[\left(x_0^2+y^2\right)I + A^2\right]^{-1}A^3\varphi_0\right\|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant d_4\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\|A^3\varphi_0\right\|}{|y|^{2\alpha}+1}dy \leqslant d_5\left\|A^3\varphi_0\right\|^2. \tag{3.33}$$

с положительными постоянными d_4, d_5.

Аналогично для вектор-функции $Ah_2(\lambda) = \hat{K}(\lambda)A\left(\lambda^2 I + A^2\right)^{-1}A^2\varphi_1$, в силу (3.30) и (3.32), справедлива следующая оценка

$$\|Ah_2(\lambda)\|^2_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\kappa, H)} = \sup_{x_0>\kappa}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\|K(x_0+iy)A\left((x_0+iy)^2 I + A^2\right)^{-1}A^2\varphi_1\right\|^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant d_6\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left\|A^2\varphi_1\right\|^2}{|y|^{2\alpha+1}+1}dy \leqslant d_7\left\|A^2\varphi_1\right\|^2 \tag{3.34}$$

с положительными постоянными d_6, d_7. Объединяя оценки (3.33) и (3.34), при $\alpha > 1/2$ получаем неравенство

$$\left\|A\hat{h}(\lambda)\right\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\kappa, H)} \leqslant d_8\left(\left\|A^3\varphi_0\right\| + \left\|A^2\varphi_1\right\|\right) \tag{3.35}$$

с постоянной d_8, не зависящей от φ_0 и φ_1. Наконец, из (3.35), согласно теореме Пэли—Винера, вытекает искомое неравенство

$$\|Ah(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} \leqslant d_9\left(\left\|A^3\varphi_0\right\| + \left\|A^2\varphi_1\right\|\right) \tag{3.36}$$

с постоянной d_9, не зависящей от φ_0 и φ_1. Теорема 2.1 доказана. □

Доказательство теоремы 2.2. Функция $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + a_n^2$, где $\lambda = x + iy$, отображает верхний правый квадрант $\Phi_{\pi/2} = \{\lambda : 0 < \arg\lambda < \pi/2\}$ в верхнюю полуплоскость $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda > 0\}$. В свою очередь, функция $\Psi(\lambda) = \left(\sum\limits_{J=1}^{\infty}\dfrac{c_j}{\lambda^\alpha + \beta_j}\right)a_n^2$ отображает угол $\Phi_{\pi/2}$ в угол $\{\lambda : -\alpha\pi/2 < \arg\lambda < 0\}$.

Следовательно, уравнение $\varphi(\lambda)=\Psi(\lambda)$, эквивалентное уравнению $l_n(\lambda)=0$, не имеет решений в первом квадранте. Вследствие того, что функция $l_n(\lambda)$ имеет вещественные коэффициенты, ее невещественные нули являются комплексно сопряженными. Таким образом, уравнение $l_n(\lambda)=0$ не имеет нулей в квадранте $\Phi_{-\pi/2}=\{\lambda: -\pi/2<\arg\lambda<0\}$. Более того, при выполнении условия (1.5) уравнение $\phi(x)=\Psi(x)$ не имеет решений, лежащих на полуоси $(0,+\infty)$, поскольку график параболы $x^2+a_n^2$ в этом случае не пересекается с графиком функции $\Psi(x)=\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{c_j}{x^\alpha+\beta_j}\right)a_n^2$ при положительных x.

Отметим также, что на мнимой оси нет спектра оператор-функции $L(\lambda)$. В самом деле, рассмотрим два случая:

$$1)\quad y>0,\quad x=0,\quad iy=e^{i\frac{\pi}{2}}y;$$
$$2)\quad y<0,\quad x=0,\quad iy=e^{-i\frac{\pi}{2}}t,\quad t>0.$$

В первом случае справедливо следующее неравенство:

$$\operatorname{Im} l_n(iy)=-y^\alpha\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\left(\left(y^\alpha\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)+\beta_j\right)^2+y^{2\alpha}\sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)}\right)a_n^2<0,$$

Во втором случае имеем

$$\operatorname{Im} l_n\left(e^{\frac{-\pi i}{2}}t\right)=t^\alpha\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\left(t^\alpha\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)+\beta_j\right)^2+t^{2\alpha}\sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\right)a_n^2>0.$$

При $x=y=0$ имеем

$$l_n(0)=a_n^2\left(1-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{\beta_j}\right)>0.$$

Поскольку спектр оператор-функции $L(\lambda)$ совпадает с замыканием объединения нулей функций $l_n(\lambda), n\in\mathbb{N}$, а каждая из функций $l_n(\lambda)$, по доказанному, не имеет нулей в замкнутой правой полуплоскости, то и оператор-функция $L(\lambda)$ не имеет спектра в замкнутой правой полуплоскости. Теорема 2.2 доказана. □

Замечание 3.1. При нарушении условия (1.5), т. е. при $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{c_j}{\beta_j}>1$, в правой полуплоскости имеется бесконечное число вещественных собственных значений оператор-функции.

Данное замечание может быть установлено из простых графических соображений.

Рассмотрим сужения вектор-функций $l_n(\lambda)$ на вещественную ось. Уравнение $l_n(x)=0$ может быть переписано в виде $\varphi_n(x)=\psi(x)$, где

$$\varphi_n(x)=\frac{x^2}{a_n^2}+1,\quad \psi(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{x^\alpha+\beta_j}.$$

Заметим, что функция $\psi(x)$ на полуоси $[0,+\infty)$ является монотонно убывающей и достигающей своего максимума при $x=0$, равного $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{c_j}{\beta_j}>1$. Поэтому график функции $\psi(x)$ пересекается с графиками парабол $\varphi_n(x)$ при положительных значениях x_n. При этом с ростом n нули x_n будут стремиться к точке x^*, являющейся решением уравнения $\psi(x)=1$.

Доказательство теоремы 2.3. Будем искать невещественные комплексно-сопряженные нули функций $l_n(\lambda)$ в виде $\lambda_n^\pm=\pm ia_n+\tau_n a_n$, $n\to+\infty$, где $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность. Тогда исходное уравнение

$$\hat{K}\left(\lambda_n^\pm\right)=\frac{\left(\lambda_n^\pm\right)^2}{a_n^2}+1 \tag{3.37}$$

эквивалентно уравнению $\hat{K}(\lambda_n^{\pm}) = \tau_n(\tau_n + 2i)$. Таким образом

$$\tau_n = \frac{\hat{K}(\lambda_n^{\pm})}{(2i + \tau_n)}. \tag{3.38}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением нулей λ_n^+ (для λ_n^- результат вытекает из того, что λ_n^+ и λ_n^- являются комплексно-сопряженными числами). Обозначим

$$h_n(\tau) = \frac{K(\lambda_n^+)}{(\tau + 2i)}, \quad \lambda_n^+ = ia_n + \tau_n a_n.$$

Тогда соотношение (3.38) может быть переписано в виде $\tau_n = h_n(\tau_n)$. Покажем, что существует неподвижная точка τ_n отображения $\tau \to h_n(\tau)$ при $n \to +\infty$. Для этого достаточно показать, что отображение $\tau \to h_n(\tau)$, $n \to +\infty$, является сжимающим. Искомое решение τ_n может быть найдено, как предел последовательности $\left\{\tau_n^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $k \to +\infty$, $\tau_n^k = h_n\left(\tau_n^{k-1}\right)$.

Отображение $\tau \to h_n(\tau)$ является сжимающим. Действительно, это следует из оценки

$$\left|h'(\tau)\right| = \left|\frac{\hat{K}(\lambda_n^+) - \hat{K}'(\lambda_n^+)(a_n\tau + 2ia_n)}{(\tau + 2i)^2}\right| \leqslant \frac{\left|\hat{K}(\lambda_n^+)\right| + \left|\hat{K}'(\lambda_n^+)\, 2\lambda_n^+\right|}{2} \tag{3.39}$$

и следующей леммы.

Лемма 3.1. *Соотношения*

$$\left|\lambda \hat{K}'(\lambda)\right| \to 0, \quad \left|\hat{K}(\lambda)\right| \to 0, \quad |\lambda| \to +\infty, \tag{3.40}$$

выполнены в области $\Omega_{\pi-\delta} = \{\lambda : |\arg\lambda| < \pi - \delta,\ 0 < \delta < \pi/4\}$.

Доказательство. Соотношения (3.40) следуют из представлений

$$\hat{K}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha}\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j}{1 + \dfrac{\beta_j}{\lambda^\alpha}}, \quad \lambda\hat{K}'(\lambda) = \frac{-\alpha}{\lambda^\alpha}\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j}{\left(1 + \dfrac{\beta_j}{\lambda^\alpha}\right)^2}$$

и следующих оценок:

$$\left|\hat{K}(\lambda)\right| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda|^\alpha}\sum_{j=1}^{N} c_j, \quad \left|\lambda\hat{K}'(\lambda)\right| \leqslant \frac{M_2}{|\lambda|^\alpha}\sum_{j=1}^{N} c_j.$$

где M_1, $M_2 = \text{const}$. □

Используя разложение правой части (3.38) в многочлен Тейлора по степеням τ_n, получаем

$$h_n(\tau_n) = \frac{-i\hat{K}(ia_n)}{2}\left(1 + O(\tau_n)\right),\ n \to +\infty. \tag{3.41}$$

Таким образом, для τ_n справедливо представление

$$\tau_n = -\frac{iK(ia_n)}{2}\left(1 + O(\tau_n)\right),\ n \to +\infty. \tag{3.42}$$

Лемма 3.2. *В области* $\Omega_{\pi-\delta}$ *функция* $\hat{K}(\lambda)$ *допускает представление*

$$\hat{K}(\lambda) = \frac{Q_1}{\lambda^\alpha} + \frac{Q_2}{\lambda^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{2\alpha}}\right),\ |\lambda| \to +\infty, \tag{3.43}$$

где $Q_1 = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j$, $Q_2 = -\sum\limits_{j=1}^{N} c_j\beta_j$.

Доказательство. Представление (3.43) немедленно вытекает из очевидного соотношения

$$\frac{c_j}{\lambda^\alpha + \beta_j} = \frac{c_j}{\lambda^\alpha}\left(1 - \frac{\beta_j}{\lambda^\alpha} + o\left(\frac{1}{\lambda^\alpha}\right)\right),\ j = 1, \ldots, N;\ |\lambda| \to +\infty,\ \lambda \in \Omega_{\pi-\delta}.$$

□

Из соотношений (3.42), а также представления $\hat{K}(\lambda) = \dfrac{Q_1}{\lambda^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{\lambda^\alpha}\right)$, вытекающего из (3.43), получаем асимптотическое представление для τ_n:

$$\tau_n = \frac{-iQ_1}{2(ia_n)^\alpha}\left(1 + o\left(\tau_n\right)\right) + o\left(\frac{1}{a_n^\alpha}\right) = -\frac{e^{\frac{\pi i}{2}(1-\alpha)}}{2} a_n^{-\alpha} Q_1 + o\left(\frac{1}{a_n^\alpha}\right),\ a_n \to +\infty. \tag{3.44}$$

Таким образом, невещественные собственные значения λ_n^+ допускают представление

$$\lambda_n^+ = ia_n - \frac{e^{\frac{\pi i}{2}(1-\alpha)}}{2} a_n^{1-\alpha} Q_1 + o\left(a_n^{1-\alpha}\right),\ a_n \to +\infty. \tag{3.45}$$

В свою очередь,

$$e^{\frac{\pi i}{2}(1-\alpha)} = \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right). \tag{3.46}$$

Наконец, используя (3.46) и выделяя вещественную и мнимую часть в представлении (3.45), получим искомую формулу:

$$\lambda_n^\pm = -\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_n^{1-\alpha}\frac{Q_1}{2} \pm i\left(a_n - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_n^{1-\alpha}\frac{Q_1}{2}\right) + o\left(a_n^{1-\alpha}\right),\ a_n \to +\infty.$$

□

Теорема 2.3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В.В.* О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Мат. сб. — 1995. — *186*, № 8. — С. 67–92.
2. *Власов В.В.* О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева// Тр. МИАН. — 1999. — *227*. — С. 109–121.
3. *Власов В.В., Гавриков А.А., Иванов С.А., Князьков Д.Ю., Самарин В.А., Шамаев А.С.* Спектральные свойства комбинированных сред// Соврем. пробл. мат. и мех. — 2009. — *5*, № 1. — С. 134–155.
4. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *30*. — С. 3–173.
5. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений// Тр. сем. им. И.Г. Петровского. — 2011. — *28*. — С. 75–114.
6. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории тепломассообмена// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2014. — *75*, № 2. — С. 131–155.
7. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 22–42.
8. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 9. — С. 1168–1177.
9. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
10. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Докл. РАН. — 2010. — *434*, № 1. — С. 12–15.
11. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 36–65.
12. *Жиков В.В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 7. — С. 31–72.
13. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
14. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
15. *Лыков А.В.* Проблема тепло- и массообмена. — Минск: Наука и техника, 1976.
16. *Палин В.В., Радкевич Е.В.* Законы сохранения и их гиперболические регуляризации// Соврем. пробл. мат. и мех. — 2009. — *5*, № 1. — С. 88–115.

17. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.
18. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
19. *Шамаев А. С., Шумилова В. В.* Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью// Изв. РАН. Мех. жид. и газа. — 2011. — № 2. — С. 92–103.
20. *Desch W., Miller R. K.* Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space// J. Differ. Equ. — 1987. — *70.* — С. 366–389.
21. *Di Blasio G.* Parabolic Volterra equations of convolution type// J. Integral Equ. Appl. — 1994. — *6.* — С. 479–508.
22. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives// J. Math. Anal. Appl. — 1984. — *102.* — С. 38–57.
23. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* Stability for abstract linear functional differential equations// Izrael. J. Math. — 1985. — *50*, № 3. — С. 231–263.
24. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin—Pipkin type equations// J. SIAM Math. Anal. — 2011. — *43*, № 5. — С. 2296—2306.
25. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* Theory of heat conduction with finite wave speed// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1968. — *31.* — С. 113–126.
26. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. 2. Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluids. — Berlin: Basel—Boston, 2003.
27. *Kunisch K., Mastinsek M.* Dual semigroups and structual operators for partial differential equations with unbounded operators acting on the delays// Differ. Integral Equ. — 1990. — *3*, № 4. — С. 733–756.
28. *Medvedev D. A., Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and structural properties of abstract neutral functional differential equations// Funct. Differ. Equ. — 2008. — *66*, № 3-4. — С. 249–272.
29. *Miller R. K.* Volterra integral equation in Banach space// Funkcialaj Ekvac. — 1975. — *18.* — С. 163–194.
30. *Miller R. K.* An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory// J. Math. Anal. Appl. — 1978. — *66.* — С. 313–332.
31. *Miller R. K., Wheeler R. L.* Well-posedness and stability of linear Volterra interodifferential equations in abstract spaces// Funkcialaj Ekvac. — 1978. — *21.* — С. 279–305.
32. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach// Appl. Math. Optim. — 2005. — *52.* — С. 143–165.
33. *Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay// J. Funct. Differ. Equ. — 2009. — *16*, № 4. — С. 751–768.
34. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. — New York: Springer, 1996.

В. В. Власов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
E-mail: vicvvlasov@rambler.ru

Н. А. Раутиан
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
E-mail: nrautian@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-60-73 UDC 517.968.72

Investigation of Operator Models Arising in Viscoelasticity Theory

© 2018 **V. V. Vlasov, N. A. Rautian**

Abstract. We study the correct solvability of initial problems for abstract integrodifferential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space. We do spectral analysis of operator-functions that are symbols of such equations. The equations under consideration are an abstract form of linear integrodifferential equations with partial derivatives arising in viscoelasticity theory and having a number of other important applications. We describe localization and structure of the spectrum of operator-functions that are symbols of such equations.

REFERENCES

1. V. V. Vlasov, "O razreshimosti i svoystvakh resheniy funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy v gil'bertovom prostranstve" [On solvability and properties of solutions of functional differential equations in Hilbert space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1995, **186**, No. 8, 67–92 (in Russian).
2. V. V. Vlasov, "O razreshimosti i otsenkakh resheniy funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy v prostranstvakh Soboleva" [On solvability and estimates of solutions of functional differential equations in Sobolev spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1999, **227**, 109–121 (in Russian).
3. V. V. Vlasov, A. A. Gavrikov, S. A. Ivanov, D. Yu. Knyaz'kov, V. A. Samarin, and A. S. Shamaev, "Spektral'nye svoystva kombinirovannykh sred" [Spectral properties of combined media], *Sovrem. probl. mat. i mekh.* [Contemp. Probl. Math. Mech.], 2009, **5**, No. 1, 134–155 (in Russian).
4. V. V. Vlasov and D. A. Medvedev, "Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i svyazannye s nimi voprosy spektral'noy teorii" [Functional-differential equations in Sobolev spaces and related problems of spectral theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **30**, 3–173 (in Russian).
5. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrektnaya razreshimost' i spektral'nyy analiz abstraktnykh giperbolicheskikh integrodifferentsial'nykh uravneniy" [Well-posedness and spectral analysis of abstract hyperbolic integrodifferential equations], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2011, **28**, 75–114 (in Russian).
6. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "O svoystvakh resheniy integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii teplomassoobmena" [On properties of solutions of integrodifferential equations arising in the theory of heat and mass transfer], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2014, **75**, No. 2, 131–155 (in Russian).
7. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrektnaya razreshimost' i spektral'nyy analiz integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti" [Well-posedness and spectral analysis of integro-differential equations arising in viscoelasticity theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 22–42 (in Russian).
8. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrektnaya razreshimost' vol'terrovykh integro-differentsial'nykh uravneniy v gil'bertovom prostranstve" [Well-posedness of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 9, 1168–1177 (in Russian).
9. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equation], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
10. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. C. Shamaev, "Razreshimost' i spektral'nyy analiz integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike" [Solvability and spectral analysis of integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **434**, No. 1, 12–15 (in Russian).
11. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. C. Shamaev, "Spektral'nyy analiz i korrektnaya razreshimost' abstraktnykh integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike" [Spectral analysis and correct solvability of abstract integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 36–65 (in Russian).

12. V. V. Zhikov, “Ob odnom rasshirenii i primenenii metoda dvukhmasshtabnoy skhodimosti” [On one extension and application of the method of two-scale convergence], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2000, **191**, No. 7, 31–72 (in Russian).
13. A. A. Il’yushin and B. E. Pobedrya, *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Foundations of Mathematical Theory of Viscoelasticity], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
14. J. L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
15. A. V. Lykov, *Problema teplo- i massoobmena* [Problem of Heat and Mass Transfer], Nauka i tekhnika, Minsk, 1976 (in Russian).
16. V. V. Palin and E. V. Radkevich, “Zakony sokhraneniya i ikh giperbolicheskie regulyarizatsii” [Conservation laws and their hyperbolic regularizations], *Sovrem. probl. mat. i mekh.* [Contemp. Probl. Math. Mech.], 2009, **5**, No. 1, 88–115 (in Russian).
17. Yu. N. Rabotnov, *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of Hereditary Mechanics of Solid Bodies], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
18. E. Sanchez-Palencia, *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Non-Homogeneous Media and Vibration Theory], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
19. A. S. Shamaev and V. V. Shumilova, “Usrednenie uravneniy akustiki dlya vyazkouprugogo materiala s kanalami, zapolnennymi vyazkoy szhimaemoy zhidkost’yu” [Averaging of the acoustics equations for viscoelastic media with channels filled with viscous compressible fluid], *Izv. RAN. Mekh. zhid. i gaza* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Mech. Fluid Gas], 2011, No. 2, 92–103 (in Russian).
20. W. Desch and R. K. Miller, “Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space,” *J. Differ. Equ.*, 1987, **70**, 366–389.
21. G. Di Blasio, “Parabolic Volterra equations of convolution type,” *J. Integral Equ. Appl.*, 1994, **6**, 479–508.
22. G. Di Blasio, K. Kunisch, and E. Sinestari, “L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1984, **102**, 38–57.
23. G. Di Blasio, K. Kunisch, and E. Sinestari, “Stability for abstract linear functional differential equations,” *Izrael. J. Math.*, 1985, **50**, No. 3, 231–263.
24. A. Eremenko and S. Ivanov, “Spectra of the Gurtin—Pipkin type equations,” *J. SIAM Math. Anal.*, 2011, **43**, No. 5, 2296–2306.
25. M. E. Gurtin and A. C. Pipkin, “Theory of heat conduction with finite wave speed,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1968, **31**, 113–126.
26. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. 2. Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids*, Basel—Boston, Berlin, 2003.
27. K. Kunisch and M. Mastinsek, “Dual semigroups and structual operators for partial differential equations with unbounded operators acting on the delays,” *Differ. Integral Equ.*, 1990, **3**, No. 4, 733–756.
28. D. A. Medvedev, V. V. Vlasov, and J. Wu, “Solvability and structural properties of abstract neutral functional differential equations,” *Funct. Differ. Equ.*, 2008, **66**, No. 3-4, 249–272.
29. R. K. Miller, “Volterra integral equation in Banach space,” *Funkcialaj Ekvac.*, 1975, **18**, 163–194.
30. R. K. Miller, “An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1978, **66**, 313–332.
31. R. K. Miller and R. L. Wheeler, “Well-posedness and stability of linear Volterra interodifferential equations in abstract spaces,” *Funkcialaj Ekvac.*, 1978, **21**, 279–305.
32. L. Pandolfi, “The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach,” *Appl. Math. Optim.*, 2005, **52**, 143–165.
33. V. V. Vlasov and J. Wu, “Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay,” *J. Funct. Differ. Equ.* , 2009, **16**, No. 4, 751–768.
34. J. Wu, *Theory and applications of partial functional differential equations*, Springer, New York, 1996.

V. V. Vlasov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `vicvvlasov@rambler.ru`

N. A. Rautian
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `nrautian@mail.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 74–85

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-74-85 УДК 517.957

ОБОБЩЕННЫЕ УСЛОВИЯ КЕЛЛЕРА—ОССЕРМАНА ДЛЯ ПОЛНОСТЬЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2018 г. **И. КАПУЦЦО ДОЛЬЧЕТТА, Ф. ЛЕОНИ, А. ВИТОЛО**

Аннотация. Исследуется существование глобальных (т. е. определенных на всем пространстве) субрешений полностью нелинейных вырождающихся эллиптических уравнений. Необходимые и достаточные условия на коэффициенты при младших членах обобщают классические условия Келлера—Оссермана для полулинейных эллиптических уравнений. Наш анализ показывает, что в случае нарушения условия существования глобальных субрешений можно получить априорные оценки для локальных субрешений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В настоящей работе излагаются недавно полученные (см. [18, 19]) результаты о существовании глобальных субрешений и априорных оценок для локальных субрешений для полностью нелинейных вырождающихся эллиптических уравнений с младшими членами. В общем случае рассматриваются дифференциальные неравенства второго порядка вида

$$F(x, D^2u) \geqslant f(u) + g(u)\,|Du|^q, \tag{1.1}$$

где свободный член $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и коэффициент первого порядка $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные монотонно возрастающие функции, причем функция f положительна. Будем считать, что показатель q принадлежит $(0, 2]$, а главная часть F есть вырождающийся эллиптический оператор второго порядка, т. е. такая непрерывная функция $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$, что $F(x, O) = 0$ и выполняется (нормализованное) условие эллиптичности

$$0 \leqslant F(x, X + Y) - F(x, X) \leqslant \operatorname{tr}(Y), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ X,\ Y \in \mathcal{S}_n,\ Y \geqslant O, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{S}_n$ — пространство вещественных симметричных матриц порядка $n \times n$, частично упорядоченное обычным образом.

В качестве модельных примеров F можно рассматривать вырождающийся максимальный оператор Пуччи $\mathcal{M}^+_{0,1}$, определенный соотношением

$$\mathcal{M}^+_{0,1}(X) = \sum_{\mu_i > 0} \mu_i(X), \tag{1.3}$$

а также k-частичный Лапласиан, задаваемый соотношением

$$\mathcal{P}^+_k(X) = \mu_{n-k+1}(X) + \ldots + \mu_n(X), \tag{1.4}$$

где $\mu_1(X) \leqslant \mu_2(X) \leqslant \ldots \leqslant \mu_n(X)$ — упорядоченные собственные значения матрицы X.

Напомним, что экстремальные операторы Пуччи — это явные полностью нелинейные операторы, играющие центральную роль в теории эллиптической регулярности уравнений недивергентного вида (см. [15]). Отметим, что оператор (1.3) является максимальным в классе всех вырождающихся эллиптических операторов, обращающихся в нуль при $X = O$. В частности, для любого $k = \overline{1,n}$ и любого X из $\mathcal{S}_n$ справедливо неравенство $\mathcal{P}_k^+(X) \leqslant \mathcal{M}_{0,1}^+(X)$, а если u удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{P}_k^+(D^2u) \geqslant f(u) + g(u)\,|Du|^q \tag{1.5}$$

или неравенству (1.1), то u удовлетворяет и неравенству

$$\mathcal{M}_{0,1}^+(D^2u) \geqslant f(u) + g(u)\,|Du|^q. \tag{1.6}$$

Что касается операторов $\mathcal{P}_k^+$, то они естественным образом возникают в римановой геометрии — в частности, при изучении k-выпуклых многообразий (см. [41, 42]). Их связь с уравнениями в частных производными недавно рассматривалась в [16, 30] (см. также [4, 26, 27]). Кроме того, они возникают при применении множеств уровня к геометрическим эволюционным задачам (см. [3, 28]), а также в задаче о выпуклой оболочке (см. [38]). Свежие результаты о регулярности и существовании главных собственных функций можно найти в [10], а о теоремах типа Лиувилля — в [11].

Частным случаем неравенства (1.1) является полулинейное равномерно эллиптическое неравенство $\Delta u \geqslant f(u)$. Для положительных f это неравенство изучалось в [32, 39] (независимо); хорошо известно, что в этом случае решения во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ существуют тогда и только тогда, когда f удовлетворяет классическому условию

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int\limits_0^t f(s)\,ds\right)^{1/2}} = +\infty. \tag{1.7}$$

Цель настоящей работы — получить аналогичные результаты для неравенства общего вида (1.1), определив более точные условия на младшие коэффициенты, гарантирующие, что глобальных субрешений не существует, а для локальных субрешений справедливы универсальные оценки сверху.

Поскольку рассматриваются операторы недивергентного вида, используется понятие вязкого решения; общие сведения о существовании, единственности и регулярности для этого класса решений можно найти в [15, 20].

Полученные нами условия обобщают (1.7) и зависят от знака функции g, т. е. от того, является ли член первого порядка «абсорбирующим» или «реактивным».

Если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) > 0$, то необходимое и достаточное условие «сублинейности» (1.7) нужно обобщить таким образом, чтобы правильно учесть положительно определенный член первого порядка. Мы доказываем, что неравенство (1.6) имеет глобальное вязкое решение тогда и только тогда, когда

$$q \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int\limits_0^t f(s)\,ds\right)^{1/2} + \left(\int\limits_0^t g^+(s)\,ds\right)^{1/(2-q)}} = +\infty. \tag{1.8}$$

Также доказывается, что это условие является необходимым и достаточным для существования глобального вязкого решения неравенства (1.5) при условии, что $g(t) \geqslant 0$ для всех вещественных значений t.

В частности, устанавливается, что если $q > 1$, то глобальных субрешений не существует, как бы медленно ни росли f и g, а в случае, когда $q \leqslant 1$, ограничения на рост нужны и для f, и для g.

В случае, когда $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) \leqslant 0$, члены нулевого и первого порядка неравенства (1.6) конкурируют друг с другом, поскольку имеют противоположные знаки. Наш анализ показывает, что в этом случае глобальные вязкие субрешения существуют тогда и только тогда, когда выполняется следующий ослабленный вариант условия (1.7), содержащий f, g и q:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int\limits_0^t e^{-2\int\limits_s^t \left(-\frac{g(\tau)}{f(\tau)}\right)^{2/q} f(\tau)\,d\tau} f(s)\,ds\right)^{1/2}} = +\infty. \tag{1.9}$$

В частности, доказывается, что если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) < 0$, то (1.9) эквивалентно соотношению

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\left(\int\limits_0^t f(s)\,ds\right)^{1/2}} + \frac{1}{f(t)^{1/q}}\right] dt = +\infty. \tag{1.10}$$

Отметим, что при $q = 2$ это условие обращается в следующее условие «субквадратического» роста: $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dt}{f(t)^{1/2}} = +\infty$. Кроме того, для всех случаев доказывается, что, если условие (1.8), (1.9) или (1.10) (соответственно) нарушается, а u удовлетворяет неравенству (1.1) в любом открытом подмножестве Ω пространства $\mathbb{R}^n$, то u универсально оценивается сверху явной функцией расстояния до границы, определенной функцией f, g или q соответственно (см. теорему 3.4).

Из предшествующих результатов в данной области отметим результат [14] о существовании и единственности глобальных решений полулинейных уравнений, в которых $f(u) = |u|^{p-1}u$, $p > 1$, и результаты [12, 13, 21, 35, 36] о дальнейших обобщениях главной части и членов нулевого порядка на случаи, когда оператор имеет более общий дивергентный вид.

Для полностью нелинейного случая аналогичные результаты получены в [5, 23, 24, 27], а для уравнений с гессианом, включая k-ю основную симметрическую функцию собственных значений $\mu_1(D^2u), \dots, \mu_n(D^2u)$ — в [6, 7, 31]. Результаты о приложениях к устранимым особенностям можно найти в [33].

Для уравнений с градиентными членами аналогичное «абсорбирующее» свойство суперлинейных членов первого порядка в полулинейных эллиптических уравнениях впервые установлено в [34]. Впоследствии оно активно изучалось разными авторами — см., например, [40] (о полулинейных уравнениях) или [1, 25] (о полностью нелинейных равномерно эллиптических уравнениях, в которых члены первого порядка имеют вид $h(|Du|)$).

Как и в [32, 39], наши методы доказательств основаны на сравнении сферически симметричных решений неравенств (1.5) и (1.6). Этот подход требует подробного анализа начальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют эти сферически симметричные решения. В частности, нужно исследовать существование глобальных максимальных решений; оказывается, что глобальные решения неравенства (1.6) существуют тогда и только тогда, когда существуют глобальные сферически симметричные решения. Отметим, что этот факт доказывается методом сравнения, который применим и в рассматриваемых здесь вырождающихся случаях, причем никаких априорных предположений о росте u на бесконечности не делается.

Если максимальные решения соответствующей задачи для обыкновенного дифференциального уравнения не являются глобальными, то в шарах пространства $\mathbb{R}^n$ получаем существование сферически симметричных решений задач

$$\begin{cases} \mathcal{M}^+_{0,1}(D^2u) = f(u) + g(u)\,|Du|^q & \text{в } B, \\ u = +\infty & \text{на } \partial B; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}^+_k(D^2u) = f(u) + g(u)\,|Du|^q & \text{в } B, \\ u = +\infty & \text{на } \partial B. \end{cases}$$

Решения, разрушающиеся на границе, широко изучаются как для полулинейных, так и для полностью нелинейных эллиптических уравнений. Что касается полностью нелинейного случая, то, помимо основополагающей работы [34], отметим результаты [5, 22]. Из совсем свежих результатов о разрушающихся решениях полностью нелинейных сингулярных и вырождающихся уравнений отметим [9].

Кроме того, отметим, что в некоторых случаях наши результаты можно также применить для нахождения нижних оценок суперрешений вырожденных эллиптических уравнений. В качестве примера, пусть v — положительное суперрешение уравнения $\mathcal{M}^-(D^2v) + v^\theta \leqslant 0$ в Ω, где $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество с непустой границей, а $\mathcal{M}^-$ — вырожденный inf-оператор Пуччи, определенный как $\mathcal{M}^-(M) = \sum\limits_{\mu_i<0} \mu_i(M) = -\mathcal{M}^+(-M)$. Тогда легко доказать, что функция $u = \dfrac{1}{v}$ удовлетворяет неравенству $\mathcal{M}^+(D^2u) \geqslant u^{2-\theta}$. В случае $\theta < 1$ из наших результатов о субрешениях следует оценка $u(x) \leqslant \dfrac{C}{d(x)^{\frac{2}{1-\theta}}}$ при $x \in \Omega$, где $C > 0$ — положительная константа, а $d(x)$ — расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$. Это, в свою очередь, дает равномерную оценку снизу $v(x) \geqslant c\, d(x)^{\frac{2}{1-\theta}}$ при $x \in \Omega$.

2. Сферически симметричные решения и принцип сравнения

Пусть f, g — непрерывные неубывающие функции. Считая, что $c > 0$, $q > 0$ и $a \in \mathbb{R}$, рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \varphi'' + \dfrac{c-1}{r}\,\varphi' = f(\varphi) + g(\varphi)\,|\varphi'|^q, \\ \varphi(0) = a, \\ \varphi'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь и далее, *решением* задачи (2.1) в $[0, R)$, где $0 < R \leqslant +\infty$, мы называем такую функцию φ из $C^2((0,R)) \cap C([0,R))$, для которой $0 = \varphi'(0) = \lim\limits_{r\to 0} \varphi'(r)$, $\exists \lim\limits_{r\to 0^+} \varphi''(r) \in \mathbb{R}$. Следовательно, обыкновенное дифференциальное уравнение из (2.1) должно выполняться и в точке $r = 0$.

Существование локальных решений задачи (2.1) следует из классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывными данными. При доказательстве свойств монотонности и выпуклости локальных решений φ задачи (2.1) используется следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть $c > 0$, $q > 0$, а функции $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны. Если φ — решение задачи* (2.1) *в* $[0, R)$, *то справедливы следующие утверждения*:

(i) *если f положительна, то φ строго возрастает*;

(ii) *если f положительна, f, g — неубывающие, а $c \geqslant 1$, то φ выпукла и*

$$\varphi'(r) \leqslant \left(\frac{f(\varphi(r))}{g^-(\varphi(r))}\right)^{1/q} \text{ для всех } r \text{ из } [0, R); \tag{2.2}$$

(iii) *если f положительна, f, g — неубывающие, g неотрицательна, а $c \geqslant 1$, то*

$$\varphi''(r) \geqslant \frac{\varphi'(r)}{r} \text{ для всех } r \text{ из } [0, R). \tag{2.3}$$

Доказательство. Из (2.1) следует, что $c\varphi''(0) = \lim\limits_{r\to 0^+}\left(\varphi''(r) + (c-1)\,\dfrac{\varphi'(r)}{r}\right) = f(a) > 0$, т. е., φ' возрастает, а следовательно, положительна на некотором интервале $(0, r_0)$. В действительности неравенство $\varphi'(r) > 0$ справедливо на всем интервале $(0, R)$, поскольку в противном случае в $(0, R)$ существовала бы точка такая r^*, что $\varphi'(r^*) = 0$, $\varphi''(r^*) \leqslant 0$ и $\varphi''(r^*) = f(\varphi(r^*)) > 0$. Значит, утверждение (i) доказано.

Теперь докажем утверждение (ii). Поскольку $\varphi''(0) > 0$, существует такое положительное r_1, что $\varphi'(r) > 0$ и $\varphi''(r) > 0$ для любого r из $(0, r_1]$. Предположим обратное тому, что требуется доказать, т. е., что существует такое τ, превосходящее r_1, что $\varphi''(\tau) < 0$. Тогда функция φ' имеет в $(0, \tau)$ точку локального строгого максимума r_0 и множество $\mathcal{R} = \{r \in (0, r_0) : \varphi'(r) = \varphi'(\tau)\}$ не пусто. Пусть $\sigma = \min \mathcal{R}$. Тогда $\varphi''(\sigma) \geqslant 0$. Значит, мы нашли такое σ, что $\sigma < \tau$, $\varphi'(\sigma) = \varphi'(\tau)$ и

$$\varphi''(\sigma) - \varphi''(\tau) > 0. \tag{2.4}$$

С другой стороны, подставляя σ и τ в (2.1), получаем, что

$$\varphi''(\sigma) - \varphi''(\tau) = (c-1)\left(\frac{\varphi'(\tau)}{\tau} - \frac{\varphi'(\sigma)}{\sigma}\right) + g(\varphi(\sigma))\varphi'(\sigma)^q - g(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)^q\, f(\varphi(\sigma)) - f(\varphi(\tau)).$$

Поскольку f, g и φ монотонны, $c \geqslant 1$, $\sigma < \tau$ и $\varphi'(\sigma) = \varphi'(\tau)$, отсюда следует, что $\varphi''(\sigma) - \varphi''(\tau) \leqslant 0$, что противоречит (2.4). Следовательно, в $[0, R)$ функция φ выпукла и возрастает. Тогда из (2.1) мы получаем, что $f(\varphi) + g(\varphi)(\varphi')^q \geqslant 0$ в $[0, R)$, откуда вытекает (2.2), что и доказывает утверждение (ii).

Наконец, докажем утверждение (iii). Умножая уравнение (2.1) на r^{c-1} и интегрируя результат по промежутку от 0 до r, получаем, что

$$r^{c-1}\varphi'(r) \leqslant \left[f(\varphi(r)) + g(\varphi(r))\varphi'(r)^q\right] \int\limits_0^r s^{c-1} ds = \left[\varphi''(r) + \frac{(c-1)}{r}\varphi'(r)\right]\frac{r^c}{c},$$

поскольку φ, φ', f и g — неубывающие функции. Значит, (2.3) доказано. □

Теперь рассмотрим уравнения в частных производных

$$\mathcal{M}^+_{0,1}(D^2u) = f(u) + g(u)\,|Du|^q, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{P}^+_k(D^2u) = f(u) + g(u)\,|Du|^q. \tag{2.6}$$

Покажем, что сферически симметричные решения указанных уравнений могут быть найдены из решений φ задачи (2.1), принадлежащих пространству $C^2([0, R))$.

Лемма 2.2. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *Пусть f и g — непрерывные неубывающие функции, f положительна, $q > 0$, φ из $C^2([0, R))$ — решение задачи Коши* (2.1) *при $c = n$. Тогда $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ принадлежит $C^2(B_R)$ и является классическим решением уравнения* (2.5) *в шаре B_R.*

(ii) *Пусть f и g — непрерывные неубывающие функции, f положительна, g неотрицательна, $q > 0$, φ из $C^2([0, R))$ — решение задачи Коши* (2.1) *при $c = k$. Тогда $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ принадлежит $C^2(B_R)$ и является классическим решением уравнения* (2.6) *в шаре B_R.*

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что если $\Phi(x) = \varphi(|x|)$, то

$$D^2\Phi(x) = \begin{cases} \varphi''(0)\, I_n, & \text{если } x = 0, \\ \dfrac{\varphi'(|x|)}{|x|}\, I_n + \left(\varphi''(|x|) - \dfrac{\varphi'(|x|)}{|x|}\right)\dfrac{x}{|x|} \otimes \dfrac{x}{|x|}, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Поскольку $\varphi \in C^2([0, R))$, $\varphi'(0) = 0$ и $\varphi''(0) = \lim\limits_{r\to 0} \varphi'(r)/r$, отсюда вытекает, что Φ принадлежит $C^2(B_R)$. Кроме того, Φ — выпуклая, поскольку φ — выпуклая и возрастающая, а из определения оператора $\mathcal{M}^+_{0,1}$ следует, что $\mathcal{M}^+_{0,1}(D^2\Phi(x)) = \varphi''(|x|) + (n-1)\,\dfrac{\varphi'(|x|)}{|x|}$. Следовательно, если φ удовлетворяет (2.1) при $c = n$, то Φ удовлетворяет (2.5).

Точно так же мы получаем, что если $g \geqslant 0$ и φ удовлетворяет (2.1) при $c = k$, то $\varphi''(|x|) \geqslant \dfrac{\varphi'(|x|)}{|x|}$ в силу леммы 2.1(iii). Следовательно, $\mathcal{P}^+_k(D^2\Phi(x)) = \varphi''(|x|) + (k-1)\,\dfrac{\varphi'(|x|)}{|x|}$ и Φ удовлетворяет (2.6). □

Следующий результат демонстрирует, какая форма принципа сравнения потребуется далее. Указанный результат непосредственно следует из определения суб- и суперрешения, если она из сравниваемых функций — гладкая. Чтобы сравнивать негладкие (а лишь вязкие) суб- и суперрешения, требуется некая общая техника регуляризации (см. [20]).

Предложение 2.1. *Пусть f, g — непрерывные функции, f — строго возрастающая, g — неубывающая, а $F : \mathbb{R}^n \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, удовлетворяющая* (1.2). *Далее, предположим, что u из $USC(B_R)$ и Φ из $C^2(B_R)$ удовлетворяют двойному неравенству*

$$F(x, D^2u) - f(u) - g(u)\,|Du|^q \geqslant 0 \geqslant F(x, D^2\Phi) - f(\Phi) - g(\Phi)\,|D\Phi|^q \quad \textit{в } B_R$$

и предельному соотношению

$$\limsup_{|x|\to R^-} (u(x) - \Phi(x)) \leqslant 0.$$

Тогда $u(x) \leqslant \Phi(x)$ для любого x из B_R.

Доказательство. Предположим, напротив, что $u - \Phi$ достигает положительного максимума во внутренней точке x_0 шара B_R. В определении вязкого субрешения u возьмем $\Phi(x)+u(x_0)-\Phi(x_0)$ в качестве основной функции в точке x_0. Получим неравенство $F(x_0, D^2\Phi(x_0)) \geqslant f(u(x_0)) + g(u(x_0))\,|D\Phi(x_0)|^q$, которое в силу строгой монотонности f и монотонности g противоречит тому, что Φ — суперрешение. □

3. Существование глобальных суперрешений и априорные оценки сверху

Подробный анализ максимального решения начальной задачи (2.1) приводит к следующим результатам о существовании глобальных решений (см. доказательство в [19]).

Теорема 3.1. *Пусть $0 < q \leqslant 2$, $c \geqslant 1$, а f, g — непрерывные неубывающие функции, причем f положительна. Пусть φ — максимальное решение начальной задачи* (2.1). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *если* $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) > 0$, *то* φ *определена на всей полуоси* $[0,+\infty)$ *тогда и только тогда, когда*

$$q \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(t\,f(t))^{1/2} + (t\,g^+(t))^{1/(2-q)}} = +\infty; \tag{3.1}$$

(ii) *если* $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) \leqslant 0$, *то* φ *определена на всей полуоси* $[0,+\infty)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int\limits_0^t e^{-2\int\limits_s^t \left(\frac{g^-(\tau)}{f(\tau)}\right)^{2/q} f(\tau)\,d\tau} f(s)\,ds\right)^{1/2}} = +\infty; \tag{3.2}$$

(iii) *если* $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) < 0$, *то* (3.2) *равносильно соотношению*

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(t\,f(t))^{1/2}} + \frac{1}{f(t)^{1/q}}\right] dt = +\infty. \tag{3.3}$$

В частности, из теоремы 3.1 следует, что либо все максимальные функции задачи Коши (2.1) разрушаются при конечном R, либо все максимальные функции определены на всей полуоси $[0,+\infty)$, и это не зависит от начальных данных a, а зависит только от роста f и g при $t\to+\infty$ (и эта зависимость регулируется условиями (3.1)–(3.3)). Это соответствует классической теории субквадратичных обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [29]), поскольку при нашем предположении о том, что $q \leqslant 2$, выполняется условие роста Нагумо.

Рассмотрим некоторые следствия условий (3.1), (3.2) и (3.3).

Из условия (3.1) очевидно следует, что $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(tf(t))^{1/2}} = +\infty$ и $\int\limits_{t_0}^{+\infty} \frac{dt}{(t\,g^+(t))^{1/(2-q)}} = +\infty$ при любом $t_0 > 0$, так что $g^+(t_0) > 0$, но (3.1) не вытекает из этих двух условий. Таким образом, условие (3.1) сильнее, чем классическое условие Келлера—Оссермана

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(t\,f(t))^{1/2}} = +\infty, \tag{3.4}$$

поскольку ограничивает на бесконечности рост и f, и g; например, для функций, растущих как степенные $g(t) \simeq t^\alpha$ при $t\to+\infty$, условие (3.1) дает $\alpha \leqslant 1-q$, и при $q=1$ функция может расти не быстрее логарифмической $g(t) \simeq (\ln t)^\alpha$, где $\alpha \leqslant 1$.

Условие (3.3) сводится к требованию либо $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(tf(t))^{1/2}} = +\infty$, либо $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(f(t))^{1/q}} = +\infty$; при $q=2$ это равносильно следующему условию «субквадратичности»: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(f(t))^{1/2}} = +\infty$. Для функций f со степенным ростом на бесконечности, например, для $f(t) \simeq t^\alpha$ при $t \to +\infty$, соотношение (3.3) означает, что $0 \leqslant \alpha \leqslant \max\{1, q\}$. Однако это справедливо и для функций вида $f(t) \simeq t\,(\ln t)^\alpha$, где $\alpha \geqslant 0$ при $q > 1$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$ при $q \leqslant 1$.

Если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$, то соотношение

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(t\,f(t))^{1/2}} + \left(\frac{g^-(t)}{f(t)}\right)^{1/q}\right] dt = +\infty \tag{3.5}$$

является достаточным условием того, что все максимальные решения определены на всей полуоси $[0, +\infty)$. С другой стороны, если существует глобальное максимальное решение φ из $C^2([0, +\infty))$, то

$$\int\limits_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(t\,f(t))^{1/2}} + \left(\frac{\int_0^t g^-(s)\,ds}{\int_0^t f(s)\,ds}\right)^{1/q}\right] dt = +\infty. \tag{3.6}$$

Условия (3.5) и (3.6) не эквиваленты друг другу (даже при $q < 2$). Это легко видеть на примере, в котором $q = 2$, $f(t) \simeq t\,(\ln t)^\alpha$, а $g(t) \simeq -1/t$ при $t \to +\infty$. В этом случае условие (3.5) выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant 2$, в то время как (3.6) справедливо и при $\alpha \leqslant 3$. Мы видим, что в этом случае (3.2) требует выполнения неравенства $\alpha \leqslant 2$.

С другой стороны, легко доказать, что, если $q < 2$ и $c_1/t^\beta \leqslant g^-(t) \leqslant c_2/t^\beta$, где c_1, c_2 и β — положительные постоянные, а t достаточно велико, то, независимо от поведения f, условия (3.5) и (3.6) эквиваленты друг другу. В этом случае оба эти условия являются более явными формулировками условия (3.2).

Если $g \equiv 0$, то условие (3.2) сводится к классическому условию Келлера—Оссермана (3.4). Аналогичное условие можно получить и в том случае, когда $g > 0$ при $q \to 0$. Действительно, при $q \to 0$ условие (3.1) обращается в условие (3.4), примененное к положительной неубывающей нелинейности $f(t) + g(t)$.

Объединяя теорему 3.1 с результатом сравнения, полученным в предложении 2.1, получаем следующий результат о существовании глобальных субрешений уравнения (2.5).

Теорема 3.2. *Пусть f, g — непрерывные неубывающие функции, причем f положительна и строго возрастает. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *если* $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) > 0$, *то глобальное вязкое субрешение u уравнения* (2.5)*, принадлежащее* $USC(\mathbb{R}^n)$*, существует тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.1);

(ii) *если* $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$, *то глобальное вязкое субрешение u уравнения* (2.5)*, принадлежащее* $USC(\mathbb{R}^n)$*, существует тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.2);

(iii) *если* $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) < 0$, *то глобальное вязкое субрешение u уравнения* (2.5)*, принадлежащее* $USC(\mathbb{R}^n)$*, существует тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.3).

Доказательство.

(i) Если выполняется условие (3.1), то любое максимальное решение задачи Коши (2.1) при $c = n$, определенное на всей полуоси $[0, +\infty)$ в силу теоремы 3.1(i), дает в силу леммы 2.2 гладкое глобальное (суб)решение уравнения (2.5).

Предположим, напротив, что существует глобальное субрешение u уравнения (2.5), принадлежащее $USC(\mathbb{R}^n)$, для которого соотношение (3.1) не выполняется. Рассмотрим максимальное решение $\varphi(r)$ задачи Коши (2.1) при $c = n$ и $a < u(0)$. По теореме 3.1(i), функция $\varphi(r)$ разрушается в некоторой положительной точке $r = R(a)$. С другой стороны, по лемме 2.2 и предложению 2.1 функции u и $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ можно сравнить в шаре $B_{R(a)}$, что приводит к следующему противоречию: $u(0) \leqslant \Phi(0) = a < u(0)$. Таким же образом утверждения (ii) и (iii) следуют из утверждений (ii) и (iii) теоремы 3.1 (соответственно). $\square$

В силу максимальности оператора $\mathcal{M}^+_{0,1}$, условия (3.1), (3.2) и (3.3) необходимы для существования глобальных вязких решений неравенства (1.1) при $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) < 0$ соответственно.

Доказательство теоремы 3.2 применимо и к субрешениям уравнения (2.6), но в этом случае требуется наложить дополнительное условие неотрицательности функции $g(t)$, чтобы иметь соответствие между решениями системы (2.1) и сферически симметричными решениями уравнения (2.6). В итоге получаем следующий результат.

Теорема 3.3. *Пусть f, g — непрерывные неотрицательные неубывающие функции, причем f положительна и строго возрастает. Тогда глобальное вязкое субрешение u уравнения* (2.6), *принадлежащее $USC(\mathbb{R}^n)$, существует тогда и только тогда, когда выполняется условие* (3.1).

Технику сравнения, используемую при доказательстве теоремы 3.2, можно применить и для оценки сверху вязких решений неравенства (1.1) в любом открытом подмножестве Ω пространства $\mathbb{R}^n$. Если $\partial\Omega \neq \varnothing$, то при любом x из $\mathbb{R}^n$ определим $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ — функцию расстояния до границы $\partial\Omega$. Тогда получаем следующий результат, доказательство которого можно найти в [19].

Теорема 3.4. *Пусть f, g — непрерывные неубывающие функции, причем f — положительная и строго возрастающая, и*

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty, \quad \textit{если} \quad \lim_{t\to+\infty} g(t) < +\infty. \tag{3.7}$$

Пусть Ω — открытая область с непустой границей в $\mathbb{R}^n$. Пусть $q \in (0,2]$ и $u \in USC(\Omega)$ — вязкое решение неравенства (1.1) *в Ω. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) *если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) > 0$ и условие* (3.1) *не выполнено, то в каждой точке Ω выполнено неравенство*

$$u(x) \leqslant \max\{t_0,\ \mathcal{R}^{-1}(d(x))\}, \tag{3.8}$$

где $t_0 = \inf\{t \in \mathbb{R}:\ g(t) \geqslant 0\}$, а $\mathcal{R} : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ определена соотношением

$$\mathcal{R}(a) = \begin{cases} 2\left(\dfrac{n}{2-q}\right)^{1/(2-q)} \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int_a^t f(s)\,ds\right)^{1/2} + \left(\int_a^t g^+(s)\,ds\right)^{1/(2-q)}} & \textit{при} \quad q < 2, \\ \sqrt{\dfrac{n}{2}} \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int_a^t e^{\frac{2}{n}\int_s^t g^+(\tau)\,d\tau} f(s)\,ds\right)^{1/2}} & \textit{при} \quad q = 2; \end{cases} \tag{3.9}$$

(ii) *если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$ и условие* (3.2) *не выполнено, то в каждой точке Ω выполнено неравенство $u(x) \leqslant \mathcal{R}^{-1}(d(x))$, где $\mathcal{R} : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ определена соотношением*

$$\mathcal{R}(a) = \frac{n^{1/q}}{\sqrt{q}} \int_a^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int_a^t e^{-2\int_s^t \left(\frac{g^-(r)}{f(r)}\right)^{2/q} f(r)\,dr} f(s)\,ds\right)^{1/2}}; \tag{3.10}$$

(iii) *если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) < 0$ и условие* (3.3) *не выполнено, то в каждой точке Ω выполнено неравенство $u(x) \leqslant \mathcal{R}^{-1}(d(x))$, где $\mathcal{R} : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ определена соотношением*

$$\mathcal{R}(a) = 2\frac{n^{1/q}}{q} \int_a^{+\infty} \left[\frac{1}{\left(\int_a^t f(s)\,ds\right)^{1/2}} + \left(\frac{\int_a^t g^-(s)\,ds}{\int_a^t f(s)\,ds} \right)^{1/q} \right] dt. \tag{3.11}$$

Относительно условия (3.7) отметим, что оно нужно только в случае, когда $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) > 0$ и $q > 1$; во всех остальных случаях оно выполняется в силу нарушения условий (3.1)–(3.3). Оно гарантирует, что амплитуда $R(a)$ максимального интервала существования максимального решения задачи Коши (2.1) удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{a\to+\infty} R(a) = 0$. Чтобы показать его необходимость, можно использовать тот же контрпример, что и в [40]. Действительно, пусть $q = 2$, $g \equiv 1$ и для любого вещественного a функция φ, принадлежащая $C^2([0, R(a)))$, является максимальным решением задачи

$$\begin{cases} \varphi'' + \dfrac{n-1}{r}\varphi' = f(\varphi) + (\varphi')^2, \\ \varphi(0) = a, \ \varphi'(0) = 0. \end{cases}$$

Тогда сферически симметричная функция $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ удовлетворяет и задаче

$$\begin{cases} -\Delta\Phi + f(\Phi) + |D\Phi|^2 = 0 \text{ в } B_{R(a)}, \\ \Phi = +\infty \text{ на } \partial B_{R(a)}, \end{cases}$$

а значит, функция $\Psi(x) = e^{-\Phi(x)}$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} -\Delta\Psi = f\left(\ln\dfrac{1}{\Psi}\right)\Psi \text{ в } B_{R(a)}, \\ \Psi > 0 \quad \text{в } B_{R(a)}, \ \Psi = 0 \text{ на } \partial B_{R(a)}. \end{cases}$$

Тогда из свойств первого собственного значения оператора Лапласа с однородными условиями Дирихле вытекает, что $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) \geqslant \lambda_1\left(B_{R(a)}\right)$, где $\lambda_1\left(B_{R(a)}\right)$ обозначает первое собственное значение Дирихле оператора $-\Delta$ в $B_{R(a)}$. Следовательно, если λ_1 — это первое собственное значение оператора $-\Delta$ в B_1, а $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) < +\infty$, то $R(a) \geqslant \sqrt{\dfrac{\lambda_1}{\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)}}$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

Благодарности. Авторы благодарят независимого рецензента за внимание к этой работе; в частности, за нетривиальный пример, с помощью которого удалось показать, что одно замечание в исходной версии статьи было некорректным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alarcón S., García-Melián J., Quaas A.* Keller—Ossermann conditions for some elliptic problems with gradient terms// J. Differ. Equ. — 2012. — *252*. — С. 886–914.
2. *Alarcón S., Quaas A.* Large viscosity solutions for some fully nonlinear equations// NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2013. — *20*. — С. 1453–1472.
3. *Ambrosio L., Soner H. M.* Level set approach to mean curvature flow in arbitrary codimension// J. Differ. Geom. — 1996. — *43*, № 4. — С. 693–737.
4. *Amendola M. E., Galise G., Vitolo A.* Riesz capacity, maximum principle and removable sets of fully nonlinear second order elliptic operators// Differ. Integral Equ. Appl. — 2013. — *26*, № 7-8. — С. 845–866.
5. *Amendola M. E., Galise G., Vitolo A.* On the uniqueness of blow-up solutions of fully nonlinear elliptic equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2013. — *Suppl.* — С. 771–780.
6. *Bao J., Ji X.* Necessary and sufficient conditions on solvability for Hessian inequalities// Proc. Am. Math. Soc. — 2010. — *138*. — С. 175–188.
7. *Bao J., Ji X.* Existence and nonexistence theorem for entire subsolutions of k-Yamabe type equations// J. Differ. Equ. — 2012. — *253*. — С. 2140–2160.
8. *Bernstein S. R.* Sur les equations du calcul des variations// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4). — 1912. — *29*. — С. 431–485.
9. *Birindelli I., Demengel F., Leoni F.* Ergodic pairs for singular or degenerate fully nonlinear operators// arXiv: 1712.02671 [math.AP]. — 07.12.2017.
10. *Birindelli I., Galise G., Ishii H.* A family of degenerate elliptic operators: maximum principle and its consequences// Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire. — 2018. — *35*, № 2. — С. 417–441.
11. *Birindelli I., Galise G., Leoni F.* Liouville theorems for a family of very degenerate elliptic nonlinear operators// Nonlinear Anal. — 2017. — *161*. — С. 198–211.
12. *Boccardo L., Gallouet T., Vazquez J. L.* Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ without growth restriction on the data// J. Differ. Equ. — 1993. — *105*, № 2. — С. 334–363.

13. *Boccardo L., Gallouet T., Vazquez J. L.* Solutions of nonlinear parabolic equations without growth restrictions on the data// Electron. J. Differ. Equ. — 2001. — *2001*, № 60. — С. 1–20.
14. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ without conditions at infinity// Appl. Math. Optim. — 1984. — *12.* — С. 271–282.
15. *Caffarelli L. A., Cabré X.* Fully nonlinear elliptic equations. — Providence: Am. Math. Soc., 1995.
16. *Caffarelli L. A., Li Y. Y., Nirenberg L.* Some remarks on singular solutions of nonlinear elliptic equations. I// J. Fixed Point Theory Appl. — 2009. — *5.* — С. 353–395.
17. *Capuzzo Dolcetta I., Leoni F., Porretta A.* Hölder estimates for degenerate elliptic equations with coercive Hamiltonians// Trans. Am. Math. Soc. — 2010. — *362*, № 9. — С. 4511–4536.
18. *Capuzzo Dolcetta I., Leoni F., Vitolo A.* Entire subsolutions of fully nonlinear degenerate elliptic equations// Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.). — 2014. — *9*, № 2. — С. 147–161.
19. *Capuzzo Dolcetta I., Leoni F., Vitolo A.* On the inequality $F(x, D^2u) \geqslant f(u) + g(u)|Du|^q$// Math. Ann. — 2016. — *365*, № 1-2. — С. 423–448.
20. *Crandall M. G., Ishii H., Lions P. L.* User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations// Bull. Am. Math. Soc. — 1992. — *27*, № 1. — С. 1–67.
21. *D'Ambrosio L., Mitidieri E.* A priori estimates, positivity results, and nonexistence theorems for quasilinear degenerate elliptic inequalities// Adv. Math. — 2010. — *224.* — С. 967–1020.
22. *Demengel F., Goubet O.* Existence of boundary blow up solutions for singular or degenerate fully nonlinear equations// Commun. Pure Appl. Anal. — 2013. — *12*, № 2. — С. 621–645.
23. *Diaz G.* A note on the Liouville method applied to elliptic eventually degenerate fully nonlinear equations governed by the Pucci operators and the Keller—Ossermann condition// Math. Ann. — 2012. — *353.* — С. 145–159.
24. *Esteban M. G., Felmer P. L., Quaas A.* Super-linear elliptic equations for fully nonlinear operators without growth restrictions for the data// Proc. Edinb. Math. Soc. (2). — 2010. — *53*, № 1. — С. 125–141.
25. *Felmer P. L., Quaas A., Sirakov B.* Solvability of nonlinear elliptic equations with gradient terms// J. Differ. Equ. — 2013. — *254*, № 11. — С. 4327–4346.
26. *Galise G.* Maximum principles, entire solutions and removable singularities of fully nonlinear second order equations. — Ph.D. Thesis, Salerno, 2011/2012.
27. *Galise G., Vitolo A.* Viscosity solutions of uniformly elliptic equations without boundary and growth conditions at infinity// Int. J. Differ. Equ. — 2011. — Article ID 453727.
28. *Giga Y.* Surface evolution equations. A level set approach. — Basel: Birkhäuser Verlag, 2006.
29. *Hartman P.* Ordinary differential equations. — New York—London: Wiley, 1964.
30. *Harvey R., Lawson Jr B.* Existence, uniqueness and removable singularities for nonlinear partial differential equations in geometry// arXiv: 1303.1117 — 05.03.2013.
31. *Jin Q., Li Y. Y., Xu H.* Nonexistence of positive solutions for some fully nonlinear elliptic equations// Methods Appl. Anal. — 2005. — *12.* — С. 441–449.
32. *Keller J. B.* On solutions of $\Delta u = f(u)$// Commun. Pure Appl. Math. — 1957. — *10.* — С. 503–510.
33. *Labutin D. A.* Removable singularities for fully nonlinear elliptic equations// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2000. — *155*, № 3. — С. 201–214.
34. *Lasry J.-M., Lions P.-L.* Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constraints. I. The model problem// Math. Ann. — 1989. — *283.* — С. 583–630.
35. *Leoni F.* Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with «absorbing» zero order terms// Adv. Differ. Equ. — 2000. — *5.* — С. 681–722.
36. *Leoni F., Pellacci B.* Local estimates and global existence for strongly nonlinear parabolic equations with locally integrable data// J. Evol. Equ. — 2006. — *6.* — С. 113–144.
37. *Nagumo M.* Über die differential gleichung $y'' = f(x, y, y')$// Proc. Phys.-Math. Soc. Japan. — 1937. — *19.* — С. 861–866.
38. *Oberman A., Silvestre L.* The Dirichlet problem for the convex envelope// Trans. Am. Math. Soc. — 2011. — *363*, № 11. — С. 5871–5886.
39. *Osserman R.* On the inequality $\Delta u \geqslant f(u)$// Pacific J. Math. — 1957. — *7.* — С. 1141–1147.
40. *Porretta A.* Local estimates and large solutions for some elliptic equations with absorption// Adv. Differ. Equ. — 2004. — *9*, № 3-4. — С. 329–351.
41. *Sha J.-P.* Handlebodies and p-convexity// J. Differ. Geom. — 1987. — *25.* — С. 353–361.
42. *Wu H.* Manifolds of partially positive curvature// Indiana Univ. Math. J. — 1987. — *36.* — С. 525–548.

Italo Capuzzo Dolcetta
Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy
E-mail: capuzzo@mat.uniroma1.it

Fabiana Leoni
Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy
E-mail: leoni@mat.uniroma1.it

Antonio Vitolo
Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Salerno, Fisciano, Italy
E-mail: vitolo@unisa.it

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-74-85 UDC 517.957

Generalized Keller–Osserman Conditions for Fully Nonlinear Degenerate Elliptic Equations

 I. Capuzzo Dolcetta, F. Leoni, A. Vitolo

Abstract. We discuss the existence of entire (i.e. defined on the whole space) subsolutions of fully nonlinear degenerate elliptic equations, giving necessary and sufficient conditions on the coefficients of the lower order terms which extend the classical Keller–Osserman conditions for semilinear elliptic equations. Our analysis shows that, when the conditions of existence of entire subsolutions fail, a priori upper bounds for local subsolutions can be obtained.

REFERENCES

1. S. Alarcón, J. García-Melián, and A. Quaas, "Keller—Ossermann conditions for some elliptic problems with gradient terms," *J. Differ. Equ.*, 2012, **252**, 886–914.
2. S. Alarcón and A. Quaas, "Large viscosity solutions for some fully nonlinear equations," *NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2013, **20**, 1453–1472.
3. L. Ambrosio and H. M. Soner, "Level set approach to mean curvature flow in arbitrary codimension," *J. Differ. Geom.*, 1996, **43**, No. 4, 693–737.
4. M. E. Amendola, G. Galise, and A. Vitolo, "Riesz capacity, maximum principle and removable sets of fully nonlinear second order elliptic operators," *Differ. Integral Equ. Appl.*, 2013, **26**, No. 7-8, 845–866.
5. M. E. Amendola, G. Galise, and A. Vitolo, "On the uniqueness of blow-up solutions of fully nonlinear elliptic equations," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2013, **Suppl.**, 771–780.
6. J. Bao and X. Ji, "Necessary and sufficient conditions on solvability for Hessian inequalities," *Proc. Am. Math. Soc.*, 2010, **138**, 175–188.
7. J. Bao and X. Ji, "Existence and nonexistence theorem for entire subsolutions of k-Yamabe type equations," *J. Differ. Equ.*, 2012, **253**, 2140–2160.
8. S. R. Bernstein, "Sur les equations du calcul des variations," *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 1912, **29**, 431–485.
9. I. Birindelli, F. Demengel, and F. Leoni, "Ergodic pairs for singular or degenerate fully nonlinear operators," *arXiv: 1712.02671 [math.AP]*, 07.12.2017.
10. I. Birindelli, G. Galise, and H. Ishii, "A family of degenerate elliptic operators: maximum principle and its consequences," *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire*, 2018, **35**, No. 2, 417–441.
11. I. Birindelli, G. Galise, and F. Leoni, "Liouville theorems for a family of very degenerate elliptic nonlinear operators," *Nonlinear Anal.*, 2017, **161**, 198–211.
12. L. Boccardo, T. Gallouet, and J. L. Vazquez, "Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ without growth restriction on the data," *J. Differ. Equ.*, 1993, **105**, No. 2, 334–363.
13. L. Boccardo, T. Gallouet, and J. L. Vazquez, "Solutions of nonlinear parabolic equations without growth restrictions on the data," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2001, **2001**, No. 60, 1–20.
14. H. Brezis, "Semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ without conditions at infinity," *Appl. Math. Optim.*, 1984, **12**, 271–282.
15. L. A. Caffarelli and X. Cabré , *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Am. Math. Soc., Providence, 1995.
16. L. A. Caffarelli, Y. Y. Li, and L. Nirenberg, "Some remarks on singular solutions of nonlinear elliptic equations. I," *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2009, **5**, 353–395.

17. I. Capuzzo Dolcetta, F. Leoni, and A. Porretta, "Hölder estimates for degenerate elliptic equations with coercive Hamiltonians," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2010, **362**, No. 9, 4511–4536.
18. I. Capuzzo Dolcetta, F. Leoni, and A. Vitolo, "Entire subsolutions of fully nonlinear degenerate elliptic equations," *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)*, 2014, **9**, No. 2, 147–161.
19. I. Capuzzo Dolcetta, F. Leoni, and A. Vitolo, "On the inequality $F(x, D^2u) \geqslant f(u) + g(u)|Du|^q$," *Math. Ann.*, 2016, **365**, No. 1-2, 423–448.
20. M. G. Crandall, H. Ishii, and P. L. Lions, "User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1992, **27**, No. 1, 1–67.
21. L. D'Ambrosio and E. Mitidieri, "A priori estimates, positivity results, and nonexistence theorems for quasilinear degenerate elliptic inequalities," *Adv. Math.*, 2010, **224**, 967–1020.
22. F. Demengel and O. Goubet, "Existence of boundary blow up solutions for singular or degenerate fully nonlinear equations," *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2013, **12**, No. 2, 621–645.
23. G. Diaz, "A note on the Liouville method applied to elliptic eventually degenerate fully nonlinear equations governed by the Pucci operators and the Keller—Ossermann condition," *Math. Ann.*, 2012, **353**, 145–159.
24. M. G. Esteban, P. L. Felmer, and A. Quaas, "Super-linear elliptic equations for fully nonlinear operators without growth restrictions for the data," *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 2010, **53**, No. 1, 125–141.
25. P. L. Felmer, A. Quaas, and B. Sirakov, "Solvability of nonlinear elliptic equations with gradient terms," *J. Differ. Equ.*, 2013, **254**, No. 11, 4327–4346.
26. G. Galise, *Maximum principles, entire solutions and removable singularities of fully nonlinear second order equations*, Salerno, Ph.D. Thesis, 2011/2012.
27. G. Galise and A. Vitolo, "Viscosity solutions of uniformly elliptic equations without boundary and growth conditions at infinity," *Int. J. Differ. Equ.*, 2011, Article ID 453727.
28. Y. Giga, *Surface Evolution Equations. A Level Set Approach*, Birkhäuser, Basel, 2006.
29. P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York–London, 1964.
30. R. Harvey and B. Lawson Jr, "Existence, uniqueness and removable singularities for nonlinear partial differential equations in geometry," *arXiv: 1303.1117*, 05.03.2013.
31. Q. Jin, Y. Y. Li, and H. Xu, "Nonexistence of positive solutions for some fully nonlinear elliptic equations," *Methods Appl. Anal.*, 2005, **12**, 441–449.
32. J. B. Keller, "On solutions of $\Delta u = f(u)$," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1957, **10**, 503–510.
33. D. A. Labutin, "Removable singularities for fully nonlinear elliptic equations," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2000, **155**, No. 3, 201–214.
34. J.-M. Lasry and P.-L. Lions, "Nonlinear elliptic equations with singular boundary conditions and stochastic control with state constraints. I. The model problem," *Math. Ann.*, 1989, **283**, 583–630.
35. F. Leoni, "Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with «absorbing» zero order terms," *Adv. Differ. Equ.*, 2000, **5**, 681–722.
36. F. Leoni and B. Pellacci, "Local estimates and global existence for strongly nonlinear parabolic equations with locally integrable data," *J. Evol. Equ.*, 2006, **6**, 113–144.
37. M. Nagumo, "Über die differential gleichung $y'' = f(x, y, y')$," *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, 1937, **19**, 861–866.
38. A. Oberman and L. Silvestre, "The Dirichlet problem for the convex envelope," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2011, **363**, No. 11, 5871–5886.
39. R. Osserman, "On the inequality $\Delta u \geqslant f(u)$," *Pacific J. Math.*, 1957, **7**, 1141–1147.
40. A. Porretta, "Local estimates and large solutions for some elliptic equations with absorption," *Adv. Differ. Equ.*, 2004, **9**, No. 3-4, 329–351.
41. J.-P. Sha, "Handlebodies and p-convexity," *J. Differ. Geom.*, 1987, **25**, 353–361.
42. H. Wu, "Manifolds of partially positive curvature," *Indiana Univ. Math. J.*, 1987, **36**, 525–548.

Italo Capuzzo Dolcetta
Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy
E-mail: capuzzo@mat.uniroma1.it

Fabiana Leoni
Dipartimento di Matematica, Sapienza Università di Roma, Rome, Italy
E-mail: leoni@mat.uniroma1.it

Antonio Vitolo
Dipartimento di Ingegneria Civile, Università di Salerno, Fisciano, Italy
E-mail: vitolo@unisa.it

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 86–97

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-86-97 УДК 517.927

УРАВНЕНИЯ ШЛЕЗИНГЕРА ДЛЯ ВЕРХНЕТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ И ИХ РЕШЕНИЯ

© 2018 г. **В. П. ЛЕКСИН**

Аннотация. В настоящей работе рассмотрены явные интегральные выражения гипергеометрического и гиперэллиптического типа для решений уравнений Шлезингера в классах верхнетреугольных матриц с собственными числами, образующими арифметические прогрессии с одинаковой разностью. Полученные интегральные представления дополняют и обобщают ранее известные результаты.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Под уравнением Шлезингера на набор $B_1(a), B_2(a), \ldots, B_n(a)$, $a \in \mathbb{C}^n$ квадратных матриц размера $p \times p$, принято понимать нелинейную пфаффову систему уравнений

$$\mathrm{d}\, B_i(a) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} [B_i(a),\, B_j(a)] \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j} \tag{1.1}$$

на комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^n$. Квадратные скобки $[A, B]$ обозначают коммутатор матриц. Эти уравнения начал рассматривать Л. Шлезингер в начале XX века в связи с изучением изомонодромных деформаций мероморфных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений на сфере Римана

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z - a_i}\right) y, \quad y(z) \in \mathbb{C}^p, \tag{1.2}$$

имеющих полюса первого порядка в особых точках $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Полагая, что матрицы B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ зависят от положения особых точек $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, Шлезингер получил свое уравнение (1.1), требуя, чтобы матрицы монодромии системы (1.2) не изменялись при малом изменении положения особых точек. Рихард Фукс в 1905 году вывел шестое уравнение Пенлеве как уравнение движения в зависимости от четырех особых точек пятой ложной особой точки (вокруг нее решения не ветвятся) скалярного фуксового уравнения второго порядка, которое реализует как представление монодромии некоторое двумерное представление фундаментальной группы сферы Римана с четырьмя выколотыми точками. Значительно позже было показано, что уравнение Шлезингера для матриц второго порядка имеет редукцию к шестому уравнению Пенлеве. Таким образом была установлена тесная связь между разными подходами к получению шестого уравнения Пенлеве, которое изначально было получено из совсем других требований к нелинейным аналитическим дифференциальным уравнениям второго порядка, а именно, требовалось, чтобы их решения в качестве подвижных особых точек (т. е. зависящих от начальных условий) имели только полюса.

Специальные случаи уравнения Шлезингера (1.1) были изучены Гарнье, Аппелем, Лаппо-Данилевским и некоторыми другими математиками в 20-е годы XX века. Значительно позже, уже в 70-х и 80-х годах XX века, Аомото, Мальгранжем, Мива и Джимбо были рассмотрены общие вопросы существования решений и их особенностей для уравнений Шлезингера. В частности, было дано описание дивизора Мальгранжа как дивизора особенностей решения $(B_1(a),\, B_2(a),\dots,B_n(a))$ уравнения Шлезингера, определяющего изомонодромную шлезингеровскую деформацию

$$\frac{dy}{dz}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i(a)}{z-a_i}\right)y \tag{1.3}$$

фуксовой системы (1.2), а Мива и Джимбо определили τ-функцию $\tau(a)$ как решение уравнения

$$\mathrm{d}\ln\tau(a)=\kappa\sum_{i\neq j,\, i,j=1}^{n}\mathrm{tr}(B_i(a)B_j(a))\frac{\mathrm{d}(a_i-a_j)}{a_i-a_j}. \tag{1.4}$$

Нулями τ-функции $\tau(a)$ локально определяется дивизор Мальгранжа. Интерес к решениям уравнения Шлезингера резко возрос после того, как была четко описана редукция этих уравнений для матриц второго порядка к шестому уравнению Пенлеве, которое появляется во многих задачах современной математической физики. Подробное описание выше затронутых понятий и утверждений имеются в книге А. А. Болибруха [1], а также в работах [6, 7, 11]. В настоящей работе рассмотрены явные интегральные выражения гипергеометрического и гиперэллиптического типа для решений уравнений Шлезингера в классах верхнетреугольных матриц с собственными числами, образующими арифметические прогрессии с одинаковой разностью. Эти интегральные представления уточняют подобные представления из работ [8, 12] и дополняют и обобщают результаты работы [6].

2. Уравнения Шлезингера

Пусть $B_i(a),\ i=1,\,2,\,\dots,n$ — набор квадратных матриц порядка p, определенных в некоторой области $U\subset\mathbb{C}^n$ комплексного линейного пространства $\mathbb{C}^n$, и точка $a^0=(a_1^0,\,a_2^0,\,\dots,\,a_n^0)\in U$. *Уравнением Шлезингера* называется нелинейная пфаффова система уравнений на набор матриц

$$\mathrm{d}\,B_i(a)=-\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}[B_i(a),\,B_j(a)]\frac{\mathrm{d}(a_i-a_j)}{a_i-a_j}. \tag{2.1}$$

Здесь $[B_i,\,B_j]=B_iB_j-B_jB_i$ обозначает коммутатор матриц. Уравнение Шлезингера определено на дополнении $\mathbb{C}^n_*=\{a=(a_1,\,a_2,\,\dots,\,a_n)\in\mathbb{C}^n|\ a_i\neq a_j,\, i\neq j,\ i,j=1,\,2,\,\dots,\,n\}$ к объединению диагональных гиперплоскостей $a_i=a_j,\ i\neq j$.

Переписывая равенства 1-дифференциальных форм (2.1) как равенства коэффициентов при дифференциалах независимых переменных в левых и правых частях этих равенств, получим запись уравнения Шлезингера в форме системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial B_i}{\partial a_j}=\frac{[B_i,\,B_j]}{a_i-a_j},\quad i\neq j,\ i,\,j=1,\dots n, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial a_i}=-\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\frac{[B_i,\,B_j]}{a_i-a_j},\quad i=1,\dots n. \tag{2.3}$$

3. Некоторые свойства уравнения Шлезингера и его решений

1. Уравнение Шлезингера интегрируемо в смысле Фробениуса и, следовательно, в достаточно малой окрестности точки $a^0 = (a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0) \in \mathbb{C}_*^n$ имеет голоморфное решение $B(a) = (B_1(a), B_2(a), \dots, B_n(a))$ с любыми начальными значениями $B(a^0) = (B_1(a^0) = B_1^0, B_2(a^0) = B_2^0, \dots, B_n(a^0) = B_n^0)$.

2. Собственные значения матриц решения $B_i(a)$ не зависят от a, т. е. являются константами или интегралами уравнения Шлезингера.

3. Сумма матриц решения уравнения Шлезингера

$$\sum_{i=1}^{n} B_i(a) = -B_\infty$$

не зависит от a, т. е. является постоянной матрицей или является матричным интегралом уравнения Шлезингера. Будем полагать, что матрица B_∞ является диагональной матрицей.

4. Теорема Мальгранжа утверждает, что локальное решение $B(a) = (B_1(a), B_2(a), \dots, B_n(a))$ уравнения Шлезингера аналитически продолжается как мероморфная функция на все универсальное накрытие $\widetilde{\mathbb{C}}_*^n$. Полярный дивизор особенностей аналитического продолжения зависит от начальных условий уравнения Шлезингера. Этот дивизор называется тета-дивизором Мальгранжа и обозначается Θ.

5. В общем случае, полярный дивизор Θ (тета-дивизор Мальгранжа) решения $B(a)$ в $\widetilde{C}_*^n$ является непустым, как отмечено выше, зависит от начальных данных $B(a^0)$ и локально задается нулями тау-функции Мивы $\tau(a)$, которая есть решение уравнения

$$\mathrm{d}\ln\tau(a) = \kappa \sum_{i\neq j,\, i,j=1}^{n} \mathrm{tr}(B_i(a)B_j(a)) \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j},$$

где параметр κ определяется по начальным условиям уравнения Шлезингера.

4. Верхнетреугольные матрицы и их разбиения в сумму

Мы будем искать решения уравнения Шлезингера среди квадратных верхнетреугольных матриц $B_i(a)$, $i = 1, \dots, n$ размера $p \times p$, каждую из которых запишем в виде суммы диагональной и наддиагональных матриц:

$$B_i(a) = \Lambda_i(a) + U_i^1(a) + \dots + U_i^{p-1}(a). \tag{4.1}$$

Здесь

$$\Lambda_i(a) = \begin{pmatrix} \lambda_i^1(a) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i^2(a) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_i^p(a) \end{pmatrix}$$

— диагональная матрица. Далее,

$$U_i^1(a) = \begin{pmatrix} 0 & u_i^{1,1}(a) & & \dots & 0 \\ 0 & 0 & u_i^{1,2}(a) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & u_i^{1,p-1}(a) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица с ненулевыми (возможно) элементами только в первой наддиагонали,

$$U_i^2(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_i^{2,1}(a) & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_i^{2,2}(a) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 & u_i^{2,p-2}(a) \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица с ненулевыми (возможно) элементами только во второй наддиагонали и т. д.,

$$U_i^{p-1}(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & u_i^{p-1,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— матрица с ненулевым (возможно) элементом только в правом верхнем углу.

Заметим, что коммутатором k-ой наддиагональной матрицы и m-ой наддиагональной матрицы является некоторая $(k+m)$-ая наддиагональная матрица при $k+m \leqslant p-1$ или нулевая матрица при $k+m > p-1$.

5. Уравнение Шлезингера для верхнетреугольных матриц

Для верхнетреугольных матриц, записанных в форме (4.1), уравнение Шлезингера (1.1), с учетом вида коммутаторов вехнетреугольных матриц, переписывается как система пфаффовых уравнений

$$d\Lambda_i(a) = 0,$$
$$dU_i^1(a) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} ([\Lambda_i,\, U_j^1] + [U_i^1,\, \Lambda_j])\frac{d(a_i-a_j)}{a_i-a_j},$$
$$dU_i^k(a) = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \left([\Lambda_i,\, U_j^k] + [U_i^k,\, \Lambda_j] + \sum_{r+s=k} [U_i^r,\, U_j^s]\right)\frac{d(a_i-a_j)}{a_i-a_j},$$
$$k = 2, \dots, p-1.$$

Всюду $i = 1, 2, \dots, n$. Для получения такого вида уравнений необходимо еще раз отметить, что коммутатором наддиагональных матриц будет наддиагональная матрица, и, разбивая правую и левую части на наддиагональные матрицы, а затем приравнивая наддиагональные матрицы одного вида в правой и левой частях, получим выписанные уравнения.

Форма уравнений Шлезингера для верхнетреугольных матриц показывает, что диагональные матрицы $\Lambda_i(a)$ в их записи (4.1) не зависят от a, так как их полный дифференциал равен нулю.

Для элементов матриц Λ^i, U_i^k, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p-1$, мы получаем следующую рекуррентную систему линейных дифференциальных уравнений (начиная с третьей системы — неоднородных уравнений):

$$d\,\lambda_i^m = 0,\;\; i = 1, \dots n,\;\; m = 1, \dots p,$$
$$\mathrm{d}\,u_i^{1,m} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (\lambda_i^{m,m+1} u_j^{1,m} - \lambda_j^{m,m+1} u_i^{1,m})\frac{\mathrm{d}(a_i-a_j)}{a_i-a_j}, \quad i = 1, \dots n,\;\; m = 1, \dots p-1,$$
$$\mathrm{d}\,u_i^{2,m} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} [(\lambda_i^{m,m+2} u_j^{2,m} - \lambda_j^{m,m+2} u_i^{2,m}) + (u_i^{1,m} u_j^{1,m+1} - u_j^{1,m} u_i^{1,m+1})]\frac{\mathrm{d}(a_i-a_j)}{a_i-a_j},$$
$$\mathrm{d}\,u_i^{k,m} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} ((\lambda_i^{m,m+k} u_j^{k,m} - \lambda_j^{m,m+k} u_i^{k,m}) + \sum_{r+s=k} (u_i^{r,m} u_j^{s,m+r} - u_j^{r,m} u_i^{s,m+r}))\frac{\mathrm{d}(a_i-a_j)}{a_i-a_j}, \quad (5.1)$$
$$i = 1, \dots n,\;\; m = 1, \dots p-k,\;\; k = 1,\, \dots,\, p-1,$$

где $\lambda_i^{m,m+1} = \lambda_i^m - \lambda_i^{m+1}$, $i = 1, \dots n$, $m = 1, \dots p-1$, $\lambda_i^{m,m+2} = \lambda_i^m - \lambda_i^{m+2}$, $i, j = 1, \dots n$, $m = 1, \dots p-2$, далее, $\lambda_i^{m,m+k} = \lambda_i^m - \lambda_i^{m+k}$, и последний параметр системы $\lambda_i^{1,p} = \lambda_i^1 - \lambda_i^p$.

Сформулируем итог алгебраических переписываний уравнения Шлезингера в виде теоремы.

Теорема 5.1. *Уравнение Шлезингера для верхнетреугольных (нижнетреугольных) матриц записывается как рекуррентная последовательность линейных неоднородных пфаффовых систем.*

5.1. Частный случай линейной редукции для $p = 2, 3$**.** В частном случае, для $p = 2$ и для верхнетреугольных матриц

$$B_i(a) = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 & u_i(a) \\ 0 & \lambda_i^2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

мы получаем следующую линейную пфаффову систему уравнений:

$$d\,\lambda_i^m = 0, \quad i = 1, \ldots n, \ \ m = 1,\, 2,$$

$$\mathrm{d}\,u_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (\lambda_i u_j - \lambda_j u_i)\frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \quad i, j = 1, \ldots n, \tag{5.2}$$

где $\lambda_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^2$, $i = 1, \ldots n$.

Для верхнетреугольных 3×3-матриц

$$B_i(a) = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 & u_i(a) & w_i(a) \\ 0 & \lambda_i^2 & v_i(a) \\ 0 & 0 & \lambda_i^3 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

уравнения Шлезингера записывается в виде двух линейных систем (учитывая постоянство диагональных элементов) на функции $u_i(a)$, $v_i(a)$, $i = 1,\, 2, \ldots n$,

$$\mathrm{d}\,u_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (\lambda_i u_j - \lambda_j u_i)\frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \quad i, j = 1, \ldots n, \tag{5.3}$$

где $\lambda_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^2$, $i = 1, \ldots n$;

$$\mathrm{d}\,v_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (\mu_i v_j - \mu_j v_i)\frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \quad i, j = 1, \ldots n, \tag{5.4}$$

где $\mu_i = \lambda_i^2 - \lambda_i^3$, $i = 1, \ldots n$.

Для элементов $w_i(a)$ матрицы $B_i(a)$ система уравнений записывается в следующей форме:

$$\mathrm{d}\,w_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} [(\nu_i w_j - \nu_j w_i) + (u_i v_j - u_j v_i)]\frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \tag{5.5}$$

где $\nu_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^3$, $i = 1,\, 2,\, \ldots n$.

Эти пфаффовы системы переписываются в форме уравнений в частных производных в следующем виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_j} = \frac{\lambda_j u_i - \lambda_i u_j}{a_i - a_j}, \quad i \neq j, \ 1 \leqslant i, \, j \leqslant n, \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial a_j} = \frac{\mu_j v_i - \mu_i v_j}{a_i - a_j}, \quad i \neq j, \ 1 \leqslant i, \, j \leqslant n, \tag{5.7}$$

и с условием на эти функции

$$\sum_{i}^{n} u_i = \sum_{i}^{n} v_i = 0. \tag{5.8}$$

Для функций $w_i(a)$, $i = 1, 2, \ldots n$, получаем линейную неоднородную систему (полагая, что функции $u_i(a)$, $v_i(a)$, $i = 1,\, 2, \ldots n$, уже найдены)

$$\frac{\partial w_i}{\partial a_j} = \frac{\nu_j w_i - \nu_i w_j}{a_i - a_j} + \frac{u_i(a)v_j(a) - u_j(a)v_i(a)}{a_i - a_j}, \quad i \neq j, \ 1 \leqslant i, \ j \leqslant n, \tag{5.9}$$

и условием

$$\sum_{i}^{n} w_i = 0. \tag{5.10}$$

6. Интегрирование многозначных дифференциальных 1-форм

Элементы пространства решений для любого верхнетреугольного уравнения Шлезингера мы будем искать в форме гипергеометрических интегралов. Соответствующие интегралы являются интегралами от многозначных дифференциальных 1-форм по многозначным циклам. Поэтому в этом разделе мы кратко изложим некоторые сведения о таком интегрировании, которые содержатся в работах [3,5,9,10] и в учебнике [2].

Рассмотрим многозначную функцию на сфере Римана $\Phi(z, a_1, \ldots, a_n) = (z-a_1)^{\lambda_1} \cdots (z-a_n)^{\lambda_n}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ и $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ — фиксированные параметры, а $z \in \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ — переменная на сфере Римана. Если хотя бы один из параметров λ_j, $j = 1, \ldots, n$ не является целым числом, то функция $\Phi(z, a_1, \ldots, a_n)$ есть многозначная функция на одномерном комплексном многообразии $M = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Определим одномерную локальную систему (т. е. одномерное локально тривиальное векторное расслоение с постоянными функциями перехода относительно подходящего покрытия) на M по представлению фундаментальной группы $\rho : \pi_1(M, z_0) \to \mathbb{C}^*$, принимающего на образующих $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ этой группы значения $\rho(\gamma_j) = \exp(2\pi\lambda_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Образующие γ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ являются свободными образующими свободной группы $\pi_1(M, z_0) = F_n$ ранга n, классы сопряженности которых задаются петлями, обходящими по малой окружности соответствующие точки a_j, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Пусть $\widetilde{M}$ — универсальное накрытие над M, и зададим естественное действие группы $\pi_1(M, z_0)$ на произведении $\widetilde{M} \times \mathbb{C}$ формулой $\forall \gamma \in \pi_1(M, z_0)$, $\gamma(\tilde{m}, w) = (\gamma\tilde{m}, \rho(\gamma)w)$, где $\gamma\tilde{m}$ — действие скольжением на универсальном накрытии. Действие $\pi_1(M, z_0)$ согласовано со структурой прямого произведения на $\widetilde{M} \times \mathbb{C}$. Определим локальную систему L_ρ на M как фактор-пространство $L_\rho = \widetilde{M} \times \mathbb{C}/\pi_1(M)$.

Отображение расслоения p задается как проекция на первый сомножитель $p : \widetilde{M} \times \mathbb{C}/\pi_1(M) \to \widetilde{M}/\pi_1(M) = M$. Структура векторного пространства в слое отображения p задается обычным правилом сложения комплексных чисел в слое $(\tilde{m}, w_1) + (\tilde{m}, w_2) = (\tilde{m}, w_1 + w_2)$ и правилом умножения на комплексное число $\lambda p^{-1}(m) = (\tilde{m}, \lambda w)$, где $\tilde{m} \in \widetilde{M}$.

Определим многозначное сечение σ локальной системы L_ρ как то, что получится из постоянного сечения $\tilde{\sigma}(\tilde{m}) = (\tilde{m}, 1)$ тривиального расслоений $\widetilde{M} \times \mathbb{C} \to \widetilde{M}$ при последующем переходе к классам эквивалентности относительно определенного действия фундаментальной группы. Обозначим классы эквивалентности чертой сверху. Тогда имеем равенство $\overline{\tilde{\sigma}(\gamma\tilde{m}, 1)} = \overline{(\gamma\tilde{m}, 1)} = \overline{(\tilde{m}, \rho(\gamma^{-1}))} = \rho(\gamma^{-1})\overline{\tilde{\sigma}(\tilde{m})}$. Упрощая обозначения, например, полагая, что $\tilde{\sigma} = \sigma$, $\overline{\tilde{m}} = m$, $\gamma\tilde{m} = \gamma m$ и убирая всюду черту сверху, последнее равенство можно записать в следующем виде: $\sigma(\gamma m) = (\gamma m, 1) = (m, \rho(\gamma^{-1})) = \rho(\gamma^{-1})\sigma(m)$. Такая запись подчеркивает многозначность сечения σ и не приводит к путанице. Аналогично определяется сопряженная локальная система L_ρ^{-1} для представления ρ^{-1}, $\rho^{-1}(\gamma_j) = (\rho(\gamma_j))^{-1} = \exp(-2pi\lambda_j)$.

Рассмотрим на $\tilde{M}$ аналитические дифференциальные 1-формы $\eta_j = \Phi(z, a_1, \ldots, a_n)\dfrac{\mathrm{d}\,z}{z-a_j} \otimes \sigma$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Эти 1-формы являются обычными однозначными 1-формами на M, зависящими от положения точек $a_1, \ldots, a_n$ на $\mathbb{C}$ как от параметров. Однозначность форм следует из свойства $\Phi(\gamma m, a_1, \ldots, a_n) = \rho(\gamma)\Phi(m, a_1, \ldots, a_n)$ аналитического продолжения функции Φ из малой окрестности точки $z_0 \in M$ на все универсальное накрытие $\widetilde{M}$ и равенства $\sigma(\gamma m) = \rho^{-1}(\gamma)\sigma(m)$. Таким образом мы имеем для каждого $1 \leqslant j \leqslant n$ семейство однозначных 1-форм $\eta_j(a)$, $a = (a_1, \ldots, n)$ на комплексной прямой $\mathbb{C}$ с особыми точками, в точках $a_1, \ldots, a_n$. Эти формы представляют классы когомологий де Рама $H^1_{DR}(M, L_\rho)$, правила дифференцирования по параметрам которых описаны в работе [10].

Определим цепи и гомологии с коэффициентами в локальной системе L_ρ^{-1} [5,11,13] и их спаривание с когомологиями де Рама $H^1_{DR}(M, L_\rho)$. Группа 1-цепей с локальными коэффициентами в L_ρ^{-1} порождена конечными линейными комбинациями $\gamma = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \otimes \tau_i$, где каждый c_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ является 1-симплексом в M, а каждый τ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ является постоянным сечением тривиализованного ограничения локальной системы $L_{\rho^{-1}}|_{c_i}$ на c_i. Более точно, τ_i — это горизонтальное сечение ограничения локальной системы над симплексом c_i относительно интегрируемой (плоской) связности, которая всегда имеется в локальной системе и задается нулевыми формами связности в локальных голоморфных тривиализациях. Спаривание $\langle \eta_j, \gamma \rangle$ обычно обозначается интегралом $\int\limits_{\gamma} \Phi(z,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)\dfrac{\mathrm{d}\, z}{z-a_j} \otimes \sigma$ и определяется равенством

$$\int\limits_{\gamma} \Phi(z,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)\frac{\mathrm{d}\, z}{z-a_j} \otimes \sigma = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{a_i} \Phi(z,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)\langle \sigma,\ \tau_i \rangle \frac{\mathrm{d}\, z}{z-a_j}. \tag{6.1}$$

Если цепь с локальными коэффициентами γ является нетривиальным циклом, то она гомологична в группе гомологий $H_1(M,\ L_{\rho}^{-1})$ (см. [2, 5, 13]) линейной комбинации циклов в M, представленных двойными петлями Похгаммера или отрезками (точнее, интервалами), соединяющих какие-либо пары точек из набора точек $\{a_1,\ \ldots,\ a_n\}$. Напомним, что двойная петля Похгаммера, соответствующая двум точкам, есть коммутатор двух петель, каждая из которых обходит по малой окружности одну из точек.

Дифференцирование интегралов (6.1) по параметрам осложняется зависимостью от параметров одномерного комплексного многообразия M (было бы правильнее писать $M(a_1,\ \ldots,\ a_n)$) где лежат циклы, по которым производится интегрирование. Для преодоления этой трудности превратим семейство многообразий $M(a_1,\ \ldots,\ a_n)$ в слои расслоения $\hat{p} : \mathbb{C}_*^{n+1} \to C_*^n$, где $\hat{p}(z,\ a_1, \ldots a_n) = (a_1, \ldots a_n)$. На пространстве расслоения $\mathbb{C}_*^{n+1}$ определим формы $\hat{\eta}_j = \Phi(z,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)\dfrac{\mathrm{d}(z-a_j)}{z-a_j} \otimes \hat{\sigma}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, где $\hat{\sigma}$ — одномерное представление фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}_*^{n+1},\ \hat{z}_0)$, строится по представлению ρ фундаментальной группы слоя $\pi_1(M(a_1,\ \ldots,\ a_n),\ z_0)$. Ограничения на слой $M(a_1,\ \ldots,\ a_n)$ каждой формы $\hat{\eta}_j$ дает форму η_j. Взятие полного дифференциала от форм $\hat{\eta}_j$ на пространстве расслоения $\mathbb{C}_*^{n+1}$ и последующее ограничение полученной формы на слой $M(a_1,\ \ldots,\ a_n)$ составляют суть дифференцирования классов гомологий по параметрам и дифференцирования интеграла (6.1) по параметрам подынтегрального выражения. Подробное изложение, как уже было отмечено выше, содержится в работах [3, 5, 9–11] и в учебнике [2].

Привычные правила дифференцирования интегралов, зависящих от параметров от однозначных форм, сохраняются. В следующем разделе мы используем методы дифференцирования интегралов, зависящих от параметров.

7. Интегральные решения верхнетреугольного уравнения Шлезингера для $p = 2$

В этом разделе мы предъявим решения в интегральной форме уравнения Шлезингера для верхнетреугольных матриц размера 2×2

$$B_i(a) = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 & u_i(a) \\ 0 & \lambda_i^2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

В случае 2×2-матриц уравнение Шлезингера, как показано выше, есть линейная пфаффова система

$$\mathrm{d}\, u_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (\lambda_i u_j - \lambda_j u_i)\frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \quad i, j = 1, \ldots n, \tag{7.1}$$

где $\lambda_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^2$, $i = 1, \ldots n$.

Пусть локальная система $\mathcal{L}_\rho$ определяется представлением $\rho : \pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_n, \infty\},\ t_0) = F_n \to \mathbb{C}^*$ фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_n, \infty\},\ t_0) = F_n$, которое отправляет образующие $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ свободной группы F_n в ненулевые комплексные числа $q_1 = e^{2\pi i \lambda_1}, \ldots, q_n = e^{2\pi i \lambda_n}$ и числа λ_i, как указано выше, равны $\lambda_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^2$, $i = 1, \ldots n$.

Далее следуя приемам работы с интегралами и методам вычисления из работ [3, 9–11], докажем следующую теорему.

Теорема 7.1. *Если ни одно из чисел $\lambda_i = \lambda_i^1 - \lambda_i^2$, $1 \leqslant i \leqslant n$ не равно целому числу, то элементы $u_i(a)$ матриц $B_i(a) = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 & u_i(a) \\ 0 & \lambda_i^2 \end{pmatrix}$, $i = 1, \ldots, n$, определяющих базис пространства* *решений линейной пфаффовой системы* (7.1), *задаются интегралами гипергеометрического типа*

$$u_i^j(a_1,\dots,a_n) = \lambda_i \int\limits_{\gamma_j} (z-a_1)^{\lambda_1}\cdots(z-a_n)^{\lambda_n}\frac{\mathrm{d}\,z}{z-a_i}\otimes\sigma, \tag{7.2}$$

где γ_j, $j=1,\dots,n$ — *двойные петли Похгаммера, соответствующие парам точек* $\{a_1, a_j\}$, $j\in\{a_2,\,\dots,\,\infty\}$ *и задающих базис в гомологиях* $H_1(\mathbb{C}P^1\setminus\{a_1,\dots,a_n,\infty\},\,L_\rho^{-1})$ *с локальными коэффициентами* L_ρ^{-1}. *Если в наборе* λ_j, $1\leqslant j\leqslant n$ *имеются целые числа, то интегралы* (7.2) *определяют просто какие-либо решения* (*не обязательно дают базис*).

Доказательство. Рассмотрим интеграл $u_i(a_1,\dots,a_n)=\lambda_i\int\limits_\gamma\Phi\frac{\mathrm{d}\,z}{z-a_i}\otimes\sigma$. Далее мы будем опускать символ σ при дифференцировании этого интеграла по параметрам, так как операция тензорного умножения на σ перестановочна с операциями дифференцирования или взятия дифференциала. Возьмем полный дифференциал от $u_i(a_1,\dots,a_n)$ по параметрам $a_1,\dots,a_n$:

$$\mathrm{d}\,u_i(a_1,\dots,a_n)=\lambda_i\,\mathrm{d}\int\limits_\gamma\Phi\frac{\mathrm{d}\,z}{z-a_i}=-\lambda_i\sum_{j=1}^n\left(\int\limits_\gamma\frac{\lambda_j\Phi}{(z-a_j)(z-a_i)}dz\right)da_j+\lambda_i\left(\int\limits_\gamma\frac{\Phi dz}{(z-a_i)^2}\right)da_i=$$

$$=-\lambda_i\sum_{j\neq i}\left(\int\limits_\gamma\frac{\lambda_j\Phi}{(z-a_j)(z-a_i)}dz\right)da_j-\lambda_i\left(\int\limits_\gamma(\lambda_i-1)\frac{\Phi dz}{(z-a_i)^2}\right)da_i=$$

(Преобразуем дробь под первым интегралом: $\frac{1}{(z-a_i)(z-a_j)}=\frac{1}{a_i-a_j}\left(\frac{1}{z-a_i}-\frac{1}{z-a_j}\right)$, тогда получим)

$$=-\sum_{j\neq i}\frac{\lambda_i\lambda_j}{a_i-a_j}\left(\int\limits_\gamma\frac{\Phi}{z-a_i}dz-\int\limits_\gamma\frac{\Phi}{z-a_j}dz\right)da_j-\lambda_i\left(\int\limits_\gamma(\lambda_i-1)\frac{\Phi dz}{(z-a_i)^2}\right)da_i. \tag{7.3}$$

Для дифференциала только по переменной z функции $\frac{\Phi(z,\,a_1,\,\dots,\,a_n)}{z-a_i}$ имеем равенство

$$\mathrm{d}\,\frac{\Phi(z)}{z-a_i}=(\lambda_i-1)\frac{\Phi(z)dz}{(z-a_i)^2}dz+\sum_{j\neq i}\frac{\lambda_j\Phi(z)}{(z-a_j)(z-a_i)}dz.$$

Воспользовавшись теоремой Стокса, получим

$$-\int\limits_\gamma(\lambda_i-1)\frac{\Phi(z)}{(z-a_i)^2}dz=\sum_{j\neq i}\int\limits_\gamma\frac{\lambda_j\Phi(z)}{(z-a_j)(z-a_i)}dz=$$

$$=\int\limits_\gamma\lambda_j\Phi(z)\left(\frac{1}{a_i-a_j}\left(\frac{1}{z-a_i}-\frac{1}{z-a_j}\right)\right)dz=\sum_{j\neq i}\frac{\lambda_j}{a_i-a_j}\int\limits_\gamma\frac{\Phi(z)}{z-a_i}dz-\sum_{j\neq i}\frac{\lambda_j}{a_i-a_j}\int\limits_\gamma\frac{\Phi}{z-a_j}dz.$$

Обозначим $G_i=\int\limits_\gamma\frac{\Phi(z)}{z-a_i}dz$, $1\leqslant i\leqslant n$. Тогда последнее равенство принимает вид

$$-\int\limits_\gamma(\lambda_i-1)\frac{\Phi(z)}{(z-a_i)^2}dz=\sum_{j\neq i}\left(\frac{\lambda_j}{a_i-a_j}G_i-\frac{\lambda_j}{a_i-a_j}G_j\right).$$

Заметим, что из определений функций F_i и G_i мы имеем равенство $u_i=\lambda_iG_i$. Если в выражении (7.3) для полного дифференциала $\mathrm{d}\,u_i$ использовать последние два равенства, то получим следующее равенство:

$$du_i=\sum_{j\neq i}(\lambda_ju_i-\lambda_iu_j)\,\frac{da_i-da_j}{a_i-a_j}. \tag{7.4}$$

Это показывает, что мы получили решение уравнения Шлезингера для $p=2$. Пфаффову систему (7.4) еще называют системой Жордана—Похгаммера [11], которая вполне интегрируема в смысле Фробениуса. Утверждение теоремы, что предъявленные интегралы дают базис решений этой системы, есть другое доказательство полной интегрируемости. То, что интегралы образуют базис, следует из того, что указанные двойные петли Похгаммера в количестве n штук линейно независимы, что следует из линейной независимости форм η_j (особенности в разных точках и разных порядков) и невырожденности спаривания в силу двойственности Пуанкаре [5, 11]. Теорема доказана. □

Интегралы для решений, указанные в теореме 7.1, являются интегралами гипергеометрического типа, обобщающие интегральное представление для гипергеометрической функции, дающей решение гипергеометрического уравнения Гаусса.

8. Интегральные решения верхнетреугольного уравнения Шлезингера для произвольного p

В этом разделе мы представим решения гипергеометрического типа уравнений Шлезингера для верхнетреугольных матриц любого размера $p \geqslant 2$ с дополнительным ограничением на собственные значения матриц, задающих начальные данные для решений. Напомним, что собственные значения матриц $B_i(a)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ уравнения Шлезингера являются интегралами для этого уравнения, т. е. совпадают с собственными значениями начальных данных $B_i(a^0)$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Теперь докажем теорему, обобщающую теорему из предыдущего раздела.

Теорема 8.1. *Пусть для каждого* $1 \leqslant i \leqslant n$ *собственные значения* $\lambda_i^1, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^p$ *каждой матрицы начальных данных* $B_i(a^0)$ *верхнетреугольного уравнения Шлезингера образуют арифметическую прогрессию с одной и той же разностью* Δ, *причем ни одно из чисел* $k\Delta$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, *не является целым. Тогда при выборе начальных данных для внедиагональных элементов матриц* $B_i(a^0), 1 \leqslant i \leqslant n$, *удовлетворяющих условиям* $u_i^{k,m}(a^0) = u_j^{k,m}(a^0)$, *для всех пар* $\{i, j\}$, $i \neq j$, *при фиксированных* k, m, *все элементы* $u_i^{k,l}(a)$ *каждой матрицы решения* $(B_1(a), \ldots, B_n(a))$ *верхнетреугольного уравнения Шлезингера являются интегралами гипергеометрического типа* (7.2).

Доказательство. При предположениях теоремы о собственных значениях матриц из начальных условий система уравнений на элементы $u_i^{1,m}(a)$ из первых наддиагональных матриц U_i^1, $1 \leqslant i \leqslant n$ имеет вид

$$\mathrm{d}\, u_i^{1,m} = \Delta \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (u_i^{1,m} - u_j^{1,m}) \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \quad i = 1, \ldots n, \;\; m = 1, \ldots p-1, \tag{8.1}$$

и по структуре совпадает с уравнениями (7.4), но с одним параметром $\lambda_i^{m,m+1} = \lambda_i^m - \lambda_i^{m+1} = \Delta$, $i = 1, \ldots n$, $m = 1, \ldots, p-1$, удовлетворяющим условиям теоремы 7.1. Тогда в силу теоремы 7.1 базис решений для этих элементов задается интегралами

$$u_i^{1,m,j}(a_1, \ldots, a_n) = \Delta \int_{\gamma_j} \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{\Delta}. \tag{8.2}$$

В силу предположений теоремы на начальные условия решений $u_i^{1,m}(a^0) = u_j^{1,m}(a^0)$ системы (8.1) решения $u_i^{1,m}(a)$, $u_j^{1,m}(a)$ совпадают, т. е. $u_i^{1,m}(a) = u_j^{1,m}(a)$.

Для элементов $u_i^{2,m}(a)$ второй наддиагональной матрицы U_i^2 имеет место неоднородная система линейных пфаффовых уравнений

$$\mathrm{d}\, u_i^{2,m} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} [2\Delta(u_j^{2,m} - u_i^{2,m}) + (u_i^{1,m} u_j^{1,m+1} - u_j^{1,m} u_i^{1,m+1})] \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \tag{8.3}$$

так как для разностей собственных значений матриц имеем равенства $\lambda_i^{m,m+2} = \lambda_i^m - \lambda_i^{m+2} = 2\Delta$, $i, j = 1, \ldots n$, $m = 1, \ldots p-2$. Из совпадения решений $u_i^{1,m}(a) = u_j^{1,m}(a)$ $i \neq j$ следует равенство нулю нелинейной по функциям $u_i^{1,m}(a)$, $u_j^{1,m}(a)$ части уравнения для $u_i^{2,m}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. В итоге мы получаем линейное по $u_i^{2,m}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ уравнение, которое по структуре совпадает с уравнением (7.1) или, точнее, с (8.1), а его решение с (7.2) или, точнее, с (8.2), но с параметром 2Δ, удовлетворяющим условию на параметры теоремы 7.1.

В общем случае подобное наблюдение также имеет место, когда мы рассматриваем систему уравнений для элементов из k-той ($k < p$) наддиагональной матрицы

$$\mathrm{d}\, u_i^{k,m} = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (k\Delta(u_j^{k,m} - u_i^{k,m}) + \sum_{r+s=k} (u_i^{r,m} u_j^{s,m+r} - u_j^{r,m} u_i^{s,m+r})) \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j}, \qquad \lambda_i^{m,m+k} = \lambda_i^m - \lambda_i^{m+k} = k\Delta. \tag{8.4}$$

В силу предположения на начальные условия и из описанного совпадения элементов из наддиагональных матриц с меньшим индексом, чем k, нелинейная часть (рассматриваемая как неоднородность) уравнения (8.4) обращается в нуль, и мы получаем линейную пфаффову систему на функции $u_i^{k,m}$, совпадающую по структуре с (8.1), базис решений которой задается интегралами (8.2), но все для параметра $k\Delta$, который удовлетворяет условию на параметр теоремы 7.1. Такая процедура поиска базиса решений, составленного из гипергеометрических интегралов, завершается за $p-1$ шагов. Теорема доказана. □

Отметим, что системы вида (8.1) всесторонне изучал Т. Коно. Их связь с уравнениями Шлезингера была отмечена в работе [12]. Коно такие системы уравнений, как уже было отмечено выше, называл системами Жордана—Похгаммера и установил их связь с классическими уравнениями Янга—Бакстера, указал гипергеометрический базис решений и доказал, что представление монодромии такой системы эквивалентно представлению Бурау [11]. Аналогичное исследование провели М. Капович и Дж. Миллсон для уравнения (7.1), установив его связь с изгибаниями многоугольников в трехмерном пространстве и описав монодромию этого уравнения с помощью представления Гасснера [9].

9. Решения верхнетреугольного уравнения Шлезингера при рациональном параметре Δ

В этом разделе мы более детально опишем форму решений, доставляемых для систем

$$\mathrm{d}\, u_i = -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} (\lambda_i u_j - \lambda_j u_i) \frac{\mathrm{d}(a_i - a_j)}{a_i - a_j},) \quad i, j = 1, \ldots n,$$

где $\lambda_1 = \lambda^1 = \cdots = \lambda = \Delta$ и $\Delta = \pm\dfrac{m}{N}$ — рациональное число, числитель и знаменатель которого взаимно простые натуральные числа $(m, N) = 1$. К этим системам, как показано в теореме 8.1, редуцируются верхнетреугольные уравнения Шлезингера при дополнительных ограничениях на собственные числа. При указанных ограничениях на параметры λ_i дифференциальная форма под интегралом в выражении для решения принимает вид $\eta_i(z) = (P^m(z))^{\pm\frac{1}{N}} \dfrac{dz}{z - a_i}$, где $P(z)$ — многочлен $P(z) = (z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$.

Естественно рассмотреть алгебраическую кривую Γ в $\mathbb{C}^2$, заданную уравнением $\Gamma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 |\, w^N = P^m(z)\}$. При $m > 2$ у этой кривой все точки $a_1, \ldots, a_n$ будут особыми точками. Поэтому мы положим $m = 1$, и тогда у кривой Γ, возможно, только точка на бесконечности будет особой при стандартном ее замыкании в двумерном комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^2$, а в аффинной части $\mathbb{C}^2$ — она неособая. При отображении проектирования $(z, w) \to z$ кривая Γ является n-листным разветвленным накрытием над комплексной прямой $\mathbb{C}$ с множеством точек ветвления $\{a_1, \ldots, a_n\}$. При $N = 2$ и $\Delta = -\dfrac{1}{2}$ формы $\eta_i(z)$ поднимаются на Γ как однозначные голоморфные 1-формы $\tilde{\eta}_i(z)$.

Локальная система L_ρ на проколотой комплексной прямой $\mathbb{C}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$ поднимается как тривиальная локальная система на кривую Γ (так как соотношения в фундаментальной группе Γ, если они появляются, порождаются коммутаторами элементов и потому с универсального накрытия $\widetilde{M}$ тривиальная локальная система опускается как тривиальная).

В каждую двойную петлю Похгаммера γ (т. е. цикл Похгаммера, которые порождают гомологии с коэффициентами в локальной системе L_ρ^{-1}) на проколотой комплексной прямой проектируется некоторый цикл $\tilde{\gamma}$ (с коэффициентами в тривиальной локальной системе) на стандартном замыкании Γ в комплексной проективной плоскости. Имеет место естественное равенство $\int\limits_{\gamma} \eta(z) = \int\limits_{\tilde{\gamma}} \tilde{\eta}(z)$. Интегралы в правой части последнего равенства являются гиперэллиптическими интегралами, в случае $n = 3$ — это просто эллиптические интегралы.

Все сказанное выше в этом разделе сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 9.1. *Верхнетреугольные уравнения Шлезингера для матриц произвольного размера $p \times p$, в которых собственные значения матриц начальных условий образуют арифметические прогрессии с разностью $\Delta = -\frac{1}{2}$, имеют базис решений, представленный гиперэллиптическими интегралами.*

Для верхнетреугольных матриц размера 2×2 результаты содержатся в работе [6].

В заключение автор выражает благодарность Р. Р. Гонцову за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-51-150005-НЦНИ-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болибрух А. А.* Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.: МЦНМО, 2009.
2. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. — М.: Физматлит, 1963.
3. *Aomoto K.* On the structure of integrals of power product of linear functions// Sci. Papers College Gen. Edu. Univ. Tokyo. — 1977. — *27*, № 2. — С. 49–61.
4. *Aomoto K.* Founctions hyperlogarithmiques et groupes de monodromie unipotens// Sci. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. — 1978. — *25*. — С. 149–156.
5. *Deligne P., Mostow G. D.* Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy// Publ. IHES. — 1986. — *63*. — С. 5–90.
6. *Dragovich V., Schramchenko V.* Algebro-geometric solutions to triangular Schlesinger systems// `arxiv:1604.01820v2[math.AG]`.
7. *Dubrovin B., Mazzocco M.* On the reductions and classical solutions of the Schlesinger equations// В сб. «Differential Equations and Quantum Groups». — Strasburg: IRMA, 2007. — С. 157–187.
8. *Gontsov R. R., Leksin V. P.* On the reducibility of Schlesinger isomonodromic families// В сб. «Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE 2012». — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2014. — С. 21–34.
9. *Kapovich M., Millson J.* Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation// Can. Math. Bull. — 2001. — *44*, № 1. — С. 36–60.
10. *Katz N., Oda T.* On the differentiation of de Rham cohomology classes with respect to parameters// J. Math. Kyoto Univ. — 1968. — *8*. — С. 199–213.
11. *Kohno T.* Linear representations of braid groups and classical Yang—Baxter equations// Contemp. Math. — 1988. — *78*. — С. 339–363.
12. *Leksin V. P.* Isomonodromy deformations and hypergeometric-type systems// В сб. «Painlevé Equations and Related Topics». — Berlin—Boston: Walther de Gruyter, 2012. — С. 117–122.
13. *Žoladek H.* The Monodromy Group. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2006.

В. П. Лексин
Государственный социально-гуманитарный университет,
140452, г. Коломна, ул. Зеленая, д. 30
E-mail: `lexin_vpmail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-86-97 UDC 517.927

Schlesinger's Equations for Upper Triangular Matrices and Their Solutions

© 2018 **V. P. Lexin**

Abstract. We consider explicit integral expressions of hypergeometric and hyperelliptic types for solutions of Schlesinger's equations in classes of upper triangular matrices with eigenvalues that produce arithmetic progressions with the same difference. These integral representations extend and generalize earlier known results.

REFERENCES

1. A. A. Bolibrukh, *Obratnye zadachi monodromii v analiticheskly teorii differentsial'nykh uravneniy* [Inverse Problems of Monodromy in Analytical Theory of Differential Equations], MTSNMO, Moscow, 2009 (in Russian).
2. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Kurs sovremennogo analiza* [A Course of Modern Analysis], Fizmatlit, Moscow, 1963 (Russian translation).
3. K. Aomoto, "On the structure of integrals of power product of linear functions," *Sci. Papers College Gen. Edu. Univ. Tokyo.*, 1977, **27**, No. 2, 49–61.
4. K. Aomoto, "Founctions hyperlogarithmiques et groupes de monodromie unipotens," *Sci. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.* , 1978, **25**, 149–156.
5. P. Deligne and G. D. Mostow, "Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy," *Publ. IHES.*, 1986, **63**, 5–90.
6. V. Dragovich and V. Schramchenko, "Algebro-geometric solutions to triangular Schlesinger systems," *Arxiv*: 1604.01820v2[math.AG].
7. B. Dubrovin and M. Mazzocco, "On the reductions and classical solutions of the Schlesinger equations," In: *Differential Equations and Quantum Groups*. — IRMA, Strasburg 2007, pp. 157–187.
8. R. R. Gontsov and V. P. Leksin, "On the reducibility of Schlesinger isomonodromic families," In: *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE* 2012. — Cambridge Sci. Publ., Cambridge, 2014, pp. 21–34.
9. M. Kapovich and J. Millson, "Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation," *Can. Math. Bull.*, 2001, **44**, No. 1, 36–60.
10. N. Katz and T. Oda, "On the differentiation of de Rham cohomology classes with respect to parameters," *J. Math. Kyoto Univ.*, 1968, **8**, 199–213.
11. T. Kohno, "Linear representations of braid groups and classical Yang—Baxter equations," *Contemp. Math.*, 1988, **78**, 339–363.
12. V. P. Leksin, "Isomonodromy deformations and hypergeometric-type systems," In: *Painlevé Equations and Related Topics*. — Walther de Gruyter, Berlin—Boston, 2012, pp. 117–122.
13. H. Žoladek, *The Monodromy Group*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2006.

V. P. Lexin
State Socio-Humanitarian University, Kolomna, Russia
E-mail: `lexin_vpmail.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 98–130

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-98-130 УДК 519.6+532.5+556.3

НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В МЕХАНИКЕ ГОРНЫХ ПОРОД

© 2018 г. **А. М. МЕЙРМАНОВ, О. В. ГАЛЬЦЕВ, О. А. ГАЛЬЦЕВА**

Аннотация. В этой статье мы рассматриваем несколько физических процессов в механике горных пород, которые описываются задачами со свободной границей. Некоторые из них известны (задачи Муската), другие совершенно новые (подземное выщелачивание и динамика трещин в подземных горных породах).

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Задачи со свободной границей являются подмножеством тех дифференциальных уравнений в частных производных, которые посвящены начально-краевым задачам в неизвестных областях для разных видов дифференциальных уравнений. Термин «неизвестная область» подразумевает, что требуется определить как область, в которой необходимо найти решение, так и некоторое решение задачи. Для определения этой свободной границы нам необходимо еще одно граничное условие для тех же дифференциальных уравнений, что и в обычной краевой задаче. Это условие обычно называется *условием свободной границы*. Систематическое изучение подобных задач для эллиптических уравнений было начато В. Н. Монаховым в [28], и Л. И. Рубинштейном [3] для уравнения теплопроводности (задача Стефана). Позже появились несколько книг и статей, в большинстве своем посвященные задаче Стефана [14, 22].

Задачи со свободной границей для уравнений Навье—Стокса интенсивно изучались В. А. Солонниковым [35, 36].

Наиболее часто изучаемыми задачами со свободными границами являются задача Стефана, задача Хеле—Шоу и задача Муската. Причина заключается в том, что эти задачи возникают в физических процессах, которые очень важны с практической точки зрения. Например, задача Стефана описывает фазовые переходы в чистых материалах (плавление и кристаллизация) и имеет множество приложений в металлургии, а задача Хеле—Шоу и задача Муската описывают движение подземных жидкостей и играют важную роль в гидрологии и нефтяной промышленности. Среди этих трех задач задача Стефана наиболее изучена. Это подтверждается тем, что из всех задач со свободной границей задаче Стефана посвящено наибольшее количество публикаций.

С другой стороны, с практической точки зрения существуют несколько очень важных физических процессов в механике горных пород, которые связаны со свободными границами и которые были изучены только инженерами, например, подземное выщелачивание и динамика трещин в подземных горных породах. Подземное выщелачивание предполагает высверливание отверстий в залежи руды, после которого взрывной или гидравлический разрыв пласта может быть использован для создания открытых путей в залежи для проникновения туда выщелачивающего агента. Выщелачивающий агент закачивается в залежь, где он взаимодействует с рудой и частично ее растворяет. Далее, раствор с рудой выкачивается на поверхность и обрабатывается. Данный метод позволяет извлекать металлы и соли из руды, не применяя традиционных методов горной промышленности, включающих буровзрывные работы, открытую или подземную добычи. Но существующие математические описания данного процесса очень примитивны и используют несколько постулатов о растворении горных пород, которые не имеют прочной основы в классической механике сплошных сред.

Последняя задача, которую мы здесь рассмотрим, возникает в моделировании трещин в подземных горных породах. До сих пор математической модели динамики трещин в подземных горных породах не было. В металлах, например, этот процесс хорошо изучен [5]. Разумеется, все еще открытый вопрос — существует ли вообще движение трещин или нет? Если оно есть, то это может объяснить причины возникновения землетрясений [18]. В состоянии покоя одна трещина может быть представлена связной областью заполненных жидкостями пор. Под воздействием регулярных тепловых импульсов, идущих от ядра Земли, механическое напряжение на границе между жидкостью и твердым скелетом растет до некоторого предела. За этим пределом граница трещины начинает смещаться (движущаяся свободная граница) и создает мощные сейсмические волны.

Для задачи Муската мы сначала рассматриваем две разные жидкости в поровом пространстве твердого тела и доказываем существование и единственность классического решения. Далее, при ограничительном условии, что твердое тело имеет периодическую структуру, мы выявляем гомогенизированную модель, которая также является задачей со свободной границей.

Ту же схему мы применяем для подземного выщелачивания и для динамики трещин. Мы сначала выводим математические модели, описывающие процессы на уровне пор (на микроскопическом уровне), и далее находим соответствующие гомогенизированные модели.

2. Задача Муската

Широко известно [33], что система фильтрации Дарси, описывающая макроскопическое течение несжимаемой вязкой жидкости — результат точной гомогенизации системы Стокса для несжимаемой вязкой жидкости, находящейся а периодическом поровом пространстве абсолютно жесткого твердого тела.

Более сложное макроскопическое движение двух несмешивающихся несжимаемых вязких жидкостей описывается задачей Муската. В данной модели требуется найти свободную границу $\Gamma(t) \subset Q$, которая разделяет две области $Q^+(t) \subset Q$ и $Q^-(t) \subset Q$, $Q^+(t) \cup \Gamma(t) \cup Q^-(t) = Q$, занятых разными жидкостями. В каждой области $Q^{\pm}(t)$ движение жидкости описывается собственной системой фильтрации Дарси, а у свободной границы нормальные скорости жидкостей совпадают с нормальной скоростью свободной границы.

Следовательно, как и в случае фильтрации одной жидкости, мы можем ожидать, что задача Муската будет гомогенизацией начально-краевой задачи для системы Стокса с неоднородной жидкостью

$$\mu\triangle\mathbf{u}^{\varepsilon} + g\rho_{\varepsilon}\mathbf{e} = 0,\ \nabla\cdot\mathbf{u}^{\varepsilon} = 0,\ \frac{d\rho_{\varepsilon}}{dt} = 0,$$

в периодическом поровом пространстве Q_{ε} абсолютно жесткого твердого тела Q со следующими граничным и начальным условиями

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t) = 0,\quad \mathbf{x}\in\partial Q_{\varepsilon}, \tag{2.1}$$

$$\rho_{\varepsilon}(\mathbf{x},0) = \rho^0_{\varepsilon}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in Q_{\varepsilon}, \tag{2.2}$$

где $\rho^0_{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \rho^+ = \mathrm{const},\ \mathbf{x}\in Q^+_{\varepsilon}(0),\ \rho^0_{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \rho^- = \mathrm{const},\ \mathbf{x}\in Q^-_{\varepsilon}(0),\ \overline{Q^+_{\varepsilon}}(0)\cup\overline{Q^-_{\varepsilon}}(0) = \overline{Q_{\varepsilon}}$, μ — это вязкость и $g\mathbf{e}$ — ускорение свободного падения.

Из-за граничного условия (2.1) точки соприкосновения свободной границы и твердого скелета будут неизменно фиксированы в начальном положении. Численные расчеты предсказывают появление водяного следа («язычка»), который будет расти со временем (см. рис. 2.1). Постепенный рост количества капилляров (рис. 2.2) приводит к гомогенизации движения жидкости. Область, занятая водяным «язычком» в фиксированный момент времени, размягчается при гомогенизации, где концентрация s воды варьируется от 1 до 0 (рис. 2.3 и рис. 2.4).

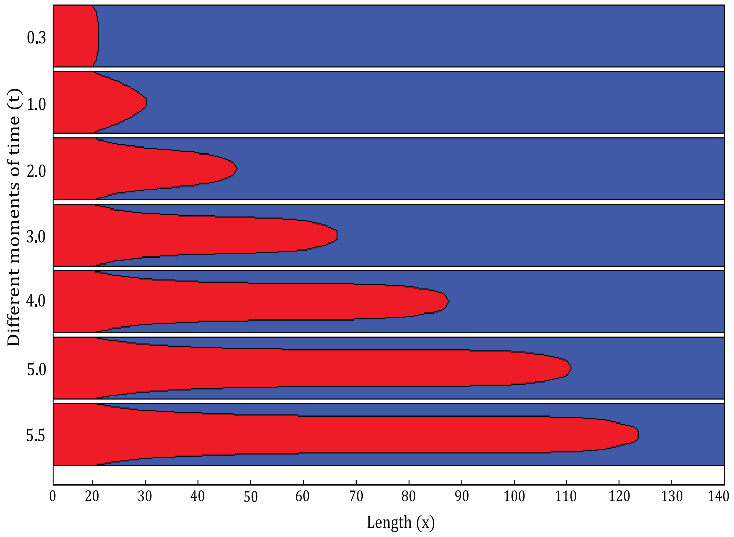

Рис. 2.1. Численная симуляция: последовательные положения свободной границы в одном капилляре.

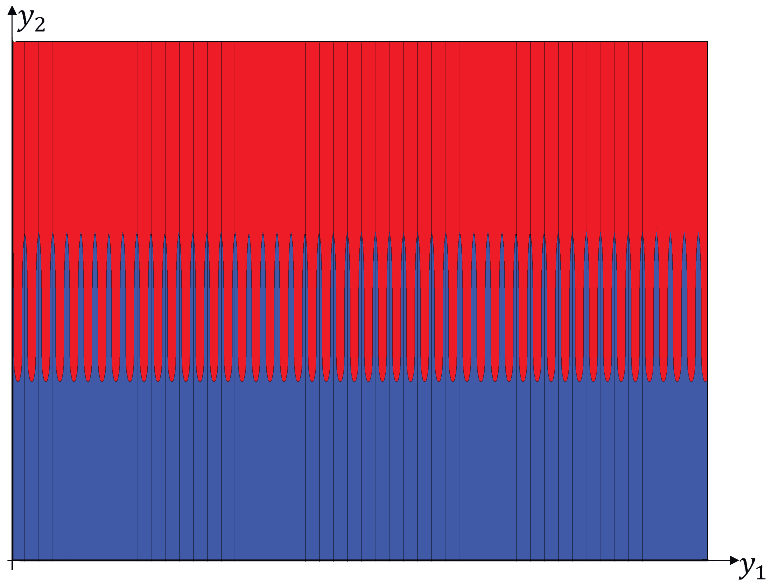

Рис. 2.2. Численная гомогенизация при $t = 5.5$.

Возвращаясь к задаче Муската, мы можем заметить, что решение такой задачи, соответствующей совместному движению двух разных жидкостей, имеет очень простую структуру. Свободная граница разделяет две жидкости и перемещается с постоянной скоростью (рис. 2.5).

Следовательно, мы не можем получить задачу Муската для движения жидкости в поровом пространстве абсолютно жесткого тела как гомогенизацию соответствующей начально-краевой задачи для системы Стокса с неоднородной жидкостью.

Но, если мы будем искать движение неоднородной жидкости в упругом твердом теле, то ситуация меняется. Точки соприкосновения свободной границы и твердого тела начинают смещаться, и гомогенизация сохраняет свободную границу, которая разделяет две жидкости [25].

Наш подход не зависит от размерности пространства $\mathbb{R}^n$ и геометрии областей в нем. Поэтому мы ограничимся рассмотрением пространства $\mathbb{R}^2$ с прямоугольными областями. В простейшем случае задача имеет следующую формулировку.

Пусть $Q_f \subset Q \subset \mathbb{R}^2$, где Q — единичный куб $Q = \{\mathbf{x} : -1 < x_i < 1,\ i = 1,2\}$, $Q_f = \{\mathbf{x} : -1 < x_1 < 1, -1/2 < x_2 < 1/2\}$. В безразмерных переменных эволюция потока определяется входным

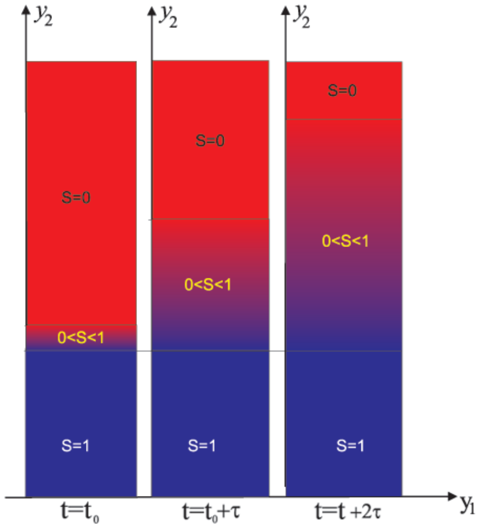

Рис. 2.3. Гомогенизация посредством увеличения количества капилляров. Концентрация воды s в течении времени (слева направо).

Рис. 2.4. Предел строгого численного масштабирования.

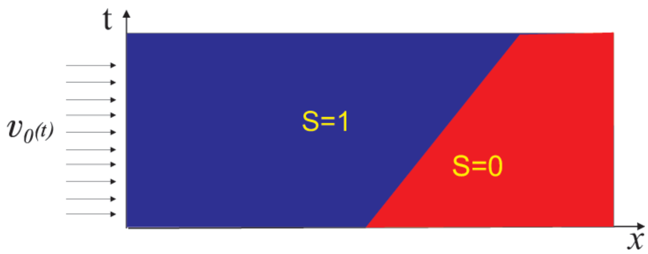

Рис. 2.5. Задача Муската

давлением и силой притяжения. Точнее, в этой задаче требуется найти скорость $\mathbf{u}^f(\mathbf{x},t)$, давление $p_f(\mathbf{x},t)$, и плотность $\rho_f(\mathbf{x},t)$ неоднородной жидкости в Q_f, смещение $\mathbf{u}^s(\mathbf{x},t)$ и давление $p_s(\mathbf{x},t)$ упругого скелета в $Q_s = Q\backslash\overline{Q_f}$ из следующей системы дифференциальных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla\cdot\mathbb{P}_f + \rho_f\,\mathbf{e} = 0,\ \nabla\cdot\mathbf{u}^f = 0,\ \mathbf{x}\in Q_f,\ 0<t<T,\\ \nabla\cdot\mathbb{P}_s + \rho_s\mathbf{e} = 0,\ \nabla\cdot\mathbf{u}^s = 0,\ \mathbf{x}\in Q_s,\ 0<t<T, \end{array}\right. \tag{2.3}$$

$$\frac{d\rho_f}{dt} \equiv \frac{\partial\rho_f}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho_f\mathbf{u}^f) = \frac{\partial\rho_f}{\partial t} + \mathbf{u}^f\cdot\nabla\rho_f = 0,\ \mathbf{x}\in Q_f,\ 0<t<T, \tag{2.4}$$

где $\mathbb{P}_f = 2\,\mu\,\mathbb{D}(\mathbf{u}^f) - p_f\,\mathbb{I}$, $\mathbb{D}(\mathbf{u}^f) = \frac{1}{2}\big(\nabla\mathbf{u}^f + (\nabla\mathbf{u}^f)^*\big)$, $\mathbb{P}_s = 2\,\lambda\,\mathbb{D}(\mathbf{u}^s) - p_s\,\mathbb{I}$, $\mu = const$ это вязкость жидкостей, $\lambda = const$ — коэффициент Ламе, $\mathbf{e}$ — данный вектор, ρ_s — плотность твердого тела и $\mathbb{I}$ — единичный тензор.

Законы сохранения массы и момента диктуют совпадение скоростей и нормальных напряжений жидких и твердых компонентов

$$\mathbf{u}^f = \frac{\partial\mathbf{u}^s}{\partial t},\ \mathbb{P}_f\cdot\mathbf{n} = \mathbb{P}_s\cdot\mathbf{n} \tag{2.5}$$

на общей границе $S = \partial Q_f \cap \partial Q_s$ с единичным нормальным вектором $\mathbf{n}$.

Граничное условие на боковой стороне $S^0 = \{x_2 = \pm1\}$ границы ∂Q для $0 < t < T$ имеет форму

$$\mathbf{u}^s(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{2.6}$$

У «входных» и «выходных» границ $S^{\pm} = \{\mathbf{x} \in \partial Q : x_1 = \mp1\}$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}_s\cdot\mathbf{e}_1 = -p^+(\mathbf{x})\mathbf{e}_1,\ \mathbf{x}\in S_s^+,\ \mathbb{P}_f\cdot\mathbf{e}_1 = -p^+(\mathbf{x})\mathbf{e}_1,\ \mathbf{x}\in S_f^+,\ 0<t<T,\\ \mathbb{P}_s\cdot\mathbf{e}_1 = 0,\ \mathbf{x}\in S_s^-,\ \mathbb{P}_f\cdot\mathbf{e}_1 = 0,\ \mathbf{x}\in S_f^-,\ 0<t<T, \end{array}\right. \tag{2.7}$$

где $p^+(\mathbf{x})$ — заданная функция, $S_f^{\pm} = S^{\pm}\cap\partial Q_f$, $S_s^{\pm} = S^{\pm}\cap\partial Q_s$, и $\mathbf{e}_i$ — единичный вектор оси x_i при $i = 1, 2$.

Для упрощения наших предположений мы переходим к однородным граничным условиям в $S^{\pm}$

$$\mathbb{P}_i\cdot\mathbf{e}_1 = 0,\ \ \mathbf{x}\in S_i^{\pm},\ \ i = f, s,\ \ 0<t<T, \tag{2.8}$$

введя новое давление

$$p_f \to p_f - p^0(\mathbf{x}),\ \ p^0(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,p^+(\mathbf{x})(1 - x_1). \tag{2.9}$$

С этим новым давлением динамические уравнения примут форму

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla\cdot\mathbb{P}_f + \mathbf{f} + \rho_f\,\mathbf{e} = 0,\ \nabla\cdot\mathbf{u}^f = 0,\ \mathbf{x}\in Q_f,\ 0<t<T;\\ \nabla\cdot\mathbb{P}_s + \mathbf{f} = 0,\ \nabla\cdot\mathbf{u}^s = 0,\ \mathbf{x}\in Q_s,\ 0<t<T, \end{array}\right. \tag{2.10}$$

где

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (1 - \chi(\mathbf{x}))\rho_s\mathbf{e} + \nabla p^0(\mathbf{x}), \tag{2.11}$$

$\chi(\mathbf{x}) = 1,$ для $\mathbf{x}\in Q_f,$ и $\chi(\mathbf{x}) = 0,$ для $\mathbf{x}\in Q_s$. Наконец,

$$\mathbf{u}^s(\mathbf{x}, 0) = 0,\ \mathbf{x}\in S^0. \tag{2.12}$$

Начальные и граничные условия для плотности тождественны заданию поверхности Γ_0, которая разделяет две подобласти $Q_f^{\pm}(0)$, изначально занятые жидкостями. Для простоты предположим, что

$$\Gamma^{(0)} = \{\mathbf{x}\in Q_f : x_1 = h(x_2), -\frac{1}{2} < x_2 < \frac{1}{2}\}, \tag{2.13}$$

$$-\frac{1}{2} + \delta < h(x_2) < \frac{1}{2} - \delta,\ \ \text{для} -\frac{1}{2} < x_2 < \frac{1}{2} \tag{2.14}$$

с некоторым $0 < \delta < 1$.

Таким образом, мы можем ожидать, что свободная граница $\Gamma(t)$ не соприкоснется с заданными границами $S^{\pm}$ хотя бы в течении некоторого времени $0 < t < T$.

На границах $S^{\pm}$ для $0 < t < T$ и в начальный момент времени $t = 0$, плотность ρ_f является кусочно-постоянной и принимает два положительных значения, характеризующие различимые фазы потока

$$\rho_f(\mathbf{x}, t) = \rho^{\pm} = \text{const} > 0,\ \ \mathbf{x}\in S_f^{\pm},\ \ 0<t<T, \tag{2.15}$$

$$\rho_f(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in Q_f, \tag{2.16}$$

где $\rho_0(\mathbf{x}) = \rho^{\pm}$ для $\mathbf{x}\in Q_f^{\pm}(0)$.

Для простоты предположим, что $\rho^- \leqslant \rho_0(\mathbf{x}) \leqslant \rho^+$. Если скорость $\mathbf{u}^f(\mathbf{x}, t)$ достаточно гладка, тогда задача Коши

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}^f(\mathbf{x}, t),\ \ t > t_0,\ \ \mathbf{x}|_{t=t_0} = \xi$$

определяет отношение $\mathbf{x} = \gamma(\xi, t; \mathbf{u}^f; t_0)$, $\gamma : Q_f \to Q_f$. А именно, свободная граница $\Gamma(t)$ определяется как множество $\Gamma(t) = \{\mathbf{x} \in Q_f : \mathbf{x} = \gamma(\xi, t; \mathbf{u}^f; 0),\ \xi \in \Gamma(0)\}$, а подобласти $Q_f^{\pm}(t) = \{\mathbf{x} \in Q_f : \rho_f(\mathbf{x}, t) = \rho^{\pm}\}$ — как множества

$$Q_f^{\pm}(t) = \{\mathbf{x} \in Q_f : \mathbf{x} = \gamma(\xi, t; \mathbf{u}^f; 0),\ \xi \in Q_f^{\pm}(0)\} \cap \{\mathbf{x} \in Q_f : \mathbf{x} = \gamma(\xi, t; \mathbf{u}^f; t_0),\ \xi \in S_f^{\pm},\ t_0 > 0\}.$$

Мы показали, что преобразование, описанное уравнениями выше, сохраняет существование и единственность двух подобластей $Q_f^{\pm}(t)$, каждая из которых занята одной из жидкостей, разделенных в момент времени $t > 0$ регулярной свободной границей $\Gamma(t)$. Следовательно, изучаемая задача равносильна нахождению $\{\mathbf{u},\, p_f,\, \mathbf{w},\, p_s\}$ и движущейся границы $\Gamma(t)$.

В этом разделе мы используем принятую запись функциональных пространств и норм (см. [2]). Следовательно, для $1 < q < \infty$

$$u \in L_q(\Omega) \Rightarrow \|u\|_{q,\Omega} = \Big(\int\limits_{\Omega} |u|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad u \in L_\infty(\Omega) \Rightarrow \|u\|_{\infty,\Omega} = \lim_{q\to\infty} \|u\|_{q,\Omega} < \infty,$$

$$u \in W_q^1(\Omega) \Rightarrow \|u\|_{q,\Omega}^{(1)} = \big(\int\limits_{\Omega} |u|^q dx\big)^{\frac{1}{q}} + \sum_{i=1}^{2} \big(\int\limits_{\Omega} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^q dx\big)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

$$u \in \mathring{W}_q^1(\Omega) \Rightarrow u \in W_q^1(\Omega), \text{ и } u(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

$$u \in W_q^l(\Omega) \Rightarrow \|u\|_{q,\Omega}^{(l)} = \big(\int\limits_{\Omega} |u|^q dx\big)^{\frac{1}{q}} + \sum_{|m|=l} \big(\int\limits_{\Omega} |D^m u|^q dx\big)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

$$D^m u = \frac{\partial^{|m|} u}{\partial^{m_1} x_1 \ldots \partial^{m_n} x_n},\ m = (m_1, \ldots, m_n),\ m_i \geqslant 0,\ |m| = m_1 + \ldots + m_n.$$

Далее мы введем пространство функций с производными, не являющимися целыми числами. Для простоты мы рассмотрим полупространства $\mathbb{R}_f^2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \infty,\ x_2 > 1/2\}$, $\mathbb{R}_s^2 = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \infty,\ x_2 < 1/2\}$, с границей $\mathbb{R} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \infty, x_2 = 1/2\}$. Пространство $W_2^{l-\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ — это пространство всех функций $v(x_1)$ с конечной нормой $\|v\|_{2,\mathbb{R}}^{(l-\frac{1}{2})} = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{2l-1} |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}}$, где $\widehat{v}$ — это преобразование Фурье v: $\widehat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} v(x_1) e^{-i\xi x_1} dx_1$. В силу [2, гл. 2, теорема 2.3] получим $\|v\|_{2,\mathbb{R}}^{(l-\frac{1}{2})} \leqslant C_1 \|v\|_{2,\mathbb{R}_j^2}^{(l)} \leqslant C_2 \|v\|_{2,\mathbb{R}}^{(l-\frac{1}{2})}$, $j = f, s$.

Для гладких функций мы определяем нормы $|u|_{\Omega}^{(0)} = \sup\limits_{\mathbf{x}\in\Omega} |u(\mathbf{x})|$, $\langle u\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} = \sup\limits_{\mathbf{x}\in\Omega} \frac{|u(\mathbf{x})-u(\mathbf{y})|}{|x-\mathbf{y}|^{\alpha}}$. Мы говорим, что функция $u(\mathbf{x})$ принадлежит пространству $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, если $|u|_{\Omega}^{(\alpha)} = |u|_{\Omega}^{(0)} + \langle u\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} < \infty$, функция $u(\mathbf{x})$ принадлежит пространству $C^k(\overline{\Omega})$, если $|u|_{\Omega}^{(k)} = \sum\limits_{|m|=0}^{k} |D^m u|_{\Omega}^{(0)} < \infty$, и функция u принадлежит пространству $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$, если $|u|_{\Omega}^{(k+\alpha)} = |u|_{\Omega}^{(k)} + \sum\limits_{|m|=0}^{k} |D^m u|_{\Omega}^{(\alpha)} < \infty$. Мы говорим, что поверхность $\Gamma \in \Omega$ является $C^{k+\alpha}$-регулярной, если в локальных координатах она представляется через $C^{k+\alpha}$-регулярные функции.

Если $u = u(\mathbf{x}, t)$ и $u(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{B}$ для всех $0 < t < T$, тогда $u \in L_q\big((0, T); \mathbb{B}\big) \Longleftrightarrow \int\limits_{0}^{T} \|\mathbf{u}(., t)\|_B^q dt < \infty$, и для $q = \infty$ $u \in L_\infty\big((0, T); \mathbb{B}\big) \Longleftrightarrow \sup\limits_{0<t<T} \|\mathbf{u}(., t)\|_B < \infty$.

Наконец, $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega_T})$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, если $\max\limits_{0<t<T} \big(|\mathbf{u}(., t)|_{\Omega}^{(2)} + |\frac{\partial u}{\partial t}(., t)|_{\Omega}^{(0)}\big) < \infty$.

Для любой $0 < \delta < 1$ мы полагаем $Q^{(\delta)} = \{\mathbf{x} \in Q : -1 + \delta < x_1 < 1 - \delta\}$, $Q_f^{(\delta)} = Q^{(\delta)} \bigcap Q_f$, $G^{(\delta)} = Q^{(\delta)} \times (0, T)$, $G_f = Q_f \times (0, T)$, $G_f^{(\delta)} = Q_f^{(\delta)} \times (0, T)$.

Наш основной результат — следующий:

Теорема 2.1. *При условиях*

$$\|\mathbf{f}\|_{\infty,Q} = C_0 < \infty, \quad \Gamma(0) \in C^{1+\alpha}, \ 0 < \alpha < 1,$$

задача (2.4)–(2.6), (2.8), (2.10), (2.12), (2.15), (2.16) *имеет единственное решение на отрезке* $[0,T)$ *для некоторого* $T > 0$. *Компоненты этого решения имеют следующие свойства*:

(i) *Для любого* $0 < \delta < 1$, *и* $0 < \alpha < 1$, *скорость* $\mathbf{u}$ *и давление* p *удовлетворяют условиям регулярности* $\mathbf{u} \in L_\infty\big(0,T;W_2^3(Q^{(\delta)})\big) \cap L_\infty\big(0,T;C^{1+\alpha}(Q^{(\delta)})\big)$, $p \in L_\infty\big(0,T;W_2^2(Q^{(\delta)})\big)$, *уравнения* (2.10) *почти всюду в* $Q \times (0,T)$, *граничные условия* (2.6), (2.15), *начальные условия* (2.12) *и* (2.16) *в обычном смысле, граничные условия* (2.5) *и* (2.8) *в смысле распределений, в качестве интегрального тождества* $\int\limits_\Omega \big(\mathbb{P}\big(\mathbf{u}(t),p(t)\big) : \mathbb{D}(\varphi) + \mathbf{f}\cdot\varphi\big)dx = 0$ *почти для всех* $0 < t < T$ *и для любых гладких соленоидальных функций* φ, *обращающихся в нуль в* $\mathbf{x} \in S^0$.

(ii) *Свободная граница* $\Gamma(t)$ *является поверхностью класса* $C^{1,\alpha}$ *в каждый момент времени* $t \in [0,T)$, *а нормальная скорость* $V_n(\mathbf{x},t)$ *свободной границы по направлению своей нормали* $\mathbf{n}$ *в позиции* $\mathbf{x}$ *равномерна ограничена,* $\sup\limits_{\substack{t\in(0,T)\\ \mathbf{x}\in\Gamma(t)}} |V_n(\mathbf{x},t)| < \infty$.

(iii) *Плотность* ρ *имеет ограниченный вид,* $\rho \in L_\infty\big(0,T;BV(Q^{(\delta)})\big) \cap BV\big(Q^{(\delta)} \times (0,T)\big)$, *и удовлетворяет уравнению переноса* (2.4) *в смысле распределений* $\int\limits_{\Omega_T} \rho\big(\frac{\partial\psi}{\partial t} + u\cdot\nabla\psi\big)dxdt = -\int\limits_\Omega \rho_0(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},0)dx$ *для любой гладкой функции* ψ, *обращающейся в нуль при* $t = T$ *и* $\mathbf{x} \in S^\pm$.

Время T *существования классического решения зависит от поведения свободной границы* $\Gamma(t)$. *А именно, пусть* $\delta^\pm(t)$ *будет расстоянием от* $\Gamma(t)$ *до границы* $S^\pm$ *и* $\delta(t) = \min(\delta^-(t),\delta^+(t))$. *Тогда* $\delta(t) > 0$ *для всех* $0 < t < T$ *и* $\delta(t) \to 0$ *при* $t \to T$.

Теоремы о существовании обобщенных решений системы Навье—Стокса для неоднородных несжимаемых жидкостей были получены, например, в [1, 2, 6, 8, 13, 15, 23, 31, 33, 34] (без детального анализа множества, в котором плотность разрывна). Существование и единственность классического решения уравнений Стокса для неоднородной жидкости с граничными условиями Дирихле были доказаны в [7], а с граничными условиями Неймана — в [27]. Слабые решения задачи (2.3)–(2.16) на микроскопическом уровне для произвольного гладкого периодического порового пространства с последующей гомогенизацией были рассмотрены в [23]. Назовем полученную гомогенизированую задачу со свободной границей, описывающую движение двух несмешиваемых несжимаемых, вязких жидкостей на макроскопическом уровне, *обобщенной задачей Муската*.

3. Подземное выщелачивание

3.1. Микроскопическое описание.

3.1.1. Математическая модель в дифференциальных уравнениях. В безразмерных переменных $\mathbf{x} \to \dfrac{\mathbf{x}}{L}$, $t \to \dfrac{t}{T}$, $\mathbf{v} \to \dfrac{T}{L}\mathbf{v}$, $p \to p^* p$, где L — это характеристический размер рассматриваемой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, T — характеристическое время процесса, поведение жидкости в поровом пространстве $\Omega^f(t) \subset \Omega$ описывается динамическим уравнением Стокса

$$\alpha_\mu \triangle \mathbf{v} - \nabla p = 0, \tag{3.1}$$

для давления p и скорости $\mathbf{v}$ жидкости.

Возьмем уравнение неразрывности в обобщенной форме [37] как уравнение неразрывности обобщенного движения сплошной среды, содержащей твердый скелет $\Omega^s(t) \subset \Omega$, где $\mathbf{v} \equiv 0$, и поровую жидкость:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla\cdot(\varrho\,\chi\,\mathbf{v}) = 0, \tag{3.2}$$

где χ является характеристической функцией порового пространства: $\chi(\mathbf{x},t) = 1$ в $\Omega^f(t)$ и $\chi(\mathbf{x},t) = 0$ в $\Omega^s(t)$, $\Omega = \Omega^f(t) \cup \Gamma(t) \cup \Omega^s(t)$, $\Gamma(t) = \Omega^f(t) \cap \Omega^s(t)$.

Уравнение (3.2) интерпретируется в смысле распределений. Например, как интегральное тождество $\int\limits_{\Omega_T} \varrho\big(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \chi\,\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi\big)dxdt = 0$ для плотности $\varrho(\mathbf{x},t) = \chi(\mathbf{x},t)\varrho_f + \big(1-\chi(\mathbf{x},t)\big)\varrho_s$, которое соблюдается для любого гладкого $\varphi(\mathbf{x},t)$, обращающегося в нуль в S^+, S^-, $t=0$ и $t=T$.

В частности [37], $(v_n - d_n)\varrho_f = -d_n\varrho_s,\ \ \mathbf{x}\in\Gamma(t),\ \ t>0$, или

$$v_n = -d_n\,\delta,\ \ \mathbf{x}\in\Gamma(t),\ \ t>0, \tag{3.3}$$

где d_n — нормальная скорость $\Gamma(t)$ по направлению к внешней нормали $\Omega_f(t)$ $\mathbf{n}$, и $v_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ — это нормальная скорость жидкости.

Наконец, уравнение неразрывности в дифференциальной форме в поровом пространстве $\Omega_f(t)$ для $t>0$ принимает вид

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{3.4}$$

Концентрация c реагента определяется уравнением переноса

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla c = \alpha_c\triangle c, \tag{3.5}$$

и концентрации $c_1, c_2, \ldots, c_n$ продуктов химических реакций определяются уравнениями переноса

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla c_i = 0,\ \ i=1,\ldots,n \tag{3.6}$$

в $\Omega_f(t)$ для $t>0$.

В (3.1)–(3.6) $\alpha_\mu = \dfrac{\mu}{T\,Lg\,\rho^0}$, $\alpha_c = \dfrac{D\,T}{L^2}$, $p^* = L\,g\,\rho^0$, $\delta = \dfrac{(\varrho_s-\varrho_f)}{\varrho_f}$, μ — это вязкость жидкости, $\chi(\mathbf{x},t)$ — характеристическая функция порового пространства ($\chi=1$ в $\Omega_f(t)$ и $\chi=0$ в $\Omega_s(t)$), ϱ_s и ϱ_f являются безразмерными плотностями твердого скелета и поровой жидкости соответственно, коррелирующие со средней плотностью воды ρ^0, L — характеристический размер рассматриваемой области, T — характеристическое время процесса, g — значение ускорения свободного падения, ρ_c — плотность активного компонента и D — коэффициент диффузии.

Теперь мы попробуем сформулировать основные граничные условия для концентраций c, c_1, $c_2,\ldots,c_n$ на свободной границе. Для начала выведем эти условия для одной пространственной переменной.

А именно, пусть поровое пространство задано как $\Omega_f(t) = \{x : 0 < x < X(t)\}$ и $\Gamma(t) = \{x : x = X(t)\}$ будет свободной границей (see Fig. 3.1).

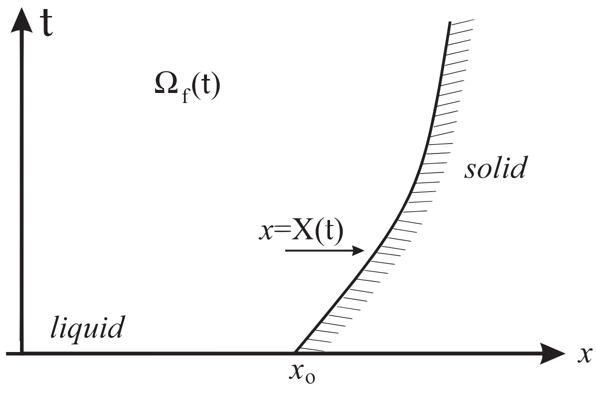

Рис. 3.1. Одномерная структура

Дано

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0,\ 0 < x < X(t), \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} + v\dfrac{\partial c}{\partial x} = \alpha_c\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2},\ 0 < x < X(t), \\ \alpha_c\dfrac{\partial c}{\partial x} - v(t)\,c = 0 \text{ при } x = 0, \\ \dfrac{\partial c_i}{\partial t} + v\dfrac{\partial c_i}{\partial x} = 0,\ 0 < x < X(t),\ c_i = 0 \text{ при } x=0,\ i=1,\ldots,n. \end{cases} \tag{3.7}$$

Выражением $M(t) = \int\limits_0^{X(t)} c(x,t)dx,\ M_i(t) = \int\limits_0^{X(t)} c_i(x,t)dx,\ i = 1,\ldots,n$ мы обозначаем суммарные количества концентрации реагента c и концентраций $c_i,\ i = 1,\ldots,n$, продуктов химических реакций в $\Omega_f(t)$.

Сначала мы рассчитываем скорость изменения этих значений во времени:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dX}{dt}\, c\big(X(t),t\big) + \int\limits_0^{X(t)} \frac{\partial c}{\partial t}(x,t)dx = \frac{dX}{dt}\, c\big(X(t),t\big) + \int\limits_0^{X(t)} \frac{\partial}{\partial x}\big(\alpha_c \frac{\partial c}{\partial x}(x,t) - v(t)\, c(x,t)\big)dx =$$
$$= \big(\frac{dX}{dt}(t) - v(t)\big)\, c(X(t),t) + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial x}(X(t),t),$$

$$\frac{dM_i}{dt} = \frac{dX}{dt} c_i\big(X(t),t\big) + \int\limits_0^{X(t)} \frac{\partial c_i}{\partial t}(x,t)dx = \frac{dX}{dt} c_i\big(X(t),t\big) - \int\limits_0^{X(t)} v(t)\frac{\partial c_i}{\partial x}(x,t)dx =$$
$$= \big(\frac{dX}{dt}(t) - v(t)\big)\, c_i(X(t),t) = \frac{\varrho_s}{\varrho_f}\frac{dX}{dt}\, c_i(X(t),t),\ i = 1,\ldots,n.$$

Для вычисления интегралов мы использовали интегрирование по частям, отношение (3.3) и граничные условия (3.7) при $x = 0$.

Следовательно,

$$\frac{dM}{dt} = (\frac{dX}{dt} - v)c + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial x},\ \frac{dM_i}{dt} = \frac{\varrho_s}{\varrho_f}\frac{dX}{dt}\, c_i,\ i = 1,\ldots,n,\ \text{в } x = X(t). \tag{3.8}$$

Последние отношения означают, что изменения в концентрациях продуктов химических реакций происходят только в $\Gamma(t)$. Величины $\dfrac{dM}{dt},\ \dfrac{dM_i}{dt},\ i = 1,\ldots,n$ называются *скоростями химических реакций* и также определяются по законам химической кинетики как:

$$\frac{dM}{dt} = -\beta\, c,\ \ \frac{dM_i}{dt} = \beta\,\beta_i\, c,\ i = 1,\ldots,n, \tag{3.9}$$

где $\beta,\ \beta_i,\ i = 1,\ldots,n$ — заданные константы.

С другой стороны, закон сохранения массы подразумевает

$$\varrho_s \frac{dX}{dt} - \varrho_c \frac{dM}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \varrho_i \frac{dM_i}{dt}, \tag{3.10}$$

где $\varrho_c,\ \varrho_1,\ldots,\varrho_n$ — это безразмерные плотности реагента и продуктов химических реакций.

Отношения (3.8)–(3.10) приводят к

$$\frac{dX}{dt}(t) = \beta\,\gamma\, c\big(X(t),t\big),\ c\big(X(t),t\big)\Big(c_i\big(X(t),t\big) - c_i^0\Big) = 0,\ i = 1,\ldots,n, \tag{3.11}$$

$$\big(\frac{dX}{dt}(t) + \beta - v(t)\big)\, c\big(X(t),t\big) + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial x}\big(X(t),t\big) = 0, \tag{3.12}$$

где $\varrho_s\,\gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \varrho_i\beta_i - \varrho_c,\ \ c_i^0 = \frac{\varrho_f\,\beta_i}{\gamma\,\varrho_s},\ \ i = 1,\ldots,n$. Возвращаясь к (3.4)–(3.6), мы заключаем, что в общем случае законы сохранения массы для концентраций на свободной границе имеют форму

$$(d_n + \beta - v_n)\, c + \alpha_c \frac{\partial c}{\partial n} = 0,\ \mathbf{x} \in \Gamma(t), \tag{3.13}$$

$$c\,(c_i - c_i^0) = 0,\ i = 1,\ldots,n,\ \ \mathbf{x} \in \Gamma(t), \tag{3.14}$$

$$d_n = \beta\,\gamma\, c,\ \ \mathbf{x} \in \Gamma(t), \tag{3.15}$$

где d_n — это нормальная скорость $\Gamma(t)$ по направлению к внешней нормали $\Omega_f(t)\ \mathbf{n}$, $v_n = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ — вязкость жидкости, а $\dfrac{\partial c}{\partial n} = \nabla c \cdot \mathbf{n}$ — нормальная производная c в $\Gamma(t)$.

Остается дополнить эти дифференциальные уравнения отсутствующими граничными условиями на известных границах $S^{\pm}$, S^0, $\partial\Omega = S^+ \cup S^- \cup S^0$ и на свободной границе $\Gamma(t)$, а также начальными условиями.

На свободной границе $\Gamma(t)$, касательная скорость поровых жидкостей обращается в нуль:

$$\mathbf{v} - v_n\,\mathbf{n} = 0. \tag{3.16}$$

На границах $S^{\pm}$, которые моделируют закачные скважины (S^+) и откачные скважины (S^-), мы предполагаем, что нормальное напряжение в жидкости пропорционально заданному давлению

$$\big(2\,\alpha_\mu\,\mathbb{D}(\mathbf{v}) - p\,\mathbb{I}\big)\cdot\mathbf{n} = -p^{\pm}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}, \tag{3.17}$$

где $\mathbb{I}$ — единичная матрица, $p^{\pm}(\mathbf{x},t)\mathbf{n}$ — нормальное давление и

$$\mathbb{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^*).$$

В закачных скважинах S^+ концентрации реагента и продуктов химических реакций заданы величинами:

$$c = c^+(\mathbf{x},t),\ \ c_i = 0,\ \ i = 1,\ldots,n. \tag{3.18}$$

В откачных скважинах S^-

$$\nabla c\cdot\mathbf{n} = 0, \tag{3.19}$$

а на границе проницаемости жидкости S^0

$$\mathbf{v} = 0,\ \ \nabla c\cdot\mathbf{n} = 0. \tag{3.20}$$

Задача дополняется начальными условиями

$$\Gamma(0) = \Gamma_0,\ \ c(\mathbf{x},0) = c_0(\mathbf{x}),\ \ c_i(\mathbf{x},0) = 0,\ \ i = 1,\ldots,n,\ \ \mathbf{x}\in\Omega_0. \tag{3.21}$$

Система дифференциальных уравнений (3.1), (3.4), (3.5), (3.6), дополненная граничными и начальными условиями (3.3), (3.13)–(3.21), дает желаемую математическую модель, описывающую выщелачивание на уровне пор.

Заметим, что задача (3.1), (3.3)–(3.5), (3.13), (3.15)–(3.18), (3.19)–(3.21) для скорости и давления жидкости, концентрации активной примеси и свободной границы независима от задачи (3.6), (3.14), (3.18), (3.21) для концентраций продуктов химических реакций.

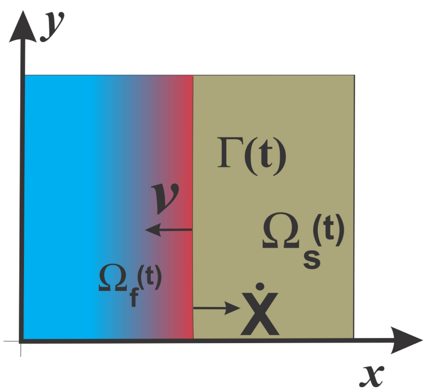

Рис. 3.2. Одномерное движение

3.1.2. Численные расчеты. В случае с одной пространственной переменной (см. рис. 3.2), дифференциальные уравнения задачи (3.1)–(3.3), (3.21) для несжимаемой жидкости в области $0 < x < X(t)$ для $t > 0$ принимают форму

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v\frac{\partial c}{\partial x} = \alpha_c\frac{\partial^2 c}{\partial x^2},$$

Граничные и начальные условия (3.13)–(3.21) преобразуются в

$$p(0,t)=p^{+}(t),\;\; c\,(0,t)=c^{+}(t),\;\; t>0,$$
$$\frac{dX}{dt}=\beta\,\gamma\,c,\;\; x=X(t),\;\; t>0,$$
$$(\frac{dX}{dt}+\beta-v)\,c+\alpha_c\frac{\partial c}{\partial x}=0,\;\; x=X(t),\; t>0,$$
$$v\,(t)=-\frac{dX}{dt}(t)\frac{(\rho_s-\rho_f)}{\rho_f},\;\; t>0,$$
$$X(0)=X_0,\;\; c(x,0)=c_0(x),\;\; 0<x<X_0.$$

Для $\gamma=1$, $D=2822$ мкм^2/с, $L=50$ мкм, $T=1$ с, и разных значений β и c^{+} можно рассчитать концентрацию c реагента на свободной границе и положение этой границы (см. рис. 3.3–3.6).

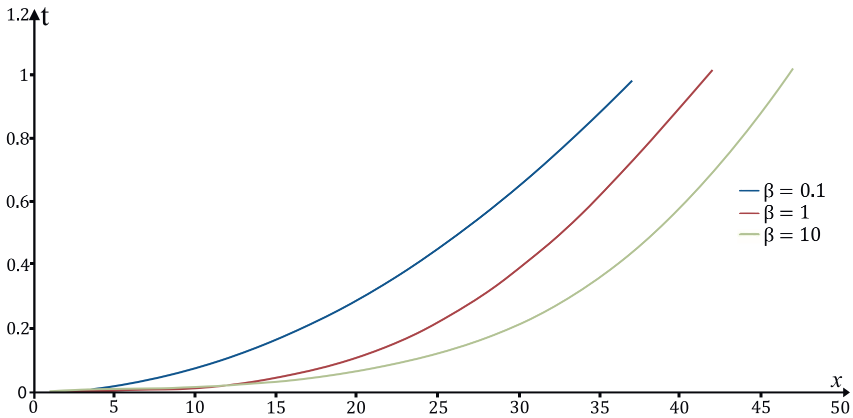

Рис. 3.3. Расположение свободной границы для разных β

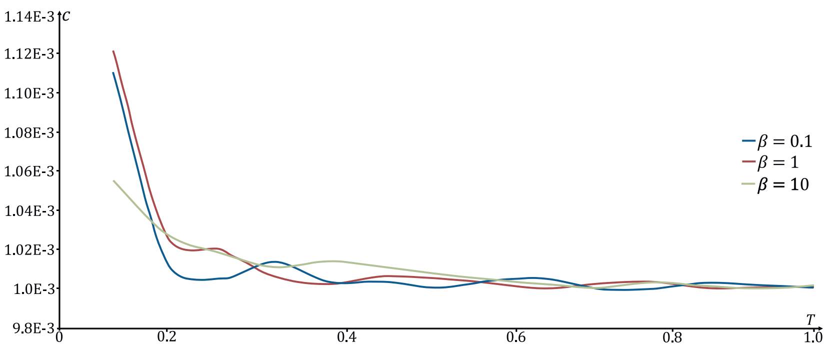

Рис. 3.4. Концентрация реагента на свободной границе для разных β

Для случая двух пространственных переменных система дифференциальных уравнений в области $\Omega=\{0<x_1<L,\,0<x_2<H\}$ (см. рис. 3.7) для скорости жидкости $\mathbf{v}$, давления жидкости p и концентрации c реагента имеет вид

$$\alpha_\mu\,\triangle\,\mathbf{v}-\nabla\,p=0,$$
$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0,$$
$$\frac{\partial c}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla c=\alpha_c\,\triangle\,c$$

Она дополняется граничными условиями на свободной границе $\Gamma(t)$ для $t>0$:

$$(d_n+\beta-v_n)\,c+\alpha_c\frac{\partial c}{\partial n}=0,\quad v_n=-d_n\,\delta,\quad \mathbf{v}-v_n\cdot\mathbf{n}=0,\quad d_n=\beta\,\gamma\,c,$$

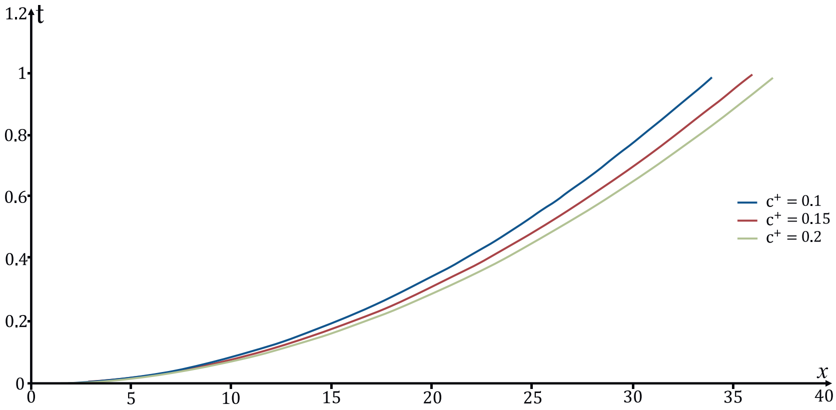

Рис. 3.5. Расположение свободной границы для разных c^+

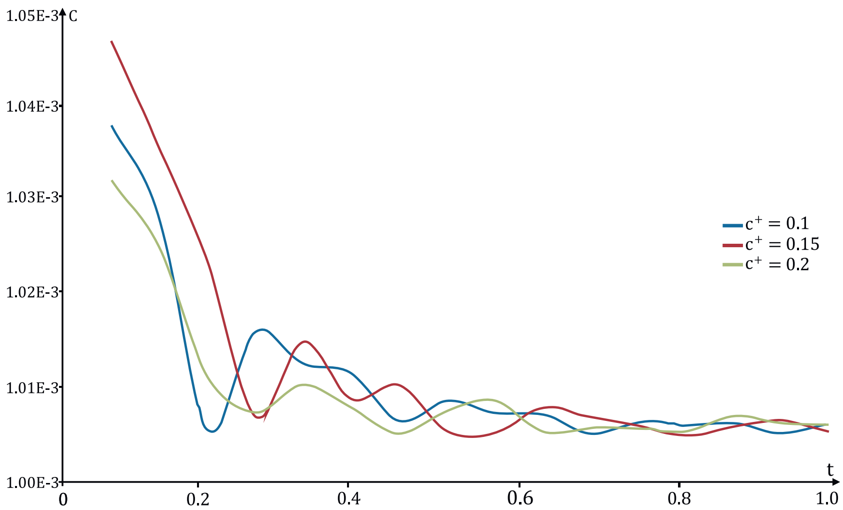

Рис. 3.6. Концентрация реагента на свободной границе для разных c^+

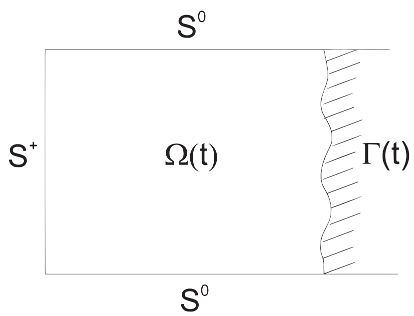

Рис. 3.7. Двумерная область

На границе S^+, которая моделирует скважину:

$$\left(2\,\alpha_\mu\,\mathbb{D}(\mathbf{v}) - p\,\mathbb{I}\right)\cdot\mathbf{n} = -p^+\mathbf{n}, \quad c = c^+.$$

На границе непроницаемости жидкости S^0

$$\mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial n} = 0.$$

Задача дополняется начальными условиями

$$\Gamma(0) = \Gamma_0,\ c(x,y,0) = c_0(x,y),\ (x,y)\in\Omega_0.$$

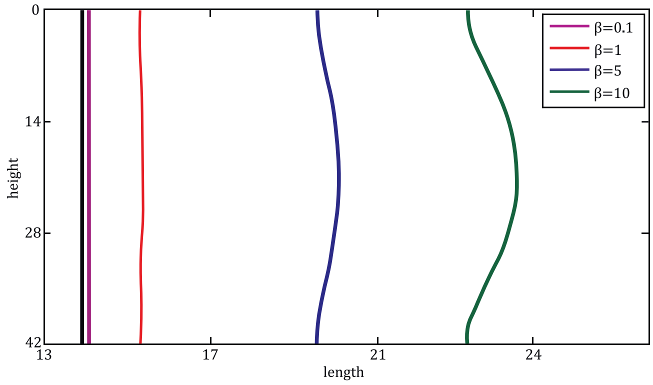

Рис. 3.8. Расположение свободной границы для разных β

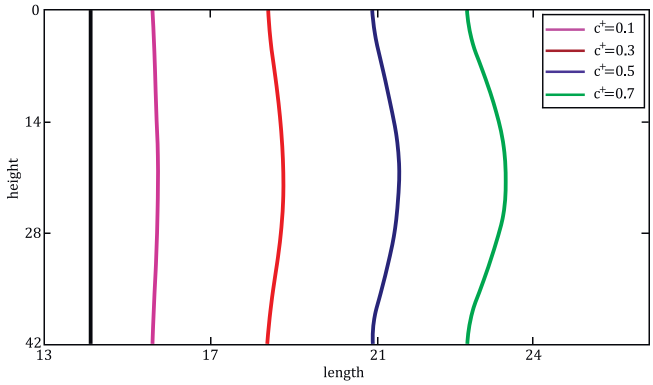

Рис. 3.9. Расположение свободной границы для разных c^+

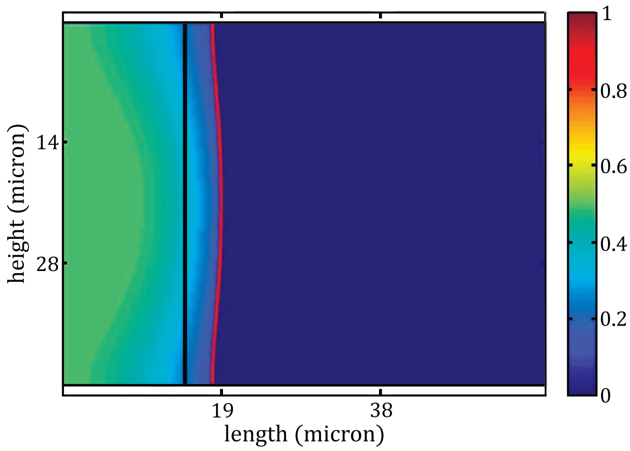

Рис. 3.10. Концентрация реагента в момент $t = 0{,}002$ с

Мы рассчитали положение свободной границы и концентрацию реагента (см. рис. 3.10-3.11) при $D = 2822$ мкм^2/с, $L = 56$ мкм, $H = 42$ мкм, $T = 0{,}01$ с, $\Gamma_0 = 14$ мкм, $c_0 = 0$, $p^+ = 1000$, $\gamma = 1$, и разных значений β и c^+ (см. рис. 3.8-3.9).

На рис. 3.8, черная полоса показывает начальное положение свободной границы, а цветные полосы показывают положение свободной границы в момент времени $t = 0{,}01$ с для разных $\beta = [0{,}1; 1; 5; 10]$.

На рис. 3.9 черная полоса показывает начальное положение свободной границы, а цветные полосы показывают положение свободной границы в момент времени $t = 0{,}01$ с для разных $c^+ = [0{,}1; 0{,}3; 0{,}5; 0{,}7]$.

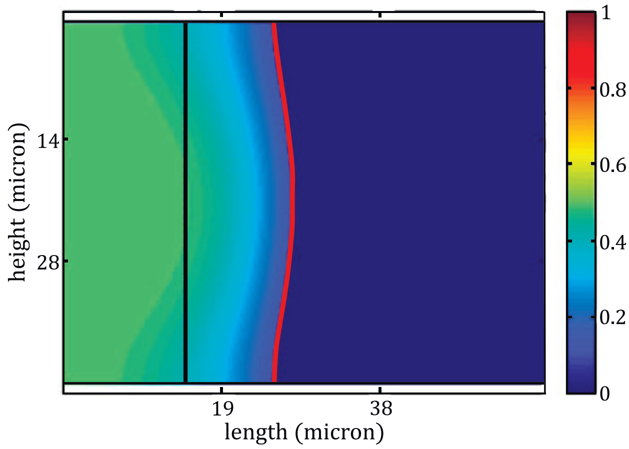

Рис. 3.11. Концентрация реагента в момент $t = 0{,}0052$ с

3.2. Макроскопическое описание.

3.2.1. Математическая модель как система интегральных тождеств. Пусть $\chi(\mathbf{x},t)$ будет характеристической функцией порового пространства: $\chi = 1$ в $\Omega^f(t)$ и $\chi = 0$ в $\Omega^s(t)$.

Сначала введем новое давление $q = p - p^0(\mathbf{x},t)$, где $p^0(\mathbf{x},t) = p^{\pm}(\mathbf{x},t)$ при $\mathbf{x} \in S^{\pm}$. При этом новом давлении динамическое уравнение (3.1) и граничное условие (3.9) принимают форму

$$\nabla \cdot \big(\alpha_\mu \, \mathbb{D}(\mathbf{v},x)\big) - \nabla q = \mathbf{f} \equiv \nabla p^0, \ \mathbf{x} \in \Omega^f(t), \ 0 < t < t_0, \tag{3.22}$$

$$\big(\alpha_\mu \, \mathbb{D}(\mathbf{v},x) - q\,\mathbb{I}\big) \cdot \mathbf{n} = 0, \ \mathbf{x} \in S^{\pm}, \ 0 < t < t_0. \tag{3.23}$$

Чтобы получить интегральное тождество для скорости, мы умножаем уравнение Стокса (3.22) на произвольную гладкую функцию $\varphi(\mathbf{x},t)$, обращающуюся в нуль в $\Gamma(t)$, и интегрируем в области $\Omega^f(t)$:

$$\int\limits_{\Omega^f(t)} \Big(\alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{v},x) : \mathbb{D}(\varphi,x) - q\,\nabla \cdot \varphi + \mathbf{f} \cdot \varphi\Big) dx = 0. \tag{3.24}$$

Здесь $\mathbb{D}(\mathbf{v},x) = \dfrac{1}{2}\big(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^*\big)$, $D_{ij}(\mathbf{v},x) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$, и $\mathbb{D}(\mathbf{v},x) : \mathbb{D}(\varphi,x) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} D_{ij}(\mathbf{v},x)\, D_{ji}(\varphi,x)$.

Уравнение неразрывности (3.2) и граничное условие (3.3) равносильны интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_{t_0}} \Big(\big(\chi\rho_f + (1-\chi)\rho_s\big)\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho_f\,\mathbf{v} \cdot \nabla\varphi\Big) dx dt = 0, \tag{3.25}$$

которое верно для произвольной гладкой функции φ, обращающейся в нуль на границах S^+ и S^- в моменты $t = 0$ и $t = t_0$. В (3.23) $\Omega_{t_0} = \Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^4$.

Уравнение диффузии (3.5) вместе с граничными условиями (3.13), (3.19) и начальным условием (3.21) равносильно интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega_{t_0}} \chi\,\Big((c + \frac{1}{\gamma})\frac{\partial \xi}{\partial t} - (\alpha_c\,\nabla c - \mathbf{v}\,c) \cdot \nabla\xi\Big) dx dt = -\int\limits_{\Omega} \chi_0(\mathbf{x})\,\big(c_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{\gamma}\big)\xi(\mathbf{x},0) dx, \tag{3.26}$$

которое верно для всех гладких функций ξ, равных нулю при $t = t_0$ и на границах $S^{\pm}$.

Наконец, уравнения переноса (3.6) вместе с граничными и начальными условиями (3.14), (3.21) равносильны интегральным тождествам

$$\int\limits_{\Omega_{t_0}} \chi\,\Big(c_i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \big(c_i - \frac{\rho_s\, c_i^0}{(\rho_s - \rho_f)}\big)\mathbf{v} \cdot \nabla\psi\Big) dx dt = 0, \ i = 1, \ldots, n \tag{3.27}$$

для произвольных гладких функций ψ, обращающихся в нуль на границе S^- и в момент $t = t_0$.

Для проверки этих тождеств стоит просто снова проинтегрировать (3.26) и (3.27), используя теорему Стокса в виде

$$\int\limits_{\Omega_{t_0}} \chi \Big(A\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{B}\cdot\nabla\psi) dxdt = \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Omega^f(t)} \Big(A\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{B}\cdot\nabla\psi\Big) dxdt =$$

$$= -\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Omega^f(t)} \psi\Big(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{B}\Big) dxdt + \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Gamma(t)} \psi\Big(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n} - A\,d_n\Big)\sin\omega\, d\sigma dt.$$

Здесь $A(\mathbf{x},0)=0$, $\mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль $\Omega^f(t)$ к $\Gamma(t)$ в $\mathbb{R}^3$, ω — угол между внешней единичной нормалью ν к $\Gamma_{t_0} = \bigcup\limits_{0<t<t_0} \Gamma(t)$ в $\mathbb{R}^4$ и осью времени t.

Например, чтобы вывести (3.27), мы умножаем дифференциальное уравнение (3.6) на произвольные гладкие функции ψ, обращающиеся в нуль на границе S^- и в момент $t=t_0$, интегрируем в области Ω_{t_0}, и используем теорему Стокса и граничные условия (3.3), (3.14) $\dfrac{\rho_s}{(\rho_s-\rho_f)} v_n = v_n - d_n$, и $c_i = c_i^0$, когда мы получаем интеграл в области $\Gamma(t)$.

Действительно,

$$0 = \int\limits_{\Omega_{t_0}} \chi\,\psi\,\big(\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla c_i\big) dxdt = \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Omega^f(t)} \psi\,\big(\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla c_i\big) dxdt =$$

$$= -\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Omega^f(t)} c_i\Big(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\psi\Big) dxdt + \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Gamma(t)} \psi\, c_i\big(v_n - d_n\big)\sin\omega\, d\sigma dt =$$

$$= -\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Omega^f(t)} c_i\Big(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\psi\Big) dxdt + \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Gamma(t)} \psi\,\frac{c_i^0\,\rho_s}{(\rho_s-\rho_f)}\, v_n \sin\omega\, d\sigma dt =$$

$$= -\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Omega^f(t)} c_i\Big(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\psi\Big) dxdt + \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Omega^f(t)} \frac{c_i^0\,\rho_s}{(\rho_s-\rho_f)}\,\mathbf{v}\cdot\nabla\psi dxdt -$$

$$-\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Omega^f(t)} \Big(c_i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \big(c_i - \frac{c_i^0\,\rho_s}{(\rho_s-\rho_f)}\big)\mathbf{v}\cdot\nabla\psi\Big) dxdt = \int\limits_{\Omega_{t_0}} \chi\,\Big(c_i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \big(c_i - \frac{c_i^0\,\rho_s}{(\rho_s-\rho_f)}\big)\mathbf{v}\cdot\nabla\psi\Big) dxdt.$$

Система интегральных тождеств (3.24)–(3.27), дополненная граничными и начальными условиями (3.15), (3.16), (3.18), (3.20) и (3.21), равносильна начальной постановке (3.1), (3.3)–(3.6), (3.13)–(3.21) задачи в виде системы дифференциальных уравнений с соответствующими граничными и начальными условиями.

3.2.2. Гомогенизация. Широко известно [33], что некоторые из пределов в интегральном тождестве (3.24) следуют из закона Дарси

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu_1}\,\mathbb{B}(\nabla q + \mathbf{f}), \tag{3.28}$$

где $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \langle \mathbf{V}\rangle_Y \equiv \int\limits_Y \mathbf{V}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})dy$ и $\mathbb{B}$ — это симметричная положительно определенная матрица.

В случае фильтрации жидкости закон Дарси обычно дополняется стандартным уравнением неразрывности $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$. Для нашего физического процесса подземного выщелачивания закон Дарси может быть взят в том же виде, в то время как уравнение неразрывности должно также рассматривать растворение горных пород через выщелачивание. Поэтому мы избрали более точный путь от точного описания на поровом уровне к макроскопическому описанию через гомогенизацию.

Все методы гомогенизации подразумевают присутствие малого параметра $\varepsilon > 0$. Грубо говоря, сама гомогенизация состоит из двух частей: изучение семейства решений математической задачи в зависимости от параметра ε и предельный переход при параметре ε, стремящемся к нулю.

Любая физическая задача включает в себя безразмерные параметры (критерии), которые как-то характеризуют задачу. Некоторые из них могут быть малы, некоторые — велики, но все они фиксированы и мы не можем их сделать переменными. С другой стороны, когда физическая задача уже сформулирована в виде математической задачи, мы можем рассмотреть семейство математических задач с малым переменным параметром и искать приблизительные математические модели (гомогенизация), когда этот параметр стремится к нулю.

Для всех физических задач в горных породах существует натуральный малый параметр, которым является отношением $\varepsilon_0 = \dfrac{l}{L}$, где l — средний размер поры. Следовательно, в нашей физической задаче, описывающей подземное выщелачивание, в качестве малого параметра мы рассматриваем именно этот критерий.

Далее, мы формулируем несколько предположений, которые позволяют нам получить математическое описание подземного выщелачивания с малым параметром, и находим некоторую гомогенизированую модель, описывающую эту процедуру на макроскопическом уровне.

Главное предположение — поведение безразмерных критериев

$$\alpha_\mu = \mu_1 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2), \ \alpha_c = D_0 + o(\varepsilon), \tag{3.29}$$

где μ_1 и D_0 — некоторые положительные константы.

Далее мы рассматриваем краевую задачу (3.24)–(3.27), (3.10)–(3.12) с данной функцией $\chi = \chi^\varepsilon(\mathbf{x},t) = \chi(\mathbf{x},t,\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \equiv \chi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, которая имеет период, равный 1, в $\mathbf{y} \in Y = (0,1)^3$, характеризующую сплошное поровое пространство $\Omega^f(t)$, и пусть $\mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x},t)$, $q^\varepsilon(\mathbf{x},t)$, $c^\varepsilon(\mathbf{x},t)$ и $c_i^\varepsilon(\mathbf{x},t)$, $i=1,\ldots,n$, будут решением данной задачи.

Для заданной функции $\chi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ задача (3.24)–(3.27), (3.10)–(3.12) имеет единственное решение $\mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x},t)$, $q^\varepsilon(\mathbf{x},t)$, $c^\varepsilon(\mathbf{x},t)$, и $c_i^\varepsilon(\mathbf{x},t)$, $i=1,\ldots,n$.

Теперь, используя общеизвестную формулу (см. [4]) для функции $\Phi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ с периодом 1 в $\mathbf{y}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Omega_{t_0}} \Phi(\mathbf{x},t,\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})dxdt = \int\limits_{\Omega_{t_0}} \Big(\int\limits_Y \Phi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})dy\Big)dxdt,$$

которая выражает представление двумасштабной сходимости (см. [24, 29, 30]), мы переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$ в интегральных тождествах (3.24)–(3.27).

Для этого мы выбираем некоторые подпоследовательности $\{\mathbf{v}^{\varepsilon_k}(\mathbf{x},t)\}$, $\{q^{\varepsilon_k}\})$, $\{c^{\varepsilon_k}(\mathbf{x},t)\}$ и $\{c_i^{\varepsilon_k}(\mathbf{x},t)\}$, $i=1,\ldots,n$, двумасштабно сходящиеся при $\varepsilon_k \to 0$ в следующем смысле:

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{\varepsilon_k}(\mathbf{x},t) = \mathbf{V}(\mathbf{x},t,\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon_k}) + o(\varepsilon_k), \ q^{\varepsilon_k}(\mathbf{x},t) = q(\mathbf{x},t) + o(\varepsilon_k), \\ c^{\varepsilon_k}(\mathbf{x},t) = c(\mathbf{x},t) + o(\varepsilon_k), \ c_i^{\varepsilon_k}(\mathbf{x},t) = c_i(\mathbf{x},t) + o(\varepsilon_k), \\ \nabla c^{\varepsilon_k}(\mathbf{x},t) = \nabla c(\mathbf{x},t) + \nabla_y C(\mathbf{x},t,\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon_k}) + o(\varepsilon_k). \end{cases} \tag{3.30}$$

Здесь $\mathbf{V}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, $C(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ — функции с периодом 1 в $\mathbf{y}$.

3.2.3. Математическая модель в виде дифференциальных уравнений. Для простоты, в последующих записях мы опустим индекс k.

Чтобы получить (3.28) мы в (3.24) выбираем пробные функции в виде $\varphi = \zeta(\mathbf{x},t)\varphi_0(\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$, где $\varphi_0(\mathbf{y})$ — это соленоидальная гладкая функция, обращающаяся в нуль в $\gamma(t)$.

Здесь $\gamma(t)$ — это граница между «жидкими» и «твердыми» частями, $Y_f = \{\mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = 1\}$ и $Y_s = \{\mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = 0\}$.

Далее, используя представления (3.29) и (3.30), получаем интегральное тождество

$$0 = \int\limits_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x},t)\chi^\varepsilon \left(\alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{v}^\varepsilon,x) : \mathbb{D}(\varphi_0,x)\right) + (\nabla q^\varepsilon + \mathbf{f}) \cdot \varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\big)dxdt + o(\varepsilon) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x},t)\chi^{\varepsilon} \Big(\varepsilon^2 \mu_1 \mathbb{D}\big(\mathbf{V}(\mathbf{x},t,\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}),x\big) : \mathbb{D}\big(\zeta(\mathbf{x},t)\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\big) + \mathbf{f}\cdot\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\Big)dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x},t)\chi^{\varepsilon}\,\nabla q\cdot\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})dxdt + o(\varepsilon) = I_1 + I_2 + o(\varepsilon).$$

Легко заметить, что $I_1 \to \int\limits_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x},t)\Big(\int\limits_{Y_f} \big(\mu_1 \mathbb{D}\big(\varphi_0(\mathbf{y}),y\big) : \mathbb{D}\big(\mathbf{V}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}),y\big) + \mathbf{f}\cdot\varphi_0(\mathbf{y})\big)dy\Big)dxdt$ и

$$I_2 = \int\limits_{Q_{t_0}} \zeta\,\chi^{\varepsilon}\,\nabla q\cdot\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})dxdt = \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Omega_f(t)} \zeta\,\nabla q\cdot\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})dxdt =$$

$$= -\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Omega_f(t)} q\,\nabla\zeta\cdot\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})dxdt = -\int\limits_{Q_{t_0}} \chi^{\varepsilon} q\,\nabla\zeta\cdot\varphi_0(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})dxdt \to -\int\limits_{\Omega_{t_0}} q\,\nabla\zeta\cdot\big(\int\limits_Y \chi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\varphi_0(\mathbf{y})dy\big)dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{t_0}} \zeta\,\nabla q\cdot\big(\int\limits_Y \chi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\varphi_0(\mathbf{y})dy\big)dxdt = \int\limits_{\Omega_{t_0}} \zeta\big(\int\limits_Y \chi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\nabla q\cdot\varphi_0(\mathbf{y})dy\big)dxdt$$

при $\varepsilon \to 0$.

Следовательно,

$$0 = \int\limits_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x},t)\Big(\int\limits_Y \chi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\Big(\mu_1 \mathbb{D}\big(\varphi_0(\mathbf{y}),y\big) : \mathbb{D}\big(\mathbf{V}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}),y\big) + (\nabla q + \mathbf{f})\cdot\varphi_0(\mathbf{y})\Big)dy\Big)dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x},t)\Big(\int\limits_{Y_f} \varphi_0(\mathbf{y})\Big(-\mu_1\nabla_y\cdot\mathbb{D}\big(\mathbf{V}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}),y\big) + \nabla q + \mathbf{f}\Big)dy\Big)dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x},t)\Big(\int\limits_{Y_f} \varphi_0(\mathbf{y})\Big(-\frac{\mu_1}{2}\triangle_y\mathbf{V}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) + \nabla q + \mathbf{f}\Big)dy\Big)dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{t_0}} \zeta(\mathbf{x},t)\Big(\int\limits_{Y_f} \varphi_0(\mathbf{y})\Big(-\frac{\mu_1}{2}\triangle_y\mathbf{V}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) + \nabla q + \mathbf{f}\Big)dy\Big)dxdt = 0.$$

Из-за произвольного выбора $\zeta(\mathbf{x},t)$ и $\varphi_0(\mathbf{y})$ последнее тождество приводит к следующему дифференциальному уравнению:

$$-\frac{\mu_1}{2}\triangle_y\mathbf{V} + \nabla_y Q + \nabla q + \mathbf{f} = 0 \tag{3.31}$$

в области Π_f. Член $\nabla_y Q(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ в (3.31) появляется из-за ортогональности соленоидальных векторов к градиентам скалярных функций.

Для решения этого уравнения нам нужны граничные условия для $\mathbf{V}$ на границе γ, разделяющей Y_f и его открытое дополнение Y_s в Π: $\gamma = \partial\Pi_f \bigcap \partial\Pi_s$. Нам не нужно граничное условие для $\mathbf{V}$ в другой части $\partial\Pi_f$ из-за периодичности $\mathbf{V}$ в $\mathbf{y}$.

Требуемое граничное условие

$$\mathbf{V} = 0,\ \mathbf{y}\in\gamma \tag{3.32}$$

следует из тождества $\mathbf{V}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\big(1-\chi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\big) = 0,\ \mathbf{y}\in Y$, которое, в свою очередь, является результатом двумасштабной сходимости в очевидном тождестве $\mathbf{v}^{\varepsilon}(\mathbf{x},t)\big(1-\chi(\mathbf{x},t,\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\big) = 0,\ \mathbf{x}\in Y$.

Чтобы извлечь микроскопическое уравнение неразрывности, мы переходим к пределу при $\varepsilon\to 0$ в интегральном тождестве (3.25) с пробными функциями $\varphi = \varepsilon\varphi_0(\mathbf{x},t)\varphi_1(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$, где φ_0 является произвольной гладкой функцией переменных $\mathbf{x}$ и t, равная нулю при $t=0$ и $t=T$, а $\varphi_1(\mathbf{y})$ — гладкая функция с периодом 1 в $\mathbf{y}$, обращающаяся в нуль в γ:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int\limits_{\Omega_{t_0}} \big((\chi^\varepsilon \rho_f + (1-\chi^\varepsilon)\rho_s)\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho_f\,\mathbf{v}^\varepsilon\cdot\nabla_x\varphi\big)dxdt = \\
&= \int\limits_{\Omega_{t_0}} \varphi_0(\mathbf{x},t)\rho_f\,\mathbf{V}(\mathbf{x},t,\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\cdot\nabla_y\varphi_1 dxdt + o(\varepsilon) \to \int\limits_{\Omega_{t_0}} \varphi_0(\mathbf{x},t)\big(\int\limits_{Y} \rho_f\,\mathbf{V}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\cdot\nabla_y\varphi_1 dy\big)dxdt = 0.
\end{aligned}
$$

Произвольный выбор функций φ_0 и φ_1 приводит к микроскопическому уравнению неразрывности

$$\nabla\cdot\mathbf{V} = 0 \tag{3.33}$$

в Y_f.

3.3. Закон Дарси. Пусть $\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \langle\mathbf{V}\rangle = \int\limits_Y \mathbf{V}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},\tau)dy$, и $\frac{2}{\mu_1}(\nabla q + \mathbf{f}) = \sum\limits_{i=1}^{3} z_i(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_i$, где $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ является стандартным прямоугольным декартовым базисом в $\mathbb{R}^3$.

Для нахождения представления (3.28) скорости жидкости $\mathbf{v}$ с точки зрения микроструктуры мы решаем задачу (3.31), (3.32), (3.33), используя разложение $\mathbf{V}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},\tau) = \sum\limits_{i=1}^{3} \mathbf{V}^i(\mathbf{y})\,z_i(\mathbf{x},t)$. Функции $\mathbf{V}^i(\mathbf{y})$ и $Q^i(\mathbf{y})$ при $i = 1,2,3$ удовлетворяют в Y_f следующим периодическим краевым задачам

$$-\triangle_y\,\mathbf{V}^i + \nabla_y\,Q^i + \mathbf{e}_i = 0,\ \mathbf{y}\in Y_f, \tag{3.34}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V}^i = 0,\ \mathbf{y}\in Y_f, \tag{3.35}$$

$$\mathbf{V}^i = 0,\ \mathbf{y}\in\gamma. \tag{3.36}$$

Следовательно,

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{V}^i(\mathbf{y})\,z_i = -\frac{2}{\mu_1}\big(\sum_{i=1}^{3}\mathbf{V}^i\otimes\mathbf{e}_i\big)(\nabla q + \mathbf{f}). \tag{3.37}$$

Здесь $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ — матрица второго порядка, которая определена как $(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$. Возвращаясь к (3.28), мы получаем

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3}\langle\mathbf{V}^i\rangle_Y\,z_i = -\frac{1}{\mu_1}\mathbb{B}\cdot(\nabla q + \mathbf{f}), \tag{3.38}$$

где

$$\mathbb{B} = 2\sum_{i=1}^{3}\langle\mathbf{V}^i\rangle_Y\otimes\mathbf{e}_i. \tag{3.39}$$

Предел при $\varepsilon\to 0$ в (3.25) с пробной функцией $\varphi(\mathbf{x},t)$, обращающейся в нуль на границах S^+ и S^-, а также при $t=0$ и $t=t_0$, приводит к макроскопическому уравнению неразрывности:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int\limits_{\Omega_{t_0}} \Big(\big(\chi^\varepsilon\rho_f + (1-\chi^\varepsilon)\rho_s\big)\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho_f\,\mathbf{v}^\varepsilon\cdot\nabla\varphi\Big)dxdt = \\
&= \int\limits_{\Omega_{t_0}} \Big(\big(\chi(\mathbf{x},t,\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\rho_f + \big(1-\chi(\mathbf{x},t,\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\big)\rho_s\big)\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho_f\,\mathbf{V}(\mathbf{x},t,\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\cdot\nabla\varphi\Big)dxdt + o(\varepsilon) \to \\
&\to \int\limits_{\Omega_{t_0}} \Big(m(\mathbf{x},t)(\rho_f-\rho_s) + \rho_s\Big)\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \rho_f\,\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\cdot\nabla\varphi\Big)dxdt = 0,
\end{aligned}
$$

где $m(\mathbf{x},t) = \int\limits_Y \chi(\mathbf{x},t,\mathbf{y})dy$ — пористость порового пространства $\Omega^f(t)$.

В силу произвольности выбора $\varphi(\mathbf{x},t)$ последнее тождество равносильно желаемому дифференциальному уравнению в области Ω_{t_0}:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\rho_f}{\rho_s-\rho_f}\,\nabla\cdot\mathbf{v}. \tag{3.40}$$

Как и прежде, мы просто переходим к пределу при $\varepsilon \to 0$ в соответствующем интегральном тождестве (3.26) для концентрации кислоты с произвольными гладкими функциями $\xi(\mathbf{x}, t)$, равными нулю при $t = t_0$ и на границах $S^{\pm}$:

$$-\int\limits_{\Omega} \chi_0(\mathbf{x}) \big(c_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{\gamma}\big)\xi_0(\mathbf{x}, 0)dx = \int\limits_{\Omega_{t_0}} \chi^{\varepsilon} \big((c^{\varepsilon} + \frac{1}{\gamma})\frac{\partial \xi}{\partial t} - (\alpha_c \nabla c^{\varepsilon} - \mathbf{v}^{\varepsilon} c^{\varepsilon}) \cdot \nabla\xi\big)dxdt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{t_0}} \chi(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \big((c + \beta)\frac{\partial \xi}{\partial t} - \alpha_c\big(\nabla c + \nabla_y C(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\big) - c\,\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \cdot \nabla\xi\big)dxdt + o(\varepsilon) \to$$

$$\to \int\limits_{\Omega_{t_0}} m(\mathbf{x}, t)\big((c + \frac{1}{\gamma})\frac{\partial \xi}{\partial t} - (\alpha_c \mathbb{A} \cdot \nabla c - c\,\mathbf{v}) \cdot \nabla\xi)\big)dxdt.$$

Таким образом, $\dfrac{\partial}{\partial t}\big(m(c + \frac{1}{\gamma})\big) = \nabla \cdot (\alpha_c \mathbb{A} \cdot \nabla c - c\,\mathbf{v})$, где

$$\mathbb{A}(\mathbf{x}, t) = m(\mathbf{x}, t)\,\mathbb{I} + \sum_{i=1}^{3} \langle \nabla_y C^{(i)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})\rangle_{Y_f} \otimes \mathbf{e}_i. \tag{3.41}$$

Функции $C^{(i)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ определены как решения периодической краевой задачи (см. [24])

$$\nabla_y \cdot \Big(\chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})\big(\nabla_y C^{(i)}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \mathbf{e}_i\big)\Big) = 0, \ \ \mathbf{y} \in Y. \tag{3.42}$$

Для получения макроскопических уравнений переноса для концентраций продуктов химических реакций мы используем представления (3.30) и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$ в соответствующих интегральных тождествах для концентраций продуктов химических реакций

$$I_i^{\varepsilon} \equiv \int\limits_{\Omega_{t_0}} \chi^{\varepsilon} \Big(c_i^{\varepsilon}\frac{\partial \psi}{\partial t} + \big(c_i^{\varepsilon} - \frac{\rho_s\, c_i^0}{(\rho_s - \rho_f)}\big)\mathbf{v}^{\varepsilon} \cdot \nabla\psi\Big)dxdt = 0, \ i = 1, \ldots, n,$$

которые верны для произвольных гладких функций ψ, обращающихся в нуль на границе S^- и при $t = t_0$.

Дано

$$I_i^{\varepsilon} = \int\limits_{\Omega_{t_0}} \Big(c_i\chi(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\,\frac{\partial \psi}{\partial t} + \big(c_i - \frac{\rho_s\, c_i^0}{(\rho_s - \rho_f)}\big)\mathbf{V}(\mathbf{x}, t, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}) \cdot \nabla\psi\Big)dxdt + o(\varepsilon) \to$$

$$\to \int\limits_{\Omega_{t_0}} \Big(m\, c_i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \big(c_i - \frac{\rho_s\, c_i^0}{(\rho_s - \rho_f)}\big)\mathbf{v} \cdot \nabla\psi\Big)dxdt = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_{t_0}} \psi\,\Big(\frac{\partial}{\partial t}(m\, c_i) + \nabla \cdot \Big(\big(c_i - \frac{\rho_s\, c_i^0}{(\rho_s - \rho_f)}\big)\mathbf{v}\Big)\Big)dxdt = 0,$$

или $\dfrac{\partial}{\partial t}(m\, c_i) + \nabla \cdot \Big(\big(c_i - \dfrac{\rho_s\, c_i^0}{(\rho_s - \rho_f)}\big)\mathbf{v}\Big) = 0$. Используя уравнение неразрывности (3.40), мы получаем уравнения переноса $m\,\dfrac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c_i = \dfrac{\rho_s}{\rho_f}(c_i - c_i^0)$ для концентраций продуктов химических реакций c_i при $i = 1, \ldots, n$ в области Ω_{t_0}.

3.3.1. Начально-краевая задача, описывающая подземное выщелачивание на макроскопическом уровне. Собрав все эти соображения вместе, мы получаем итоговую систему дифференциальных уравнений, описывающую рассматриваемый физический процесс на макроскопическом уровне.

Это система состоит из *Закона Дарси*

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu_1}\,\mathbb{B}(\nabla q + \mathbf{f}) \tag{3.43}$$

и *неоднородного уравнения неразрывности*

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \delta\,\frac{\partial m}{\partial t},\quad \delta = \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f}, \tag{3.44}$$

для скорости и давления жидкости, *уравнения диффузии-конвекции*

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(m(c + \frac{1}{\gamma})\big) = \nabla \cdot (\alpha_c\,\mathbb{A} \cdot \nabla\,c - c\,\mathbf{v}) \tag{3.45}$$

для кислоты, и *уравнений переноса*

$$m\,\frac{\partial c_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla, c_i = \frac{\rho_s}{\rho_f}(c_i - c_i^0) \tag{3.46}$$

для концентраций продуктов химических реакций c_i, $i = 1, \ldots, n$, в области Ω_{t_0}.

Задача дополняется следующими граничными и начальными условиями.

В откачных скважинах $S^+ \subset \partial\Omega$ при $0 < t < t_0$ давление жидкости и концентрации кислоты и продуктов химических реакций являются известными функциями

$$p = p^+(\mathbf{x}, t), \tag{3.47}$$

$$c_i = 0,\ i = 1, \ldots, n,\ c = c^+(\mathbf{x}, t). \tag{3.48}$$

В закачных скважинах $S^- \subset \partial\Omega$ для $0 < t < t_0$

$$p = p^-(\mathbf{x}, t), \tag{3.49}$$

$$c = c^+(\mathbf{x}, t). \tag{3.50}$$

На границе непроницаемости $S^0 \subset \partial\Omega$ для $0 < t < t_0$

$$\nabla c \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{3.51}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{3.52}$$

Матрица $\mathbb{B}$ в (3.43) определена в (3.34)–(3.39), и матрица $\mathbb{A}$ определена в (3.41)-(3.42).

В свою очередь, определения m, $\mathbb{B}$ и $\mathbb{A}$ содержат функцию $\chi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, и ее поведение при $0 < t < t_0$ зависит от уравнения

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \beta\,\gamma\,c(\mathbf{x}, t)\,|\nabla_y \chi| = 0 \tag{3.53}$$

в области Y.

В начальный момент времени

$$c(\mathbf{x}, 0) = c_0(\mathbf{x}),\ c_i(\mathbf{x}, 0) = 0,\ \mathbf{x} \in \Omega,\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.54}$$

$$\chi(\mathbf{x}, 0, \mathbf{y}) = \chi_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}),\ \mathbf{x} \in \Omega,\ \mathbf{y} \in Y. \tag{3.55}$$

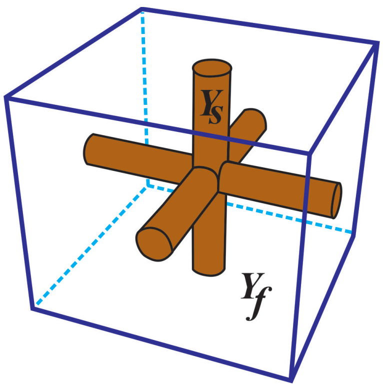

Рис. 3.12. Структура порового пространства

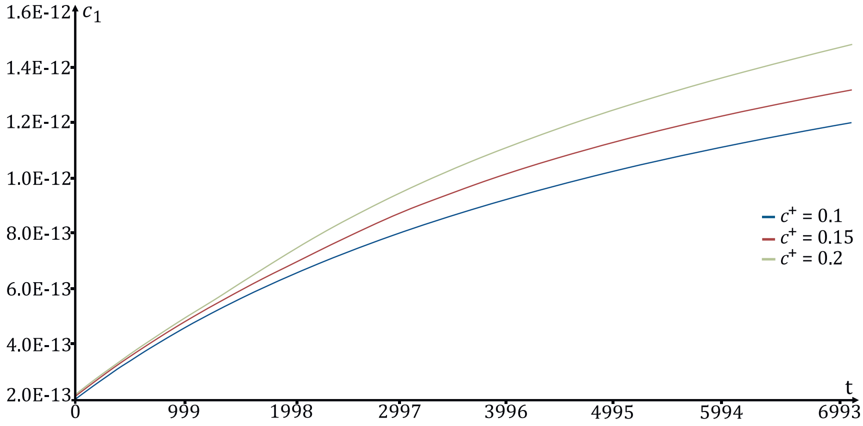

Рис. 3.13. Макроскопическая модель: концентрация продукта химической реакции в откачных скважинах для разных c^+

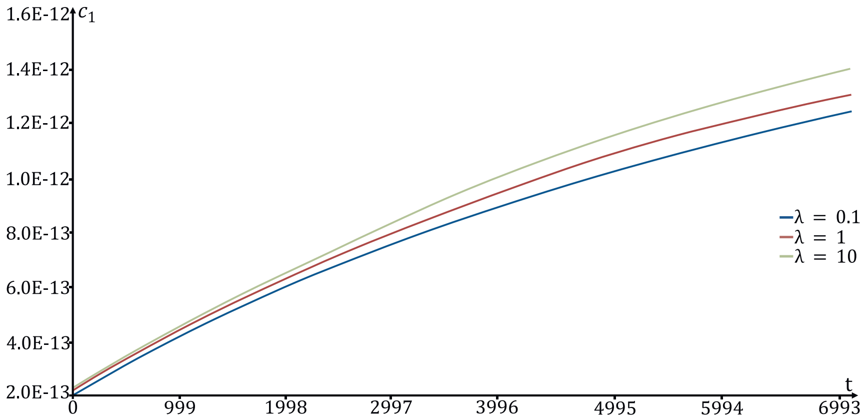

Рис. 3.14. Макроскопическая модель: концентрация продукта химической реакции в откачных скважинах для разных λ

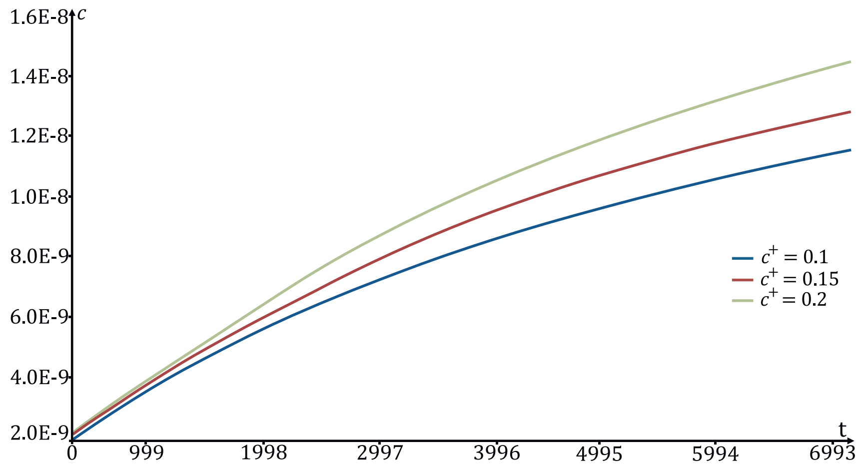

Рис. 3.15. Макроскопическая модель: концентрация кислоты в откачных скважинах для разных c^+

3.3.2. Численные расчеты. Для случая одной пространственной переменной пусть поровое пространство будет определено симметричными цилиндрами с радиусом r (см. рис. 3.12), $\Omega = \{0 < x < 1\}$, $S^+ = \{x = 0\}$, и $S^- = \{x = 1\}$. Симметрия порового пространства Y_f подразумевает диагональную форму матриц $\mathbb{A}$ и $\mathbb{D}$: $\mathbb{A} = \mathrm{diag}(k)$, $\mathbb{D} = \mathrm{diag}(D_0)$. Величины k и D_0 почти не изменяются для малых вариаций m, и мы можем предположить, что они являются константами. Из

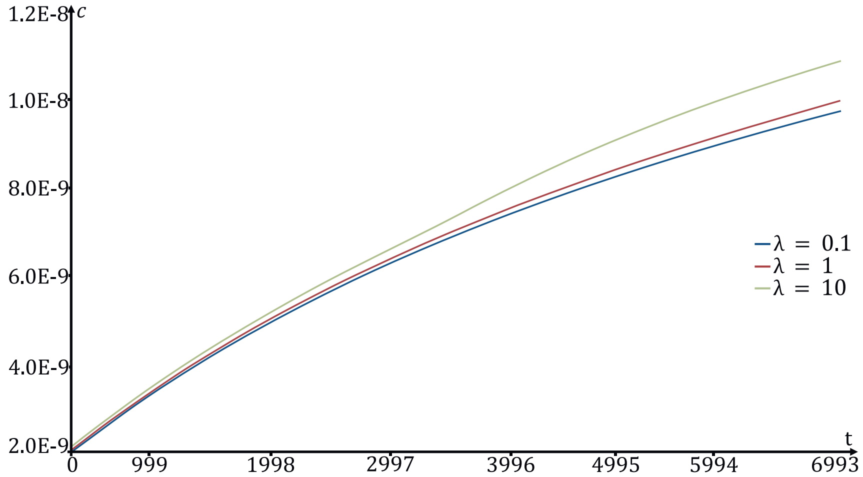

Рис. 3.16. Макроскопическая модель: концентрация кислоты в откачных скважинах для разных λ

этих предположений следует, что пористость m порового пространства — это известная функция радиуса r: $m = F(r) = 1-(1-m_0)\Big(\dfrac{r}{r_0}\Big)^2$, где m_0 и r_0 — заданные начальные значения пористости m и радиуса r, а система (3.43)–(3.55) принимает форму:

$$v = -\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial x},$$

для k и μ_1 в качестве констант,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \delta\,\frac{\partial m}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(m\,(c+\frac{1}{\gamma})\big) = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_c\,\frac{\partial c}{\partial x} - v\,c),$$

$$m\,\frac{\partial c_i}{\partial t} + v\,\frac{\partial c_i}{\partial x} = -\big(\delta(c_i - c_i^0) + c_i\big)\frac{\partial m}{\partial t},$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \lambda\,c(x,t),$$

$$p(0,t) = p^+(t),\;\; p(1,t) = p^-(t),\;\; t>0,$$

$$c_i(0,t) = 0,\; i=1,\dots,n,\; c(0,t) = c^+(t),\; \frac{\partial c}{\partial x}(1,t) = 0,$$

$$\begin{cases} c(x,0) = c_0(x),\; c_i(x,0) = 0,\; i=1,\dots,n,\; r(x,0) = r_0(x), \\ m(x,0) = m_0(x) \approx \pi\,r_0^2(x) + 2\big(r_0^2(x) - 2\,\pi\,r_0^3(x)\big). \end{cases}$$

При $\delta = 1{,}5$, $\gamma = 1$, $c_1^0 = 0{,}001$, $\alpha_c = 0{,}0004$, $T = 6993$ с, $p^+ = 1000$, $p^- = 0$, $c_0 = 0$, $r_0 = 2^{-1}$ мы рассчитываем концентрацию c_1 первого продукта химических реакций в скважинах откачки для разных значений $c^+ = 0{,}1$; $0{,}15$; $0{,}2$ с фиксированной $\lambda = 1$ и для разных значений $\lambda = 0{,}1$; 1; 10 с фиксированным $c^+ = 0{,}2$ (см. рис. 3.13–3.16).

Для случая двух пространственных переменных и системы дифференциальных уравнений в области $\Omega = \{0 < x_1 < L,\, 0 < x_2 < H\}$ (см. рис. 3.7) мы изучили начально-краевую задачу, описывающую подземное выщелачивание на макроскопическом уровне (3.43)–(3.55), и при $\delta = 1{,}5$, $\gamma = 1$, $c_1^0 = 0{,}01$, $\alpha_c = 0{,}004$, $p^+ = 1000$, $p^- = 0$, $c_0 = 0$ мы рассчитали концентрацию c_1 первого продукта химических реакций в откачных скважинах в разные моменты времени с фиксированным $c^+ = 1$ (см. рис. 3.17-3.18).

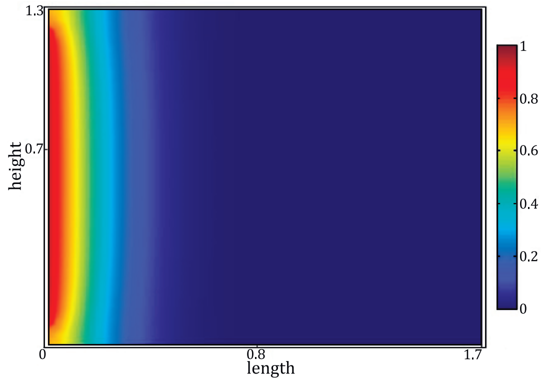

Рис. 3.17. Концентрация реагента при $t = 360$ дней.

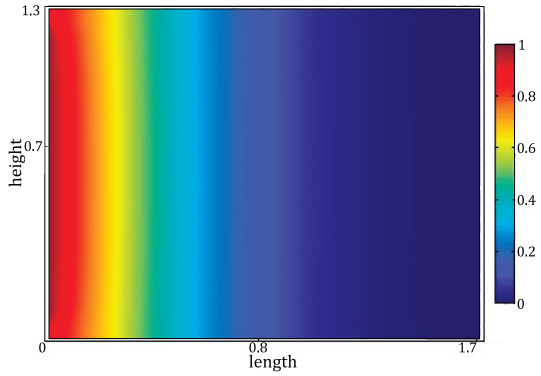

Рис. 3.18. Концентрация реагента при $t = 720$ дней.

4. Динамика трещин в подземных горных породах

4.1. Накопление энергии в трещине: микроскопический (поровый) уровень. Пусть Ω^0 — ограниченная область с непрерывной границей в C^2 $S = \partial\Omega^0$ и $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega^0}$. Предположим, что Ω — пороупругая среда, состоящая из твердого скелета Ω^s и порового пространства Ω^f, а Ω^0 — трещина. Трещина Ω^0 и поровое пространство Ω^f заполнены одной и той же жидкостью.

В безразмерных переменных $\mathbf{x} \to \dfrac{\mathbf{x}}{L}$, $\mathbf{w} \to \dfrac{\mathbf{w}}{L}$, $t \to \dfrac{t}{\tau}$, $\rho \to \dfrac{\rho}{\rho^0}$, эволюция смещений $\mathbf{w}$, давления p, и температуры ϑ твердого скелета определяется в Ω^s для $t > 0$ неизотермическими уравнениями Ламе [24]

$$\alpha_\tau \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_s, \tag{4.1}$$

$$\alpha_{p,s} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \triangle \vartheta. \tag{4.3}$$

Скорость $\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$, давление p, и температура ϑ жидкости удовлетворяют системе Стокса для вязкой сжимаемой терможидкости в Ω^f и Ω^0 при $t > 0$

$$\alpha_\tau \varrho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}_f, \tag{4.4}$$

$$\alpha_{p,f} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \triangle \vartheta. \tag{4.6}$$

На границах $S_f \subset S$ и Γ между Ω^s и Ω^0, и Ω^s и Ω^f соответственно, смещения (скорости), нормальные напряжения, температура, и тепловые потоки все непрерывны:

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^s}} \mathbf{w}(\mathbf{x},t) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^0}} \mathbf{w}(\mathbf{x},t), \tag{4.7}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^s}} \mathbb{P}_s(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n} = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^0}} \mathbb{P}_f(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}, \tag{4.8}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^s}} \mathbf{w}(\mathbf{x},t) = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^f}} \mathbf{w}(\mathbf{x},t), \tag{4.9}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^s}} \mathbb{P}_s(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n} = \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0\\ \mathbf{x}\in\Omega^f}} \mathbb{P}_f(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{n}. \tag{4.10}$$

Поверхность $S\backslash S_f$ является границей между жидкостью в Ω^f и жидкостью в Ω^0, на которой не требуется граничных условий, поскольку это одна и та же жидкость.

Задача дополняется начальными условиями

$$\mathbf{w}(\mathbf{x},0) = \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},0) = 0,\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3, \tag{4.11}$$

$$\vartheta(\mathbf{x},0) = \vartheta^0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3. \tag{4.12}$$

В (4.7)–(4.10) $\mathbf{n}$ — нормальный вектор к границе Γ, $\mathbb{P}_f = \alpha_\mu\,\mathbb{D}(x,\mathbf{v}) - (p+\alpha\,\vartheta)\mathbb{I}$, $\mathbb{P}_s = \alpha_\lambda\,\mathbb{D}(x,\mathbf{w}) - (p+\alpha\,\vartheta)\mathbb{I}$, $\mathbb{D}(x,\mathbf{u}) = \dfrac{1}{2}\big(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^*\big)$, $\alpha_\tau = \dfrac{L}{g\tau^2}$, $\alpha_\mu = \dfrac{2\mu}{\tau Lg\,\rho^0}$, $\alpha_\lambda = \dfrac{2\lambda}{Lg\,\rho^0}$, $\alpha_{p,f} = \dfrac{Lg}{\varrho_f\, c_f^2}$, $\alpha_{p,s} = \dfrac{Lg}{\varrho_s\, c_s^2}$, L — характеристический размер рассматриваемой физической области, τ — характеристическое время протекания физического процесса, ρ^0 — средняя плотность воды, g — ускорение свободного падения, ϱ_f и ϱ_s — средние безразмерные плотности жидкости в порах и твердом скелете соответственно, коррелирующие со средней плотностью воды ρ^0, $\mu = const$ — вязкость жидкости, $\lambda = const$ — коэффициент Ламе для твердого скелета, а $\mathbb{I}$ — единичный тензор. Положительные константы c_f и c_s являются скоростями распространения сжимающих звуковых волн в поровой жидкости и твердом скелете соответственно [24].

Функция ϑ_0 — бесконечно гладкая:

$$\vartheta_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \tag{4.13}$$

и имеет конечный носитель.

Безразмерные критерии α_τ, α_μ, α_λ разные для разных физических процессов. Некоторые из них могут быть малы, другие могут быть велики. Накопление энергии в трещинах со временем является долгосрочным процессом. Следовательно, α_τ и α_μ достаточно малы, в то время как α_λ близка к единице.

Очевидно, что математическая модель физического процесса должна быть как можно более проста, но в любом случае мы должны описать все его основные особенности. Вот почему мы используем гомогенизацию для упрощения точных математических моделей на уровне пор. Заметим, что любой дополнительный член математической модели на уровне пор создает дополнительные технические проблемы при гомогенизации. Следовательно, мы должны провести все упрощения до гомогенизации.

Для совместного движения упругого скелета и жидкости в порах в случае, когда скорость акустических волн настолько велика, что они не играют значительной роли, часто пренебрегают инерционным членом $\alpha_\tau\dfrac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}$ в динамическом уравнении (4.1) для упругого скелета:

$$\nabla\cdot\mathbb{P}_s = 0,\ \mathbf{x}\in\Omega^s,\ t>0. \tag{4.14}$$

Вторым значительным упрощением является допущение

$$\alpha_\mu = \mu\,\varepsilon^2, \tag{4.15}$$

где $\varepsilon = \dfrac{l}{L}$ является безразмерным размером поры и l — средний размер пор.

Это предположение для неподвижной системы Стокса приводит к известному закону Дарси для движения жидкости в порах абсолютно жесткого тела.

Но если мы рассмотрим совместное движение вязкой сжимаемой жидкости в порах и в резервуаре, определяемое неподвижной системой Стокса в этом предположении, то после гомогенизации мы получим систему дифференциальных уравнений

$$\nabla p+\mathbf{f}=0,\ \ \alpha_{p,f}\,\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{v}=0$$

в резервуаре, которая не определяет движение внутри трещины.

Следовательно, соединив подвижные уравнения Ламе и систему Стокса (4.1) и (4.4), мы получим наилучший метод описания совместного движения упругого скелета, жидкости в порах и жидкости в трещине.

Для оценки смещений умножим уравнение (4.1) на $\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ и проинтегрируем результат умножения в области Ω^s. Далее, умножим уравнение (4.4) на $\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ и, проинтегрировав результат умножения в областях Ω^f и Ω^0 и просуммировав все, получим следующие выражения после интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_\tau}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Big(\big((1-\chi_0)\chi+\chi_0\big)\varrho_f+(1-\chi)\varrho_s\Big)|\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)|^2dx+\\
&\qquad+\frac{\alpha_\lambda}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbb{R}^3}(1-\chi_0)(1-\chi)\mathbb{D}\big(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},t)\big):\mathbb{D}\big(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},t)\big)dx+\\
&\qquad+\alpha_\mu\int\limits_{\mathbb{R}^3}\big((1-\chi_0)\chi^\varepsilon+\chi_0\big)\,\mathbb{D}\big(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\big):\mathbb{D}\big(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\big)dx-\\
&-\int\limits_{\Omega^s}p(\mathbf{x},t)\,\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)dx-\int\limits_{\Omega^f\cup\Omega^0}p(\mathbf{x},t)\,\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)dx=\alpha\int\limits_{\mathbb{R}^3}\vartheta(\mathbf{x},t)\,\nabla\cdot\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)dx.
\end{aligned}$$

Интегралы в области Γ обращаются в нуль из-за граничных условий (4.7)–(4.10).

Далее, мы сокращаем $\nabla\cdot\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ в трех последних членах с помощью уравнений (4.2) и (4.5) и интегрируем результат на отрезке $(0,t_0)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\alpha_\tau}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\big(\chi\,\varrho_f+(1-\chi)\varrho_s\big)\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)|^2dx+\frac{\alpha_{p,s}}{4}\int\limits_{\Omega^s}|p(\mathbf{x},t)|^2dx+\frac{\alpha_{p,f}}{4}\int\limits_{\Omega^f\cup\Omega^0}|p(\mathbf{x},t)|^2dx+\\
&+\frac{1}{4\alpha_{p,s}}\int\limits_{\Omega^s}|\nabla\cdot\mathbf{w}(\mathbf{x},t)|^2dx+\frac{1}{4\alpha_{p,f}}\int\limits_{\Omega^f\cup\Omega^0}|\nabla\cdot\mathbf{w}(\mathbf{x},t)|^2dx+\frac{\alpha_\lambda}{2}\int\limits_{\Omega^s}\mathbb{D}\big(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},t)\big):\mathbb{D}\big(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},t)\big)dx+\\
&\qquad+\alpha_\mu\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\Omega^f\cup\Omega^0}\mathbb{D}\big(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\big):\mathbb{D}\big(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\big)dxdt=\\
&\qquad=\alpha\int\limits_{\mathbb{R}^3}\vartheta(\mathbf{x},t)\,\nabla\cdot\mathbf{w}(\mathbf{x},t)dx-\alpha\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}(\mathbf{x},t)\,\nabla\cdot\mathbf{w}(\mathbf{x},t)dxdt.
\end{aligned}\tag{4.16}$$

Температура ϑ и ее производная от времени $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}$ ограничены и стремятся к нулю при $t\to\infty$. Из соответствующих уравнений и граничных условий, а также из представления [2], следуют равенства

$$\vartheta(\mathbf{x},t)=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\exp\big(-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{4t}\big)\vartheta_0(\mathbf{y})dy \tag{4.17}$$

и (4.13). Следовательно,

$$\max_{0<t<\infty}\Big(\alpha_\tau\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)|^2dx+\int\limits_{\Omega^s}\mathbb{D}\big(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},t)\big):\mathbb{D}\big(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},t)\big)dx\Big)+$$
$$+\max_{0<t<\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|p(\mathbf{x},t)|^2dx+\max_{0<t<\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3}|\nabla\cdot\mathbf{w}(\mathbf{x},t)|^2dx+$$
$$+\alpha_\mu\int\limits_0^\infty\int\limits_{\Omega^f\cup\Omega^0}\mathbb{D}\big(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\big):\mathbb{D}\big(x,\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\big)dxdt\leqslant C,$$

где C зависит только от норм на интервале $[0,\infty)$ функций ϑ и $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial t}$, заданных по формуле (4.17).

Пусть χ_0 — характеристическая функция области Ω^0, а χ — характеристическая функция области Ω^f: $\chi_0(\mathbf{x})=1$ при $\mathbf{x}\in\Omega^0$ и $\chi_0(\mathbf{x})=0$ при $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\backslash\Omega^0$, $\chi(\mathbf{x})=1$ при $\mathbf{x}\in\Omega^f$ и $\chi(\mathbf{x})=0$ при $\mathbf{x}\in\Omega^s$.

Последние оценки показывают, что задача (4.1)–(4.5), (4.7), (4.8), (4.12)–(4.14) имеет единственное слабое решение в смысле распределений: функции $\mathbf{w}$, p, и ϑ удовлетворяют интегральному тождеству

$$-\alpha_\tau\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Big(\varrho_f\big(\chi^0+(1-\chi^0)\chi\big)+\varrho_s(1-\chi^0)(1-\chi)\Big)\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}dxdt+$$
$$+\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Big((1-\chi_0)\big(\chi\,\mathbb{P}_f+(1-\chi)\mathbb{P}_s\big)+\chi_0\,\mathbb{P}_f\Big):\mathbb{D}(x,\varphi)dxdt=0 \quad (4.18)$$

для любых гладких функций φ с компактным носителем и уравнению неразрывности

$$\big(\chi\,\alpha_{p,f}+(1-\chi)\alpha_{p,s}\big)p+\nabla\cdot\mathbf{w}=0 \quad (4.19)$$

в обычном смысле в $\mathbb{R}^3$ на любом отрезке $0<t<t_0$.

В (4.18), (4.19) χ_0 — это характеристическая функция области Ω^0, а χ — характеристическая функция области Ω^f: $\chi_0(\mathbf{x})=1$ для $\mathbf{x}\in\Omega^0$ и $\chi_0(\mathbf{x})=0$ для $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\backslash\Omega^0$, $\chi(\mathbf{x})=1$ для $\mathbf{x}\in\Omega^f$ и $\chi(\mathbf{x})=0$ для $\mathbf{x}\in\Omega^s$.

Введем обозначение

$$\Pi(\Omega,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\alpha_\lambda(1-\chi_0)(1-\chi)\mathbb{D}\big(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},t)\big):\mathbb{D}\big(x,\mathbf{w}(\mathbf{x},t)\big)dx+$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Big(\alpha_{p,f}\big(\chi_0+(1-\chi_0)\,\chi\big)+(1-\chi_0)(1-\chi)\alpha_{p,s}\Big)|p(\mathbf{x},t)|^2dx$$

для потенциальной энергии области Ω в момент времени t, а через $\Pi(\Omega^0,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\alpha_{p,f}\,\chi_0\,|p(\mathbf{x},t)|^2dx$ обозначим потенциальную энергию трещины Ω^0 в тот же момент t.

В состоянии покоя в момент $t=0$ $\Pi(\Omega,0)=\Pi(\Omega^0,0)=0$. Только отношения (4.16) характеризуют поведение потенциальных энергий $\Pi(\Omega,t)$ и $\Pi(\Omega^0,t)$ после теплового воздействия. Будут ли они положительными? И если да, то сохранят ли они свои строго положительные значения при $t_0\to\infty$?

Это безусловно означает накопление энергии в трещине во время теплового воздействия, если $\Pi(\Omega,t)$ и $\Pi(\Omega^0,t)$ сохраняют свои строго положительные значения при $t_0\to\infty$. Но мы не можем это уверенно утверждать из-за присутствия вязкой энергии $I_\infty=\alpha_\mu\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathbb{D}\big(x,\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\big):\mathbb{D}\big(x,\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\big)dxdt$. Она несомненно строго положительна и другой член в правой части (4.16) может быть равен нулю на бесконечности.

Поэтому мы будем изучать случай для гомогенизированной системы, предполагая, что $\alpha_\mu \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

4.2. Накопление энергии в трещине: макроскопическое описание. Пусть поровое пространство Ω^f описывается характеристической функцией $\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi(\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon})$ с функцией с периодом 1 по $\mathbf{y}$, $\chi(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in Y$, $Y = (0,1)^3 \in \mathbb{R}^3$, $Y_f = \{\mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{y}) = 1\}$, $Y_s = \{\mathbf{y} \in Y : \chi(\mathbf{y}) = 0\}$. Граница γ между Y_f и Y_s должна быть непрерывной по Липшицу.

Мы ищем гомогенизированную систему при предположениях $\alpha_\mu = \mu_3\,\varepsilon^3$, $\alpha_\tau = \tau_0$, $\alpha_\lambda = \lambda_3\,\varepsilon^3$, где μ_3, τ_0, и λ_3 не зависят от ε.

Пусть для данного $\varepsilon > 0$, функции $\mathbf{w}^\varepsilon$, p^ε, и ϑ^ε будут решениями задачи (4.1)–(4.12). Мы предполагаем, что

$$\left\{\begin{array}{l} \chi^0(\mathbf{x})\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x},t) = \chi^0(\mathbf{x})\mathbf{w}_f(\mathbf{x},t) + o(\varepsilon), \\ \big(1-\chi^0(\mathbf{x})\big)\chi^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x},t) = \big(1-\chi^0(\mathbf{x})\big)\chi^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{w}(\mathbf{x},t) + o(\varepsilon), \\ \big(1-\chi^0(\mathbf{x})\big)\big(1-\chi^\varepsilon(\mathbf{x})\big)\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x},t) = \big(1-\chi^0(\mathbf{x})\big)\big(1-\chi^\varepsilon(\mathbf{x})\big)\mathbf{w}(\mathbf{x},t) + o(\varepsilon), \end{array}\right. \tag{4.20}$$

$$p^\varepsilon(\mathbf{x},t) = \chi^0 p_f(\mathbf{x},t) + (1-\chi^0)p(\mathbf{x},t) + o(\varepsilon). \tag{4.21}$$

Для выведения гомогенизированных динамических уравнений мы используем представления (4.20)-(4.21) в интегральном тождестве (4.18) и оттуда перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$

$$0 = \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \alpha_\tau\Big(\varrho_f\big((1-\chi_0)\chi^\varepsilon + \chi_0\big) + \varrho_s(1-\chi^0)(1-\chi^\varepsilon)\Big)\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dxdt +$$

$$+\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \big(\chi^0(p_f+\alpha\,\vartheta)+(1-\chi^0)\,(p+\alpha\,\vartheta)\big)\nabla\cdot\varphi\,dxdt - \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \alpha_\mu\big((1-\chi_0)\chi^\varepsilon+\chi_0\big)\,\mathbb{D}\big(x,\frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\big) : \mathbb{D}\big(x,\varphi\big)\,dxdt -$$

$$-\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \alpha_\lambda(1-\chi_0)(1-\chi^\varepsilon)\,\mathbb{D}\big(x,\mathbf{w}^\varepsilon\big) : \mathbb{D}\big(x,\varphi\big)\,dxdt + o(\varepsilon) \to I,$$

$$I = \int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \big(\tau_0\varrho_f\frac{\partial \mathbf{w}_f}{\partial t} + \hat{\varrho}(1-\chi_0)\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\big)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \big(\chi^0\,(p_f+\alpha\,\vartheta) + (1-\chi^0)(p+\alpha\,\vartheta)\nabla\cdot\varphi\big)\,dxdt = 0,$$

где $\hat{\varrho} = m\,\varrho_f + (1-m)\,\varrho_s$.

Чтобы вывести макроскопическое уравнение неразрывности, мы рассмотрим соответствующий закон сохранения массы в виде интегрального тождества на микроскопическом уровне. Для этого умножим уравнения (4.2) и (4.5) на пробную функцию ξ с компактным носителем, проинтегрируем по частям в соответствующих областях и просуммируем результаты:

$$\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(\big(\alpha_{p,f}\,(\chi^0\,p_f + (1-\chi^0)\chi^\varepsilon\,p\big) + \alpha_{p,s}\,(1-\chi^0)(1-\chi^\varepsilon)\,p\big)\xi - \big(\chi^0\mathbf{w}_f + (1-\chi^0)\mathbf{w}\big)\cdot\nabla\xi\Big)dxdt = o(\varepsilon).$$

После перехода к пределу при $\varepsilon \to 0$ мы получим интегральное тождество

$$\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Big(\big(\alpha_{p,f}\,(\chi^0\,p_f + (1-\chi^0)\,m\,p\big) + \alpha_{p,s}\,(1-\chi^0)(1-m)\,p\big)\xi - \big(\chi^0\mathbf{w}_f + (1-\chi^0)\mathbf{w}\big)\cdot\nabla\xi\Big)dxdt = 0,$$

которое равносильно макроскопическому уравнению неразрывности

$$\hat{c}_p\,p + \nabla\cdot\mathbf{w} = 0$$

в Ω для $t > 0$ ($\chi^0 = 0$), где $\hat{c}_p = m\,\alpha_{p,f} + (1-m)\,\alpha_{p,s}$, и уравнение неразрывности

$$\alpha_{p,f}\,p_f + \nabla\cdot\mathbf{w}_f = 0$$

в Ω^0 для $t > 0$ ($\chi^0 = 1$).

4.2.1. Совместное движение упругого тела и жидкости в трещине. Совместное движение описывается системой интегральных тождеств

$$\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\tau_0\big(\varrho_f\chi_0\frac{\partial\mathbf{w}_f}{\partial t}+\hat{\varrho}(1-\chi_0)\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}\big)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\big(\chi^0\,(p_f+\alpha\,\vartheta)+(1-\chi^0)(p+\alpha\,\vartheta)\big)\nabla\cdot\varphi\Big)\,dxdt=0, \quad (4.22)$$

$$\int_0^{t_0}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\big(\alpha_{p,f}\,(\chi^0\,p_f+(1-\chi^0)\,m\,p)+\alpha_{p,s}\,(1-\chi^0)(1-m)\,p\big)\xi-\big(\chi^0\mathbf{w}_f+(1-\chi^0)\mathbf{w}\big)\cdot\nabla\xi\Big)dxdt=0, \quad (4.23)$$

которые верны для всех гладких функций φ и ξ с компактными носителями.

Оно содержит динамическое уравнение и уравнение неразрывности

$$\tau_0\,\hat{\varrho}\,\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\nabla\,(p+\alpha\,\vartheta)=0, \quad (4.24)$$

$$\hat{c}_p\,\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{v}=0 \quad (4.25)$$

для скорости $\mathbf{v}=\dfrac{\partial\mathbf{w}}{\partial t}$ и давления p пороупругой среды в области Ω для $t>0$, динамическое уравнение и уравнение неразрывности для скорости жидкости $\mathbf{v}=\dfrac{\partial\mathbf{w}_f}{\partial t}$, и давления p_f

$$\tau_0\,\varrho_f\,\frac{\partial\mathbf{v}_f}{\partial t}+\nabla\,(p_f+\alpha\,\vartheta)=0, \quad (4.26)$$

$$\alpha_{p,f}\,\frac{\partial p_f}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{v}_f=0, \quad (4.27)$$

в трещине Ω^0 для $t>0$, и граничные условия

$$p=p_f, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{v}_f\cdot\mathbf{n} \quad (4.29)$$

на границе S, где $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к S.

Задача дополняется начальными условиями

$$\mathbf{v}_f(\mathbf{x},0)=0,\ \ \mathbf{x}\in\Omega^0, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},0)=0,\ \ \mathbf{x}\in\Omega. \quad (4.31)$$

Заметим, что в (4.22)–(4.31), температура ϑ задана (4.17).

4.2.2. Накопление энергии в одной трещине. Чтобы получить основное интегральное тождество, мы умножаем уравнение (4.26) скорости жидкости в трещине на $\mathbf{v}_f$ и интегрируем по частям в области Ω^0. Далее мы умножаем уравнение (4.24) на скорость $\mathbf{v}$ пороупругой среды, интегрируем по частям в области Ω и суммируем полученные равенства:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\tau_0\big(\varrho_f\chi_0|\mathbf{v}_f(\mathbf{x},t)|^2+\hat{\varrho}(1-\chi_0)|\mathbf{v}(\mathbf{x},t)|^2\big)+\big(\alpha_{p,f}\chi^0|p_f(\mathbf{x},t)|^2+\hat{c}_p(1-\chi^0)|p_f(\mathbf{x},t)|^2\big)\Big)dx=$$

$$=\alpha\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3}\vartheta\big(\alpha_{p,f}\chi^0p_f(\mathbf{x},t)+\hat{c}_p(1-\chi^0)p_f(\mathbf{x},t)\big)dx-\alpha\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\big(\alpha_{p,f}\chi^0p_f(\mathbf{x},t)+\hat{c}_p(1-\chi^0)p_f(\mathbf{x},t)\big)dx.$$

Интегрирование на отрезке $(0,t_0)$ дает

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\Big(\tau_0\,\big(\varrho_f\chi_0|\mathbf{v}_f(\mathbf{x},t_0)|^2+\hat{\varrho}(1-\chi_0)|\mathbf{v}(\mathbf{x},t_0)|^2\big)+\big(\alpha_{p,f}\,\chi^0\,|p_f(\mathbf{x},t_0)|^2+\hat{c}_p\,(1-\chi^0)\,|p(\mathbf{x},t_0)|^2\big)\Big)\,dx=$$

$$=\alpha\int_{\mathbb{R}^3}\vartheta(\mathbf{x},t_0)\,\big(\alpha_{p,f}\,\chi^0\,p_f(\mathbf{x},t_0)+\hat{c}_p\,(1-\chi^0)\,p(\mathbf{x},t_0)\big)\,dx\,-$$

$$- \alpha \int\limits_0^{t_0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \left(\alpha_{p,f} \, \chi^0 \, p_f(\mathbf{x}, t) + \hat{c}_p \, (1 - \chi^0) \, p(\mathbf{x}, t) \right) dx dt. \quad (4.32)$$

Представление (4.17) подразумевает $\lim\limits_{t_0 \to \infty} \vartheta(\mathbf{x}, t_0) = \lim\limits_{t_0 \to \infty} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t}(\mathbf{x}, t_0) = 0$, $\dfrac{\partial \vartheta}{\partial t}(\mathbf{x}, t) < 0$ для $t > 0$. Следовательно,

$$\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^3} \vartheta(\mathbf{x}, t_0) \left(\alpha_{p,f} \, \chi^0 \, p_f(\mathbf{x}, t_0) + \hat{c}_p \, (1 - \chi^0) \, p(\mathbf{x}, t_0) \right) dx \to 0,$$

$$-\alpha \int\limits_0^{t_0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \left(\alpha_{p,f} \, \chi^0 \, p_f(\mathbf{x}, t) + \hat{c}_p \, (1 - \chi^0) \, p(\mathbf{x}, t) \right) dx dt \to E^* > 0,$$

$$\Pi(\Omega^0, t_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \alpha_{p,f} \, \chi_0 \, |p_f(\mathbf{x}, t_0)|^2 dx \to \Pi^* > 0 = \Pi(\Omega^0, t_0)$$

при $t_0 \to \infty$. Это и есть точное накопление энергии в трещине во время теплового воздействия.

4.3. Макроскопическая модель распространения трещины. Мы уже ранее показали, что потенциальная энергия $\Pi(\Omega^0, t_0)$ увеличивается со временем. Логично предположить, что для каждой трещины существует некоторый предел $P_* = P_*(\Omega^0)$ для среднего давления $P(t_0) = P(\Omega^0; t_0) = \dfrac{1}{V(\Omega^0, t)} \int\limits_{\Omega^0} |p_f(\mathbf{x}, t_0)| dx$ в этом геологическом разломе Ω^0, такой, что в момент t_*, когда $P(\Omega^0, t_*) = P_*$, эта трещина начинает рушится.

Мы опишем движение трещины после этого конкретного момента t_*, используя поток средней кривизны [12]

$$D_n = \sigma \, (P_* - P) \, k, \quad (4.33)$$

где D_n — скорость смещающейся (свободной) границы $S = \partial \Omega^0$ по направлению к внешней нормали $\mathbf{n}$ к S, а k — средняя кривизна S.

Точнее, этот механизм определяется правилом гистерезиса (см. рис. 4.1).

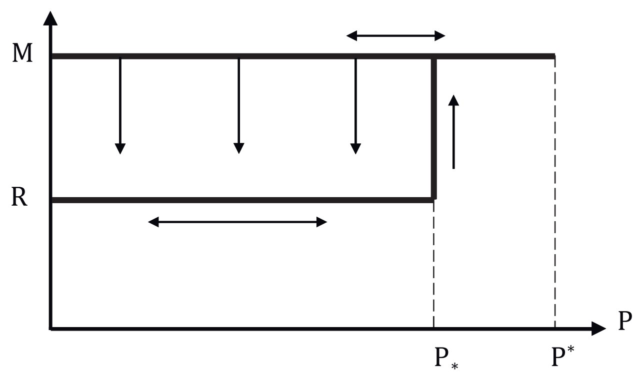

Рис. 4.1. Правило гистерезиса для распространения трещины.

Для состояния трещины существуют две позиции. Позиция **M** представляет движение трещины, а позиция **R** представляет состояние покоя. Если в состоянии покоя среднее давление P достигает предельного значения P_*, то состояние трещины меняется с **R** на **M** и она начинает смещаться. Мы предполагаем, что произведение среднего давления и объема трещины V неизменно во время движения:

$$P(t) \cdot V(t) = \text{const}. \quad (4.34)$$

Следовательно, когда трещина распространяется и ее объем уменьшается, давление $P(t)$ внутри трещины увеличивается до значения P_*, после чего трещина возвращается в позицию **R**.

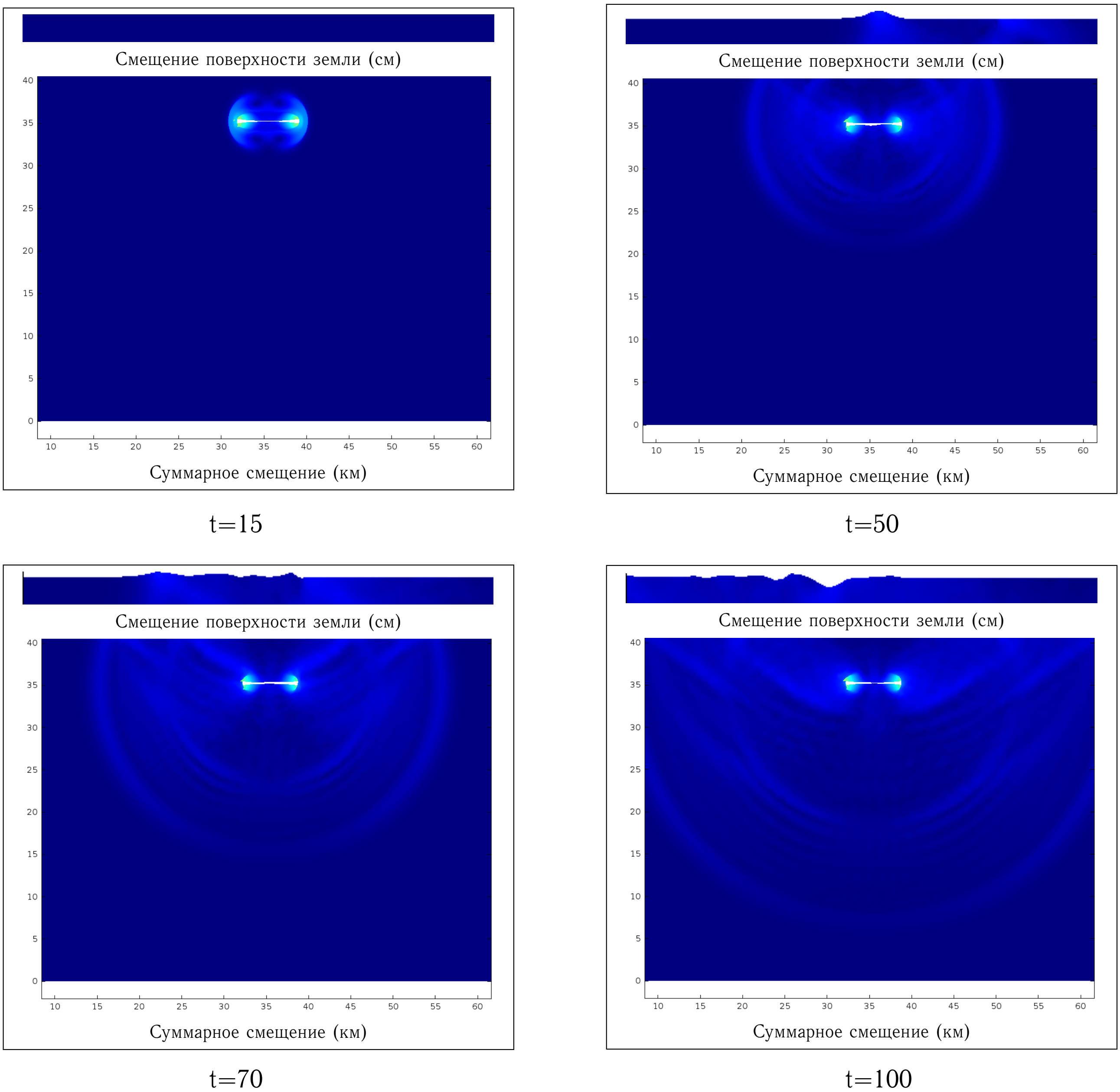

Рис. 4.2. Динамика трещины в горной породе.

Очевидно, что движение трещины создает сейсмические волны, которые могут достигать поверхности Земли.

Мы можем описать эту стадию процесса системой упругости Ламе

$$\alpha_\tau \varrho_s \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \big(\alpha_\lambda \, \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p\mathbb{I}\big)$$

для смещений $\mathbf{w}$ и давления p горных пород в области Ω, вместе с потоком средней кривизны (4.33) для свободной границы S области Ω^0. Задача дополняется постулатом (4.34), который дает граничные условия

$$\big(\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p\mathbb{I}\big) \cdot \mathbf{n} = -P(t)\, \mathbf{n}$$

для уравнений Ламе на границе S. Соответствующие численные расчеты [26] подтверждают предложенную модель (см. рис. 4.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
3. *Рубинштейн Л. И.* Проблема Стефана. — Рига: Звайгзне, 1967.
4. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Физматлит, 1993.
5. *Anderson T. L.* Fracture mechanics. Fundamentals and applications. — Boca Raton: CRC Press, 1995.
6. *Antontsev S. N., Kazhikhov A. V., Monakhov V. N.* Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids. — Amsterdam—NewYork—Oxford—Tokyo: North-Holland, 1990.
7. *Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky V.* A free boundary problem for Stokes equations: classical solutions// Interfaces Free Bound. — 2000. — *2.* — С. 413–424.
8. *Böhm M.* On a nonhomogeneous Bingham fluid// J. Differ. Equ. — 1985. — *60.* — С. 259–284.
9. *Brady P. V., House W. A.* Surface-controlled dissolution and growth of minerals// В сб.: «Physics and chemistry of mineral surfaces». — Boca Raton: CRC Press, 1996. — С. 225–306.
10. *Burridge R., Keller J. B.* Poroelasticity equations derived from microstructure// J. Acoustic Soc. Amer. — 1981. — *70.* — С. 1140–1146.
11. *Cohen C. E., Ding D., Quintard M., Bazin B.* From pore scale to wellbore scale: Impact of geometry on wormhole growth in carbonate acidization// Chem. Eng. Sci. — 2008. — *63.* — С. 3088–3099.
12. *Colding T. N., Minicozzi II W. P., Pedersen E. K.* Mean Curvature Flow// Bull. Am. Math. Soc. (N.S.). — 2015. — *52.* — С. 297–333.
13. *Fernández-Cara E., Guillén F., Ortega R. R.* Some theoretical results for visco-plastic and dilatant fluids with variable density// Nonlinear Methods Appl. — 1997. — *28.* — С. 1079–1100.
14. *Freidman A.* Variational principles and free-boundary problems. — New York: John Wiley & Sons Inc., 1982.
15. *Giga Y., Takahashi S.* On global weak solutions of the nonstationary two-phase Stokes flow// SIAM J. Math. Anal. — 1994. — *25.* — С. 876–893.
16. *Golfier F., Zarcone C., Bazin B., Lenormand R., Lasseux D., Quintard M.* On the ability of a Darcy-scale model to capture wormhole formation during the dissolution of a porous medium// J. Fluid Mech. — 2002. — *457.* — С. 213–254.
17. *Kalia N., Balakotaiah V.* Effect of medium heterogeneities on reactive dissolution of carbonates// Chem. Eng. Sci. — 2009. — *64.* — С. 376–390.
18. *Kasahara K.* Earthquake mechanics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
19. *Kenneth W. W., Raymond E. D., Larry M. P., Stanley G. G.* Chemistry. — Belmont: Brooks, 2014.
20. *Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.* Two-scale convergence// Int. J. Pure Appl. Math. — 2002. — *2.* — С. 35–86.
21. *Malvern L. E.* Introduction to Mechanics of a Continuum Medium. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc., 1969.
22. *Meirmanov A.* The Stefan problem. — Berlin—New York: Walter de Gruyter, 1992.
23. *Meirmanov A.* The Muskat problem for a viscoelastic filtration// Interfaces Free Bound. — 2011. — *13.* — С. 463–484.
24. *Meirmanov A. M.* Mathematical models for poroelastic flows. — Paris: Atlantis Press, 2013.
25. *Meirmanov A., Galtsev O.* Displacement of oil by water in a single elastic capillary// Boundary Value Problems. — 2017. — *2017.* — С. 1–26.
26. *Meirmanov A., Galtsev O.* Dynamics of cracks in rocks// Int. J. Evol. Equ. — 2017. — *10.* — С. 214–227.
27. *Meirmanov A., Zimin R., Shiyapov K.* The Muskat problem at the microscopic level for a single capillary// Bound. Value Probl. — 2015. — *71.* — С. 1–8.
28. *Monakhov V. N.* Boundary-value problems with free boundaries for elliptic systems of equations. — Providence: AMS, 1983.
29. *Nguetseng G.* A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization// SIAM J. Math. Anal. — 1989. — *20.* — С. 608–623.
30. *Nguetseng G.* Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics// SIAM J. Math. Anal. — 1990. — *21.* — С. 1394–1414.
31. *Nouri A., Poupaud F.* An existence theorem for the multifluid Navier—Stokes problem// J. Differ. Equ. — 1995. — *13.* — С. 463–484.
32. *Panga M. K. R., Ziauddin M., Balakotaiah V.* Two-scale continuum model for simulation of wormholes incarbonate acidization// A.I.Ch.E. Journal. — 2005. — *51.* — С. 3231–3248.

33. *Sanchez-Palencia E.* Non-homogeneous media and vibration theory. — Berlin: Springer, 1980.
34. *Solonnikov V. A., Ladyzhenskaya O. A.* On unique solvability of an initial-boundary value problem for viscous nonhomogeneous fluids// J. Soviet Math. — 1978. — *9.* — C. 697–749.
35. *Solonnikov V. A., Padula M.* On the local solvability of free boundary problem for the Navier—Stokes equations// J. Math. Sci. — 2010. — *170.* — doi: 10.1007/s10958-010-0099-3.
36. *Solonnikov V. A., Tani A.* Free boundary problem for the Navier—Stokes equations for a compressible fluid with a surface tension// J. Soviet Math. — 1992. — *62.* — C. 2814–2818.
37. *Whitham G. B.* Linear and nonlinear waves. — New York: Willey, 1999.

Anvarbek M. Meirmanov

Yachay Tech University, San Miguel de Urcuqui, Hacienda San Jose s/n y Proyecto Yachay, Ecuador;

Белгородский государственный университет, 308015, Белгород, ул. Победы, д. 85

E-mail: anvarbek@list.ru

О. В. Гальцев

Белгородский государственный университет, 308015, Белгород, ул. Победы, д. 85

E-mail: galtsev_o@bsu.edu.ru

О. А. Гальцева

Белгородский государственный университет, 308015, Белгород, ул. Победы, д. 85

E-mail: galtseva@bsu.edu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-98-130 UDC 519.6+532.5+556.3

Some Free Boundary Problems Arising in Rock Mechanics

© 2018 **A. M. Meirmanov, O. V. Galtsev, O. A. Galtseva**

REFERENCES

1. O. A. Ladyzhenskaya, *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* [Mathematical Problems in Viscous Incompressible Fluid Dynamics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
2. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasi-Linear Parabolic Equations], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
3. L. I. Rubinstein, *Problema Stefana* [The Stefan Problem], Zvaigne, Riga, 1967 (in Russian).
4. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleinik, *Usrednenie differentsial'nykh operatorov* [Averaging of Differential Operators], Moscow, Fizmatlit, 1993 (in Russian).
5. T. L. Anderson, *Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications*, CRC Press, 1995.
6. S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov, *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*, North-Holland, Amsterdam–NewYork–Oxford–Tokyo, 1990.
7. S. Antontsev, A. Meirmanov, and V. Yurinsky, “A free boundary problem for Stokes equations: classical solutions,” *Interfaces Free Bound.*, 2000, **2**, 413–424.
8. M. Böhm, “On a nonhomogeneous Bingham fluid,” *J. Differ. Equ.*, 1985, **60**, 259–284.
9. P. V. Brady and W. A. House, “Surface-controlled dissolution and growth of minerals,” In: *Physics and Chemistry of Mineral Surfaces*, CRC Press, Boca Raton, 1996, 226–298.
10. R. Burridge and J. B. Keller, “Poroelasticity equations derived from microstructure,” *J. Acoustic Soc. Amer.*, 1981, **70**, 1140–1146.
11. C. E. Cohen, D. Ding, M. Quintard, and B. Bazin, “From pore scale to wellbore scale: Impact of geometry on wormhole growth in carbonate acidization,” *Chem. Eng. Sci.*, 2008, **63**, 3088–3099.
12. T. N. Colding, Minicozzi W. P. II, and E. K. Pedersen, “Mean Curvature Flow,” *Bull. Am. Math. Soc. (N.S.)*, 2015, **52**, 297–333.
13. E. Fernández-Cara, F. Guillén, and R. R. Ortega, “Some theoretical results for visco-plastic and dilatant fluids with variable density,” *Nonlinear Methods Appl.*, 1997, **28**, 1079–1100.

14. A. Freidman, *Variational Principles and Free-Boundary Problems*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1982.
15. Y. Giga and S. Takahashi, “On global weak solutions of the nonstationary two-phase Stokes flow,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1994, **25**, 876–893.
16. F. Golfier, C. Zarcone, B. Bazin, R. Lenormand, D. Lasseux, and M. Quintard, “On the ability of a Darcy-scale model to capture wormhole formation during the dissolution of a porous medium,” *J. Fluid Mech.*, 2002, **457**, 213–254.
17. N. Kalia and V. Balakotaiah, “Effect of medium heterogeneities on reactive dissolution of carbonates,” *Chem. Eng. Sci.*, 2009, **64**, 376–390.
18. K. Kasahara, *Earthquake Mechanics*, Cambridge University Press, 1981.
19. W. W. Kenneth, E. D. Raymond, M. P. Larry, and G. G. Stanley, *Chemistry*, Brooks, Belmont, 2014.
20. D. Lukkassen, G. Nguetseng, and P. Wall, “Two-scale convergence,” *Int. J. Pure Appl. Math.*, 2002, **2**, 35–86.
21. L. E. Malvern, *Introduction to Mechanics of a Continuum Medium*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, 1969.
22. A. Meirmanov, *The Stefan Problem*, Walter de Gruyter, Berlin—New York, 1992.
23. A. Meirmanov, “The Muskat problem for a viscoelastic filtration,” *Interfaces Free Bound.*, 2011, **13**, 463–484.
24. A. M. Meirmanov, *Mathematical Models for Poroelastic Flows*, Atlantis Press, Paris, 2013.
25. A. Meirmanov, and O. Galtsev, “Displacement of oil by water in a single elastic capillary,” *Boundary Value Problems*, 2017, **2017**, 1–26.
26. A. Meirmanov, and O. Galtsev, “Dynamics of cracks in rocks,” *Int. J. Evol. Equ.*, 2017, **10**, 214–227.
27. A. Meirmanov, R. Zimin, and K. Shiyapov, “The Muskat problem at the microscopic level for a single capillary,” *Bound. Value Probl.*, 2015, **71**, 1–8.
28. V. N. Monakhov, *Boundary-Value Problems with Free Boundaries for Elliptic Systems of Equations*, AMS, Providence, 1983.
29. G. Nguetseng, “A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1989, **20**, 608–623.
30. G. Nguetseng, “Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1990, **21**, 1394–1414.
31. A. Nouri and F. Poupaud, “An existence theorem for the multifluid Navier—Stokes problem,” *J. Differ. Equ.*, 1995, **13**, 463–484.
32. M. K. Panga, M. Ziauddin, and V. Balakotaiah, “Two-scale continuum model for simulation of wormholes incarbonate acidization,” *A.I.Ch.E.Journal*, 2005, **51**, 3231–3248.
33. E. Sanchez-Palencia, *Non-homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer, Berlin, 1980.
34. V. A. Solonnikov and O. A. Ladyzhenskaya, “On unique solvability of an initial-boundary value problem for viscous nonhomogeneous fluids,” *J. Soviet Math.*, 1978, **9**, 697–749.
35. V. A. Solonnikov and M. Padula, “On the local solvability of free boundary problem for the Navier–Stokes equations,” *J. Math Sci.*, 2010, **170**, doi: 10.1007/s10958-010-0099-3.
36. V. A. Solonnikov and A. Tani, “Free boundary problem for the Navier-Stokes equations for a compressible fluid with a surface tension,” *J. Soviet Math.*, 1992, **62**, 2814–2818.
37. G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Willey, New York, 1999.

Anvarbek M. Meirmanov
Yachay Tech University, San Miguel de Urcuqui, Hacienda San Jose s/n y Proyecto Yachay, Ecuador;
Belgorod State University, Belgorod, Russia
E-mail: `anvarbek@list.ru`

Oleg V. Galtsev
Belgorod State University, Belgorod, Russia
E-mail: `galtsev_o@bsu.edu.ru`

Oksana A. Galtseva
Belgorod State University, Belgorod, Russia
E-mail: `galtseva@bsu.edu.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 131–147

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-131-147 УДК 517.9

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2018 г. **В. А. ПОПОВ**

Аннотация. Рассматривается дифференциально-разностное уравнения второго порядка в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$. Предполагается, что дифференциально-разностный оператор содержит несколько разностных операторов с вырождением, соответствующих операторам дифференцирования. Кроме того, рассматриваемый дифференциально-разностный оператор нельзя представить в виде композиции разностного оператора и сильно эллиптического дифференциального оператора. Наличие вырожденных разностных операторов не позволяет получить неравенство Гординга.

В работе получены априорные оценки, из которых следует секториальность, а также существование фридрихсова расширения рассматриваемого дифференциально-разностного оператора. Полученные оценки могут быть применены для исследования спектра фридрихсова расширения.

Известно, что эллиптические дифференциально-разностные уравнения могут иметь решения, не принадлежащие даже пространству Соболева $W_2^1(Q)$. Однако, опираясь на полученные оценки, можно доказать определенную гладкость решений, но не во всей области Q, а в некоторых подобластях Q_r, порожденных сдвигами границы, где $\bigcup\limits_r \overline{Q_r} = \overline{Q}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Настоящая работа посвящена априорным оценкам решений для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением с переменными коэффициентами. Г. А. Каменский и А. Д. Мышкис сформулировали вопрос о построении теории краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений. Обзор литературы в области эллиптических функционально-дифференциальных уравнений можно найти в работе [29]. Основы общей теории эллиптических и параболических дифференциально-разностных уравнений были построены в работах А. Л. Скубачевского и его учеников. Современное состояние теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений можно найти в обзоре [22], который включает в себя ряд важных направлений: эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с растяжениями—сжатиями переменных, нелинейные функционально-дифференциальные уравнения, приложения к проблеме Т. Като о корне квадратном из оператора, приложения к исследованию автоколебаний нелинейных лазерных систем и другие [2, 5, 13, 18, 19, 23, 24, 30–32].

Помимо приложений, интерес к краевым задачам для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений связан с появлением ряда интересных свойств. Например, гладкость обобщенных решений может нарушаться внутри области и сохраняться в некоторых подобластях, порожденных сдвигами границы области.

В 1951 г. после работы М. В. Келдыша [9] возник интерес к эллиптическим уравнениям с вырождением. Эта статья повлекла за собой целый ряд исследований многих известных математиков

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-01-00450.

и сыграла важную роль в развитии теории вырождающихся дифференциальных уравнений. В дальнейшем подобными задачами занимались такие математики, как О. А. Олейник и Е. В. Радкевич [14], М. И. Вишик [3], Г. Фикера [25] и многие другие. В своей работе М. В. Келдыш впервые показал, что при определенных условиях часть границы (многообразие вырождения) свободна от краевых условий.

Подобное явление возникает и в случае эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением. Но стоит отметить, что, в отличие от эллиптических уравнений с вырождением, причиной такого явления служит не вырождение коэффициентов дифференциального оператора на многообразии вырождения, а присутствие в дифференциально-разностном операторе разностного оператора с вырождением, которое носит нелокальный характер. В работах А. Л. Скубачевского [21, 29] изучены дифференциально-разностные операторы порядка $2m$, которые представляются в виде композиции сильно эллиптического дифференциального оператора и вырожденного разностного оператора, т. е. в виде $L_R u = LRu$, где L — сильно эллиптический дифференциальный оператор, а R — разностный оператор, эрмитова часть которого является неотрицательным вырожденным оператором.

Интерес к таким операторам вызван появлением ряда принципиально новых свойств даже по сравнению с сильно эллиптическими дифференциально-разностными операторами (см. [28]), а также приложениями полученных результатов к некоторым нелокальным эллиптическим задачам, возникающим в теории плазмы (см. [1]). В частности, А. Л. Скубачевским было показано, что нелокальные эллиптические задачи, связывающие значения неизвестной функции на различных компактах, можно свести к эллиптическим дифференциально-разностным уравнениям с вырождением. В работе [16] получены априорные оценки и построено фридрихсово расширение дифференциально-разностного оператора с постоянными коэффициентами и несколькими вырожденными разностными операторами, а также исследованы его спектральные свойства. Локальная гладкость обобщенных решений для данных уравнений и гладкость вблизи границы доказаны в работах [17, 27]. Необходимые и достаточные условия существования следов обобщенных решений на частях границы области были получены в работе [15].

В настоящей работе мы рассмотрим дифференциально-разностный оператор с переменными коэффициентами, содержащий несколько вырожденных операторов, действующий в пространстве $L_2(Q)$. А именно, рассмотрим следующее уравнение:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} R_{ij} u(x) = f(x) \qquad (x \in Q \subset \mathbb{R}^n), \tag{1.1}$$

где $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂Q, R_{ij} — разностные операторы, действующие в пространстве $L_2(Q)$ и определенные по формуле $R_{ij}u(x) = \sum\limits_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh} u(x+h)$, $\mathcal{M}$ — конечное множество векторов h из $\mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, $a_{ijh} \in \mathbb{C}$, $b_{ij}(x) = b_{ji}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные M-периодические функции.

Мы будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения (1.1). Так как сдвиг на вектор h может отобразить точки $x \in Q$ в точки $x \in \mathbb{R}^n \backslash Q$, то мы должны задать значения искомой функции не только на границе ∂Q, но и всюду вне области. Таким образом, мы будем рассматривать однородное краевое условие

$$u(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q). \tag{1.2}$$

Мы докажем априорные оценки обобщенных решений первой краевой задачи, из которых будет следовать, что рассматриваемый дифференциально-разностный оператор с вырождением является секториальным. В дальнейшем на основе полученных априорных оценок можно построить фридрихсово расширение оператора и применить теоремы о представлении для изучения разрешимости рассматриваемой задачи. Кроме того, оценки позволят изучить гладкость решений.

2. Геометрические построения и разностные операторы

Сначала приведем ряд вспомогательных результатов, необходимых для формулировки и доказательства основного результата. Доказательства приводимых ниже утверждений можно найти в [21,22,29]. В данных работах было показано, что свойства разностных операторов можно охарактеризовать с помощью свойств матриц, элементами которых являются коэффициенты разностного оператора и нули. Для этого нам понадобятся следующие геометрические построения.

Для простоты будем рассматривать ограниченную область $Q \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial Q \in C^\infty$, цилиндр $(0,d)\times G$ или прямоугольник, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$). Но все результаты верны и для более общих областей, удовлетворяющих следующему условию.

Условие 2.1. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial Q = \bigcup\limits_i \overline{X}_i$ ($i = 1,\dots,N_1$), где X_i — открытые связные в топологии ∂Q $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, $n \geqslant 2$. Пусть, кроме того, в некоторой окрестности каждой точки $x^0 \in K = \partial Q \setminus \bigcup\limits_i X_i$ область Q диффеоморфна n-мерному углу раствора меньше 2π и больше 0.*

Обозначим через $\dot{C}^\infty(Q)$ множество бесконечно дифференцируемых в Q функций с компактными носителями.

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$—множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами. Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \bigcup\limits_{h\in M} (\partial Q + h)$.

Определение 2.1. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r $(r = 1,2,\dots)$ назовем *разбиением* области Q.

Легко убедиться, что множество $\mathcal{R}$ не более чем счетно.

Лемма 2.1. $\bigcup\limits_r \partial Q_r = \Big(\bigcup\limits_{h\in M} (\partial Q + h)\Big) \bigcap \overline{Q}$.

Лемма 2.2.
1. $\bigcup\limits_r \overline{Q}_r = \overline{Q}$.
2. *Для любых Q_{r_1} и $h \in M$ либо найдется такое Q_{r_2}, что $Q_{r_2} = Q_{r_1}+h$, либо $Q_{r_1}+h \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$.*

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на классы. Мы будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1}+h$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса $(s = 1,2,\dots)$, а l — порядковый номер данной подобласти в s-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \leqslant ([\mathrm{diam} Q]+1)^n$.

Пример 2.1. Пусть область $Q = (0,2)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{M} = \{(1,0)\}$. Тогда разбиение $\mathcal{R}$ состоит из одного класса подобластей $Q_{11} = (0,1)\times(0,1)$, $Q_{12} = (1,2)\times(0,1)$ (см. рис. 2.1).

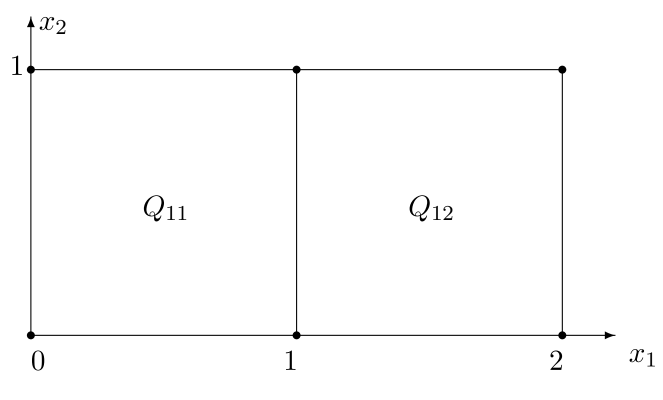

Рис. 2.1

Пример 2.2. Пусть область $Q = (0, \pi) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{M} = \{(1, 0)\}$. Тогда разбиение $\mathcal{R}$ состоит из двух классов $Q_{1l} = (l-1, \pi-4+l) \times (0, 1)$ $(l = 1, 2, 3)$ и $Q_{2,l} = (\pi - 4 + l, l)$ $(l = 1, 2, 3)$ (см. рис. 2.2).

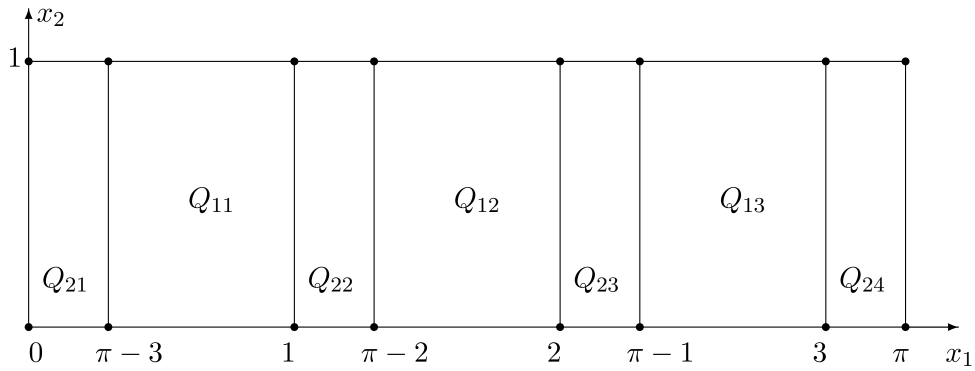

Рис. 2.2

Пример 2.3. Пусть область $Q = (0, 2) \times (0, 2)$, $\mathcal{M} = \{(1, 0)\} \cup \{(0, 1)\}$ (см. рис. 2.3).

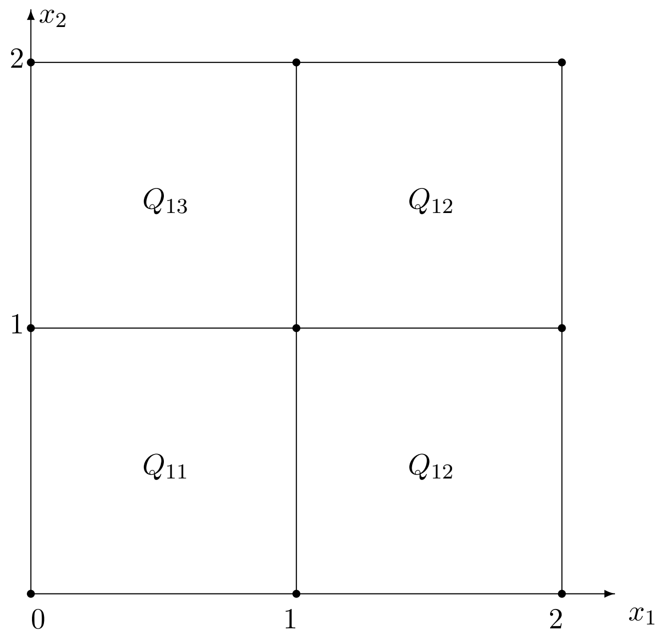

Рис. 2.3

Рассмотрим разностный оператор $R\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, определенный по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x + h), \tag{2.1}$$

где a_h — комплексные числа, множество $\mathcal{M}$ состоит из конечного числа векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Введем операторы I_Q, P_Q, R_Q следующим образом: $I_Q\colon\ L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, $P_Q\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q, а $R_Q = P_Q R I_Q\colon\ L_2(Q) \to L_2(Q)$.

Сдвиги $x \to x + h$, вообще говоря, могут отобразить точку $x \in Q$ в точку $x + h \notin Q$. Поэтому краевое условие (1.2) задается не только на ∂Q, но всюду в $\mathbb{R}^n \setminus Q$. Для того, чтобы формально записать это условие, мы вводим оператор I_Q. С другой стороны, функция $(RI_Qu)(x)$ задана в $\mathbb{R}^n$. Для рассмотрения этой функции только в области Q вводится оператор сужения P_Q.

Лемма 2.3. *Операторы* $I_Q: L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ *и* $P_Q: L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ *ограничены; при этом* $I_Q^* = P_Q$, *т. е.* $(I_Qu, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (u, P_Qv)_{L_2(Q)}$ *для любых* $u \in L_2(Q)$, $v \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Лемма 2.4. *Операторы* $R: L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ *и* $R_Q: L_2(Q) \to L_2(Q)$ *ограничены;*

$$R_Q^* = P_QR^*I_Q, \quad R^*u(x) = \sum_{h\in\mathcal{M}} \overline{a}_h u(x-h).$$

Теперь приведем некоторые свойства разностных операторов R_Q в пространстве $L_2(Q)$. Оказывается, эти свойства тесно связаны со свойствами конечного числа матриц, состоящих из нулей и коэффициентов разностного оператора R.

Обозначим через $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ подпространство функций в $L_2(Q)$, равных нулю вне $\bigcup\limits_l Q_{sl}$, а через $P_s\colon L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ — оператор ортогонального проектирования функций из $L_2(Q)$ на $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ $(l = 1,\dots,N(s))$. Так как $\mu_n(\partial Q_{sl}) = 0$, из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2\Big(\bigcup_l Q_{sl}\Big), \tag{2.2}$$

где $\mu_n(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2.5. $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ — *инвариантное подпространство оператора* R_Q.

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s\colon L_2\Big(\bigcup_l Q_{sl}\Big) \to L_2^N(Q_{s1}), \tag{2.3}$$

определив вектор-функцию $(U_su)(x)$ равенством

$$(U_su)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}), \tag{2.4}$$

где $l = 1,\dots,N = N(s)$, h_{sl} таково, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = 0)$, $L_2^N(Q_{s1}) = \prod\limits_l L_2(Q_{s1})$.

Лемма 2.6. *Оператор* $R_{Qs}\colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, *определенный по формуле*

$$R_{Qs} = U_sR_QU_s^{-1}, \tag{2.5}$$

является оператором умножения на квадратную матрицу R_s *порядка* $N(s)\times N(s)$ *с элементами*

$$r_{kl}^s = \begin{cases} a_h, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Замечание 2.1. Поскольку область Q является ограниченной, а матрицы R_s состоят из конечного множества чисел a_h и нулей, то множество различных матриц $\{R_{s_\nu}\}$ $(\nu = 1,\dots,n_1)$ конечно.

Лемма 2.7. *Спектр оператора* R_Q *совпадает с объединением спектров конечного числа матриц* R_{s_ν} $(\nu = 1,\dots,n_1)$. *Каждая точка спектра* $\sigma(R_Q)$ *является собственным значением бесконечной кратности.*

Лемма 2.8. *Если оператор* $R: L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ *является самосопряженным, то оператор* $R_Q: L_2(Q) \to L_2(Q)$ — *также самосопряженный.*

Лемма 2.9. *Для самосопряженности оператора* $R_Q: L_2(Q) \to L_2(Q)$ *необходимо и достаточно, чтобы все матрицы* R_{s_ν} $(\nu = 1,\dots,n_1)$ *были эрмитовы.*

Определение 2.2. Непрерывную в $\overline{Q}$ функцию $\varphi(x)$ назовем *M-периодической в* $\overline{Q}$, если $\varphi(x) = \varphi(x+h)$ для любых $x, x+h \in \overline{Q}$ и $h \in M$.

Лемма 2.10. *Пусть функция* $\varphi(x)$ — M*-периодическая в* $\overline{Q}$. *Тогда* $R_Q(\varphi u) = \varphi R_Q u$ *для всех* $u \in L_2(Q)$.

Рассмотрим свойства разностных операторов $R_Q\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$, имеющих нетривиальное ядро. Обозначим через $\mathcal{N}(\cdot)$ и $\mathcal{R}(\cdot)$ соответственно ядро и образ некоторого оператора.

Лемма 2.11. $L_2^N(Q_{s1}) = \mathcal{N}(R_{Qs}) \oplus \mathcal{R}(R^*_{Qs})$, $L_2^N(Q_{s1}) = \mathcal{N}(R^*_{Qs}) \oplus \mathcal{R}(R_{Qs})$.

Введем обозначения $A_Q = (R_Q + R_Q^*)/2$, $B_Q = (R_Q - R_Q^*)/2i$. Очевидно, что $R_Q = A_Q + iB_Q$. Операторы A_Q и B_Q называются соответственно *вещественной* и *мнимой частями* оператора R_Q. Положим $A_{Qs} = U_s A_Q U_s^{-1}$ и $B_{Qs} = U_s B_Q U_s^{-1}$. В силу леммы 2.6 операторы $A_{Qs}, B_{Qs}\colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$ являются операторами умножения на матрицы $A_s = (R_s + R_s^*)/2$, $B_s = (R_s - R_s^*)/2i$, соответственно. Обозначим через P^R, P^{R^*}, P^A, $P^B\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ и P_s^R, $P_s^{R^*}$, P_s^A, $P_s^B\colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$ операторы ортогонального проектирования на подпространства $\mathcal{R}(R_Q)$, $\mathcal{R}(R_Q^*)$, $\mathcal{R}(A_Q)$, $\mathcal{R}(B_Q)$ и $\mathcal{R}(R_{Qs})$, $\mathcal{R}(R^*_{Qs})$, $\mathcal{R}(A_{Qs})$, $\mathcal{R}(B_{Qs})$, соответственно.

Операторы P_s^R, $P_s^{R^*}$, P_s^A, P_s^B суть операторы умножения на некоторые матрицы, которые мы также обозначим P_s^R, $P_s^{R^*}$, P_s^A, P_s^B, соответственно.

Лемма 2.12. $L_2(Q) = \mathcal{N}(R_Q) \oplus \mathcal{R}(R_Q^*)$, $L_2(Q) = \mathcal{N}(R_Q^*) \oplus \mathcal{R}(R_Q)$, *при этом*

$$\|P^{R^*} u\|_{L_2(Q)} \leqslant c\|R_Q u\|_{L_2(Q)}, \tag{2.7}$$

$$\|P^R u\|_{L_2(Q)} \leqslant c\|R_Q^* u\|_{L_2(Q)} \tag{2.8}$$

для любой функции $u \in L_2(Q)$, *где* $c > 0$ — *постоянная, не зависящая от* u.

Ограниченный самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве H назовем *положительным*, если $(Au, u)_H > 0$ для любого $0 \neq u \in H$, и *неотрицательным*, если $(Au, u)_H \geqslant 0$ для любого $u \in H$. Назовем оператор A *положительно определенным*, если $(Au, u)_H \geqslant c\|u\|_H^2$ для любого $u \in H$, где $c > 0$.

Рассмотрим разностные операторы R_i $(i = 1, 2)$ вида (2.1) с коэффициентами a_{ih} вместо a_h $(h \in \mathcal{M})$. Положим $R_{iQ} = P_Q R_i I_Q$. Определим матрицы R_{is} порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами r_{kl}^{is} $(k, l = 1, \ldots, N(s))$ по формуле (2.6) с коэффициентами a_{ih} вместо a_h.

Лемма 2.13.

1. *Пусть* $\mathcal{N}(R_{1s}) \subset \mathcal{N}(R_{2s})$ $(s = 1, 2, \ldots)$. *Тогда* $\mathcal{N}(R_{1Q}) \subset \mathcal{N}(R_{2Q})$, *и для любой функции* $u \in L_2(Q)$ *справедливо неравенство*

$$\|R_{2Q} u\|_{L_2(Q)} \leqslant c_1 \|R_{1Q} u\|_{L_2(Q)}, \tag{2.9}$$

где $c_1 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* u.

2. *Если, кроме того,* $R_{1Q} = A_Q$, $R_{2Q} = B_Q$, *а матрицы* A_s $(s = 1, 2, \ldots)$ *неотрицательны, то оператор* A_Q — *неотрицательный, при этом* $\mathcal{N}(R_Q) = \mathcal{N}(R_Q^*) = \mathcal{N}(A_Q)$ *и* $\mathcal{R}(R_Q) = \mathcal{R}(R_Q^*) = \mathcal{R}(A_Q)$.

Лемма 2.14. *Для любой* $u \in L_2(Q)$ *справедливо равенство*

$$P^R u = \sum_s U_s^{-1} P_s^R U_s P_s u, \tag{2.10}$$

$$P^{R^*} u = \sum_s U_s^{-1} P_s^{R^*} U_s P_s u. \tag{2.11}$$

Обозначим через $W_2^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$, пространство Соболева комплекснозначных функций с нормой

$$\|u\|_{W_2^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_Q |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \ldots \mathcal{D}_n^{\alpha_n}$, $\mathcal{D}_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Лемма 2.15. *Оператор R_Q непрерывно отображает $\mathring{W}_2^k(Q)$ в $W_2^k(Q)$, при этом для всех $u \in \mathring{W}_2^k(Q)$ справедливо равенство $\mathcal{D}^\alpha R_Q u = R_Q \mathcal{D}^\alpha u$ ($|\alpha| \leqslant k$), где $\mathring{W}_2^k(Q)$ — замыкание множества $\dot{C}^\infty(Q)$ в $W_2^k(Q)$.*

3. Априорные оценки решений

В данном разделе мы приведем основной результат настоящей работы. В первой теореме мы докажем оценку снизу действительной части скалярного произведения $(L_R u, u)_{L_2(Q)}$. Из второй теоремы следует оценка модуля мнимой части скалярного произведения $(L_R u, u)_{L_2(Q)}$ сверху. Таким образом, рассматриваемый оператор L_R является секториальным, для которого существует фридрихсово расширение.

1. Введем неограниченный дифференциально-разностный оператор $L_R : D(L_R) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле

$$L_R\, u(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} b_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}\, R_{ijQ} u(x), \tag{3.1}$$

с областью определения $D(L_R) = \dot{C}^\infty(Q)$, где $b_{ij}(x) = b_{ji}(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — вещественнозначные M-периодические функции,

$$R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q, \qquad R_{ij} = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh}\, u(x+h) \qquad (i,j = 1, \ldots, n). \tag{3.2}$$

Введем матрицы R_{ijs} порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, \text{ если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ \quad 0, \text{ если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Наряду с матрицами R_{ijs}, введем матрицы $\widehat{R}_{ijs}$ следующим образом. Пусть $x \in \overline{Q}_{s1}$ — произвольная точка. Рассмотрим все точки $x^i \in \overline{Q}$ такие, что $x^i - x \in M$. Поскольку область Q — ограниченная, множество $\{x^i\}$ состоит из конечного числа точек $I = I(s,x)$ ($I \geqslant N(s)$). Занумеруем точки x^i так, что $x^i = x + h_{si}$ для $i = 1, \ldots, N = N(s)$, $x^1 = x$. Введем матрицы $\widehat{R}_{ijs} = \widehat{R}_{ijs}(x)$ порядка $I \times I$ ($I = I(s,x)$) с элементами

$$\widehat{r}_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, \text{ если } h = x^l - x^k \in \mathcal{M}, \\ \quad 0, \text{ если } h = x^l - x^k \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Отметим, что, хотя элементы матриц $\widehat{R}_{ijs}$ являются константами, порядок этих матриц зависит от выбора точки x.

Замечание 3.1. Если $I(s,x) = N(s)$, то $\widehat{R}_{ijs}(x) = R_{ijs}$. Если $I(s,x) > N(s)$, то матрица R_{ijs} получается из матрицы $\widehat{R}_{ijs}(x)$ вычеркиванием последних $I(s,x) - N(s)$ строк и столбцов.

Обозначим через $A_{ijs} = (R_{ijs} + R_{jis}^*)/2$, $\widehat{A}_{ijs}(x) = (\widehat{R}_{ijs}(x) + \widehat{R}_{jis}^*(x))/2$, $B_{ijs} = (R_{ijs} - R_{jis}^*)/2i$, $\widehat{B}_{ijs}(x) = (\widehat{R}_{ijs}(x) - \widehat{R}_{jis}^*(x))/2i$ ($i,j = 1, \ldots, n$). Пусть $A_{ijQ} = (R_{ijQ} + R_{jiQ}^*)/2$ и $B_{ijQ} = (R_{ijQ} - R_{jiQ}^*)/2i$.

Перед получением априорных оценок продемонстрируем на примере разницу между матрицами R_{ijs} и $\widehat{R}_{ijs}(x)$.

Пример 3.1. Пусть $Q = (0,2) \times (0,1)$ и $Ru(x) = a_0 u(x) + a_1(u(x_1+1, x_2) + u(x_1-1, x_2))$, где числа a_0, $a_1 \in \mathbb{C}$. Разбиение $\mathcal{R}$ области Q состоит из одного класса подобластей: Q_{11} и Q_{12} (см. пример 2.1). Тогда $R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}$, $\widehat{R}_1(x) = R_1$, если $x \in \overline{Q}_{11} \setminus \{\{0\} \times (0,1)\}$, $\widehat{R}(x) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$, если $x \in \{\{0\} \times (0,1)\}$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

Условие 3.1 (эллиптичности).*Существуют нетривиальные самосопряженные неотрицательные разностные операторы R_{iQ} такие, что справедливо неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\widehat{A}_{ijs}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geqslant \sum_{i=1}^{n} \widehat{R}_{is}(x)\,\xi_i^2$$

для любых $x \in \overline{Q}_{s1}$ $(s = 1, 2, \dots)$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $\widehat{R}_{is}$—матрицы, соответствующие разностному оператору R_{iQ}.

Условие 3.2 (вырождения). *Множество $S = \{s : \det A_{iis} = 0,\ i = 1, \dots,\ n\}$ непусто.*

Условие 3.3 (подчиненности). $\mathcal{N}(A_{ijs}) \subset \mathcal{N}(B_{ijs})$, $\mathcal{N}(A_{iis}) = \mathcal{N}(R_{is})$, $\mathcal{N}(A_{iis}) \subset \mathcal{N}(A_{ijs}) \cap \mathcal{N}(A_{jis})$, $i, j = 1, \dots n$, *где $\mathcal{N}(\cdot)$—ядро матрицы.*

Очевидно, $\overline{Q} \subset \bigcup\limits_{x\in\overline{Q}} B_{\delta/2}(x)$, где $B_{\delta/2}(x)$ — открытые шары радиуса $\delta/2$ с центром в точке x, $\delta = \delta(x)$. Для каждого $x \in \overline{Q}$ выберем $\delta = \delta(x)$ так, что $2\delta(x) < \min\{1/2, r, a\}$. Здесь, поскольку Q — ограниченная область, $\delta = \delta(x)$ можно выбрать так, что $r = r(x) = \inf \rho(x + h, Q) > 0$ $(h : x+h \notin \overline{Q})$. Число a не зависит от x и будет выбрано позднее. Так как $\overline{Q}$ компактно, существует конечное подпокрытие $\overline{Q}$ шарами $B_{\delta/2}(y^k)$ $(y^k \in \overline{Q},\ k = 1, \dots, J)$. Обозначим $G = \bigcup\limits_{k} B_{\delta/2}(y^k)$.

Лемма 3.1. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — область, удовлетворяющая условию* 2.1. *Тогда существуют неотрицательные M-периодические в $\overline{G}$ функции $\varphi_k \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(k = 1, \dots, J)$ такие, что*:

1. $\sum\limits_{k=1}^{J} \varphi_k^2(x) \leqslant 1$ *при* $x \in \mathbb{R}^n$;
2. $\sum\limits_{k}^{J} \varphi_k^2(x) = 1$ *при* $x \in \overline{G}$;
3. $\varphi_k(x) = 0$ *при* $x \notin \Omega_k$, *где* $\Omega_k = \bigcup\limits_{h} \big(B_\delta(y^k) + h\big)$ $(h \in M : (B_\delta(y^k) + h) \bigcap \overline{G} \neq \varnothing)$.

Доказательство можно найти в [29, гл. 2, лемма 9.1].

2. Получим оценку снизу для квадратичной формы $\operatorname{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)}$.

Теорема 3.1. *Пусть область Q удовлетворяет условию* 2.1 *и выполнены условия* 3.1–3.3. *Тогда существуют такие константы $c_0 \geqslant 0$, $c_1 > 0$, что для любой функции $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ выполнено неравенство*

$$\operatorname{Re}(L_R u,\ u)_{L_2(Q)} + c_0 \sum_{i=1}^{n} (A_{iiQ} u,\ u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}. \tag{3.5}$$

Доказательство. I. Используя леммы 2.4, 2.10 и 3.1, формулу интегрирования по частям и формулу Лейбница, имеем

$$\operatorname{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)} = \sum_{i,j=1}^{n} \big(b_{ij}(x) A_{ijQ} u_{x_j}, u_{x_i}\big)_{L_2(Q)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \Big(b_{ij}(x) A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j}, (\varphi_k u)_{x_i}\Big)_{L_2(Q)} - \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \big(b_{ij}(x) A_{ijQ}\,((\varphi_k)_{x_j} u), (\varphi_k)_{x_i} u\big)_{L_2(Q)} -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \big(b_{ij}(x) A_{ijQ}\,((\varphi_k)_{x_j} u), \varphi_k u_{x_i}\big)_{L_2(Q)} - \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \big(b_{ij}(x) A_{ijQ}\,(\varphi_k u_{x_j}), (\varphi_k)_{x_i} u\big)_{L_2(Q)}. \tag{3.6}$$

Так как $\varphi_k \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, то верны следующие оценки:

$$\|\varphi_k v\|_{L_2(Q)} \leqslant \|v\|_{L_2(Q)}, \tag{3.7}$$

$$\|(\varphi_k)_{x_i} v\|_{L_2(Q)} \leqslant k_1 \|v\|_{L_2(Q)}, \tag{3.8}$$

$$\|\varphi_k b_{ij} v\|_{L_2(Q)} \leqslant k_2 \|v\|_{L_2(Q)}, \tag{3.9}$$

$$\|(\varphi_k)_{x_i} b_{ij} v\|_{L_2(Q)} \leqslant k_3 \|v\|_{L_2(Q)} \tag{3.10}$$

для любой функции $v \in L_2(Q)$, где $k_1, k_2, \ldots > 0$ — константы, не зависящие от функций, входящих в неравенства. Из леммы 2.12 следует, что

$$\left\|P^{A_{ij}} v\right\|_{L_2(Q)} \leqslant k_4 \left\|A^*_{ijQ} v\right\|_{L_2(Q)} \tag{3.11}$$

для любой $v \in L_2(Q)$.

Из лемм 2.10, 2.12, неравенства Коши—Буняковского, неравенств (3.7)–(3.11), а также неравенства $ab \leqslant \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$ $(a, b \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0)$ получаем

$$\begin{gathered}
\left|\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(b_{ij} A_{ijQ} \left(\varphi_k u_{x_j}\right),\ (\varphi_k)_{x_i} u\right)_{L_2(Q)}\right| = \left|\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \left(A_{ijQ} \left(\varphi_k b_{ij} u_{x_j}\right),\ P^{A_{ij}} \left((\varphi_k)_{x_i} u\right)\right)_{L_2(Q)}\right| \leqslant \\
\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \|A_{ijQ} \left(\varphi_k b_{ij} u_{x_j}\right)\|_{L_2(Q)} \cdot \|P^{A_{ij}} \left((\varphi_k)_{x_i} u\right)\|_{L_2(Q)} \leqslant \\
\leqslant k_4 \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \|A_{ijQ} \left(\varphi_k b_{ij} u_{x_j}\right)\|_{L_2(Q)} \cdot \|A^*_{ijQ} \left((\varphi_k)_{x_i} u\right)\|_{L_2(Q)} = \\
= k_4 \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \|\varphi_k b_{ij} A_{ijQ} u_{x_j}\|_{L_2(Q)} \cdot \|(\varphi_k)_{x_i} A^*_{ijQ} u\|_{L_2(Q)} \leqslant \\
\leqslant k_1 k_2 k_4 J \sum_{i,j=1}^{n} \|A^*_{ijQ} u\|_{L_2(Q)} \cdot \|A_{ijQ} u_{x_j}\|_{L_2(Q)} \leqslant \\
\leqslant k_1 k_2 k_4 J \left(\varepsilon^{-1} \sum_{i,j=1}^{n} \|A^*_{ijQ} u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon \sum_{i,j=1}^{n} \|A_{jiQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}\right).
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Из определений матриц A_{ijs} и операторов A_{ijQ} следует, что $A^*_{ijs} = A_{jis}$ и $A^*_{ijQ} = A_{jiQ}$. Поэтому из условия 3.3 и леммы 2.13 (1) имеем

$$\begin{gathered}
\|A_{jiQ} v\|_{L_2(Q)} \leqslant k_5 \|A_{iiQ} v\|_{L_2(Q)}, \\
\|A^*_{ijQ} v\|_{L_2(Q)} = \|A_{jiQ} v\|_{L_2(Q)} \leqslant k_5 \|A_{iiQ} v\|_{L_2(Q)}
\end{gathered} \tag{3.13}$$

для любой функции $v \in L_2(Q)$. Тогда верно неравенство

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \left(b_{ij} A_{ijQ} \left(\varphi_k u_{x_j}\right),\ (\varphi_k)_{x_i} u\right)_{L_2(Q)}\right| \leqslant k_6 \left(\varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ} u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ} u_{x_i}\|_{L_2(Q)}\right). \tag{3.14}$$

Аналогично получаем

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \left(b_{ij} A_{ijQ} \left((\varphi_k)_{x_j} u\right),\ \varphi_k u_{x_i}\right)_{L_2(Q)}\right| \leqslant k_6 \left(\varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ} u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}\right). \tag{3.15}$$

Вновь используя леммы 2.10, 2.12, неравенство Коши—Буняковского и неравенства (3.8), (3.11), (3.13), имеем

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k} \left(b_{ij} A_{ijQ} \left((\varphi_k)_{x_j} u\right),\ (\varphi_k)_{x_i} u\right)_{L_2(Q)}\right| \leqslant k_7 \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ} u\|^2_{L_2(Q)}. \tag{3.16}$$

Из (3.6), (3.14), (3.15), (3.16) имеем

$$\operatorname{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant \sum_{k=1}^{J} \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij} A_{ijQ} \left(\varphi_k u\right)_{x_j}, (\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)} -$$

$$- \left(k_7 + 2k_6\varepsilon^{-1}\right) \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ}u\|^2_{L_2(Q)} - 2k_6\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ}u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.17)$$

Теперь оценим снизу второе слагаемое левой части неравенства (3.5). Из леммы 2.12 и условия 3.1 получим

$$\sum_{i=1}^{n} (A_{iiQ}u,\ u)_{L_2(Q)} = \sum_{i=1}^{n} (A_{iiQ}P^{A_{ii}}u,\ P^{A_{ii}}u)_{L_2(Q)} \geqslant k_8 \sum_{i=1}^{n} \|P^{A_{ii}}u\|^2_{L_2(Q)} \geqslant k_9 \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ}u\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.18)$$

Таким образом из (3.17), (3.18) получаем

$$\operatorname{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)} + c_0 \sum_{i=1}^{n} (A_{iiQ}u,\ u)_{L_2(Q)} \geqslant \sum_{k=1}^{J} \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij} A_{ijQ} \left(\varphi_k u\right)_{x_j}, \left(\varphi_k u\right)_{x_i}\right)_{L_2(Q)} +$$
$$+ \left(c_0 k_9 - k_7 - 2k_6\varepsilon^{-1}\right) \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ}u\|^2_{L_2(Q)} - 2k_6\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|A_{iiQ}u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.19)$$

II. Рассмотрим теперь скалярное произведение $\sum\limits_{i=1}^{n} (R_{iQ}u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)}$. Используя лемму 3.1 и формулу Лейбница, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} (R_{iQ}u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(R_{iQ}\left(\varphi_k u_{x_i}\right), \varphi_k u_{x_i}\right)_{L_2(Q)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(R_{iQ}\left(\varphi_k u\right)_{x_i}, \left(\varphi_k u\right)_{x_i}\right)_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right), \left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right)_{L_2(Q)} -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right), \varphi_k u_{x_i}\right)_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(R_{iQ}\left(\varphi_k u_{x_i}\right), \left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right)_{L_2(Q)}.$$

Далее оценим модули последних трех слагаемых в правой части последнего равенства. Используя леммы 2.10, 2.12, неравенство Коши—Буняковского, а также неравенства (3.8), (3.11), получим

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right), \left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right)_{L_2(Q)} \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right), P^{R_i}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right)\right)_{L_2(Q)} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \|R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right)\|_{L_2(Q)} \cdot \|P^{R_i}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right)\|_{L_2(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant k_{10} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \|R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right)\|_{L_2(Q)} \cdot \|R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right)\|_{L_2(Q)} =$$
$$= k_{10} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \|\left(\varphi_k\right)_{x_i} R_{iQ}u\|_{L_2(Q)} \cdot \|\left(\varphi_k\right)_{x_i} R_{iQ}u\|_{L_2(Q)} \leqslant k_{11} \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ}u\|^2_{L_2(Q)}, \quad (3.20)$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right), \varphi_k u_{x_i}\right)_{L_2(Q)} \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \left(R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right), P^{R_i}\left(\varphi_k u_{x_i}\right)\right)_{L_2(Q)} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \|R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right)\|_{L_2(Q)} \cdot \|P^{R_i}\left(\varphi_k u_{x_i}\right)\|_{L_2(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant k_{10} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \|R_{iQ}\left(\left(\varphi_k\right)_{x_i} u\right)\|_{L_2(Q)} \cdot \|R_{iQ}\left(\varphi_k u_{x_i}\right)\|_{L_2(Q)} =$$

$$= k_{10} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \|(\varphi_k)_{x_i} R_{iQ} u\|_{L_2(Q)} \cdot \|\varphi_k R_{iQ} u_{x_i}\|_{L_2(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant k_1 k_{10} J \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u\|_{L_2(Q)} \cdot \|R_{iQ} u_{x_i}\|_{L_2(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant k_{12} \left(\varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} \right). \quad (3.21)$$

Аналогично имеем

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \big(R_{iQ} (\varphi_k u_{x_i}), (\varphi_k)_{x_i} u\big)_{L_2(Q)} \right| \leqslant k_{12} \left(\varepsilon^{-1} \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} \right). \quad (3.22)$$

Из (3.20)–(3.22) получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} (R_{iQ} u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{J} \big(R_{iQ} (\varphi_k u)_{x_i}, (\varphi_k u)_{x_i}\big)_{L_2(Q)} +$$
$$+ 2k_{12}\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} + (k_{11} + 2k_{12}\varepsilon^{-1}) \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.23)$$

С другой стороны, мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} (R_{iQ} u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} = \sum_{i=1}^{n} \big(R_{iQ} P^{R_i} u_{x_i}, P^{R_i} u_{x_i}\big)_{L_2(Q)} \geqslant$$
$$\geqslant k_{13} \sum_{i=1}^{n} \|P^{R_i} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} \geqslant k_{14} \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} P^{R_i} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} = k_{14} \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.24)$$

Объединяя (3.23) и (3.24), получаем

$$k_{14} \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} (R_{iQ} u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{J} \sum_{i=1}^{n} \big(R_{iQ} (\varphi_k u)_{x_i}, (\varphi_k u)_{x_i}\big)_{L_2(Q)} + 2k_{12}\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} + \big(k_{11} + 2k_{12}\varepsilon^{-1}\big) \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.25)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{J} \sum_{i=1}^{n} \big(R_{iQ} (\varphi_k u)_{x_i}, (\varphi_k u)_{x_i}\big)_{L_2(Q)} \geqslant$$
$$\geqslant (k_{14} - 2k_{12}\varepsilon) \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} - (k_{11} + 2k_{12}\varepsilon^{-1}) \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ} u\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.26)$$

III. Рассмотрим произвольную точку $y^k \in \overline{Q}$ из леммы 3.1. Существует подобласть Q_{sl} такая, что $y^k \in \overline{Q}_{sl}$. Обозначим $z^k = y^k - h_{sl}$. Тогда $z^k \in \overline{Q}_{s1}$. Определим вектор-функцию $W^k \in \dot{C}^{\infty, I}(B_\delta(z^k))$ с координатами

$$W_i^k(x) = (\varphi_k u)(x + z^{ki} - z^k) \qquad (x \in B_\delta(z^k)), \quad (3.27)$$

где $i = 1, \ldots, I = I(s, z^k)$, а точки z^{ki}, соответствующие точке z^k, определяются по правилу, описанному в начале параграфа. Матрицы $\widehat{A}_{ijs}(x)$ могут иметь различный порядок в различных точках $x \in B_\delta(z^k)$. Поэтому мы рассмотрим вспомогательные матрицы $\widehat{A}^k_{ijs}$ порядка $I(s, z^k) \times I(s, z^k)$, определенные по формуле $\widehat{A}^k_{ijs} = \widehat{A}_{ijs}(z^k)$. Введем преобразование Фурье вектор-функции W по формуле $\widehat{W}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} W(x)\, dx$. Теперь, используя теорему Планшереля, условие 3.1 и лемму 2.10, мы имеем

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(R_{iQ}\,(\varphi_k u)_{x_i}, (\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(\widehat{R}^k_{is}(W^k)_{x_i}, (W^k)_{x_i}\right)_{L_2^I(\mathbb{R}^n)} = \\
= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\widehat{R}^k_{is}\xi_i^2\widehat{W}^k, \widehat{W}^k\right)_{\mathbb{C}^I}\, d\xi \leqslant \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(b_{ij}(z^k)\widehat{A}^k_{ijs}\xi_i\xi_j\widehat{W}^k, \widehat{W}^k\right)_{\mathbb{C}^I}\, d\xi = \\
= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(b_{ij}(z^k)\widehat{A}^k_{ijs}(W^k)_{x_j}, (W^k)_{x_i}\right)_{L_2^I(\mathbb{R}^n)} = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(b_{ij}(z^k)A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j}, (\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)} = \\
= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(b_{ij}(x)A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j}, (\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)} - \\
- \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left((b_{ij}(z^k) - b_{ij}(x))A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j}, (\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)}, \qquad (3.28)
\end{gathered}$$

где $\widehat{R}^k_{is}$ — матрицы порядка $I(s,z^k)\times I(s,z^k)$, определенные по формуле $\widehat{R}^k_{is} = \widehat{R}_{is}(z^k)$.

В силу равномерной непрерывности функций $b_{ij}(x)$ на множестве $\overline{Q}_{s1}$ и M-периодичности на $\overline{Q}$, мы получим

$$\begin{gathered}
\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left((b_{ij}(z^k) - b_{ij}(x))A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j}, (\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)} \leqslant \\
\leqslant \varepsilon_1(a)\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k}\|A_{ijQ}(\varphi_k u)_{x_j}\|_{L_2(Q)}\cdot\|P^{A_{ij}}(\varphi_k u)_{x_i}\|_{L_2(Q)} \leqslant \\
\leqslant \varepsilon_1(a)k_{15}\sum_{i,j=1}^{n}\|A_{ijQ}u_{x_j}\|^2_{L_2(Q)} + \|A^*_{ijQ}u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \qquad (3.29)\\
\leqslant \varepsilon_1(a)k_{16}\sum_{i,j=1}^{n}\|A_{ijQ}(\varphi_k u)_{x_j}\|^2_{L_2(Q)} + \|A_{jiQ}u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}\varepsilon_1(a)k_5k_{17}\sum_{i}\|A_{iiQ}u_{x_j}\|^2_{L_2(Q)},
\end{gathered}$$

где $\varepsilon_1(a)\to 0$ при $a\to 0$. Из (3.28) имеем

$$\begin{gathered}
\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(b_{ij}(x)A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j}, (\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)} \geqslant \\
\geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(R_{iQ}\,(\varphi_k u)_{x_j}, (\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)} + \varepsilon_1(a)k_5k_{17}\sum_{i,j=1}^{n}\|A_{ijQ}u_{x_j}\|_{L_2(Q)}. \qquad (3.30)
\end{gathered}$$

Из условия 3.3 и леммы 2.13 следует, что

$$\|A_{iiQ}v\|_{L_2(Q)} \leqslant k_{18}\|R_{iQ}v\|_{L_2(Q)}, \qquad (3.31)$$

$$\|A_{iiQ}v\|_{L_2(Q)} \geqslant k_{19}\|R_{iQ}v\|_{L_2(Q)} \qquad (3.32)$$

для любой функции $v\in L_2(Q)$.

Используя неравенства (3.19), (3.26) и (3.28)–(3.32), получим

$$\begin{gathered}
\operatorname{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)} + c_0\sum_{i=1}^{n}(A_{iiQ}u,\ u)_{L_2(Q)} \geqslant \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{J}\left(b_{ij}A_{ijQ}\,(\varphi_k u)_{x_j}, (\varphi_k u)_{x_i}\right)_{L_2(Q)} + \\
+ k_{19}(c_0k_9 - k_7 - 2k_6\varepsilon^{-1})\sum_{i=1}^{n}\|R_{iQ}u\|^2_{L_2(Q)} - 2k_6k_{18}\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\|R_{iQ}u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)} \geqslant
\end{gathered}$$

$$\geqslant \left[k_{19}\left(c_0k_9 - k_7 - 2k_6\varepsilon^{-1}\right) - \left(k_{11} + 2k_{12}\varepsilon^{-1}\right)\right]\sum_{i=1}^n \|R_{iQ}u\|^2_{L_2(Q)} +$$

$$+\left[(k_{14} - 2k_{12}\varepsilon) + \varepsilon_1(a)k_5k_{17}k_{19} - 2k_6k_{18}\varepsilon\right]\sum_{i=1}^n \|R_{iQ}u_{x_i}\|^2_{L_2(Q)}. \quad (3.33)$$

Выберем константы $\varepsilon > 0$, $a > 0$ так, что выполнено условие

$$(k_{14} - 2k_{12}\varepsilon) + \varepsilon_1(a)k_5k_{17}k_{19} - 2k_6k_{18}\varepsilon > 0. \quad (3.34)$$

Затем выберем $c_0 > 0$ так, что

$$k_{19}\left(c_0k_9 - k_7 - 2k_6\varepsilon^{-1}\right) - \left(k_{11} + 2k_{12}\varepsilon^{-1}\right) > 0. \quad (3.35)$$

Из (3.33)–(3.35) получаем заключение теоремы. □

3. Введем неограниченный дифференциально-разностный оператор $L_R^+ : D(L_R^+) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле $L_R^+u = -\sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}b_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}R^*_{jiQ}\,u(x)$, $u \in D(L_R^+) = \dot{C}^\infty(Q)$.

Теорема 3.2. *Пусть область Q удовлетворяет условию* 2.1 *и выполнены условия* 3.1–3.3. *Тогда существуют такая постоянная $c_2 > 0$, что для всех $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$*

$$\left|\left(\frac{L_R + L_R^+}{2}u, v\right)_{L_2(Q)} + c_0\sum_{i=1}^n (A_{iiQ}u, v)_{L_2(Q)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_2\left[\sum_{i,j=1}^n \|R_{iQ}u_{x_i}\|_{L_2(Q)}\cdot\left\|R_{jQ}v_{x_j}\right\|_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n \|R_{iQ}u\|_{L_2(Q)}\cdot\|R_{iQ}v\|_{L_2(Q)}\right], \quad (3.36)$$

$$\left|\left(\frac{L_R - L_R^+}{2i}u, v\right)_{L_2(Q)}\right| \leqslant c_2\sum_{i,j=1}^n \|R_{iQ}u_{x_i}\|_{L_2(Q)}\cdot\left\|R_{jQ}v_{x_j}\right\|_{L_2(Q)}. \quad (3.37)$$

Доказательство. Интегрируя по частям и используя неравенство Коши—Буняковского, а также леммы 2.12, 2.13 (1), из условий 3.3 получим

$$\left|\left(\frac{L_R + L_R^+}{2}u, v\right)_{L_2(Q)}\right| = \left|\sum_{i,j=1}^n (A_{ijQ}u_{x_j}, b_{ij}v_{x_i})_{L_2(Q)}\right| =$$

$$= \left|\sum_{i,j=1}^n (A_{ijQ}u_{x_j}, b_{ij}P^{A_{ij}}v_{x_i})_{L_2(Q)}\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^n \left\|A_{ijQ}u_{x_j}\right\|_{L_2(Q)}\cdot\left\|b_{ij}P^{A_{ij}}v_{x_i}\right\|_{L_2(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant k_1\sum_{i,j=1}^n \left\|A_{ijQ}u_{x_j}\right\|_{L_2(Q)}\cdot\left\|A^*_{ijQ}v_{x_i}\right\|_{L_2(Q)} \leqslant k_2\sum_{i,j=1}^n \left\|R_{jQ}u_{x_j}\right\|_{L_2(Q)}\cdot\|R_{iQ}v_{x_i}\|_{L_2(Q)}. \quad (3.38)$$

Аналогично, повторяя эти рассуждения, имеем

$$\left|\left(\frac{L_R - L_R^+}{2i}u, v\right)_{L_2(Q)}\right| \leqslant k_1\sum_{i,j=1}^n \left\|R_{jQ}u_{x_j}\right\|_{L_2(Q)}\cdot\|R_{iQ}v_{x_i}\|_{L_2(Q)}, \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n (A_{iiQ}u, v)_{L_2(Q)}\right| &= \left|\sum_{i=1}^n (A_{iiQ}u, P^{A_{ii}}v)_{L_2(Q)}\right| \leqslant \\ &\leqslant k_3\sum_{i=1}^n \|A_{iiQ}u\|_{L_2(Q)}\cdot\|A_{iiQ}v\| \leqslant k_4\sum_{i=1}^n \|R_{iQ}u\|_{L_2(Q)}\cdot\|R_{iQ}v\|.\end{aligned} \quad (3.40)$$

Из (3.38)–(3.40) следует утверждение теоремы. □

Если в теореме 3.2 в качестве функции v взять функцию u, то мы получим оценку для мнимой части скалярного произведения $\mathrm{Im}(L_R u, u)_{L_2(Q)}$. Таким образом, рассматриваемый дифференциально-разностный оператор является секториальным и для него существует фридрихсово расширение.

Автор благодарен профессору А. Л. Скубачевскому за постановку задачи, ценные замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739-740.
2. *Варфоломеев Е. М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *21*. — С. 5–36.
3. *Вишик М. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области// Мат. сб. — 1954. — *35*, № 3. — С. 513–568.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 2. — М.: Мир, 1966.
5. *Иванова Е. П.* Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *59*. — С. 74–96.
6. *Каменский А. Г.* Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами// Дифф. уравн. — 1976. — *12*, № 12. — С. 815–824.
7. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом// Дифф. уравн. — 1974. — *10*, No 3. — С. 409–418.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
9. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области// Докл. АН СССР. — 1951. — *77*. — С. 181–183.
10. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
11. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
12. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
13. *Муравник А. Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 4. — С. 566–576.
14. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой// Итоги науки. Сер. Мат. Мат. анал. — 1971. — *1969*. — С. 7–252.
15. *Попов В. А.* Следы обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *62*. — С. 124—139.
16. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36*. — С. 125–142.
17. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 130–140.
18. *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений// Мат. заметки. — 1996. — *59*, № 1. — С. 103–113.
19. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *36*. — С. 125–142.
20. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Дифф. уравн. — 1983. — *19*, № 3. — С. 457–470.
21. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с вырождением// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1997. — *59*. — С. 240–285.
22. *Скубачевский А. Л.* Нелокальные эллиптические краевые задачи с вырождением// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
23. *Солонуха О. В.* Об одном классе существенно нелинейных эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Тр. МИАН. — 2013. — *283*. — С. 233–251.
24. *Тасевич А. Л.* Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 153–165.
25. *Фикера Г.* К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка// Математика. — 1963. — *7*, № 6. — С. 99–121.

26. *Kamenskii G. A., Myshkis A. D.* Formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating arguments containing several highest-order terms// Differ. Equ. — 1975. — *10.* — C. 302–309.
27. *Popov V. A., Skubachevskii A. L.* On smoothness of solutions of some elliptic functional-differential equations with degenerations// Russ. J. Math. Phys. — 2013. — *20*, № 4. — C. 492–507.
28. *Skubachevskii A. L.* The first boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — *63*, № 3. — C. 332–361.
29. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.
30. *Solonukha O. V.* On a class of essentially nonlinear elliptic differential-difference equations// Proc. Steklov Inst. Math. — 2013. — *283.* — C. 226–244.
31. *Solonukha O. V.* On nonlinear and quasiliniear elliptic functional differential equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2016. — *9* (3). — C. 869–893. — doi: 10.3934/dcdss.2016033.
32. *Varfolomeev E. M.* On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics// J. Math. Sci. — 2008. — *153*, № 5. — C. 649–682.

Владимир Алексеевич Попов
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: volodimir.a@gmail.com, popovvladimir.a@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-131-147 UDC 517.9

Estimates of Solutions of Elliptic Differential-Difference Equations with Degeneration

© 2018 **V. A. Popov**

Abstract. We consider a second-order differential-difference equation in a bounded domain $Q \subset \mathbb{R}^n$. We assume that the differential-difference operator contains some difference operators with degeneration corresponding to differentiation operators. Moreover, the differential-difference operator under consideration cannot be expressed as a composition of a difference operator and a strongly elliptic differential operator. Degenerated difference operators do not allow us to obtain the Gårding inequality.

We prove a priori estimates from which it follows that the differential-difference operator under consideration is sectorial and its Friedrichs extension exists. These estimates can be applied to study the spectrum of the Friedrichs extension as well.

It is well known that elliptic differential-difference equations may have solutions that do not belong even to the Sobolev space $W_2^1(Q)$. However, using the obtained estimates, we can prove some smoothness of solutions, though not in the whole domain Q, but inside some subdomains Q_r generated by the shifts of the boundary, where $\bigcup_r \overline{Q_r} = \overline{Q}$.

REFERENCES

1. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, "O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach" [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739-740 (in Russian).
2. E. M. Varfolomeev, "O nekotorykh svoystvakh ellipticheskikh i parabolicheskikh funktsional'no-differentsial'nykh operatorov, voznikayushchikh v nelineynoy optike" [On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **21**, 5–36 (in Russian).
3. M. I. Vishik, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy, vyrozhdayushchikhsya na granitse oblasti" [Boundary-value problems for elliptic equations degenerating on the boundary of the domain], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1954, **35**, No. 3, 513–568 (in Russian).
4. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. T. 2* [Linear Operators. Vol. 2], Mir, Moscow, 1966 (Russian translation).
5. E. P. Ivanova, "Nepreryvnaya zavisimost' resheniy kraevykh zadach dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy ot sdvigov argumenta" [Continuous dependence of solutions of boundary-value problems for

differential-difference equations on shifts of the argument], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **59**, 74–96 (in Russian).

6. A. G. Kamenskiy, "Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal'no simmetrichnymi differentsial'no-raznostnymi operatorami" [Boundary-value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **12**, No. 12, 815–824 (in Russian).
7. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, "K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom" [To the setting of boundary-value problems for differential equations with deviating argument], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, No 3, 409–418 (in Russian).
8. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
9. M. V. Keldysh, "O nekotorykh sluchayakh vyrozhdeniya uravneniy ellipticheskogo tipa na granitse oblasti" [On some cases of degeneration of elliptic equations on the boundary of the domain], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1951, **77**, 181–183 (in Russian).
10. S. G. Kreyn, *Lineynye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
11. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
12. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Differential Equations with Partial Derivatives], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
13. A. B. Muravnik, "Asimptoticheskie svoystva resheniy zadachi Dirikhle v poluploskosti dlya nekotorykh differentsial'no-raznostnykh ellipticheskikh uravneniy" [Asymptotic properties of solutions of the Dirichlet problem in a half-plane for some differential-difference elliptic equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **100**, No. 4, 566–576 (in Russian).
14. O. A. Oleynik and E. V. Radkevich, "Uravneniya vtorogo poryadka s neotritsatel'noy kharakteristicheskoy formoy" [Second-order equations with nonnegative characteristic form], *Itogi nauki. Ser. Mat. Mat. anal.* [Totals Sci. Ser. Math. Math. Anal.], 1971, **1969**, 7–252 (in Russian).
15. V. A. Popov, "Sledy obobshchennykh resheniy ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy s vyrozhdeniem" [Traces of generalized solutions of elliptic differential-difference equations with degeneration], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **62**, 124—139 (in Russian).
16. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, "Apriornye otsenki dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh operatorov s vyrozhdeniem" [A priori estimates for elliptic differential-difference operators with degeneration], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 125–142 (in Russian).
17. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, "Gladkost' obobshchennykh resheniy ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy s vyrozhdeniem" [Smoothness of generalized solutions of elliptic differential-difference equations with degeneration], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 130–140 (in Russian).
18. L. E. Rossovskii, "Koertsitivnost' funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy" [Coercivity of functional differential equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1996, **59**, No. 1, 103–113 (in Russian).
19. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contraction and dilatation of arguments of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **36**, 125–142 (in Russian).
20. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1983, **19**, No. 3, 457–470 (in Russian).
21. A. L. Skubachevskii, "Ellipticheskie differentsial'no-raznostnye uravneniya s vyrozhdeniem" [Ellipticheskie differentsial'no-raznostnye uravneniya s vyrozhdeniem], *Tr. Mosk. mat. ob-va.* [Tr. Mosk. mat. ob-va.], 1997, **59**, 240–285 (in Russian).
22. A. L. Skubachevskii, "Nelokal'nye ellipticheskie kraevye zadachi s vyrozhdeniem" [Nonlocal elliptic boundary-value problems with degeneration], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
23. O. V. Solonukha, "Ob odnom klasse sushchestvenno nelineynykh ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [On one class of essentially nonlinear elliptic differential-difference equations], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 233–251 (in Russian).
24. A. L. Tasevich, "Gladkost' obobshchennykh resheniy zadachi Dirikhle dlya sil'no ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s ortotropnymi szhatiyami" [Smoothness of generalized solutions of

the Dirichlet problem for strongly elliptic functional differential equations with orthotropic contractions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 153–165 (in Russian).
25. G. Fichera, "K edinoy teorii kraevykh zadach dlya elliptiko-parabolicheskikh uravneniy vtorogo poryadka" [Boundary problems in differential equations], *Matematika* [Mathematics], 1963, **7**, No. 6, 99–121 (Russian translation).
26. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, "Formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating arguments containing several highest-order terms," *Differ. Equ.*, 1975, **10**, 302–309.
27. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, "On smoothness of solutions of some elliptic functional-differential equations with degenerations," *Russ. J. Math. Phys.*, 2013, **20**, No. 4, 492–507.
28. A. L. Skubachevskii, "The first boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations," *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, No. 3, 332–361.
29. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
30. O. V. Solonukha, "On a class of essentially nonlinear elliptic differential-difference equations," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2013, **283**, 226–244.
31. O. V. Solonukha, "On nonlinear and quasiliniear elliptic functional differential equations," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2016, **9** (3), 869–893, doi: 10.3934/dcdss.2016033.
32. E. M. Varfolomeev, "On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics," *J. Math. Sci.*, 2008, **153**, No. 5, 649–682.

Vladimir A. Popov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: volodimir.a@gmail.com, popovvladimir.a@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 148–163

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-148-163 УДК 517.957

ОГРАНИЧЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ ДЛЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ДВАЖДЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ, ПОРОЖДЕННЫХ ЗАДАЧЕЙ МИКРОВОЛНОВОГО НАГРЕВА

© 2018 г. **С. ПОПОВ, Ф. РАЙТМАНН, С. СКОПИНОВ**

Аннотация. Рассматриваются дважды нелинейные эволюционные системы. Получены достаточные условия ограниченности их решений. Аналогичные результаты получены для одномерной задачи микроволнового нагрева. Вводятся понятия глобального процесса и локального многозначного процесса. Для глобального процесса и локального многозначного процесса представлены достаточные условия устойчивости на конечном интервале времени. Для локальных многозначных процессов найдены достаточные условия неустойчивости на конечном интервале времени. Для одномерной задачи микроволнового нагрева представлены условия устойчивости на конечном интервале времени.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Задача микроволнового нагрева без изменения фазы изучалась в [12, 22] и других работах. Для случая, когда изменение фазы имеет место, пространственно-одномерный микроволновой процесс изучался в [6, 16, 23]. Существование глобального решения (но не единственность) установлено в [16]. Асимптотическое поведение решений задачи микроволнового нагрева исследовалось в [6, 13]. В работе [2] получен ряд результатов, касающихся теории коциклов, порождаемых задачей микроволнового нагрева. Для исследования ограниченности и устойчивости решений общих нелинейных операторных уравнений хорошо разработаны методы частотной области (см. [3, 4, 20]). В рамках этого подхода нелинейности описываются квадратичными формами в гильбертовых пространствах. Используя эти формы и оператор переноса линейной части системы, можно сформулировать достаточные условия существования функционалов Ляпунова, гарантирующих ограниченность или устойчивость решений.

Чтобы описать задачу микроволнового нагрева с изменением фазы и граничным контролем, можно использовать оператор энтальпии параболической части системы. Это означает, что, кроме нелинейных членов из правой части уравнения, возникающих в силу закона Джоуля, у нас есть и второй нелинейный член. Полученную в результате задачу можно рассматривать как неавтономное дважды нелинейное уравнение (см. [10, 17, 18]). Особые свойства оператора энтальпии (равенство нулю площади стыка) позволяют использовать результаты [11] о существовании слабых решений; эти результаты основаны не на многозначных операторных уравнениях, а на интегральных тождествах. Единственность решений остается открытым вопросом. Таким образом, из решений системы невозможно построить коциклы процессов (подобно тому, как это сделано в [2, 13]). Вместо этого можно использовать понятия локального или глобального многозначного процессов (см. [8,14,23]). В случае локального процесса устойчивость или неустойчивость движений невозможно рассматривать на бесконечных интервалах времени. Поэтому приходится использовать некоторые элементы теории устойчивости на конечных интервалах времени (см. [7,21]).

Настоящая работа состоит из двух частей. В первой рассматриваются дважды нелинейные эволюционные уравнения с нелинейностями в правой и левой части. Для таких уравнений находятся достаточные условия ограниченности решений. Кроме того, эти результаты проверяются на одномерной задаче микроволнового нагрева. Во второй части работы вводятся элементы теории глобальных процессов и локальных многозначных процессов. Кроме того, для таких процессов вводится понятие устойчивости на конечном интервале времени, а для локальных многозначных процессов — еще и понятие неустойчивости на конечном интервале времени; для последнего свойства находятся достаточные условия наличия. Для одномерной задачи микроволнового нагрева рассматриваются функционалы, используемые для исследования устойчивости на конечном интервале времени.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Программы поддержки ведущих научных школ РФ на 2018-2019 гг. (грант № НШ-2858.2018.1) и DAAD.

2. Дважды нелинейные эволюционные системы

В этом разделе рассматриваются эволюционные уравнения системы из [10] с нелинейностями в левой и правой частях. Пусть $Y_{1,j}$ и $Y_{2,j}$, $j = 1, 0, -1,$ — вещественные гильбертовы пространства, а $(\cdot,\cdot)_{i,j}$ и $\|\cdot\|_{i,j}$ — скалярные произведения и нормы в $Y_{i,j}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 0, -1$, соответственно.

Плотные непрерывные вложения $Y_{1,1} \subset Y_{1,0} \subset Y_{1,-1}$ и $Y_{2,1} \subset Y_{2,0} \subset Y_{2,-1}$ называются *оснащенными структурами* гильбертовых пространств.

Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt}y_1 = A_1y_1 + B_1(g_1(z_1) + g_2(z_1, z_2)),\ z_1 = C_1y_1, \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{B}_2(y_2) = A_2y_2 + B_2\phi_2(z_1, z_2),\ z_2 = C_2y_2, \tag{2.2}$$

$$y_1(0) = y_{01}, y_2(0) = y_{02}, \tag{2.3}$$

где y_i из $Y_{i,1}$ — переменные фазового пространства, $A_i : Y_{i,1} \to Y_{i,-1}$, $B_i : \Xi_i \to Y_{i,-1}$, $C_i : Y_{i,1} \to Z_i$ — линейные ограниченные операторы, $\mathbb{B}_2 : Y_{2,1} \to Y_{2,1}$ — нелинейный оператор, $g_1 : Z_1 \to \Xi_1$, $g_2 : Z_1 \times Z_2 \to \Xi_1$, $\phi_2 : Z_1 \times Z_2 \to \Xi_2$ — нелинейные функции, Ξ_i и Z_i, $i = 1, 2,$ — гильбертовы пространства, отличные от исходного, y_{01} из $Y_{1,1}$, y_{02} из $Y_{2,1}$ — начальные состояния. Такая система называется *дважды нелинейной эволюционной системой*.

Определим гильбертовы пространства $Y_1 = Y_{1,1}\times Y_{2,1}$, $Y_0 = Y_{1,0}\times Y_{2,0}, Y_{-1} = Y_{1,-1}\times Y_{2,-1}$ со скалярными произведениями $((y_1, w_1), (y_2, w_2))_j = (y_1, y_2)_{1,j} + (w_1, w_2)_{2,j}$, $j = 1, 0, -1$, где $y_1, y_2 \in Y_{1,j}$, $w_1, w_2 \in Y_{2,j}$, и соответствующими нормами. Пусть $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ — билинейная форма (образование двойственных пар) на $Y_{-1} \times Y_1$, совпадающая с $(\cdot,\cdot)_0$ на $Y_0 \times Y_1$ и удовлетворяющая неравенству $|(\eta, y)_{-1,1}| \leqslant \|\eta\|_{-1}\|y\|_1$ для всех η из Y_{-1} и всех y из Y_1.

Пусть $A := (A_1, A_2) : Y_1 \to Y_{-1}$, $B := (B_1, B_2) : \Xi_1 \times \Xi_2 \to Y_{-1}$ и $C := (C_1, C_2) : Y_1 \to Z_1 \times Z_2$ — линейные ограниченные операторы, $\mathbf{B} := (I, \mathbb{B}_2) : Y_1 \to Y_2$ — нелинейный оператор, а $\phi(\cdot,\cdot) := (g_1(\cdot) + g_2(\cdot,\cdot), \phi_2(\cdot,\cdot)) : Z_1 \times Z_2 \to \Xi_1 \times \Xi_2$ — нелинейная функция.

Тогда систему (2.1)–(2.3) можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dt}B(y) = Ay + B\phi(z),\ z = Cy, \tag{2.4}$$

$$y(0) = y_0, \tag{2.5}$$

где $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$, $y_0 = (y_{01}, y_{02})$.

Пусть T_1 и T_2 — произвольные элементы расширенной числовой оси, для которых $T_1 < T_2$. В пространстве $L^2(T_1, T_2; Y_j)$, $j = 1, 0, -1$, определим норму $\|y\|_{2,j} := \Big(\int\limits_{T_1}^{T_2} \|y(t)\|_j^2\, dt\Big)^{1/2}$.

Обозначим через $\mathcal{W}(T_1, T_2; Y_1, Y_{-1})$ такое пространство функций y, что $y \in L^2(T_1, T_2; Y_1)$ и $\dot{y} \in L^2(T_1, T_2; Y_{-1})$, а норма в этом пространстве определена следующим образом: $\|y\|_{\mathcal{W}(T_1,T_2;Y_1,Y_{-1})} := \left(\|y\|^2_{2,1} + \|\dot{y}\|^2_{2,-1}\right)^{1/2}$.

Определение 2.1. *Решением* задачи (2.4)-(2.5) называется функция y из $\mathcal{W}(T_1, T_2, Y_1, Y_{-1}) \cap C(T_1, T_2; Y_0)$, удовлетворяющая системе (2.4)-(2.5) в вариационном смысле, т. е., функция, для которой следующие соотношения выполняются для почти всех t из $[T_1, T_2]$:

$$\left(\frac{d}{dt}B(y(t)) - Ay(t) - B\phi(z(t)), \eta - y(t)\right)_{-1,1} = 0 \quad \forall \eta \in Y_1,$$
$$z(t) = Cy(t), y(0) = y_0.$$

Наложим следующие требования.

(A1) $Z_1 = \Xi_1 = \Xi_2 = \mathbb{R}$.

(A2) Существуют такие $\varkappa_1, \varkappa_2$, что $\varkappa_1 < \varkappa_2$ и функция $\tilde{\phi}_1(z_1, t) := g_1(z_1) + g_2(z_1, z_2(t))$, где $z_2(t) = C_2 y_2(t)$ и $y_2(t)$ — произвольные решения задачи (2.1)–(2.3), удовлетворяет следующему условию: $\varkappa_1 z_1^2 \leqslant \tilde{\phi}_1(z_1, t) z_1 \leqslant \varkappa_2 z_1^2$ $\forall z_1 \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$.

(A3) Существует такое положительное $\varkappa_3$, что $(\mathbb{B}_2(y_2), A_2 y_2)_{2,1} \leqslant -\varkappa_3 \|y_2\|^2_{2,1}$, $\forall y_2 \in Y_{2,1}$.

(A4) Существует такое положительное $\varkappa_4$, что $(\mathbb{B}_2(y_2), B_2\tilde{\phi}_2(t, y_2))_{2,1} \leqslant \varkappa_4 \|y_2\|^2_{2,1}$ $\forall y_2 \in Y_{2,1}, t \geqslant 0$, если $\tilde{\phi}_2(t, z_2) = \phi_2(z_1(t), z_2)$.

(A5) Система (2.1)–(2.3) имеет слабое глобальное решение при любом y_0 из $Y_{1,1} \times Y_{2,1}$ (для некоторых случаев условия существования таких решений можно найти в [15, 19]).

Следующие три требования связаны с теоремой Лихтарникова—Якубовича о частотных областях эволюционных уравнений (см. [4]). Здесь и далее оператор из $\mathcal{L}(Y_{-1}, Y_0)$, обратный к A, обозначается через A^*, т. е. $(Ay, \eta)_{-1,1} = (y, A^*\eta)_{-1,1}$ $\forall y, \eta \in Y_1$.

(A6) Оператор A_1 системы (2.1) регулярен (см. [4]), т. е., для любого положительного T, любого y_{10} из $Y_{1,1}$, любого $\tilde{y}_{1T}$ из $Y_{1,1}$ и любого f_1 из $L^2(0, T; Y_{1,0})$ решения прямой задачи

$$\frac{d}{dt}y_1 = A_1 y_1 + f_1(t), \quad y_1(0) = y_{10}$$

и решения обратной задачи

$$\frac{d}{dt}\tilde{y}_1 = -A_1^*\tilde{y}_1 + f_1(t), \quad \tilde{y}_1(T) = \tilde{y}_{1T}$$

сильно непрерывны в норме пространства $Y_{1,1}$.

(A7) Пара (A_1, B_1) системы (2.1) L^2-управляема (см. [4]), т. е. для любого y_{10} из $Y_{1,0}$ существует такое управление ξ_1 из $L^2(0, T; Z_1)$, что задача

$$\frac{d}{dt}y_1 = A_1 y_1 + B_1\xi_1, \quad y_1(0) = y_{10}$$

имеет решение y_1 при любом положительном T.

(A8) *Передаточная функция* $\chi(s) = C_1(A_1 - sI_{Y_{1,1}})^{-1}B_1$, $s \in \rho(A_1)$, и эрмитова форма $\mathcal{F}(\xi_1, z_1) := \mathrm{Re}(\xi_1 - \varkappa_1 z_1)^*(\varkappa_2 z_1 - \xi_1)$, $\xi_1 \in \mathbb{C}, z_1 \in \mathbb{C}$, удовлетворяют следующему условию частотной области: $\mathrm{Re}(\varkappa_1\chi(i\omega) + I_{\Xi_1})^*(\varkappa_2\chi(i\omega) + I_{\Xi_1}) \geqslant 0$ $\forall \omega \in \mathbb{R}$.

При выполнении указанных требований справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если условия* (A1)–(A5) *и* (A6)–(A8) *выполняются при* $T_1 = 0$ *и при* $T_2 = +\infty$, *то решения системы* (2.1)–(2.3) *ограничены на полуоси* $(0, \infty)$.

Доказательство. Если условия (A2) и (A5) выполнены, то первая часть системы (2.1)–(2.3) принимает вид

$$\frac{d}{dt}y_1 = A_1 y_1 + B_1\tilde{\phi}_1(z_1, t), \quad z_1 = C_1 y_1, \tag{2.6}$$
$$y_1(0) = y_{01}. \tag{2.7}$$

Квадратичная форма $\mathcal{F}(\xi_1, z_1)$ из условия (A8) описывает нелинейность системы (2.6)-(2.7). В пространствах, описанных в условии (A1), эта форма является эрмитовой.

Из условий (A6)–(A8) следует, что в силу теоремы Лихтарникова—Якубовича (см. [4]) существуют такой оператор P из $\mathcal{L}(Y_{1,-1}, Y_{1,0}) \cap \mathcal{L}(Y_{1,0}, Y_{1,1})$ и такое положительное число δ, что $P = P^*$ и

$$2((A_1 + \lambda I)y_1 + B_1\xi_1, Py_1)_{1,1} + (\varkappa_2^{-1}\xi_1 - C_1y_1)(\varkappa_1^{-1}\xi_1 - C_1y_1) \leqslant \\ \leqslant -\delta(\|y_1\|_{1,1}^2 + |\xi_1|^2) \quad \forall y_1 \in Y_{1,1}, \xi_1 \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Подставляя $\xi_1 = 0$ в (2.8), получим следующее неравенство: $2((A_1 + \lambda I)y_1, Py_1)_{1,1} + (C_1y_1)^2 \leqslant -\delta\|y_1\|_{1,1}^2 \ \ \forall y_1 \in Y_{1,1}$. Используя общую лемму Ляпунова (см. [9]), получаем, что существует такое разбиение $Y_{1,0} = Y_{1,0}^+ \oplus Y_{1,0}^-$, что $\dim Y_{1,0}^- = 1$ и выполняются неравенства $P_{|Y_{1,0}^+} \geqslant 0$, $P_{|Y_{1,0}^-} \leqslant 0$. Рассмотрим функцию Ляпунова $\Phi(y_1) = (y_1, Py_1)_{1,1}$. Ее производная в силу системы (2.1)-(2.3) равна $\dot{\Phi}(y_1(t)) = 2(Py_1(t), A_1y_1(t) + B_1\tilde{\phi}_1(y_1(t), t))_{1,1}$. Тогда из (2.8) и условия (A2) выводим, что, если y_1 — решение системы (2.6)-(2.7), то $\Phi(y_1(t))$ удовлетворяет неравенству $\dfrac{d}{dt}\Phi(y_1(t)) \leqslant 0$ для п. в. $t \geqslant t_0$. Отсюда следует, что для п. в. t из полуинтервала $[t_0, +\infty)$ справедливо двойное неравенство

$$\|y_1(t)\|_{1,1} \leqslant c_1\|y_{01}(t)\|_{1,1} + c_2 \leqslant c_3,$$

где коэффициенты c_1, c_2 зависят только от A_1, B_1, C_1, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

Теперь рассмотрим вторую часть системы (2.1)-(2.3), имеющую вид

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{B}_2y_2) = A_2y_2 + B_2\tilde{\phi}_2(t, z_2), \quad z_2 = C_2y_2, \\ y_2(0) = y_{02}.$$

Рассмотрим функционал Ляпунова $\Phi(y_2) = (\mathbb{B}_2y_2, \mathbb{B}_2y_2)_{2,1}$. Вычислим производную в силу системы от функции $y_2 = y_2(t)$:

$$\frac{d}{dt}\Phi(y_2) = (\mathbb{B}_2y_2, \frac{d}{dt}\mathbb{B}_2y_2)_{2,1} = (\mathbb{B}_2y_2, A_2y_2 + B_2\tilde{\phi}_2(t, z_2))_{2,1} = \\ = (\mathbb{B}_2y_2, A_2y_2)_{2,1} + (\mathbb{B}_2y_2, B_2\tilde{\phi}_2(t, z_2))_{2,1} \text{ для п. в. } t \geqslant t_0.$$

Из условий (A3)-(A4) следует, что $\dfrac{d}{dt}\Phi(y_2(t)) < 0$ для п. в. t из полуинтервала $[t_0, +\infty)$, что дает ограниченность $\|y_2(t)\|_{2,1}$. □

Замечание 2.1. При некоторых дополнительных условиях на эволюционное уравнение (2.4)-(2.5) оно генерирует полудинамическую систему $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ в фазовом пространстве Y_0, т. е. семейство отображений $\{\varphi^t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, обладающее следующими свойствами:

- $\varphi^0 = \mathrm{Id}_{Y_0}$ есть тождественный оператор на Y_0;
- $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ для всех s и t из $\mathbb{R}_+$.

Используя ограниченность траекторий этой полудинамической системы, можно показать, что ω-предельное множество непусто. Этот факт можно использовать для построения аттрактора системы (2.4)-(2.5).

3. Двухфазная задача микроволнового нагрева

В настоящем разделе рассматривается задача микроволнового нагрева с изменением фазы. Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^3$, граница которой $\partial\Omega$ принадлежит классу C^1.

Рассмотрим задачу микроволнового нагрева

$$\begin{cases} \varepsilon(x)E_t(x,t) + \sigma(\theta)E(x,t) = \operatorname{curl} H(x,t), & (x,t) \in Q_T, \\ \mu(x)H_t(x,t) + \operatorname{curl} E(x,t) = 0, & (x,t) \in Q_T, \\ b(\theta(x,t))_t = \nabla[k(x)\nabla\theta(x,t)] + \sigma(\theta)|E(x,t)|^2, & (x,t) \in Q_T, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $T \in \mathbb{R}_+$, $Q_T = \Omega \times [0, T)$, $E(x,t)$ и $H(x,t)$ — электрическое и магнитное поля соответственно, $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$ и $\sigma(\theta)$ — диэлектрическая постоянная, магнитная проницаемость и электрическая проводимость, соответственно, $k(x)$ — теплопроводность, $\sigma(\theta)\|E(x,t)\|^2$ — джоулева теплота, $\widehat{\theta}$ — температура плавления,

$$b(s) = \begin{cases} s-1, & s < \widehat{\theta}, \\ [\widehat{\theta}-1,\, \widehat{\theta}], & s = \widehat{\theta}, \\ s, & s > \widehat{\theta}, \end{cases}$$

— оператор энтальпии. Положим $S_T = \partial\Omega \times [0,T)$. Начальные и краевые условия имеют вид

$$\begin{array}{ll} \nu(x) \times E(x,t) = \nu(x) \times G(x,t), & (x,t) \in S_T, \\ \theta(x,t) = 0, & (x,t) \in S_T, \\ E(x,0) = E_0(x), H(x,0) = H_0(x), \theta(x,0) = \theta_0(x), & x \in \Omega, \end{array} \tag{3.2}$$

где $\nu(x)$ — единичная внешняя нормаль на $\partial\Omega$, $G(x,t)$ — заданная внешняя вектор-функция на S_T, $E_0(x), H_0(x)$ и $\theta_0(x)$ — заданные функции. Пусть теперь $\Omega = (0,1)$, $E(x,t) = (0, e(x,t), 0)$, $H(x,t) = (0,0,h(x,t))$. Получим систему

$$\begin{cases} \varepsilon(x)e_t(x,t) + \sigma(\theta)e(x,t) = -h_x(x,t), & (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \\ \mu(x)h_t(x,t) + e_x(x,t) = 0, & (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \\ b(\theta(x,t))_t = k(x)\theta_{xx}(x,t) + \sigma(\theta)e^2(x,t), & (x,t) \in (0,1)\times(0,T). \end{cases} \tag{3.3}$$

Введем $w(x,t) = \int\limits_0^t e(x,\tau)d\tau$ и положим $\varepsilon(x) \equiv \mu(x) \equiv k(x) \equiv 1$. Тогда (3.3) принимает вид системы

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + \sigma(\theta)w_t = 0, & (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \\ b(\theta)_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta)w_t^2, & (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \end{cases} \tag{3.4}$$

с краевыми условиями $w(0,t) = 0$, $w(1,t) = 0$, $\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0$, $t \in (0,T)$, и начальными условиями $w(x,0) = 0$, $w_t(x,0) = w_1(x)$, $\theta(x,0) = \theta_0(x)$, $x \in (0,1)$. Теперь введем понятие решения системы (3.3), основанное на интегральных тождествах.

Определение 3.1. Пара функций $(w(x,t), \theta(x,t))$ называется *слабым решением* системы (3.3) на интервале $[0,T]$, $T > 0$, если $w \in C^1(0,T; H_0^1(\Omega))$, $\theta \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0,T; L^2(\Omega))$ и уравнения

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 [-\varepsilon(x)w_t\psi_t + \frac{1}{\mu(x)}w_x\psi_x + \sigma(\theta)w_t]dxdt = \int\limits_0^1 \varepsilon(x)w_1(x)\psi(x,0)dx,$$

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^1 [-b(\theta)\eta_t + \theta_x\eta_x - \sigma(\theta)w_t^2\eta]dxdt = \int\limits_0^1 b(\theta_0)\eta(x,0),$$

обращаются в равенства на любых пробных функциях $\psi \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C(0,T; L^2(\Omega))$ и $\eta \in H^1(0,T; H^1(\Omega))$, для которых $\psi(x,T) = \eta(x,T) = 0$ при любом x из Ω.

Чтобы обеспечить существование решений системы (3.3), сделаем следующие предположения.

(A9) Функция w_1 принадлежит $L^2(0,1)$, θ_0 неотрицательна и $\theta_0 \in L^2(0,1)$.

(A10) Существуют такие положительные постоянные σ_0, σ_1, что $\sigma_0 \leqslant \sigma(z) \leqslant \sigma_1$, $z \in [0,\infty)$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 (см. [16]). *Предположим, что условия* (A9)-(A10) *выполнены. Тогда при любом положительном* T *система* (3.4) *имеет слабое решение, для которого* $w \in C^1(0,T; H_0^1(0,1))$, $\theta \in L^2(0,T; H_0^1(0,1)) \cap C([0,T]; L^2(0,1))$.

4. Ограниченность решений двухфазной задачи микроволнового нагрева

В этом разделе мы покажем, что решения системы (3.4) ограничены. Для этого наложим следующие требования.

(A11) Решения системы (3.4) $w \in \mathcal{W}(0,T,H_0^1(0,1),H_0^1(0,1))$, $\theta \in \mathcal{W}(0,T,H_0^2(0,1),H_0^2(0,1))$.

(A12) Существует такое положительное a_1, что $|b(z)| \leqslant a_1|z|$ $\forall z \in \mathbb{R}$, $z \neq \hat{\theta}$.

(A13) Существует такое положительное a_2, что $|\sigma(z)| \leqslant a_2|z|$ $\forall z \in \mathbb{R}$.

Покажем, что в этом случае все условия теоремы 2.1 выполнены, а значит, все решения системы (3.4) ограничены.

Рассмотрим первую подсистему нашей системы:

$$w_{tt} - w_{xx} + \sigma(\theta)w_t = 0, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{4.1}$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{4.2}$$

Будем использовать обозначения

$$y_1(x,t) = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(x,t) \\ w_t(x,t) \end{pmatrix}, \quad y_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_1(x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar\sigma(\theta(x))w_t(x,t) \end{pmatrix},$$

где положительная на положительной полуоси функция $\bar\sigma$ находится из разбиения $\sigma(\theta) = \sigma_0 + \bar\sigma(\theta)$, а σ_0 — положительная постоянная.

Пусть Λ — самосопряженный положительный оператор, порождаемый на $L^2(0,1)$ дифференциальным оператором $\Lambda v = -v_{xx}$ с однородными краевыми условиями Дирихле.

Рассмотрим пространства $Y_{1,0} = L^2(0,1) \times H_0^1(0,1)$ и $\Xi_1 = L^2(0,1) \times L^2(0,1)$. Предположим, что норма в $Y_{1,0}$ определена равенством $\|(v_1,v_2)\|_{1,0} = \max\limits_{i=1,2} \|v_i\|_{L^2(\Omega)}$, а $(\cdot,\cdot)_0$ — соответствующее скалярное произведение. Норму и скалярное произведение в Ξ_1 введем аналогично. Используя оператор Λ, можно определить оснащенную структуру гильбертова пространства $Y_{1,1} \subset Y_{1,0} \subset Y_{1,-1}$ следующим образом: $Y_{1,1} = \mathcal{D}(\Lambda) = H_0^1(0,1) \times H_0^2(0,1)$; при этом используется норма $\|\cdot\|_{1,1}$, порожденная скалярным произведением $(\eta_1,\eta_2)_{1,1} = (\Lambda^{-1}\eta_1, \Lambda^{-1}\eta_2)_{1,0}$ для произвольных η_1, η_2 из $\mathcal{D}(\Lambda)$.

Спаривание $(\cdot,\cdot)_{-1,1}$ вводится на $Y_{-1} \times Y_1$ как непрерывное сюръективное продолжение функционала $(\cdot,\eta)_0$ на Y_{-1}.

Теперь определим линейные операторы $A_1 : Y_{1,1} \to Y_{1,-1}$ и $B_1 : \Xi_1 \to Y_{1,-1}$ следующим образом:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Lambda & -\sigma_0 I \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Докажем, что пара (A_1, B_1) L^2-управляема. Для этого покажем, что спектр A_1 лежит в левой половине комплексной плоскости.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$A_1 v = \alpha v, \tag{4.3}$$

где $v = (v_1, v_2)^T$ — собственный вектор, а α — соответствующее собственное значение.

Уравнение (4.3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} v_2 = \alpha v_1, \\ -\Lambda v_1 - \sigma_0 v_2 = \alpha v_2. \end{cases} \tag{4.4}$$

Рассмотрим представление $v_i = \sum\limits_k c_i^k e_k$, $i = 1,2$, где α_k — собственные значения оператора Λ, e_k — соответствующие собственные векторы, а c_i^k — некоторые коэффициенты. Тогда уравнение (4.4) эквивалентно системе

$$\sum_k c_2^k e_k = \alpha \sum_k c_1^k e_k, \tag{4.5}$$

$$-\sum_k \alpha_k c_1^k e_k - \sigma_0 \alpha \sum_k c_2^k e_k = \alpha \sum_k c_2^k e_k. \tag{4.6}$$

Из (4.5)-(4.6) следует, что при любом k справедливо равенство

$$\alpha^2 + \sigma_0 \alpha + \alpha_k = 0. \tag{4.7}$$

Очевидно, что любое α, удовлетворяющее уравнению (4.7), имеет отрицательную вещественную часть. Следовательно, пара (A_1, B_1) L^2-управляема.

Рассмотрим квадратичную форму $\mathcal{F}(y_1,\xi_1) = (y_1,\xi_1)_{\Xi_1} = \int\limits_\Omega y_1 \xi_1 dx = \int\limits_0^1 \bar\sigma(\theta) w_t^2 dx$. Теперь, согласно частотной теореме Лихтарникова—Якубовича для сингулярного случая (см. [4]), нужно проверить выполнение условия частотных областей. Предположим, что $\{\alpha_k\}$ — собственные значения оператора Λ, а $\{e_k\}$ — соответственные собственные функции, образующие базис в $L^2(0,1)$. Тогда $w_1(x,t) = \sum\limits_k w_1^k(t)e_k, \xi_1(x,t) = \sum\limits_k \xi_1^k(t)e_k$, где $w_1^k(t)$ и $\xi_1^k(t)$ — соответствующие коэффициенты Фурье.

Пусть $\mathcal{F}^c$ — эрмитово сюръективное расширение квадратичной формы $\mathcal{F}$ на $Y_{1,1}^c \times \Xi_1^c$. Рассмотрим $\mathcal{F}^c(y_1,\xi_1)$ при $i\omega y_1 = A_1^c y_1 + B_1^c\xi_1$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \in \Xi_1^c$, т. е. рассмотрим форму

$$\mathcal{F}^c(y_1,\xi_1) = (\Pi_0(i\omega)\xi_1,\xi_1). \tag{4.8}$$

Пусть $\tilde{w}_1^k$ и $\tilde{\xi}_1^k$ — преобразования Фурье от w_1^k и ξ_1^k, соответственно. Тогда из (4.8) следует, что

$$(\Pi_0(i\omega)\tilde{\xi}_1,\tilde{\xi}_1) = \sum_k (\Pi_0^k(i\omega)\tilde{\xi}_1^k,\tilde{\xi}_1^k). \tag{4.9}$$

Чтобы вычислить $\Pi_0(i\omega)$ при $\omega \in \mathbb{R}$, формально применим преобразование Фурье к (4.1). Получим уравнения

$$-\omega^2\tilde{w}_1^k(i\omega) + i\omega\sigma_0\tilde{w}_1^k(i\omega) - \alpha_k\tilde{w}_1^k(i\omega) + \tilde{\xi}_1^k(i\omega) = 0, \quad k = 1,2,\ldots \tag{4.10}$$

Из (4.10), выводим, что $\tilde{w}_1^k(i\omega) = \chi(i\omega,\alpha_k)\tilde{\xi}_1^k(i\omega)$, где $\chi(i\omega,\alpha_k) = (\omega^2 - i\omega\sigma_0 + \alpha_k)^{-1}$. Из этой формулы и из (4.9) следует, что $(\Pi_0^k(i\omega)\tilde{\xi}_1^k,\tilde{\xi}_1^k) = \mathrm{Re}(\tilde{w}_1^k\tilde{\xi}_1^k) = \mathrm{Re}(i\omega\chi)|\tilde{\xi}_1^k(i\omega)|^2$. Таким образом, имеем представление $\Pi_0^k(i\omega) = \mathrm{Re}(i\omega\chi)$ и нам надо показать, что

$$\mathrm{Re}(i\omega\chi) \leqslant 0, \quad \omega \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

Неравенство (4.11) означает, что $\mathrm{Re}\left(\dfrac{i\omega}{\omega^2 - i\omega\sigma_0 + \alpha_k}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{(\alpha_k\omega + \omega^3)i - \omega^2\sigma_0}{(\alpha_k + \omega^2)^2 + \omega^2\sigma_0^2}\right) \leqslant 0$, т. е. $-\omega^2\sigma_0 \leqslant 0$ для любого вещественного ω. Последнее неравенство выполнено, поскольку $\sigma_0 > 0$.

Теперь проверим выполнение условия (A3). В нашем случае оно принимает вид $\int\limits_0^1 b(\theta)\theta_{xx}dx \leqslant -\varkappa_3(\int\limits_0^1 \theta^2 dx + \int\limits_0^1 \theta_x^2 dx)$. В силу (A12) имеем соотношение $\int\limits_0^1 b(\theta)\theta_{xx}dx \leqslant a_1\int\limits_0^1 \theta\theta_{xx}dx = -a_1\int\limits_0^1 \theta_x^2 dx$. Отсюда очевидным образом следует, что условие (A3) выполнено.

Аналогично, условие (A4) для нашей системы принимает вид $\int\limits_0^1 b(\theta)\sigma(\theta)dx \leqslant \varkappa_4(\int\limits_0^1 \theta^2 dx + \int\limits_0^1 \theta_x^2 dx)$. В силу (A12) и (A13) имеем неравенство $\int\limits_0^1 b(\theta)\sigma(\theta)dx \leqslant a_1a_2\int\limits_0^1 \theta^2 dx$. Значит, условие (A4) выполнено.

Итак, мы показали, что предположения (A11)–(A13) выполнены и все условия теоремы 2.1 выполнены. Значит, можно сделать вывод, что решения нашей системы ограничены.

5. Устойчивость на конечном промежутке времени для глобальных процессов

Введем семейство отображений следующим образом: $\psi^{(\cdot)}(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, $\psi^t(t_0,p) = y(t+t_0,t_0,p)$, где $t \in \mathbb{R}_+, t_0 \in \mathbb{R}_+, p \in \mathcal{N}$, а $\mathcal{N}$ — полное метрическое пространство.

Определение 5.1. Отображение $\psi : \mathbb{D} \to \mathcal{N}$ называется *процессом* (*глобальным процессом*) на $\mathcal{N}$, где $\mathbb{D} = \{(t,s,u)|(t,s,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{N}\}$, если выполняются следующие условия:

(i) для любого вещественного s отображение $\psi^0(s,\cdot) = I_{\mathcal{N}}$ есть тождественное отображение на $\mathcal{N}$;

(ii) для любых (s,u) из $\mathbb{R} \times \mathcal{N}$ и любых t,t',s из $\mathbb{R}_+$ справедливо соотношение $\psi^{t+t'}(s,u) = \psi^t(t'+s,\psi^{t'}(s,u))$.

Определение 5.1 основано на определении процесса, данном в [8]. Например, процессами являются динамические системы, для которых $\psi^t(s,\cdot) = \varphi^t(\cdot)$ при положительных s и вещественных t.

Определение 5.2. Пусть $(\psi,(\mathcal{N},\rho_{\mathcal{N}}))$ — процесс, а (s,u_s) — фиксированная точка в $\mathbb{R} \times \mathcal{N}$. Отображение $\mathcal{D}(s,u_s) := \{t \in \mathbb{R}_+ \to u(t) \in \mathcal{N}\}$ называется *движением* процесса ψ через точку (s,u_s), если $u(t) = \psi^t(s,u(s))$ для любой (t,s) из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ и $u(s) = u_s$.

Введем понятие устойчивости процесса на конечном промежутке времени, основанное на определении из [21].

Определение 5.3. Процесс $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ называется $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, v)$-*устойчивым*, где $0 < \alpha \leqslant \beta$, $t_0 > 0$, $T' \geqslant 0$, а $v \in \mathcal{N}$, если из неравенства $\rho_{\mathcal{N}}(v, \psi^0(r, u_r)) < \alpha$ следует справедливость неравенства $\rho_{\mathcal{N}}(v, \psi^t(r, u_r)) < \beta$ для всех t из $[t_0, t_0 + T')$ и любой (s, u_s) из $\mathbb{R} \times \mathcal{N}$.

Пусть $(\{\psi^t(s, \cdot)\}_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ s\in\mathbb{R}_+}}, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ — процесс. Отображение $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ называется *функционалом Ляпунова* для этого процесса, если выполнены следующие условия:

(i) семейство отображений $\Phi(t, \cdot) : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ непрерывно;

(ii) для каждого вещественного t и каждой u из $\mathcal{N}$ существует предел

$$\dot{\Phi}(t, u) := \lim_{s\to 0+} \sup \frac{1}{s}[\Phi(t + s, \psi^s(t, u)) - \Phi(t, u)]. \tag{5.1}$$

Теорема 5.1. *Пусть* $(\{\psi^t(s, \cdot)\}_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ s\in\mathbb{R}_+}}$ — *процесс,* $I := [t_0, t_0 + T']$ — *промежуток времени,* $0 < \alpha \leqslant \beta$, $s > 0$, $u_\tau \in \mathcal{N}, p \in \mathcal{N}$ *и существуют функционал Ляпунова* $\Phi : I \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ *для этого процесса и интегрируемая функция* $g : I \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющие следующим условиям*:

(i) $\dot{\Phi}(t, u(t)) < g(t)$ *для произвольного* t *из* I *и произвольной функции* $u(\cdot)$ *из* $C(t_0, t_0 + T', \mathcal{N})$, *удовлетворяющей двойному неравенству* $\alpha \leqslant \rho_{\mathcal{N}}(u(t), p) \leqslant \beta$ *при всех* t *из* I;

(ii) $\int\limits_s^t g(\tau)d\tau \leqslant \min\limits_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(u,p)=\beta} \Phi(t, u) - \max\limits_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(u,p)=\alpha} \Phi(s, u)$ *если* $s, t \in I, s < t$.

Тогда процесс $(\{\psi^t(s, \cdot)\}_{\substack{t\in\mathbb{R}\\ s\in\mathbb{R}_+}}, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ *является* $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, p)$-*устойчивым.*

Доказательство. Пусть $u(\cdot) := \mathcal{D}(s, u_s) = \{t \in \mathcal{J}(s, u_s) \to u(t) \in \mathcal{N}\}$, $s \in \mathbb{R}, u_s \in \mathcal{N}$, есть произвольное движение процесса $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$. Предположим, что существует минимальное значение t_2 из J, для которого справедливо равенство $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t_2)) = \beta$. Тогда существует такое t_1, что $t_0 < t_1 < t_2$, $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t_1)) = \alpha$ и $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(s)) > \alpha$ для любого s, удовлетворяющего двойному неравенству $t_1 < s \leqslant t_2$. Используя определение производной (5.1), получаем следующие соотношения:

$$\Phi(t_2, u(t_2)) - \Phi(t_1, u(t_1)) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \dot{\Phi}(t, u(t))d\tau < \int\limits_{t_1}^{t_2} g(\tau)d\tau. \tag{5.2}$$

Из (5.2) выводим неравенство

$$\Phi(t_2, u(t_2)) < \max_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\alpha} \Phi(t_1, u) + \int\limits_{t_1}^{t_2} g(\tau)d\tau. \tag{5.3}$$

Соотношения (5.2)-(5.3) показывают, что

$$\begin{aligned} \Phi(t_2, u(t_2)) < \max_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\alpha} \Phi(t_1, u) + \min_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\beta} \Phi(t_2, u) - \\ - \max_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\alpha} \Phi(t_1, u) = \min_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\beta} \Phi(t_2, u). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Полученное противоречие (5.4) доказывает теорему. □

Рассмотрим следующую систему, состоящую из параболического и гиперболического уравнений, представляющих собой уравнения Максвелла и уравнение теплопроводности для одномерного случая (см. [16]):

$$w_{tt} - w_{xx} + \sigma(\theta)w_t = 0, \qquad x \in (0, 1), t \in (0, T), \tag{5.5}$$

$$\theta_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta){w_t}^2, \qquad x \in (0, 1), t \in (0, T), \tag{5.6}$$

$$w(0, t) = 0, w(1, t) = 0, \qquad t \in (0, T), \tag{5.7}$$

$$\theta(0, t) = \theta(1, t) = 0, \qquad t \in (0, T), \tag{5.8}$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \qquad x \in (0, 1), \tag{5.9}$$

$$w(x, 0) = w_0(x),\ w_t(x, 0) = w_1(x), \qquad x \in (0, 1), \tag{5.10}$$

где, так же, как и в системе (3.3), θ — температура, w — интеграл по времени от ненулевой компоненты электрического поля, σ — электропроводность, зависящая от температуры, а положительное T — время.

Введем следующие условия:

(A14) Скалярная функция σ удовлетворяет локальному условию Липшица на интервале $(0, +\infty)$ и существуют такие постоянные σ_0 и σ_1, что $0 < \sigma_0 \leqslant \sigma(\theta) \leqslant \sigma_1$ на $(0, +\infty)$.

(A15) Почти всюду на интервале $(0,1)$ имеем $w_0, w_1 \in L^2(0,1), \theta_0 \in L^\infty(0,1), \theta_0 \geqslant 0$.

Если (A14) и (A15) выполняются, то для любого фиксированного положительного T существует слабое решение системы (5.5)–(5.10) в смысле интегральных тождеств. Введем обозначение $v(x,t) := w_t(x,t)$. Тогда задача (5.5)–(5.10) имеет слабое решение $(w(x,t), v(x,t), \theta(x,t))$ в пространстве $Z := (C([0,T]; L^2(0,1)))^2 \times (L^2(0,T; H^1(0,1)) \cap C([0,T]; L^2(0,1)))$ (см. [16]).

Теперь определим нормированное пространство $Y := H_0^1(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ с нормой

$$\|(w, v, \theta)\|_Y^2 = \|w_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta\|^2_{L^2(0,1)}, \tag{5.11}$$

где $(w, v, \theta) \in Y$. Рассмотрим функцию $y(t) = y(t, t_0, y_0) = (w(\cdot,t), v(\cdot,t), \theta(\cdot,t))$, представляющую решение задачи (5.5)–(5.10) в пространстве Y с нормой (5.11), для которого вместо начального момента 0 взято произвольное t_0 такое, что $0 \leqslant t_0 < T$ и $y(t_0, t_0, y_0) = (w_0, w_1, \theta_0)$, где вектор-функция $(w(\cdot,t), v(\cdot,t), \theta(\cdot,t))$ принадлежит Y и удовлетворяет системе (5.5)–(5.10) в слабом смысле.

Для задачи (5.5)–(5.10) введем процесс следующим образом. Предположим, что $\mathcal{N} = Y$ и определим

$$\psi^t(s, u_0) = \{y(t+s, s, y_0) | y(t+s, s, y_0) \in \mathbb{D}(s, y_0)\}, \tag{5.12}$$

где $y(t, s, y_0) = (w(\cdot,t), v(\cdot,t), \theta(\cdot,t))$ — решение задачи (5.5)–(5.10), для которого $y(s, s, y_0) = y_0 = (0, 0, \theta_0)$. Тем самым система (5.5)–(5.10) порождает процесс $(\psi, (\mathcal{M}, \rho_{\mathcal{M}}))$.

Теперь понятие устойчивости процесса (5.3) на конечном промежутке времени можно использовать для исследования системы (5.5)–(5.10).

Для процесса (5.12) сформулируем следующую теорему об устойчивости на конечном промежутке времени.

Теорема 5.2. *Пусть $J := [t_0, t_0 + T') \subset (0, T)$, $0 < \alpha \leqslant \beta$, и существуют такой дифференцируемый по Фреше функционал $\Phi : Y \to \mathbb{R}$ и такая интегрируемая функция $g : J \to \mathbb{R}$, что выполнены следующие условия*:

$$\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) < g(t) \tag{5.13}$$

для п. в. t из J и для любой функции $y(\cdot)$ из Z, удовлетворяющей оценке $\alpha \leqslant \|y(t)\|_Y \leqslant \beta$ для указанных t;

$$\int_s^t g(\tau) d\tau \leqslant \min_{y \in Y: \|y\|_Y = \beta} \Phi(y) - \max_{y \in Y: \|y\|_Y = \alpha} \Phi(y) \tag{5.14}$$

для всех s, t из J, для которых $s < t$.

Тогда процесс (5.12) *является $(\alpha, \beta, t_0, T', \|\cdot\|_Y)$-устойчивым.*

Ниже для задачи теплопроводности мы определим функционал Φ и функцию g конкретного вида, удовлетворяющие всем условиям теоремы 5.2. Здесь мы используем следующий результат, вытекающий из доказательства [16, Th. 4.1] и называемый далее *свойством* (S):

(S) для любого положительного α и любого T' из $(0, T)$ существует такое конечное положительное $\varkappa = \varkappa(\alpha, T')$, что для любого решения $(w(x,t), v(x,t), \theta(x,t))$ системы (5.5)–(5.10) с начальными данными (w_0, w_1, θ_0) при $t_0 = 0$ оценка $\|w_0\|^2_{L^2(0,1)} + \|w_1\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta_0\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \alpha^2$ влечет за собой оценку $\sup\limits_{t \in [0, T']} \|\theta(\cdot, t)\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant \varkappa$.

Теорема 5.3. *Предположим, что существуют такие положительные значения параметров λ, ϵ, a и такое α, что $0 < \alpha \leqslant \beta$ и выполнены условия*

$$\begin{gathered} 0<\lambda<1, \quad \frac{1}{2}\sigma_1\epsilon-1<0, \quad \lambda^2<\epsilon<1, \\ \lambda(\frac{1}{2\epsilon}\sigma_1+1)-\sigma_0+a\sigma_1\varkappa<0, \\ 0\leqslant \min[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a]\beta^2-\max[2, 1+\lambda^2, a]\alpha^2, \end{gathered} \tag{5.15}$$

где параметры σ_0 и σ_1 взяты из (A14), *а $\varkappa = \varkappa(\alpha, T')$ — параметр, введенный в условии* (S). *Рассмотрим функционал Ляпунова вида*

$$\Phi(y) = \Phi(w, v, \theta) = \int\limits_0^1 (w_x^2 + 2\lambda wv + v^2 + a\theta^2)dx, \quad y = (w, v, \theta) \in Y, \tag{5.16}$$

а также функцию

$$g(t) \equiv -c\min[1, a]\alpha, \ t \in [0, T'), \tag{5.17}$$

где

$$c := \frac{2\min[a, -\lambda(\frac{1}{2}\sigma_1\epsilon-1), -(\lambda(\frac{1}{2\epsilon}\sigma_1+1)-\sigma_0+a\sigma_1\varkappa)]}{\max[2, 1+\lambda^2, a]}. \tag{5.18}$$

Тогда функционал Φ и функция $g(t)$, определенные формулами (5.16) *и* (5.17) *соответственно, удовлетворяют неравенствам* (5.13) *и* (5.14) *относительно функций из Z для $t_0 = 0$ и тех α, β, $0 < \alpha < \beta$, для которых выполнено* (5.15). *Следовательно, процесс* (5.3) *является $(\alpha, \beta, 0, T', \|\cdot\|_Y)$-устойчивым.*

Доказательство. Рассмотрим функционал Ляпунова (5.16). Применяя (5.15) к произвольным функциям (w, v, θ) из Y, получаем неравенства

$$\begin{aligned} \Phi(w, v, \theta) &= \int\limits_0^1 (w_x^2 + 2\lambda wv + v^2 + a\theta^2)dx \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_0^1 (w_x^2 + w^2 + \lambda^2 v^2 + v^2 + a\theta^2)dx \leqslant \int\limits_0^1 (2w_x^2 + (1+\lambda^2)v^2 + a\theta^2)dx \leqslant \\ &\leqslant \max[2, 1+\lambda^2, a](\|w_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta\|^2_{L^2(0,1)}); \end{aligned} \tag{5.19}$$

здесь использовано неравенство Фридрихса $\|w\|^2_{L^2(0,1)} \leqslant \|w_x\|^2_{L^2(0,1)}$ для функции w из $H_0^1(0,1)$ и неравенство Коши—Буняковского.

С другой стороны, для тех же самых функций (w, v, θ) из Y справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^1 (w_x^2 + 2\lambda wv + v^2 + a\theta^2)dx \geqslant \\ &\geqslant \int\limits_0^1 (w_x^2 - \epsilon w^2 - \frac{\lambda^2}{\epsilon}v^2 + v^2 + a\theta^2)dx \geqslant \int\limits_0^1 ((1-\epsilon)w_x^2 + (1-\frac{\lambda^2}{\epsilon})v^2 + a\theta^2)dx \geqslant \\ &\geqslant \min[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a](\|w_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta\|^2_{L^2(0,1)}). \end{aligned} \tag{5.20}$$

Теперь рассмотрим функционал Ляпунова на пространстве функций (w, v, θ) из Z. Для п. в. t из $(0, T')$ продифференцируем этот функционал по t. Получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^1 (w_x^2 + 2\lambda wv + v^2 + a\theta^2)dx = 2\int\limits_0^1 (-w_{xx}v + \lambda v^2 + (\lambda w + v)v_t + a\theta\theta_t)dx; \tag{5.21}$$

здесь использовано равенство $\int\limits_0^1 w_x w_{xt} dx = \int\limits_0^1 -w_{xx} w_t dx = \int\limits_0^1 -w_{xx} v dx$, справедливое для любой функции $w(x,t)$, удовлетворяющей однородным (нулевым) краевым условиям.

Теперь вычислим v_t и θ_t из (5.5) и (5.6), используем полученный результат в (5.21) и оценим следующий интеграл для п. в. t из $(0,T')$:

$$\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) = 2\int\limits_0^1 (-w_{xx}v + \lambda v^2 + (\lambda w + v)(w_{xx} - \sigma(\theta)v) + a\theta(\theta_{xx} + \sigma(\theta)v^2))dx =$$

$$= 2\int\limits_0^1 (-\lambda w_x^2 - \lambda\sigma(\theta)wv + (\lambda - \sigma(\theta) + a\sigma(\theta)\theta)v^2 - a\theta_x^2))dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^1 (-\lambda(\frac{1}{2}\sigma(\theta)\epsilon - 1)w_x^2 + (\frac{1}{2\epsilon}\lambda\sigma(\theta) + \lambda - \sigma(\theta) + a\sigma(\theta)\theta)v^2 - a\theta^2))dx. \quad (5.22)$$

Используя условие (A15), свойство (S) и соотношения (5.15), получаем, что неравенство

$$\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) \leqslant -c_1(\|w_x\|^2_{L^2(0,1)} + \|v\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta\|^2_{L^2(0,1)}) \quad (5.23)$$

справедливо для п. в. t из $(0,T')$, где $c_1 = 2\min\Big[a, -\lambda\Big(\frac{1}{2}\sigma_1\epsilon - 1\Big), -\Big(\lambda\Big(\frac{1}{2\epsilon}\sigma_1 + 1\Big) - \sigma_0 + a\sigma_1\varkappa\Big)\Big]$.

Теперь, учитывая (5.19), можно показать, что $\frac{d}{dt}\Phi(y(t)) \leqslant -c\Phi(y(t))$ для п. в. t из $(0,T')$, где c определено формулой (5.18).

Теперь, учитывая неравенство (5.20), введем на $[0,T')$ функцию

$$g(t) := -c\min[1,a]\inf(\|w_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|v(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} + \|\theta(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)}), \quad (5.24)$$

где точная нижняя грань берется по всем $(w(\cdot,\cdot), v(\cdot,\cdot), \theta(\cdot,\cdot))$ из Z, удовлетворяющим (двусторонней) оценке $\alpha \leqslant \|w(\cdot,t), v(\cdot,t), \theta(\cdot,t)\|_Y \leqslant \beta$. Тогда условие (5.13) выполнено.

Понятно, что $g(t) = -c\min[1,a]\alpha$ есть искомая функция на $[0,T')$.

Используя (5.19) и (5.20), оценим слагаемые из правой части неравенства (5.14):

$$\min_{y\in Y:\|y\|_Y=\beta}\Phi(y) \geqslant \min[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a]\beta^2, \qquad \max_{y\in Y:\|y\|_Y=\alpha}\Phi(y) \leqslant \max[2, 1+\lambda^2, a]\alpha^2. \quad (5.25)$$

Следовательно, для выполнения соотношения (5.14) достаточно выполнения неравенств

$$-c\min[1,a]\alpha T' \leqslant \min[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a]\beta^2 - \max[2, 1+\lambda^2, a]\alpha^2, \quad (5.26)$$

$$0 \leqslant \min[1-\epsilon, 1-\frac{\lambda^2}{\epsilon}, a]\beta^2 - \max[2, 1+\lambda^2, a]\alpha^2. \quad (5.27)$$

Из условий (5.15) следует, что неравенства (5.26)-(5.27) выполнены. □

6. Устойчивость и неустойчивость на конечном интервале времени для локальных многозначных процессов

Пусть $(\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}})$ — полное метрическое пространство, а $2^{\mathcal{N}}$ — множество всех непустых подмножеств $\mathcal{N}$. Введем понятие локального многозначного процесса на $\mathcal{N}$ (аналогичное определение можно найти в [14]):

Определение 6.1. Отображение $\psi : \mathbb{D} \to 2^{\mathcal{N}}$ называется *локальным многозначным процессом* на $\mathcal{N}$, где $\mathbb{D} = \{(t,s,u)|(s,u) \in \mathbb{R}\times\mathcal{N}, t \in [0, b(s,u))\}$, а $[0, b(s,u))$ — максимальный полуинтервал существования отображения ψ^t, если выполнены следующие условия:

(i) для любого вещественного s отображение $\psi^0(s,\cdot) = I_{\mathcal{N}}$ является тождественным отображением на $\mathcal{N}$;

(ii) для любого (s,u) из $\mathbb{R}\times\mathcal{N}$, любого t' из $[0, b(s,u))$ и любого t из $[0, b(t', \psi^{t'}(s,u)))$ неравенство $t + t' < b(s,u)$ влечет за собой вложение $\psi^{t+t'}(s,u) \subset \psi^t(t'+s, \psi^{t'}(s,u))$.

Введем обозначение $\mathcal{J}(s, u_s) = \{t \in \mathbb{R} | t \in [0, b(s, u_s))\}$.

Определение 6.2. Пусть $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ — локальный многозначный процесс, а (s, u_s) — фиксированная точка в $\mathbb{R} \times \mathcal{N}$. Семейство однозначных отображений $\mathcal{D}(s, u_s) := \{t \in \mathcal{J}(s, u_s) \to u(t) \in \mathcal{N}\}$ называется *движением* процесса ψ из точки (s, u_s), если $u(t) \in \psi^t(s, u(s))$ для любого t из $\mathcal{J}(s, u_s)$ и $u(s) = u_s$. Каждое такое одномерное отображение называется *реализацией движения* $\mathcal{D}(s, u_s)$.

Определение 6.3. Пусть $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ — локальный многозначный процесс. Отображение $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ называется *функционалом Ляпунова* для этого локального многозначного процесса, если выполняются следующие условия:

(i) однопараметрическое семейство отображений $\Phi(t, \cdot) : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ непрерывно;

(ii) для любых фиксированных t из $\mathbb{R}$ и u из $\mathcal{N}$ имеем

$$\dot{\Phi}(t, u) := \lim_{s \to 0+} \sup \frac{1}{s} [\Phi(t + s, \psi^s(t, u)) - \Phi(t, u)].$$

Теперь для локальных многозначных процессов введем понятие устойчивости на конечном интервале времени.

Определение 6.4. Локальный многозначный процесс $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ называют $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, p)$-*устойчивым*, где $0 < \alpha \leqslant \beta$, $t_0 > 0$, $T' \geqslant 0$, а $p \in \mathcal{N}$, если для любой реализации $u(\cdot)$ любого движения $\mathcal{D}(s, u_s) = \{t \in \mathcal{J}(s, u_s) \to u(t) \in \mathcal{N}\}$, $s \leqslant t_0$, $t_0 + T' \leqslant b(s, u_s)$, $u_s \in \mathcal{N}$, $u(\cdot) \in \mathcal{D}(s, u_s)$, этого процесса из неравенства $\rho_{\mathcal{N}}(p, u_{t_0}) < \alpha$, $u_{t_0} = u(t_0)$, следует, что $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) < \beta$ для любого t из $[t_0, t_0 + T')$.

Теорема 6.1. *Пусть $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ — локальный многозначный процесс, $J := [t_0, t_0 + T') \subset \mathcal{J}(s, u_s)$, $0 < \alpha \leqslant \beta$, $s > 0$, $u_s \in \mathcal{N}$, $p \in \mathcal{N}$ и существуют такой функционал Ляпунова $\Phi : J \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ в смысле* (6.3) *и такая интегрируемая функция $g : J \to \mathbb{R}$, что выполнены следующие условия*:

(i) *$\dot{\Phi}(t, u(t)) < g(t)$, если $t \in J$, а $u(t)$ — произвольные отображения из $C(t_0, t_0 + T'; \mathcal{N})$, для которых неравенство $\alpha \leqslant \rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) \leqslant \beta$ выполняется при любом t из J*;

(ii) *неравенство $\int\limits_s^t g(s) ds \leqslant \min\limits_{u \in \mathcal{N} : \rho_{\mathcal{N}}(p, u) = \beta} \Phi(t, u(t)) - \max\limits_{u \in \mathcal{N} : \rho_{\mathcal{N}}(p, u) = \alpha} \Phi(s, u(s))$ справедливо, если $s, t \in J, s < t$.*

Тогда локальный многозначный процесс $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ является $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, p)$-устойчивым.

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}(s, u_s) = \{t \in \mathcal{J}(s, u_s) \to u(t) \in \mathcal{N}\}$, $s \in \mathbb{R}, u_s \in \mathcal{N}$, есть произвольное движение локального многозначного процесса $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$, а $u(\cdot)$ из $\mathcal{D}(s, u_s)$ есть произвольная реализация этого движения. Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству теоремы 5.1, использующему произвольную реализацию движения $u(\cdot)$ и определение производной (6.3). □

Введем понятие неустойчивости на конечном интервале времени для локальных многозначных процессов.

Определение 6.5. Локальный многозначный процесс $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ называют $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_{\mathcal{N}}, p)$-*неустойчивым*, где $0 < \alpha \leqslant \beta$, $t_0 > 0, T' \geqslant 0$ и $p \in \mathcal{N}$, если существуют такое движение $\mathcal{D}(s, u_s)$, $s \leqslant t_0, t_0 + T' \leqslant b(s, u_s), u_s \in \mathcal{N}$, этого процесса, такая реализация $u(\cdot)$ из $\mathcal{D}(s, u_s)$, $\rho_{\mathcal{N}}(p, u_{t_0}) < \alpha$, $u_{t_0} = u(t_0)$, этого движения и такое t_1 из $(t_0, t_0 + T')$, что $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t_1)) = \beta$.

Теорема 6.2. *Пусть $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ — локальный многозначный процесс, $J := [t_0, t_0 + T') \subset \mathcal{J}(s, u_s)$, $0 < \alpha \leqslant \beta$, $s > 0$, $u_s \in \mathcal{N}$, $p \in \mathcal{N}$. Предположим, что существуют такой непрерывный функционал $\Phi : J \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$, такая функция $g : J \to \mathbb{R}$, интегрируемая на J, такие постоянные $\alpha, \delta, T, T_1, \delta < \alpha, 0 < T_1 < T$, и такие множества $\Omega, \Upsilon(t), \mathcal{U}(t)$, что $\Omega = \overline{\mathcal{B}}(\beta) - \mathcal{B}(\delta)$, $\Upsilon(t) = \{u | \Phi(u) > \max\limits_{u \in \mathcal{N} : \rho_{\mathcal{N}}(p, u) = \delta} \Phi(u)\}$, $\mathcal{U}(t) \subset \Omega \cap \Upsilon(t)$, $\mathcal{U}(t)$ — связное непустое множество, $\mathcal{U}(t_0 + T_1) \cap \partial \mathcal{B}(\beta) \neq \varnothing$ и выполнены следующие условия*:

(i) *$\Phi(t, u(t)) - \Phi(s, u(s)) > \int\limits_s^t g(s) ds$ для всех t, s из J и для произвольных отображений $u(\cdot)$ из $C(t_0, t_0 + T'; \mathcal{N})$, удовлетворяющих оценке $\alpha \leqslant \rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) \leqslant \beta$ для любого t из J*;

(ii) *существует такое* u_0 *из* $\mathcal{U}(t_0)$, *что для любого* t_1 *из* $[t_0, t_0+T_1]$ *имеем* $\delta < \|u_0\|_{\mathcal{N}} < \alpha$,

$$\int\limits_{t_0}^{t_0+T_1} g(s)ds \geqslant \max_{u\in\mathcal{N}:\|u\|_{\mathcal{N}}=\beta} \Phi(t_0+T_1, u) - \Phi(t_0, u_0),$$

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} g(s)ds \geqslant \max_{u\in\mathcal{N}:\|u\|_{\mathcal{N}}=\delta} \Phi(t_1, u) - \Phi(t_0, u_0);$$

(iii) $\Phi(t_0+T_1, u') \leqslant \max\limits_{u\in\mathcal{N}:\|u\|_{\mathcal{N}}=\beta} \Phi(t_0+T_1, u)$ *для любого* u' *из* $\mathcal{U}(t_0+T_1)$.

Тогда локальный многозначный процесс $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$ *является* $(\alpha, \beta, t_0, T', \rho_M, p)$*-неустойчивым.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{D}(s, u_s) = \{t \in J(s, u_s) \to u(t) \in \mathcal{N}\}$, $s \in \mathbb{R}, u_s \in \mathcal{N}$, есть произвольное движение локального многозначного процесса $(\psi, (\mathcal{N}, \rho_{\mathcal{N}}))$, а $u(\cdot)$ из $\mathcal{D}(s, u_s)$ есть произвольная реализация этого движения, для которой $u(t_0) = u_0 \in \mathcal{U}(t_0)$. Справедливо неравенство

$$\Phi(t, u(t)) - \Phi(t_0, u(t_0)) > \int\limits_{t_0}^{t} g(s)ds. \tag{6.1}$$

Пусть существует значение t_2 из J, для которого справедливо равенство $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t_2)) = \delta$. Пусть $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) < \beta$ для всех t из $[t_0, t_2]$. Тогда

$$\Phi(t_2, u(t_2)) - \Phi(t_0, u(t_0)) > \int\limits_{t_0}^{t_2} g(s)ds > \max_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\delta} \Phi(t_2, u). \tag{6.2}$$

Это противоречит условию, из которого выбрано t_2. Следовательно, такого t_2 не существует. Значит, $\Phi(t, u(t)) > \max\limits_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\delta} \Phi(t, u)$ для всех t из $[t_0, t_0+T_1]$. Отсюда следует, что $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) < \beta$ для всех t из $[t_0, t_0+T_1]$. Поэтому $u(t) \in \mathcal{U}(t)$ для всех t из $[t_0, t_0+T_1]$.

Теперь предположим, что $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) < \beta$ для всех t из $[t_0, t_0+T_1]$. Тогда

$$\Phi(t_0+T_1, u(t_0+T_1)) - \Phi(t_0, u(t_0)) > \int\limits_{t_0}^{t_0+T_1} g(s)ds > \max_{u\in\mathcal{N}:\rho_{\mathcal{N}}(p,u)=\beta} \Phi(t_0+T_1, u). \tag{6.3}$$

Это противоречит условию (iii). Отсюда следует, что предположение относительно $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t))$ неверно. Значит, существует такой момент времени $t_3 \in [t_0, t_0+T_1]$, для которого $\rho_{\mathcal{N}}(p, u(t)) = \beta$. □

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу (см. [16]):

$$\begin{array}{ll}
w_{tt} - w_{xx} + \sigma(\theta)w_t = 0, & x \in (0,1), t \in (0,T), \\
b(\theta)_t - \theta_{xx} = \sigma(\theta){w_t}^2, & x \in (0,1), t \in (0,T), \\
w(0,t) = \xi_1(t), w(1,t) = \xi_2(t), & t \in (0,T), \\
\theta(0,t) = \theta(1,t) = 0, & t \in (0,T), \\
\theta(x,0) = \theta_0(x), & x \in (0,1), \\
w(x,0) = w_0(x),\ w_t(x,0) = w_1(x), & x \in (0,1),
\end{array} \tag{6.4}$$

$$b(s) = \begin{cases} s-1, & s < \widehat{\theta}, \\ [\widehat{\theta}-1,\, \widehat{\theta}], & s = \widehat{\theta}, \\ s, & s > \widehat{\theta}; \end{cases}$$

здесь $\widehat{\theta}$ — параметр.

Предположим, что выполнены следующие условия:

(A16) функция σ локально липшицева на интервале $(0, +\infty)$;

(A17) функции ξ_1, ξ_2 принадлежат пространству $H^1(0,1)$, $\xi_1(0) = 0$, $\xi_2(0) = 0$, функции $w_t(x,0)$, $\theta_0(x)$ принадлежат пространству $L^2(0,1)$.

Предположим, что условия (A16)-(A17) выполнены. Тогда задача (6.4) имеет слабое решение $(w(x,t),\theta(x,t))$ из $H^1(0,T;H^1(0,1))\times L^2(0,T;H^1(0,1))$ (см. [16]).

Для задачи (6.4) введем локальный многозначный процесс. Введем обозначение $v:=w_t$ и рассмотрим пространство $\mathcal{N}=H_0^1(0,1)\times L^2(0,1)\times L^1(0,1)$ с нормой $\|(w,v,\theta)\|^2_{\mathcal{N}}=\max[\|w_x\|^2_{L^2(0,1)}+\|v\|^2_{L^2(0,1)},\|\theta\|^2_{L^1(0,1)}]$.

Определим

$$\psi^t(s,u_0)=\{y(t+s,s,y_0)|y(t+s,s,y_0)\in\mathbb{D}(s,y_0)\},\tag{6.5}$$

где $y(t,s,y_0)=(w(\cdot,t),v(\cdot,t),\theta(\cdot,t))$ — такое решение задачи (6.4), для которого $y(s,s,y_0)=y_0=(w_0,w_1,\theta_0)$. Ясно, что в этом случае задача (6.4) порождает процесс $(\psi,(\mathcal{N},\rho_{\mathcal{N}}))$, заданный соотношением (6.5).

Как и для однофазной системы (см. выше), при определенных условиях можно показать (используя теорему 6.1), что порожденный многозначный процесс устойчив на некотором конечном интервале времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
2. *Ермаков И. В., Калинин Ю. Н., Райтманн В.* Определяющие моды и почти периодические интегралы для коциклов// Дифф. уравн. — 2011. — *47*, № 13. — С. 1–16.
3. *Лихтарников А. Л.* Критерии абсолютной устойчивости нелинейных операторных уравнений// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1977. — *41*, № 5. — С. 1064–1083.
4. *Лихтарников А. Л., Якубович В.* Частотная теорема для уравнений эволюционного типа// Сиб. мат. ж. — 1976. — *17*, №5. — С. 790–803.
5. *Райтманн Ф., Скопинов С. Н.* Устойчивость на конечном промежутке времени в одномерной задаче микроволнового нагрева// Вестн. СПб. ун-та. Сер. 1. — 2015. — *2(60)*, № 1. — С. 54–59.
6. *Райтманн Ф., Юмагузин Н. Ю.* Ассимптотическое поведение решений двухфазовой проблемы микроволнового нагрева в одномерном случае// Вестн. СПб. ун-та. Сер. 1. — 2012. — № 3. — С. 59–62.
7. *Четаев Н. Г.* О некоторых вопросах, относящихся к задаче об устойчивости неустановившихся движений// Прикл. мат. мех. — 1960. — *34*. — С. 6–18.
8. *Dafermos C. M.* An invariance principle for compact process// J. Differ. Equ. — 1971. — *9*. — C. 239–252.
9. *Datko R.* Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert spaces// Rend. Mat. Acc. Lincei. — 1994. — *5*. — C. 297–302.
10. *DiBenedetto E., Vespri V.* Exponential attractors for a doubly nonlinear equation// J. Math. Anal. Appl. — 1994. — *185*. — C. 321–339.
11. *Eden A., Rakotoson J. M.* Continuity for bounded solutions of multiphase Stefan problem// J. Math. Anal. Appl. — 1974. — *32*. — C. 610–616.
12. *Glassey K., Yin H.-M.* On Maxwell's equations with a temperature effect. II// Commun. Math. Phys. — 1998. — *194*. — C. 343–358.
13. *Kalinichenko D. Yu., Reitmann V., Skopinov S. N.* Asymptotic behavior of solutions to a coupled system of Maxwell's equations and a controlled differential inclusion// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2013. — *Supplement*. — C. 407–414.
14. *Kapustyan A. V., Melnik V. S., Valero J.* Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations// Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. — 2003. — *13*, № 7. — C. 1969–1983.
15. *Lions J. L., Magenes E.* Non-homogeneous boundary value problems and applications. — Berlin—Heidelberg—N.-Y.: Springer-Verlag, 1972.
16. *Manoranjan V. S., Showalter R., Yin H.-M.* On two-phase Stefan problem arising from a microwave heating process// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A. — 2006. — *15*, № 4. — C. 1155–1168.
17. *Matas A., Merker J.* Strong solutions of doubly nonlinear parabolic equations// Z. Anal. Anwend. — 2012. — *31*, № 2. — C. 217–235.
18. *Merker J.* Strong solutions of doubly nonlinear Navier—Stokes equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2011. — *Supplement*. — C. 1052–1060.
19. *Pankov A.* Bounded and almost periodic solutions of nonlinear operator differential equations. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990.
20. *Popov S. A., Reitmann V.* Frequency domain conditions for finite dimensional projectors and determining observations for the set of amenable solutions// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2014. — *34*, № 1. — C. 249–267.

21. *Weiss L., Infante E. F.* On the stability of systems defined over a finite time interval// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1965. — *54*. — С. 44–48.
22. *Yin H.-M.* On Maxwell's equations in an electromagnetic field with the temperature effect// SIAM J. Math. Anal. — 1998. — *29*, № 3. — С. 637–651.
23. *Zyryanov D. A., Reitmann V.* Attractors in multivalued dynamical systems for the two-phase heating problem// Electron. J. Differ. Equ. Control Processes. — 2017. — *4*. — С. 118–138.

С. Попов
Санкт-Петербургский государственный университет, мат.-мех. ф-т, 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр-т, д. 28
E-mail: psa.87@mail.ru

Ф. Райтманн
Санкт-Петербургский государственный университет, мат.-мех. ф-т, 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр-т, д. 28
E-mail: vreitmann@aol.com

С. Скопинов
Санкт-Петербургский государственный университет, мат.-мех. ф-т, 198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр-т, д. 28
E-mail: serg_vologda@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-148-163 UDC 517.957

Boundedness and Finite-Time Stability for Multivalued Doubly-Nonlinear Evolution Systems Generated by a Microwave Heating Problem

© 2018 **S. Popov, V. Reitmann, S. Skopinov**

Abstract. Doubly-nonlinear evolutionary systems are considered. Sufficient conditions of the boundedness of solutions of such systems are derived. Analogical results for a one-dimensional microwave heating problem are proved. The notions of global process and of a local multivalued process are introduced. Sufficient conditions for the finite-time stability of a global process and of a local multivalued process are shown. For local multivalued processes sufficient conditions for the finite-time instability are derived. For the one-dimensional microwave heating problem conditions of the finite-time stability are shown.

REFERENCES

1. Yu. M. Berezanskiy, *Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam samosopryazhennykh operatorov* [Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators], Naukova dumka, Kiev, 1965 (in Russian).
2. I. V. Ermakov, Yu. N. Kalinin, and V. Reitmann, "Opredelyayushchie mody i pochti periodicheskie integraly dlya kotsiklov" [Determining modes and almost periodic integrals for cocycles], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2011, **47**, No. 13, 1–16 (in Russian).
3. A. L. Likhtarnikov, "Kriterii absolyutnoy ustoychivosti nelineynykh operatornykh uravneniy" [Absolute stability criteria for nonlinear operator equations], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1977, **41**, No. 5, 1064–1083 (in Russian).
4. A. L. Likhtarnikov and V. Yakubovich, "Chastotnaya teorema dlya uravneniy evolyutsionnogo tipa" [The frequency theorem for equations of evolutionary type], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1976, **17**, No. 5, 790–803 (in Russian).
5. V. Reitmann and S. N. Skopinov, "Ustoychivost' na konechnom promezhutke vremeni v odnomernoy zadache mikrovolnovogo nagreva" [On a finite time interval stability for the one-dimensional microwave heating problem], *Vestn. SPb. un-ta. Ser. 1* [Bull. St. Peterburg Univ. Ser. 1], 2015, **2(60)**, No. 1, 54–59 (in Russian).

6. V. Reitmann and N. Yu. Yumaguzin, “Assimptoticheskoe povedenie resheniy dvukhfazovoy problemy mikrovolnovogo nagreva v odnomernom sluchae” [Asymptotic behavior of solutions of a two-phase problem of microwave heating in the one-dimension case], *Vestn. SPb. un-ta. Ser. 1* [Bull. St. Peterburg Univ. Ser. 1], 2012, No. 3, 59–62 (in Russian).
7. N. G. Chetaev, “O nekotorykh voprosakh, otnosyashchikhsya k zadache ob ustoychivosti neustanovivshikhsya dvizheniy” [About some questions related to the problem of the stability of unsteady motions], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1960, **34**, 6–18 (in Russian).
8. C. M. Dafermos, “An invariance principle for compact process,” *J. Differ. Equ.*, 1971, **9**, 239–252.
9. R. Datko, “Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert spaces,” *Rend. Mat. Acc. Lincei.*, 1994, **5**, 297–302.
10. E. DiBenedetto and V. Vespri, “Exponential attractors for a doubly nonlinear equation,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1994, **185**, 321–339.
11. A. Eden and J. M. Rakotoson, “Continuity for bounded solutions of multiphase Stefan problem,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1974, **32**, 610–616.
12. K. Glassey and H.-M. Yin, “On Maxwell’s equations with a temperature effect. II,” *Commun. Math. Phys.*, 1998, **194**, 343–358.
13. D. Yu. Kalinichenko, V. Reitmann, and S. N. Skopinov, “Asymptotic behavior of solutions to a coupled system of Maxwell’s equations and a controlled differential inclusion,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2013, **Supplement**, 407–414.
14. A. V. Kapustyan, V. S. Melnik, and J. Valero, “Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations,” *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2003, **13**, No. 7, 1969–1983.
15. J. L. Lions and E. Magenes, *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–N.-Y., 1972 .
16. V. S. Manoranjan, R. Showalter, and H.-M. Yin, “On two-phase Stefan problem arising from a microwave heating process,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A*, 2006, **15**, No. 4, 1155–1168.
17. A. Matas and J. Merker, “Strong solutions of doubly nonlinear parabolic equations,” *Z. Anal. Anwend.*, 2012, **31**, No. 2, 217–235.
18. J. Merker, “Strong solutions of doubly nonlinear Navier—Stokes equations,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2011, **Supplement**, 1052–1060.
19. A. Pankov, *Bounded and Almost Periodic Solutions of Nonlinear Operator Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990.
20. S. A. Popov and V. Reitmann, “Frequency domain conditions for finite dimensional projectors and determining observations for the set of amenable solutions,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2014, **34**, No. 1, 249–267.
21. L. Weiss and E. F. Infante, “On the stability of systems defined over a finite time interval,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1965, **54**, 44–48.
22. H.-M. Yin, “On Maxwell’s equations in an electromagnetic field with the temperature effect,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1998, **29**, No. 3, 637–651.
23. D. A. Zyryanov and V. Reitmann, “Attractors in multivalued dynamical systems for the two-phase heating problem,” *Electron. J. Differ. Equ. Control Processes*, 2017, **4**, 118–138.

S. Popov
St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
E-mail: `psa.87@mail.ru`

V. Reitmann
St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
E-mail: `vreitmann@aol.com`

S. Skopinov
St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
E-mail: `serg_vologda@mail.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 164–179

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-164-179 УДК 515.168.5+517.986.32

О ГОМОТОПИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ СО СЖАТИЯМИ И K-ГРУППАХ СООТВЕТСТВУЮЩИХ C^*-АЛГЕБР

© 2018 г. **А. Ю. САВИН**

Аннотация. В работе рассматривается проблема вычисления группы стабильных гомотопических классов псевдодифференциальных эллиптических граничных задач. Указанная проблема исследуется в терминах топологических K-групп некоторых пространств в следующих ситуациях: для краевых задач на многообразии с краем, для задач сопряжения с условиями на замкнутом подмногообразии коразмерности один, а также для нелокальных задач со сжатиями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Для решения проблемы индекса в эллиптической теории естественным и важным является получение гомотопической классификации эллиптических операторов, т. е. вычисление группы стабильных гомотопических классов эллиптических операторов на многообразии (см. [3, 22]). Гомотопическая классификация на гладком замкнутом многообразии установлена в работе [22]. В этой ситуации группа стабильных гомотопических классов эллиптических операторов оказывается изоморфной топологической K-группе с компактными носителями $K^0(T^*M)$ кокасательного расслоения многообразия, на котором операторы определены. Позже гомотопическая классификация была установлена для многих других важных классов эллиптических операторов. Так, в [13] показано, что гомотопическая классификация эллиптических классических краевых задач на многообразии с краем получается в терминах группы $K^0(T^*(M \setminus \partial M))$, отвечающей внутренности $M \setminus \partial M$ многообразия с краем (ср. [26]). Получена также гомотопическая классификация эллиптических операторов в алгебре Буте де Монвеля на многообразии с краем (см. [29, 30]). Гомотопическая классификация также известна для многих классов многообразий с особенностями [5, 6, 36] и ряда нелокальных задач [14, 15]. Рассматривались приложения классификации: к вычислению препятствий типа Атьи—Ботта, к существованию эллиптических задач на многообразиях с особенностями, к описанию двойственности Пуанкаре на многообразиях с особенностями и др. (см. [7, 8, 28, 31, 32]).

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить гомотопическую классификацию трех классов эллиптических задач: краевых задач, задач сопряжения и нелокальных задач со сжатиями для общих псевдодифференциальных операторов, т. е. операторов, вообще говоря, не удовлетворяющих условию трансмиссии. Отметим, что теория таких краевых задач и задач сопряжения для общих псевдодифференциальных операторов на многообразии с краем исследована в работах [2, 4, 18]. В данной работе мы используем описание соответствующей C^*-алгебры таких операторов, данное в работе [35]. Более точно, в параграфе 2 мы показываем, что для многообразия M с краем ∂M имеет место изоморфизм абелевых групп

$$\operatorname{Ell}(M) \simeq K^0(T^*(M \setminus \partial M)) \oplus K^0(\partial M), \tag{1.1}$$

где $\mathrm{Ell}(M)$ — абелева группа стабильных гомотопических классов эллиптических краевых задач с граничными и кограничными операторами на многообразии M с краем, а K^0 — четные топологические K-группы с компактными носителями. Первое слагаемое в (1.1) такое же, как и в классификации классических краевых задач [13]. Нетривиальное второе слагаемое $K^0(\partial M)$ является новым и отвечает специальным краевым задачам индекса нуль (см. задачи, определяемые в [26, предложение 20.3.1]), по модулю которых в [13, 20, 26] рассматривались стабильные гомотопии. Далее, для замкнутого многообразия M, в котором выбрано замкнутое подмногообразие X коразмерности один, мы показываем в параграфе 3, что имеет место изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Ell}(M,X) \simeq K^0(T^*M) \oplus K^0(X),$$

где $\mathrm{Ell}(M,X)$ — абелева группа стабильных гомотопических классов эллиптических задач сопряжения с граничными и кограничными операторами, отвечающими подмногообразию X.

Наконец, в параграфе 4 исследуется гомотопическая классификация нелокальных эллиптических задач со сжатиями. Такие задачи ассоциированы с полугруппой $\mathbb{Z}_+$, порожденной степенями сжатия $g: M \to M$ многообразия M с краем внутрь себя. Исследованию таких задач посвящены работы [9–11]. C^*-алгебра таких задач и соответствующее символьное исчисление были построены в работах [16, 17]. В настоящей работе мы устанавливаем гомотопическую классификацию внутренних символов таких задач. При получении этой гомотопической классификации возникает задача о вычислении K-теории скрещенных произведений C^*-алгебры на эндоморфизм этой алгебры (по поводу таких скрещенных произведений см., например, [1, 27] и цитированную в этих работах литературу). Дается явная форма для указанной K-группы в топологических терминах. Для эллиптических задач со сжатиями устанавливается точная последовательность, связывающая группу стабильных гомотопических классов таких задач с некоторыми топологическими K-группами.

Работа частично поддержана грантами РФФИ (проекты 15-01-08392 и 16-01-00373), грантом Немецкого научно-исследовательского общества, а также Министерством образования и науки РФ, соглашение N 02.a03.21.0008.

2. Граничные задачи

В этом параграфе мы получим классификацию эллиптических граничных задач для общих псевдодифференциальных операторов на гладком компактном многообразии с краем с точностью до стабильных гомотопий.

2.1. Псевдодифференциальные задачи на многообразии с краем. Напомним основные сведения об алгебре краевых задач для псевдодифференциальных операторов (вообще говоря, без свойства трансмиссии) на многообразии с краем из работы [35]. Пусть M — гладкое компактное многообразие с краем $X = \partial M$. Предположим, что выбрана воротниковая окрестность края, т. е. окрестность U края X и диффеоморфизм

$$U \simeq X \times [0,1), \tag{2.1}$$

при котором край X переходит в подмногообразие $X \times \{0\}$. Далее в качестве локальных координат в окрестности края будем выбирать (y,t), где y — координаты на X, а $t \in [0,1)$.

Через $\Psi(M) \subset \mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$ обозначим C^*-алгебру псевдодифференциальных граничных задач нулевого порядка на M (см. [35]), действующих в прямой сумме пространств L^2 на многообразии и его границе. Здесь и ниже через $\mathcal{B}(H)$ обозначается алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H. Алгебру Калкина обозначим через $\Sigma = \Psi(M)/\mathcal{K}$. Здесь и ниже через $\mathcal{K}$ мы обозначаем идеал компактных операторов. Напомним необходимые нам сведения об алгебре Σ, которые установлены в цитированной работе. Имеется символьное отображение

$$\sigma = (\sigma_{int}, \sigma_b) : \Sigma \longrightarrow C(S^*M) \oplus C(S^*X, \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C})), \tag{2.2}$$

которое является гомоморфизмом C^*-алгебр. Его компоненты называются *внутренним и граничным* символом соответственно. Здесь $C(S^*M)$ — алгебра непрерывных функций на косферическом расслоении $S^*M = (T^*M \setminus 0)/\mathbb{R}_+$ многообразия M, а $C(S^*X, \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}))$ — алгебра непрерывных функций на S^*X со значениями в алгебре ограниченных операторов, действующих в прямой сумме $L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}$. При этом C^*-алгебра граничных символов, которую обозначим через $\Sigma_b = \operatorname{Im} \sigma_b \subset C(S^*X, \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}))$, имеет следующую дополнительную символьную структуру: на ней определены отображения внутреннего символа $\sigma'_{int} : \Sigma_b \longrightarrow C(S^*M|_X)$ (здесь $S^*M|_X$ — сужение косферического расслоения на границу многообразия) и меллиновского символа $\sigma_M : \Sigma_b \longrightarrow C(X \times \overline{\mathbb{R}})$, где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ — компактификация вещественной прямой (эта компактификация гомеоморфна отрезку). В локальных координатах (y,t) в окрестности края граничный символ получается из оператора замораживанием его коэффициентов в точке края и применением преобразования Фурье $y \to \eta$ по переменным вдоль края. При этом получается оператор в пространстве с координатами η, t, который представляет собой семейство с параметрами η операторов, действующих в прямой сумме $L^2(\mathbb{R}_+) \oplus \mathbb{C}$. Это семейство и есть граничный символ.

Далее, меллиновский символ $\sigma_M(a)$ граничного символа $a \in \Sigma_b$ определяется следующим образом: граничный символ a является семейством операторов на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$; при этом нуль $0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$ рассматривается как коническая точка и меллиновский символ есть просто конормальный символ рассматриваемого оператора в этой точке (см., например, [33]). Другими словами, у оператора a замораживаются коэффициенты в нуле и делается преобразование Меллина $t \to p$. При этом граничный символ переходит в оператор умножения на функцию от переменной p, которая и есть по определению меллиновский символ оператора.

Кроме скалярных операторов можно также рассматривать и соответствующие матричные операторы. Заметим, однако, что гомотопическую классификацию более естественно проводить в терминах более широкого класса операторов, который является аналогом операторов, действующих в сечениях расслоений (см. [22] в классическом случае операторов на гладком замкнутом многообразии). А именно, мы будем рассматривать класс операторов вида

$$\mathcal{D} : \operatorname{Im} P_1 \longrightarrow \operatorname{Im} P_2, \qquad \operatorname{Im} P_{1,2} \subset L^2(M, \mathbb{C}^N) \oplus L^2(X, \mathbb{C}^N), \tag{2.3}$$

действующих между образами матричных проекторов $P_{1,2} \in \operatorname{Mat}_N(C(M) \oplus C(X))$ (т. е. выполнены соотношения $(P_1)^2 = P_1, (P_2)^2 = P_2$) с компонентами из алгебры $C(M) \oplus C(X)$, причем $\mathcal{D} \in \operatorname{Mat}_N(\Psi(M))$ — матричный оператор с компонентами из $\Psi(M)$. Проекторы P_1, P_2 и оператор $\mathcal{D}$ удовлетворяют соотношению $P_2 \mathcal{D} P_1 = \mathcal{D} P_1$, которое означает, что оператор $\mathcal{D}$ переводит образ проектора P_1 в образ проектора P_2. Для операторов вида (2.3) естественно вводится понятие символа, определение эллиптичности, устанавливается теорема фредгольмовости (см. абстрактную конструкцию в [12, 36]). Заметим, что имеют место соотношения

$$\operatorname{Im} P_{1,2} = L^2(M, E_{1,2}) \oplus L^2(X, G_{1,2}), \tag{2.4}$$

где $E_{1,2} \subset M \times \mathbb{C}^N$ — векторные расслоения на M, а $G_{1,2} \subset X \times \mathbb{C}^N$ — векторные расслоения на X. Поэтому оператор (2.3) будем также представлять как матричный оператор вида

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_M & C \\ B & D_X \end{pmatrix} : \begin{matrix} L^2(M, E_1) \\ \oplus \\ L^2(X, G_1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} L^2(M, E_2) \\ \oplus \\ L^2(X, G_2) \end{matrix} \tag{2.5}$$

который будем называть *морфизмом*. Здесь D_M, D_X — псевдодифференциальные операторы на M и X соответственно, B, C — граничный и кограничный операторы.

2.2. Гомотопическая классификация. Через $\operatorname{Ell}(M)$ обозначим абелеву группу стабильных гомотопических классов эллиптических операторов вида (2.3). Напомним (подробнее см. [36]), что два оператора такого типа называются *стабильно гомотопными*, если существует непрерывная гомотопия эллиптических операторов $(\mathcal{D}_t, P_{1,t}, P_{2,t})$, соединяющая прямые суммы этих операторов с некоторыми тривиальными операторами. При этом тривиальным оператором называется оператор вида (2.3), в котором оператор $\mathcal{D}$ имеет компоненты в подалгебре $C(M) \oplus C(X) \subset \Psi(M)$. Стандартным образом проверяется, что стабильная гомотопность является отношением эквивалентности на множестве эллиптических операторов вида (2.3). Тогда множество эллиптических операторов $(\mathcal{D}, P_1, P_2)$, рассматриваемых по модулю стабильных гомотопий, обозначается через $\operatorname{Ell}(M)$. Это множество является абелевой группой по отношению к прямой сумме операторов. При этом класс эквивалентности операторов $(\mathcal{D}, P_1, P_2)$, где $\mathcal{D}$ — матричный оператор над алгеброй $C(M) \oplus C(X)$, определяет нулевой элемент группы.

Цель настоящего параграфа состоит в том, чтобы получить стабильную гомотопическую классификацию, т. е. вычислить группу $\mathrm{Ell}(M)$ в терминах топологических инвариантов многообразия.

Теорема 2.1 (о гомотопической классификации)**.** *Имеет место короткая точная последовательность*

$$0 \longrightarrow K^0(T^*M^\circ) \longrightarrow \mathrm{Ell}(M) \longrightarrow K^0(X) \longrightarrow 0, \tag{2.6}$$

которая расщепляется. Здесь

- $M^\circ = M \setminus X$ *— внутренность многообразия*; $K^0(T^*M^\circ)$ *и* $K^0(X)$ *— четные топологические* K*-группы пространств* T^*M° *и* X *соответственно* (*отметим, что всюду в этой работе мы используем топологическую* K*-теорию с компактными носителями*);
- *при отображении* $K^0(T^*M^\circ) \longrightarrow \mathrm{Ell}(M)$ *элементы группы* $K^0(T^*M^\circ)$ *реализуются в терминах эллиптических символов на* T^*M, *которые в окрестности границы не зависят от копеременных, и таким символам сопоставляются соответствующие эллиптические операторы на* M, *т. е. элементы группы* $\mathrm{Ell}(M)$;
- *при отображении* $\mathrm{Ell}(M) \longrightarrow K^0(X)$ *классу эллиптического морфизма* (2.5) *сопоставляется элемент* $[G_1] - [G_2]$.

Доказательство теоремы 2.1.

1. Сначала выразим группу $\mathrm{Ell}(M)$ в терминах K-группы некоторой C^*-алгебры, ассоциированной с алгеброй символов. А именно, в силу результатов работы [36] имеем изоморфизм абелевых групп

$$\mathrm{Ell}(M) \simeq K_0\Big(\mathrm{Con}(C(M) \oplus C(X) \to \Sigma)\Big), \tag{2.7}$$

где для гомоморфизма $f : A \to B$ некоторых C^*-алгебр A и B через

$$\mathrm{Con}(A \to B) = \big\{(a, b(t)) \in A \oplus C([0,1), B) \bigm| f(a) = b(0)\big\}$$

обозначен его конус. При этом отображение $C(M) \oplus C(X) \to \Sigma$ является мономорфизмом, который паре функций на f, g сопоставляет диагональный символ $\mathrm{diag}(f, g)$.

Далее C^*-алгебру $\mathrm{Con}(C(M) \oplus C(X) \to \Sigma)$ будем обозначать для краткости через $\mathcal{A}$.

2. Через $\Sigma_0 \subset \Sigma$ обозначим идеал, состоящий из символов с нулевым внутренним символом. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \Sigma_0 & \longrightarrow & \Sigma & \xrightarrow{\sigma_{int}} & C(S^*M) & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(M) \oplus C(X) & \longrightarrow & C(M) & \longrightarrow 0 \end{array} \tag{2.8}$$

и соответствующую короткую точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0) \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Con}(C(M) \to C(S^*M)) \to 0 \tag{2.9}$$

конусов вертикальных отображений в (2.8). Последняя короткая точная последовательность дает периодическую точную последовательность K-групп

$$\begin{aligned} \ldots \to K_0\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathrm{Con}(C(M) \to C(S^*M))) \longrightarrow \\ \longrightarrow K_1\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big) \to \ldots \end{aligned} \tag{2.10}$$

3. Теперь проанализируем компоненты последовательности (2.10). Имеем $\mathrm{Con}(C(M) \to C(S^*M)) \simeq C_0(T^*M)$. Теперь вычислим группу $K_0\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big)$. С этой целью рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & C(S^*X, \mathcal{K}) & \longrightarrow & \Sigma_0 & \xrightarrow{\sigma_M} & C_0(X \times \mathbb{R}) & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \longrightarrow & C(X) & \xrightarrow{id} & C(X) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0, \end{array} \tag{2.11}$$

где $C(S^*X, \mathcal{K}) \subset \Sigma_0$ — идеал граничных символов с нулевыми меллиновским и внутренним символом. Так как $K_0\Big(\mathrm{Con}(C(X) \to C(S^*X, \mathcal{K}))\Big) \simeq K^0(T^*X)$, то точная последовательность в K-теории, отвечающая короткой точной последовательности конусов вертикальных отображений в (2.11), имеет вид

$$\ldots \to K^0(T^*X) \longrightarrow K_0\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big) \longrightarrow K^1(X \times \mathbb{R}) = K^0(X) \longrightarrow K^1(T^*X) \to \ldots \tag{2.12}$$

Построим расщепление этой последовательности, т. е. отображение

$$K^0(X) \to K_0\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big). \tag{2.13}$$

Расщепление определяется следующим образом. Пусть $[E] \in K^0(X)$ — элемент, определяемый векторным расслоением E, которое реализовано как образ $E = \operatorname{Im} Q$ матричного $N \times N$ проектора Q над $C(X)$. Рассмотрим обратимый меллиновский символ $(p-i)^{-1}(p\,\mathrm{Id} + i(2Q - \mathrm{Id}))$. По этому меллиновскому символу строится обратимый граничный символ

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} + \varphi(t)\mathcal{M}^{-1}_{p\to t}\big[(p-i)^{-1}(p\,\mathrm{Id} + i(2Q-\mathrm{Id})) - \mathrm{Id}\big]\mathcal{M}_{t\to p}\varphi(t) \\ j \end{pmatrix} : L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \oplus E_x \tag{2.14}$$

из алгебры Σ_0 с добавленной единицей, где:

- функция $\varphi \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+)$ тождественно равна единице при малых t;
- $\mathcal{M}_{t\to p}$ — преобразование Меллина;
- $j : L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \longrightarrow E_x$ — отображение ранга $\dim E_x$, которое осуществляет изоморфизм линейных пространств $\ker\big(\mathrm{Id} + \varphi(t)\mathcal{M}^{-1}_{p\to t}\big[(p-i)^{-1}(p\,\mathrm{Id} + i(2Q-\mathrm{Id})) - \mathrm{Id}\big]\mathcal{M}_{t\to p}\varphi(t)\big)$ и $\operatorname{Im} Q(x) = E_x$.

Обратимость граничного символа (2.14) следует из построения. Тогда расщепление (2.13) сопоставляет элементу $[E]$ класс эллиптического морфизма с внутренним символом, равным Id и граничным символом (2.14).

Из расщепления последовательности (2.12) мы получаем изоморфизм

$$K_*\Big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\Big) \simeq K^*(T^*X) \oplus K^*(X). \tag{2.15}$$

4. С учетом изоморфизма (2.15) мы можем переписать последовательность (2.10) в виде

$$\ldots \to K^1(T^*M) \xrightarrow{\partial} K^0(T^*X) \oplus K^0(X) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K^0(T^*M) \xrightarrow{\partial} K^1(T^*X) \oplus K^1(X) \longrightarrow \ldots \tag{2.16}$$

Здесь граничные отображения ∂ являются композициями $K^*(T^*M) \longrightarrow K^{*+1}(T^*X) \longrightarrow K^{*+1}(T^*X) \oplus K^{*+1}(X)$ сужения на границу $T^*M|_X \simeq T^*X \times \mathbb{R}$ и вложения $K^{*+1}(T^*X) \longrightarrow K^{*+1}(T^*X) \oplus K^{*+1}(X)$ в качестве первого слагаемого.

5. С другой стороны, рассмотрим точную последовательность

$$\to K^1(T^*M) \xrightarrow{\partial} K^0(T^*X) \oplus K^0(X) \to K^0(T^*M^\circ) \oplus K^0(X) \to K^0(T^*M) \xrightarrow{\partial} K^1(T^*X) \oplus K^1(X) \to, \tag{2.17}$$

которая представляет собой прямую сумму точной последовательности пары $T^*M|_X \subset T^*M$ и последовательности $0 \to K^*(X) \xrightarrow{id} K^*(X) \to 0$. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} K^1(T^*M) & \xrightarrow{\partial} & K^0(T^*X) \oplus K^0(X) & \longrightarrow & K^0(T^*M^\circ) \oplus K^0(X) & \longrightarrow & K^0(T^*M) & \xrightarrow{\partial} & K^1(T^*X) \oplus K^1(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ K^1(T^*M) & \xrightarrow{\partial} & K^0(T^*X) \oplus K^0(X) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K^0(T^*M) & \xrightarrow{\partial} & K^1(T^*X) \oplus K^1(X) \end{array} \tag{2.18}$$

Вертикальные отображения в этой диаграмме (кроме среднего) являются тождественными. Поэтому, применяя 5-лемму, из диаграммы получаем, что среднее отображение тоже является изоморфизмом: $K_0(\mathcal{A}) \simeq K^0(T^*M^\circ) \oplus K^0(X)$. Отсюда в силу изоморфизма (2.7) получаем утверждение теоремы.

Теорема 2.1 доказана. □

3. Задачи сопряжения

В этом разделе мы получим гомотопическую классификацию эллиптических задач на многообразиях без края с условиями сопряжения на подмногообразиях коразмерности один.

3.1. Псевдодифференциальные задачи сопряжения. Напомним основные сведения об алгебре задач сопряжения для псевдодифференциальных операторов без свойства трансмиссии из работы [35].

Пусть M — гладкое замкнутое многообразие, а $X \subset M$ — гладкое подмногообразие коразмерности один с тривиальным нормальным расслоением. Далее, пусть выбрана трубчатая окрестность подмногообразия X, т. е. окрестность U подмногообразия X и диффеоморфизм

$$U \simeq X \times (-1, 1), \tag{3.1}$$

при котором X переходит в подмногообразие $X \times \{0\}$. Далее в качестве локальных координат в окрестности U будем выбирать (y, t), где y — координаты на X, а $t \in (-1, 1)$.

В дальнейшем подмногообразие X играет роль разреза, вдоль которого разрезается многообразие M. А именно, через $\overline{M}$ обозначим гладкое многообразие с краем — компактификацию дополнения $M \setminus X$ до многообразия с краем, диффеоморфным дизъюнктному объединению $X \sqcup X$. Непрерывные функции на этой компактификации суть функции на M, непрерывные на $M \setminus X$ и имеющие разрыв первого рода на X.

Через $\Psi(M, X) \subset \mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$ обозначим C^*-алгебру псевдодифференциальных задач сопряжения нулевого порядка на M из работы [35], действующих в прямой сумме пространств L^2 на M и X. Алгебру Калкина обозначим через $\Sigma = \Psi(M, X)/\mathcal{K}$. Свойства указанных алгебр аналогичны описанным выше свойствам алгебр краевых задач, поэтому ниже мы укажем только отличия символьных отображений в этих двух ситуациях, которые проистекают из того факта, что в случае задач сопряжения объемлющее многообразие в окрестности подмногообразия X диффеоморфно произведению $X \times (-1, 1)$, а для краевых задач — произведению $X \times [0, 1)$. В случае задач сопряжения символьное отображение является гомоморфизмом алгебр

$$\sigma = (\sigma_{int}, \sigma_b) : \Sigma \longrightarrow C(S^*\overline{M}) \oplus C(S^*X, \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}) \oplus \mathbb{C})). \tag{3.2}$$

При этом C^*-алгебра граничных символов $\Sigma_b = \operatorname{Im} \sigma_b$ имеет следующую дополнительную символьную структуру: на ней определены отображения внутреннего символа $\sigma'_{int} : \Sigma_b \longrightarrow C(S^*M|_X) \oplus C(S^*M|_X)$ (здесь два слагаемых отвечают значениям внутреннего символа с двух сторон разреза X) и меллиновского символа

$$\sigma_M : \Sigma_b \longrightarrow C(X \times \overline{\mathbb{R}}, \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})). \tag{3.3}$$

Отметим, что меллиновский символ $\sigma_M(a)$ граничного символа $a \in \Sigma_b$ определяется следующим образом: граничный символ a является семейством операторов на прямой $\mathbb{R}$; при этом нуль $0 \in \mathbb{R}$ рассматривается как коническая точка, и меллиновский символ есть просто конормальный символ рассматриваемого оператора в этой точке. Конормальный символ принимает значения в операторах, действующих на функциях на базе конуса. В нашем случае база конуса состоит из двух точек, т. е. символ принимает значения в 2×2-матрицах.

3.2. Гомотопическая классификация. Мы рассматриваем морфизмы вида

$$\mathcal{D} : \operatorname{Im} P_1 \longrightarrow \operatorname{Im} P_2, \qquad \operatorname{Im} P_{1,2} \subset L^2(M, \mathbb{C}^N) \oplus L^2(X, \mathbb{C}^N), \tag{3.4}$$

действующие между образами матричных проекторов $P_{1,2} \in \operatorname{Mat}_N(C(\overline{M}) \oplus C(X))$ с компонентами из алгебры $C(\overline{M}) \oplus C(X)$, причем $\mathcal{D} \in \operatorname{Mat}_N(\Psi(M, X))$ — матричный оператор с компонентами из $\Psi(M, X)$. Заметим, что имеют место соотношения $\operatorname{Im} P_{1,2} = L^2(\overline{M}, E_{1,2}) \oplus L^2(X, G_{1,2})$, где $E_{1,2} \subset \overline{M} \times \mathbb{C}^N$ — векторные расслоения на $\overline{M}$, а $G_{1,2} \subset X \times \mathbb{C}^N$ — векторные расслоения на X. Поэтому оператор (3.4) будем также представлять как матричный оператор вида

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} D_M & C \\ B & D_X \end{pmatrix} : \begin{matrix} L^2(\overline{M}, E_1) \\ \oplus \\ L^2(X, G_1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} L^2(\overline{M}, E_2) \\ \oplus \\ L^2(X, G_2) \end{matrix} \tag{3.5}$$

В этой ситуации рассматривается гомотопическая классификация, отвечающая паре алгебр $C(\overline{M}) \oplus C(X) \subset \Sigma$. Соответствующую группу стабильных гомотопических классов эллиптических морфизмов (3.5) обозначим через $\mathrm{Ell}(M,X)$. Следующая теорема описывает эту группу.

Теорема 3.1. *Имеет место короткая точная последовательность*
$$0 \longrightarrow K^0(T^*M) \longrightarrow \mathrm{Ell}(M,X) \longrightarrow K^0(X) \longrightarrow 0, \tag{3.6}$$
которая расщепляется. Здесь:

- *отображение* $K^0(T^*M) \longrightarrow \mathrm{Ell}(M,X)$ *сопоставляет классу эллиптического псевдодифференциального оператора на* M *тот же самый оператор, рассматриваемый как задача сопряжения*;
- *при отображении* $\mathrm{Ell}(M,X) \longrightarrow K^0(X)$ *классу эллиптического морфизма* (3.5) *сопоставляется элемент* $[G_1]-[G_2]$.

Доказательство. Доказательство в целом аналогично доказательству теоремы 2.1. Поэтому мы сократим повторяющиеся части, обращая внимание на новые моменты.

1. Сначала группа $\mathrm{Ell}(M,X)$ выражается
$$\mathrm{Ell}(M,X) \simeq K_0\Big(\mathrm{Con}(C(\overline{M}) \oplus C(X) \to \Sigma)\Big) \tag{3.7}$$
в терминах K-группы C^*-алгебры $\mathrm{Con}(C(\overline{M}) \oplus C(X) \to \Sigma)$, которую будем обозначать для краткости через $\mathcal{A}$.

2. Рассмотрим коммутативную диаграмму
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \Sigma_0 & \longrightarrow & \Sigma & \xrightarrow{\sigma_{int}} & C(S^*\overline{M}) & \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(\overline{M}) \oplus C(X) & \longrightarrow & C(\overline{M}) & \longrightarrow 0
\end{array} \tag{3.8}$$
Конусы вертикальных отображений этой диаграммы образуют короткую точную последовательность, которой отвечает точная периодическая последовательность в K-теории
$$\begin{aligned}\ldots \to K_0\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathrm{Con}(C(\overline{M}) \to C(S^*\overline{M}))) \longrightarrow \\ \longrightarrow K_1\big(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)\big) \to \ldots\end{aligned} \tag{3.9}$$
Также как и ранее, получаем изоморфизм (ср. (2.15)) $K_*(\mathrm{Con}(C(X) \to \Sigma_0)) \simeq K^*(T^*X) \oplus K^*(X)$ и изоморфизм $K_*(\mathrm{Con}(C(\overline{M}) \to C(S^*\overline{M}))) \simeq K^*(T^*\overline{M})$. Следовательно, последовательность (3.9) принимает вид:
$$\to K^1(T^*\overline{M}) \longrightarrow K^0(T^*X) \oplus K^0(X) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K^0(T^*\overline{M}) \longrightarrow K^1(T^*X) \oplus K^1(X) \to \tag{3.10}$$
С другой стороны, возьмем прямую сумму точной последовательности пары $X \subset M$ в K-гомологиях (далее мы используем реализацию K-гомологий в терминах обобщенных эллиптических операторов в смысле Атьи, см., например, [25])
$$\ldots \to K_1(M \setminus X) \to K_0(X) \to K_0(M) \to K_0(M \setminus X) \to K_1(X) \to K_1(M) \to \ldots \tag{3.11}$$
и точной последовательности
$$0 \to K^*(X) \to K^*(X) \to 0 \tag{3.12}$$
и определим диаграмму
$$\begin{array}{ccccccccc}
K^1(T^*\overline{M}) & \longrightarrow & K^0(T^*X) \oplus K^0(X) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K^0(T^*\overline{M}) & \xrightarrow{\partial} & K^1(T^*X) \oplus K^1(X) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K_1(M \setminus X) & \longrightarrow & K_0(X) \oplus K^0(X) & \longrightarrow & K_0(M) \oplus K^0(X) & \longrightarrow & K_0(M \setminus X) & \longrightarrow & K_1(X) \oplus K^1(X)
\end{array} \tag{3.13}$$
Верхняя строка этой диаграммы — последовательность (3.10), а нижняя — прямая сумма последовательностей (3.11), (3.12). Вертикальные отображения этой диаграммы $K^*(T^*\overline{M}) \longrightarrow K_*(M \setminus X)$, $K^*(T^*X) \longrightarrow K_*(X)$, $K_*(\mathcal{A}) \longrightarrow K_*(M)$ сопоставляют классам эллиптических символов соответствующие эллиптические операторы, рассматриваемые как абстрактные эллиптические операторы в смысле Атьи [19].

Диаграмма (3.13) является коммутативной в силу согласованности граничных отображений в K-теории и K-гомологиях (ср. [5]). При этом, в силу двойственности Пуанкаре на многообразиях $\overline{M}$ и X (см., например, [23]) все вертикальные отображения, кроме среднего, являются изоморфизмами. Поэтому в силу 5-леммы и среднее отображение является изоморфизмом.

Теорема доказана.

□

4. Задачи со сжатиями

В этом параграфе рассматривается проблема гомотопической классификации нелокальных задач, ассоциированных со сжатиями (см. [9–11, 16, 17]). Ниже мы опираемся на результаты работ [16, 17], в которых, в частности, были построены C^*-алгебры соответствующих задач и установлена теорема конечности.

4.1. Сжатия многообразий и отвечающая им геометрия. Пусть M — компактное многообразие с краем $X = \partial M$, а $g : M \to M$ — гладкое отображение, которое является диффеоморфизмом на свой образ $g(M)$, который лежит строго внутри многообразия: $g(M) \cap X = \varnothing$. Такое отображение будем называть *сжатием* многообразия M.

Пример 4.1. Пусть M — это замкнутый шар с центром в начале координат, а отображение $g : M \to M$ — умножение на скаляр $x \mapsto qx$, где $|q| < 1$. Это отображение является сжатием. Более общим образом, можно рассматривать сжатия $x \mapsto Ax$, отвечающие невырожденной вещественной матрице A. Такое отображение будет сжатием, если модули собственных значений матрицы A строго меньше единицы.

При рассмотрении сжатий важную роль играют следующие два подмножества в M:

- *Притягивающее множество* $M_\infty = \bigcap_{n\geqslant 0} g^n(M)$. Это множество является замкнутым. Оно примечательно тем, что является инвариантным относительно g и, следовательно, сужение отображения g на него определяет гомеоморфизм $g : M_\infty \to M_\infty$.
- *Фундаментальная область* $U = M \setminus g(M)$ для сжатия g в окрестности края многообразия. Очевидно, это множество является открытой окрестностью края. Отметим, что окрестность U, вообще говоря, не гомеоморфна произведению $X \times [0, 1)$.

В дальнейшем также используется специальное компактное топологическое пространство (не многообразие!), обозначаемое через $\overline{M}$, которое получается из M следующим образом:

1) сначала M разрезается вдоль каждого подмногообразия $g^n(X)$, $n \geqslant 1$, и получаются пространства $g^n(U)$, $n \geqslant 0$ и множество M_∞;
2) затем пространства $g^n(U)$ замыкаются до многообразий $g^n(\overline{U})$ с краем $g^n(X) \cup g^{n+1}(X)$;
3) наконец, дизъюнктное объединение этих многообразий с краем подклеивается к M_∞ и мы получаем пространство
$$\overline{M} = M_\infty \cup \bigcup_{n\geqslant 0} g^n(\overline{U}). \tag{4.1}$$
Топология на этом пространстве определяется так: множество $V \subset \overline{M}$ открыто, если выполнены два условия: а) $V \cap g^n(\overline{U})$ открыто в $g^n(\overline{U})$ при всех $n \geqslant 0$ и б) для любой точки $x \in V \cap M_\infty$ существует окрестность $W \subset M$ точки x, что $\pi^{-1}(W) \subset V$. Здесь $\pi : \overline{M} \to M$ — естественная проекция.

Пример 4.2. Рассмотрим сжатие единичного шара: $x \to qx$, где $|q| < 1$. Тогда пространство $\overline{M}$ гомеоморфно объединению $\overline{M} \simeq \{0\} \cup \bigcup_{n\geqslant 1} \{x \mid 2^{-n} \leqslant |x| \leqslant 2^{-n+2}\}$ нуля и непересекающихся концентрических шаровых слоев, которые стягиваются к нулю.

4.2. C^*-алгебры, ассоциированные со сжатиями. Со сжатием многообразия мы ассоциируем некоторую некоммутативную C^*-алгебру. Приводимая ниже конструкция этой алгебры является аналогом скрещенного произведения алгебры функций на многообразии и группы $\mathbb{Z}$, действующей на многообразии степенями фиксированного диффеоморфизма. Отличие рассматриваемой ситуации состоит в том, что у нас имеется только полугруппа $\{g^n\}$, $n \geqslant 0$ отображений многообразия внутрь себя.

На M фиксируем форму объема, которую будем обозначать через vol. Определим *оператор сжатия* $T_0 : L^2(M) \longrightarrow L^2(M)$,

$$T_0(u)(x) = \begin{cases} J^{1/2}(x)u(g^{-1}(x)), & \text{если } x \in g(M), \\ 0, & \text{если } x \in M \setminus g(M), \end{cases} \qquad \text{где} \qquad J = \frac{(g^{-1})^* \operatorname{vol}}{\operatorname{vol}}. \tag{4.2}$$

Положительный гладкий коэффициент J выбран таким образом, что оператор T_0 сохраняет норму в $L^2(M)$. Сопряженный оператор $T_0^* : L^2(M) \to L^2(M)$ называется *оператором растяжения* и имеет вид $T_0^*(u)(x) = J^{1/2}u(g(x))$, где $J = \dfrac{g^* \operatorname{vol}}{\operatorname{vol}}$.

Указанные операторы являются частичными изометриями и удовлетворяют соотношениям $T_0^*T_0 = id$, $T_0T_0^* = \chi$, где χ — характеристическая функция множества $U \subset M$. Для дальнейшего удобно оператор T_0^* обозначать через T_0^{-1}. Названия этих операторов отвечают тому, что оператор сжатия сжимает носители функций, на которые он действует, а оператор растяжения — растягивает.

Рассмотрим C^*-алгебру операторов, действующих в пространстве $L^2(M)$, которая порождена операторами T_0, T_0^{-1} и операторами умножения на функции $f \in C(\overline{M})$. Эту C^*-алгебру обозначим через $C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+$.

Пример 4.3. Рассмотрим множество $M = \{-2^{-n} \mid n \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{0\} \subset \mathbb{R}$ и отображение сжатия $g(x) = x/2$. В этом случае имеем $\overline{M} = M$, $M_\infty = \{0\}$. При этом в данном примере имеется изоморфизм C^*-алгебр

$$C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \simeq \mathcal{T}, \tag{4.3}$$

где $\mathcal{T}$ — алгебра операторов Теплица (см., например, [24]). В самом деле, отображение $-2^{-n} \mapsto n$ является биекцией между $M\setminus\{0\}$ и $\mathbb{Z}_+$. В терминах этой биекции алгебра $C(M) = C(\overline{M})$ изоморфна алгебре функций на $\mathbb{Z}_+$, имеющих предел на бесконечности, а алгебра $C(M) \rtimes \mathbb{Z}_+$ получается, если к этой алгебре добавить операторы сдвига последовательности налево и направо. Ясно, что получаемая C^*-алгебра изоморфна алгебре Теплица $\mathcal{T}$.

4.3. K-группы алгебр, ассоциированных со сжатиями. Цель данного пункта состоит в том, чтобы вычислить K-группы алгебр $C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+$ в топологических терминах (более точно, в терминах топологических K-групп некоторых пространств). Приводимая ниже формула (см. предложение 4.1) является обобщением известной формулы (см., например, [24, 34]) для K-групп скрещенных произведений, отвечающих действию группы $\mathbb{Z}$, в терминах тора отображения.

По паре (M, g), где $g : M \to M$ — сжатие, определим топологическое пространство $\overline{M}_g = \Big[\overline{M} \times [0,1]/\{(m,0) \sim (g(m),1)\}\Big] \setminus \{(m,1) \mid m \in \overline{U}\}$, которое получается из произведения $\overline{M} \times [0,1]$ отождествлением точек $(m,0)$ и $(g(m),1)$ при всех $m \in M$ и удалением точек вида $\{(m,1) \,|\, m \in \overline{U}\}$.

Отметим, что если $g : M \to M$ диффеоморфизм (а не сжатие), то мы имеем $\overline{U} = \varnothing$ и $\overline{M} = M = M_\infty$ и пространство $\overline{M}_g$ есть просто тор диффеоморфизма g.

Пример 4.4. Построим в явном виде пространство $\overline{M}_g$, отвечающее сжатию из примера 4.3. Как множество это пространство является объединением $\overline{M}_g = (0,\infty) \cup \mathbb{S}^1$ открытой полупрямой и окружности, при этом топология на объединении задана так, что полупрямая $(0,\infty)$ накручивается на окружность. В явном виде это пространство можно вложить в $\mathbb{R}^3$ следующим образом: окружность определяется уравнениями $x^2 + y^2 = 1, z = 0$, а кривая, которая наматывается на эту окружность, определяется в параметрическом виде $x = \cos(2\pi t)$, $y = \sin(2\pi t)$, $z = (t+1)^{-1}$, $t \in (0, \infty)$.

Теперь определим отображение

$$K^*(\overline{M}_g) \longrightarrow K_{*+1}(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+) \tag{4.4}$$

из топологической K-группы пространства $\overline{M}_g$ в K-группу рассматриваемой C^*-алгебры. Определим отображение (4.4) в случае четной топологической K-группы, т. е. при $* = 0$ (нечетный случай получается при помощи взятия надстройки).

Утверждается, что произвольный элемент $a \in K^0(\overline{M}_g)$ можно получить следующей конструкцией:

- выбирается векторное расслоение $E \in \mathrm{Vect}(\overline{M})$ и его тривиализация над областью $\overline{U} \subset \overline{M}$; также фиксируется изоморфизм векторных расслоений над $g(\overline{M})$
$$U : g^{-1*}E \xrightarrow{\simeq} E, \quad \text{т. е. } U(x) : E_{g^{-1}(x)} \to E_x \text{ при всех } x \in g(\overline{M}); \tag{4.5}$$
- рассматривается сжатие $g : E \to E$, которое накрывает сжатие пространства $\overline{M}$ и определяется формулой
$$e \in E_x \longmapsto U(g(x))e \in E_{gx}. \tag{4.6}$$
Пространство $\overline{E}_g$, определяемое сжатием (4.6), будет искомым векторным расслоением над $\overline{M}_g$ тривиальным вне компакта.

Теперь, чтобы определить отображение (4.4), реализуем расслоение E как образ матричного проектора
$$E = \operatorname{Im} P \subset \overline{M} \times \mathbb{C}^N, \qquad P \in \mathrm{Mat}_N(C(\overline{M})) \tag{4.7}$$
При этом предполагается, что в окрестности U проектор тривиален: $P|_U \equiv 1_k \oplus 0_{N-k}$, где $k = \operatorname{rk} E$. Здесь 1_k — единичная матрица $k \times k$, а 0_{N-k} — соответствующая нулевая матрица. Рассмотрим элемент
$$UT_0P + (1_N - P) \in \mathrm{Mat}_N(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+). \tag{4.8}$$
Этот элемент не является обратимым. А именно, соответствующий элементу (4.8) оператор в $L^2(M, \mathbb{C}^N)$ имеет тривиальное ядро, а коядро состоит из подпространства
$$L^2(U, \mathbb{C}^k) \subset L^2(M, \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{N-k}). \tag{4.9}$$
Теперь отображение (4.4) определяется формулой $a \in K^0(\overline{M}_g) \mapsto [A] \in K_1(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+)$, где
$$A = \begin{pmatrix} UT_0P + (1_N - P) & C \\ 0 & T_0^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{N+k}(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+). \tag{4.10}$$
Здесь оператор $C : L^2(M, \mathbb{C}^k) \subset L^2(M, \mathbb{C}^N)$ является композицией вложения
$$\begin{array}{ccc} L^2(M, \mathbb{C}^k) & \longrightarrow & L^2(M, \mathbb{C}^k \oplus \mathbb{C}^{N-k}) \\ u(x) & \longmapsto & (u(x), 0) \end{array}$$
и проекции на подпространство (4.9). Прямая проверка показывает, что элемент A является обратимым, а обратный элемент равен
$$A = \begin{pmatrix} PT_0^{-1}U^{-1}P + (1_N - P) & 0 \\ C^* & T_0 \end{pmatrix}.$$
Далее, проверка показывает, что отображение (4.10) корректно определено (т. е. не зависит от выбора проектора P и изоморфизма U для данного элемента a) и определяет гомоморфизм групп.

Предложение 4.1. *Отображение* (4.4) *является изоморфизмом групп.*

Доказательство. Доказательство этого предложения аналогично доказательству в случае скрещенных произведений с действиями группы $\mathbb{Z}$ (см., напр., [34]). Рассмотрим диаграмму:
$$\begin{array}{ccccccccc} K^1((M_\infty)_g) & \to & K^0(\overline{U} \times (0,\infty)) & \to & K^0(\overline{M}_g) & \to & K^0((M_\infty)_g) & \to & K^1(\overline{U} \times (0,\infty)) \\ \downarrow\simeq & & \downarrow\simeq & & \downarrow & & \downarrow\simeq & & \downarrow \\ K_0(C(M_\infty) \rtimes \mathbb{Z}) & \to & K_1(C(\overline{U}, \mathcal{K})) & \to & K_1(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+) & \to & K_1(C(M_\infty) \rtimes \mathbb{Z}) & \to & K_0(C(\overline{U}, \mathcal{K})) \end{array} \tag{4.11}$$
Верхняя строка этой диаграммы представляет собой точную последовательность в топологической K-теории для пары $(M_\infty)_g \subset \overline{M}_g$ (здесь $(M_\infty)_g$ — тор гомеоморфизма $g : M_\infty \to M_\infty$). Для дополнения имеем $\overline{M}_g \setminus (M_\infty)_g \simeq \overline{U} \times (0, \infty)$. Нижняя строка диаграммы (4.11) — точная последовательность в K-теории для точной последовательности C^*-алгебр $0 \longrightarrow C(\overline{U}, \mathcal{K}) \longrightarrow C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \longrightarrow C(M_\infty) \rtimes \mathbb{Z} \longrightarrow 0$. Вертикальные отображения диаграммы (4.11) являются изоморфизмами все, кроме среднего. Диаграмма является коммутативной. Поэтому в силу 5-леммы получаем, что и среднее отображение является изоморфизмом. Предложение 4.1 доказано. $\square$

Пример 4.5. Хорошо известны K-группы алгебры Теплица $\mathcal{T}$:

$$K_0(\mathcal{T}) = \mathbb{Z}, \qquad K_1(\mathcal{T}) = 0, \tag{4.12}$$

при этом образующая группы K_0 дается классом единицы $1 \in \mathcal{T}$. С другой стороны, вычислим эти K-группы, пользуясь предложением 4.1 и изоморфизмом C^*-алгебр (4.3)). Пространство $\overline{M}_g$ было явно построено выше. Несложное вычисление с помощью точной последовательностью пары $M_\infty \subset \overline{M}_g$ показывает, что для этого пространства топологические K-группы равны

$$K^0(\overline{M}_g) = 0, \qquad K^1(\overline{M}_g) = \mathbb{Z} \tag{4.13}$$

(последняя группа имеет образующую — класс эквивалентности обратимой функции $e^{2\pi it}$). Из соотношений (4.12) и (4.13) следует, что предложение 4.1 дает в этом случае как раз выражения (4.12).

4.4. C^*-алгебра задач со сжатиями. Напомним определение псевдодифференциальных задач со сжатиями, см. [16, 17].

Сначала определим C^*-алгебру псевдодифференциальных задач на M с граничными условиями на крае X и условиями сопряжения на (бесконечном) объединении подмногообразий $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} g^j(X)$. Фиксируем число $N \geqslant 1$. Через $\Psi_N(M) \subset \mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$ обозначим C^*-алгебру граничных задач на многообразии M с краевыми условиями на подмногообразии X и условиями сопряжения на конечном объединении $\bigcup\limits_{j=1}^{N} g^j(X)$ образов края под действием сжатия g. Отметим, что здесь мы для краткости не рассматриваем граничные и кограничные операторы на подмногообразиях $g^j(X) \subset M$ при $j \geqslant 1$.

По построению указанные алгебры образуют возрастающую последовательность $\Psi_1(M) \subset \Psi_2(M) \subset \Psi_3(M) \subset \ldots$ в $\mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$. Замыкание объединения $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Psi_j(M)$ по операторной норме будем обозначать через $\Psi(\overline{M})$.

Теперь определим C^*-алгебру операторов из $\mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(X))$, которая порождена алгеброй $\Psi(\overline{M})$ и операторами растяжения и сжатия T_0, T_0^{-1}. Эту алгебру обозначим через $\Psi(M, g)$. Можно показать, что эта алгебра является замыканием по норме линейного пространства операторов вида

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j\geqslant 0} D_j T_0^j + \sum\limits_{j<0} T_0^j D_j & \sum\limits_{j\geqslant 0} C_j T_0^j \\ \sum\limits_{j\leqslant 0} T_0^j B_j & D_X \end{pmatrix} : \begin{matrix} L^2(M) \\ \oplus \\ L^2(X) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} L^2(M) \\ \oplus \\ L^2(X) \end{matrix} \tag{4.14}$$

где D_X — псевдодифференциальный оператор на X, коэффициенты D_j, B_j, C_j отличны от нуля только для конечного числа показателей j и имеют вид: $D_j \in \Psi(\overline{M})$; граничные и кограничные операторы действуют в пространствах $B_j : L^2(M) \longrightarrow L^2(g^{|j|}(X))$, $C_j : L^2(g^{|j|}(X)) \longrightarrow L^2(M)$ и ассоциированы с подмногообразием $g^{|j|}(X) \subset M$.

В цитированных работах показано, что имеется отображение внутреннего символа $\sigma_{int} : \Psi(M, g) \longrightarrow C(\overline{S^*M}) \rtimes \mathbb{Z}_+$. Здесь C^*-алгебра $C(\overline{S^*M}) \rtimes \mathbb{Z}_+$ определяется, как в предыдущем пункте в терминах кодифференциала $\partial g : S^*M \to S^*M$, который является сжатием косферического расслоения S^*M. Теперь внутренний символ оператора $\mathcal{D}$ вида (4.14) есть оператор

$$\sigma_{int}(\mathcal{D}) = \sum_{j\geqslant 0} \sigma_{int}(D_j)\tilde{T}_0^j + \sum_{j<0} \tilde{T}_0^j \sigma_{int}(D_j) : L^2(S^*M) \longrightarrow L^2(S^*M),$$

где через $\tilde{T}_0$ обозначена частичная изометрия пространства $L^2(S^*M)$, отвечающая сжатию ∂g (ср. с оператором T_0 в (4.2)). Алгебру символов обозначим через $\Sigma_g = \Psi(M, g)/\mathcal{K}$. Кроме этого, имеет место точная последовательность C^*-алгебр

$$0 \longrightarrow \Sigma_{g,0} \longrightarrow \Sigma_g \xrightarrow{\sigma_{int}} C(\overline{S^*M}) \rtimes \mathbb{Z}_+, \tag{4.15}$$

где через $\Sigma_{g,0}$ обозначен идеал символов с нулевым внутренним символом.

4.5. Проблема гомотопической классификации. Рассмотрим задачу о нахождении гомотопической классификации задач со сжатиями, отвечающую паре C^*-алгебр

$$C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \oplus C(X) \subset \Sigma_g. \tag{4.16}$$

Другими словами, рассматриваются эллиптические операторы, получающиеся сужением матричных операторов над алгеброй $\Psi(M,g)$ на образы матричных проекторов над подалгеброй $C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \oplus C(X)$. Из структуры элементов алгебры $\Psi(M,g)$ (см. (4.14)) следует, что соответствующие эллиптические операторы являются операторами вида

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j\geqslant 0} D_j T_0^j + \sum\limits_{j<0} T_0^j D_j & \sum\limits_{j\geqslant 0} C_j T_0^j \\ \sum\limits_{j\leqslant 0} T_0^j B_j & D_X \end{pmatrix} : \begin{matrix} P_1 L^2(M,\mathbb{C}^N) \\ \oplus \\ L^2(X,G_1) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} P_2 L^2(M,\mathbb{C}^N) \\ \oplus \\ L^2(X,G_2) \end{matrix} \tag{4.17}$$

где $\mathcal{D}$ — матричный оператор над алгеброй $\Psi(M,g)$, P_1, P_2 — некоторые $N\times N$-проекторы с компонентами из алгебры $C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+$ (эта алгебра — первое слагаемое в (4.16)), через $P_{1,2}L^2(M,\mathbb{C}^N)$ обозначены образы этих проекторов, а G_1, G_2 — векторные расслоения над X (сечения этих расслоений определяются как образы матричных проекторов с компонентами из алгебры $C(X)$ — второго слагаемого в (4.16)).

Группу стабильных гомотопических классов эллиптических задач вида (4.17) обозначим через $\operatorname{Ell}(M,g)$.

Рассмотрим сжатие кокасательного расслоения

$$T^*M \longrightarrow T^*M, \qquad (x,\xi) \longmapsto \frac{\partial g(x,\xi)}{|\partial g(x,\xi)|}. \tag{4.18}$$

По отношению к этому сжатию определим пространства $\overline{T^*M}$ и $\overline{T^*M}_g$.

Теорема 4.1. *Группа стабильных гомотопических классов эллиптических внутренних символов задач вида* (4.17) *изоморфна группе* $K^1(\overline{T^*M}_g)$ *и имеет место точная последовательность*

$$K^0(\overline{T^*M}_g) \xrightarrow{\operatorname{ind}\oplus 0} K^0(T^*X)\oplus K^0(X) \longrightarrow \operatorname{Ell}(M,g) \xrightarrow{\sigma_{int}} K^1(\overline{T^*M}_g) \xrightarrow{\operatorname{ind}} K^1(T^*X). \tag{4.19}$$

Здесь:

- *отображение* σ_{int} *сопоставляет классу эллиптической задачи класс ее внутреннего символа*;
- *отображение* $\operatorname{ind} : K^1(\overline{T^*M}_g) \to K^1(T^*X)$ *определяется так*: *эллиптическому внутреннему символу* $\sigma_{int}(\mathcal{D})$ *сопоставляется индекс* $\operatorname{ind}\sigma_\partial(\mathcal{D}) \in K^0(S^*X)/K^0(X)$ *соответствующего граничного символа и используется изоморфизм* $K^0(S^*X)/K^0(X) \simeq K^1(T^*X)$ (*см.* [21]); *отображение* ind *для четных* K*-групп определяется при помощи надстройки*;
- *отображение* $K^0(T^*X) \to \operatorname{Ell}(M,g)$ *индуцировано сопоставлением эллиптическому оператору* D_X *на* X *оператора вида* (4.17), *в котором присутствует только правый нижний угол, а остальные операторы нулевые*; *наконец, отображение* $K^0(X) \to \operatorname{Ell}(M,g)$ *определяется так же, как отображение* (2.13) *выше.*

Доказательство.

1. Сначала группа $\operatorname{Ell}(M,g)$ выражается в силу результатов работы [36]

$$\operatorname{Ell}(M,g) \simeq K_0\Big(\operatorname{Con}\big(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \oplus C(X) \to \Sigma_g\big)\Big) \tag{4.20}$$

в терминах K-группы C^*-алгебры $\operatorname{Con}(C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \oplus C(X) \to \Sigma_g)$. Эту алгебру будем обозначать для краткости через $\mathcal{A}$.

2. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow & \Sigma_{g,0} & \longrightarrow & \Sigma_g & \xrightarrow{\sigma_{int}} & C(S^*\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \longrightarrow & C(X) & \longrightarrow & C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ \oplus C(X) & \longrightarrow & C(\overline{M}) \rtimes \mathbb{Z}_+ & \longrightarrow 0 \end{array} \tag{4.21}$$

Здесь верхняя строка — это точная последовательность (4.15), а отображения в нижней строке имеют вид $f \mapsto (0,f)$, $(f_1,f_2) \mapsto f_1$. При этом вертикальные отображения диаграммы (4.21) являются вложениями подалгебр. Диаграмма является коммутативной по построению. Следовательно, определена короткая точная последовательность конусов вертикальных отображений этой диаграммы. Рассмотрим соответствующую точную периодическую последовательность в K-теории

$$\ldots \to K_0\big(\mathrm{Con}(C(X)\to \Sigma_{g,0})\big) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K_0(\mathrm{Con}(C(\overline{M})\rtimes \mathbb{Z}_+ \to C(S^*\overline{M})\rtimes\mathbb{Z}_+)) \longrightarrow \\ \longrightarrow K_1\big(\mathrm{Con}(C(X)\to \Sigma_{g,0})\big) \to \ldots \quad (4.22)$$

Вычислим в топологических терминах группы

$$K_*\big(\mathrm{Con}(C(X)\to \Sigma_{g,0})\big) \quad \text{и} \quad K_*(\mathrm{Con}(C(\overline{M})\rtimes \mathbb{Z}_+ \to C(S^*\overline{M})\rtimes\mathbb{Z}_+)) \qquad (4.23)$$

в этой последовательности. Для первой из этих групп имеет место изоморфизм

$$K_*(\mathrm{Con}(C(X)\to\Sigma_{g,0})) \simeq K^*(T^*X)\oplus K^*(X)$$

(ср. с аналогичным изоморфизмом (2.15) в случае псевдодифференциальных краевых задач). Конструкция этого изоморфизма следует аналогичной конструкции изоморфизма (2.15) и не содержит принципиально новых моментов. Поэтому мы ее детально здесь не повторяем.

Исследуем вторую группу в (4.23). Во-первых, имеем изоморфизмы C^*-алгебр

$$\mathrm{Con}\big(C(\overline{M})\rtimes\mathbb{Z}_+ \to C(S^*\overline{M})\rtimes\mathbb{Z}_+\big) \simeq \big[\mathrm{Con}(C(\overline{M})\to C(S^*\overline{M}))\big]\rtimes\mathbb{Z}_+ \simeq C_0(\overline{T^*M})\rtimes\mathbb{Z}_+.$$

Здесь первый изоморфизм очевиден, а второй индуцирован гомеоморфизмом пространства $\overline{T^*M}$ и конуса проекции $\overline{S^*M}\to\overline{M}$, при этом на пространстве T^*M рассматривается сжатие (4.18). Во-вторых, K-группа C^*-алгебры $C_0(\overline{T^*M})\rtimes\mathbb{Z}_+$ вычисляется в топологических терминах с помощью предложения 4.1. Применение этого предложения дает изоморфизм групп $K_*(C_0(\overline{T^*M})\rtimes\mathbb{Z}_+)\simeq K^{*+1}(\overline{T^*M}_g)$.

Итак, последовательность (4.22) принимает вид

$$\to K^1(\overline{T^*M}_g) \longrightarrow K^0(T^*X)\oplus K^0(X) \longrightarrow K_0(\mathcal{A}) \longrightarrow K^0(\overline{T^*M}_g) \longrightarrow K^1(T^*X)\oplus K^1(X) \to \quad (4.24)$$

Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б., Бахтин В. И., Лебедев А. В.* Скрещенное произведение С-алгебры на эндоморфизм, алгебры коэффициентов и трансфер-операторы// Мат. сб. — 2011. — *202*, № 9. — С. 3–34.
2. *Вишик М. И., Эскин Г. И.* Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения// Усп. мат. наук. — 1965. — *22*, № 1. — С. 15–76.
3. *Гельфанд И. М.* Об эллиптических уравнениях// Усп. мат. наук. — 1960. — *15*, № 3. — С. 121–132.
4. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на полуоси с ядрами зависящими от разности аргументов// Усп. мат. наук. — 1958. — *13*, № 2. — С. 3–72.
5. *Назайкинский В. Е., Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* О гомотопической классификации эллиптических операторов на стратифицированных многообразиях// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2007. — *71*, № 6. — С. 91–118.
6. *Назайкинский В. Е., Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* О гомотопической классификации эллиптических операторов на многообразиях с углами// Докл. РАН. — 2007. — *413*, № 1. — С. 16–19.
7. *Назайкинский В. Е., Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Некоммутативная геометрия и классификация эллиптических операторов// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*, № 1. — С. 131–164.
8. *Назайкинский В. Е., Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Индекс Атьи—Ботта на стратифицированных многообразиях// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 100–108.
9. *Россовский Л. Е.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2001. — *62*. — С. 199–228.
10. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
11. *Россовский Л. Е., Скубачевский А. Л.* Разрешимость и регулярность решений некоторых классов эллиптических функционально-дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. — 1999. — *66*. — С. 114–192.
12. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Эллиптические операторы в четных подпространствах// Мат. сб. — 1999. — *190*, № 8. — С. 125–160.
13. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* О проблеме гомотопической классификации эллиптических краевых задач// Докл. РАН. — 2001. — *377*, № 2. — С. 165–169.

14. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Дефекты индекса в теории нелокальных краевых задач и η-инвариант// Мат. сб. — 2004. — *195*, № 9. — С. 85–126.
15. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Гомотопическая классификация эллиптических задач, ассоциированных с действиями дискретных групп на многообразиях с краем// Уфимск. мат. журн. — 2016. — *8*, № 3. — С. 126–134.
16. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Эллиптические задачи с растяжениями-сжатиями на многообразиях с краем. С-теория// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 10. — С. 1383–1392.
17. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Эллиптические дифференциальные задачи с растяжениями-сжатиями на многообразиях с краем// Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 5. — С. 665–676.
18. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
19. *Atiyah M. F.* Global theory of elliptic operators// В сб. «Proc. of the Int. Symposium on Functional Analysis». — Tokyo: University of Tokyo Press, 1969. — С. 21–30.
20. *Atiyah M. F., Bott R.* The index problem for manifolds with boundary// В сб. «Differential Analysis: Papers presented at the international colloquium». — London: Oxford University Press, 1964. — С. 175–186.
21. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1976. — *79*. — С. 71–99.
22. *Atiyah M. F., Singer I. M.* The index of elliptic operators. I// Ann. of Math. — 1968. — *87*. — С. 484–530.
23. *Baum P., Douglas R. G.* K-homology and index theory// В сб. «Operator Algebras and Applications». — Am. Math. Soc., 1982. — С. 117–173.
24. *Blackadar B.* K-Theory for Operator Algebras. — Cambridge University Press, 1998.
25. *Higson N., Roe J.* Analytic K-homology. — Oxford: Oxford University Press, 2000.
26. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III. — Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer, 1985.
27. *Kwaśniewski B. K., Lebedev A. V.* Crossed products by endomorphisms and reduction of relations in relative Cuntz—Pimsner algebras// J. Funct. Anal. — 2013. — *264*, № 8. — С. 1806–1847.
28. *Lescure J.-M.* Elliptic symbols, elliptic operators and Poincaré duality on conical pseudomanifolds// J. K-Theory. — 2009. — *4*, № 2. — С. 263–297.
29. *Melo S. T., Nest R., Schrohe E.* C^*-structure and K-theory of Boutet de Monvel's algebra// J. Reine Angew. Math. — 2003. — *561*. — С. 145–175.
30. *Melo S. T., Schick Th., Schrohe E.* A K-theoretic proof of Boutet de Monvel's index theorem for boundary value problems// J. Reine Angew. Math. — 2006. — *599*. — С. 217–233.
31. *Melrose R., Rochon F.* Index in K-theory for families of fibred cusp operators// K-Theory. — 2006. — *37*, № 1-2. — С. 25–104.
32. *Monthubert B., Nistor V.* A topological index theorem for manifolds with corners// Compos. Math. — 2012. — *148*, № 2. — С. 640–668.
33. *Nazaikinskii V., Savin A., Schulze B.-W., Sternin B.* Elliptic Theory on Singular Manifolds. — Boca Raton: CRC-Press, 2005.
34. *Pimsner M., Voiculescu D.* Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C-algebras// J. Oper. Theory. — 1980. — *4*. — С. 93–118.
35. *Rempel S., Schulze B.-W.* Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without the transmission property// Math. Nachr. — 1982. — *105*. — С. 45–149.
36. *Savin A.* Elliptic operators on manifolds with singularities and K-homology// K-theory. — 2005. — *34*, № 1. — С. 71–98.

А. Ю. Савин
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6;
Leibniz Unversity of Hannover,
1 Welfengarten, 30159 Hannover, Germany
E-mail: antonsavin@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-164-179 UDC 515.168.5+517.986.32

On Homotopic Classification of Elliptic Problems with Contractions and K-Groups of Corresponding C^*-Algebras

© 2018 **A. Yu. Savin**

Abstract. We consider calculation of a group of stable homotopic classes for pseudodifferential elliptic boundary problems. We study this problem in terms of topological K-groups of some spaces in the following cases: for boundary-value problems on manifolds with boundaries, for conjugation problems with conditions on a closed submanifold of codimension one, and for nonlocal problems with contractions.

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, V. I. Bakhtin, and A. V. Lebedev, "Skreshchennoe proizvedenie C-algebry na endomorfizm, algebry koeffitsientov i transfer-operatory" [Smash product of a C-algegra by endomorphism, algebras of coefficients, and transfer-operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2011, **202**, No. 9, 3–34 (in Russian).
2. M. I. Vishik and G. I. Eskin, "Ellipticheskie uravneniya v svertkakh v ogranichennoy oblasti i ikh prilozheniya" [Convolution elliptic equations in a bounded domain and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1965, **22**, No. 1, 15–76 (in Russian).
3. I. M. Gel'fand, "Ob ellipticheskikh uravneniyakh" [On elliptic equations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1960, **15**, No. 3, 121–132 (in Russian).
4. I. Ts. Gokhberg and M. G. Kreyn, "Sistemy integral'nykh uravneniy na poluosi s yadrami zavisyashchimi ot raznosti argumentov" [Systems of integral equations on semiaxis with kernels depending on difference of arguments], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1958, **13**, No. 2, 3–72 (in Russian).
5. V. E. Nazaykinskiy, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin, "O gomotopicheskoy klassifikatsii ellipticheskikh operatorov na stratifitsirovannykh mnogoobraziyakh" [On homotopic classification of elliptic operators on stratified manifolds], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2007, **71**, No. 6, 91–118 (in Russian).
6. V. E. Nazaykinskiy, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin, "O gomotopicheskoy klassifikatsii ellipticheskikh operatorov na mnogoobraziyakh s uglami" [On homotopic classification of elliptic operators on manifolds with corners], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **413**, No. 1, 16–19 (in Russian).
7. V. E. Nazaykinskiy, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin, "Nekommutativnaya geometriya i klassifikatsiya ellipticheskikh operatorov" [Noncommutative geometry and classification of elliptic operators], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **29**, No. 1, 131–164 (in Russian).
8. V. E. Nazaykinskiy, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin, "Indeks At'i—Botta na stratifitsirovannykh mnogoobraziyakh" [Atiyah–Bott index on stratified manifolds], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **34**, 100–108 (in Russian).
9. L. E. Rossovskiy, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s rastyazheniem i szhatiem argumentov" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations with contraction and dilatation of arguments], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2001, **62**, 199–228 (in Russian).
10. L. E. Rossovskiy, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contraction and dilatation of arguments of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
11. L. E. Rossovskiy and A. L. Skubachevskiy, "Razreshimost' i regulyarnost' resheniy nekotorykh klassov ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy" [Solvability and regularity of solutions of some classes of elliptic functional differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 1999, **66**, 114–192 (in Russian).
12. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, "Ellipticheskie operatory v chetnykh podprostranstvakh" [Elliptic operators in even subspaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1999, **190**, No. 8, 125–160 (in Russian).

13. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “O probleme gomotopicheskoy klassifikatsii ellipticheskikh kraevykh zadach” [On the problem of homotopic classification of elliptic boundary-value problems], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2001, **377**, No. 2, 165–169 (in Russian).
14. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Defekty indeksa v teorii nelokal’nykh kraevykh zadach i η-invariant” [Defects of index in the theory of nonlocal boundary-value problems and the η-invariant], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2004, **195**, No. 9, 85–126 (in Russian).
15. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Gomotopicheskaya klassifikatsiya ellipticheskikh zadach, assotsiirovannykh s deystviyami diskretnykh grupp na mnogoobraziyakh s kraem” [Homotopic classification of elliptic problems associated with actions of discrete groups on manifolds with boundaries], *Ufimsk. mat. zhurn.* [Ufa Math. J.], 2016, **8**, No. 3, 126–134 (in Russian).
16. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Ellipticheskie zadachi s rastyazheniyami-szhatiyami na mnogoobraziyakh s kraem. C-teoriya” [Elliptic problems with dilatations and contractions on manifolds with boundaries. C-Theory], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 10, 1383–1392 (in Russian).
17. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, “Ellipticheskie differentsial’nye zadachi s rastyazheniyami-szhatiyami na mnogoobraziyakh s kraem” [Elliptic differential problems with dilatations and contractions on manifolds with boundaries], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 5, 665–676 (in Russian).
18. G. I. Eskin, *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh psevdodifferentsial’nykh uravneniy* [Boundary-Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
19. M. F. Atiyah, “Global theory of elliptic operators,” In: *Proc. of the Int. Symposium on Functional Analysis*, University of Tokyo Press, Tokyo, 1969, pp. 21–30.
20. M. F. Atiyah and R. Bott, “The index problem for manifolds with boundary,” In: *Differential Analysis: Papers presented at the international colloquium*, University Press, London, 1964, pp. 175–186.
21. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, “Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III,” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, **79**, 71–99.
22. M. F. Atiyah and I. M. Singer, “The index of elliptic operators. I,” *Ann. of Math.*, 1968, **87**, 484–530.
23. P. Baum and R. G. Douglas, “K-homology and index theory,” In: *Operator Algebras and Applications*, Am. Math. Soc., 1982, pp. 117–173.
24. B. Blackadar, *K-Theory for Operator Algebras*, Cambridge University Press, 1998.
25. N. Higson and J. Roe, *Analytic K-homology*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
26. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo, 1985.
27. B. K. Kwaśniewski and A. V. Lebedev, “Crossed products by endomorphisms and reduction of relations in relative Cuntz—Pimsner algebras,” *J. Funct. Anal.*, 2013, **264**, No. 8, 1806–1847.
28. J.-M. Lescure, “Elliptic symbols, elliptic operators and Poincaré duality on conical pseudomanifolds,” *J. K-Theory.*, 2009, **4**, No. 2, 263–297.
29. S. T. Melo, R. Nest, and E. Schrohe, “C^*-structure and K-theory of Boutet de Monvel’s algebra,” *J. Reine Angew. Math.*, 2003, **561**, 145–175.
30. S. T. Melo, Th. Schick, and E. Schrohe, “A K-theoretic proof of Boutet de Monvel’s index theorem for boundary value problems,” *J. Reine Angew. Math.*, 2006, **599**, 217–233.
31. R. Melrose and F. Rochon, “Index in K-theory for families of fibred cusp operators,” *K-Theory.*, 2006, **37**, No. 1-2, 25–104.
32. B. Monthubert and V. Nistor, “A topological index theorem for manifolds with corners,” *Compos. Math.*, 2012, **148**, No. 2, 640–668.
33. V. Nazaikinskii, A. Savin, B.-W. Schulze, and B. Sternin, *Elliptic Theory on Singular Manifolds*, CRC-Press, Boca Raton, 2005.
34. M. Pimsner and D. Voiculescu, “Exact sequences for K-groups and Ext-groups of certain cross-product C-algebras,” *J. Oper. Theory.*, 1980, **4**, 93–118.
35. S. Rempel and B.-W. Schulze, “Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without the transmission property,” *Math. Nachr.*, 1982, **105**, 45–149.
36. A. Savin, “Elliptic operators on manifolds with singularities and K-homology,” *K-theory.*, 2005, **34**, No. 1, 71–98.

A. Yu. Savin
RUDN University, Moscow, Russia;
Leibniz Unversity of Hannover, Hannover, Germany
E-mail: antonsavin@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 180–193

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-180-193 УДК 517.984.52

РАВНОМЕРНАЯ БАЗИСНОСТЬ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

© 2018 г. **А. М. САВЧУК, И. В. САДОВНИЧАЯ**

Аннотация. Изучается одномерный оператор Дирака $\mathcal{L}$ на отрезке $[0,\pi]$ с регулярными по Биркгофу краевыми условиями U и комплекснозначным суммируемым потенциалом $P = (p_{ij}(x))$, $i, j = 1, 2$. Доказаны равномерные оценки для констант Рисса систем корневых функций сильно регулярного оператора $\mathcal{L}$ при условии, что краевые условия U и число $\int\limits_0^\pi (p_1(x) - p_4(x))\,dx$ фиксированы, а потенциал P пробегает шар $B(0,R)$ радиуса R пространства $L_\varkappa$ при $\varkappa > 1$. При этом систему корневых функций удается выбрать так, чтобы она состояла из собственных функций оператора $\mathcal{L}$, за исключением конечного набора корневых векторов, количество которых оценивается также равномерно по шару $\|P\|_\varkappa \leqslant R$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Рассмотрим оператор Дирака, порожденный в пространстве $\mathbb{H} = L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \ni \mathbf{y}$ дифференциальным выражением

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}, \quad \text{где} \tag{1.1}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Функции p_j, $j = 1,2,3,4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. Следуя классическому пути, можно определить минимальный оператор $\mathcal{L}_{P,m}$ на области $\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,m}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] : \ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H},\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(\pi) = 0\}$. Здесь $W_1^1[0,\pi]$ — пространство Соболева функций с суммируемой по Лебегу первой производной (в данном случае оно совпадает с пространством абсолютно непрерывных функций). Легко показать (см., например, [16]), что оператор $\mathcal{L}_{P,m}$ является фредгольмовым с индексами $(0,2)$, а сопряженный оператор $\mathcal{L}^*_{P,m}$ порождается сопряженным дифференциальным выражением $\ell_{P^*}(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P^*\mathbf{y}$, где $P^*(x) = \begin{pmatrix} \overline{p}_1(x) & \overline{p}_3(x) \\ \overline{p_2}(x) & \overline{p}_4(x) \end{pmatrix}$, и имеет область определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}^*_{P,m}) = \{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] : \ell_{P^*}(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}\}$. Таким образом, корректно определенный оператор Дирака является двумерным расширением оператора $\mathcal{L}_{P,m}$, т. е. имеет область определения $\{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] : \ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H},\ U(\mathbf{y}) = 0\}$, где

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

Исследования поддержаны грантом РФФИ 16-01-00706.

причем строки матрицы $\mathcal{U} := (C, D) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$ линейно независимы. В дальнейшем мы будем рассматривать случай регулярных по Биркгофу краевых условий. Обозначим через $J_{\alpha\beta}$ определитель, составленный из α-го и β-го столбца матрицы $\mathcal{U}$.

Определение 1.1. Краевые условия, определенные формой U, называются *регулярными* (по Биркгофу), если $J_{14} \cdot J_{23} \neq 0$. Оператор Дирака, порожденный регулярными краевыми условиями U, т. е. оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U}) = \left\{\mathbf{y} \in W_1^1[0,\pi] : \ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H},\, U(\mathbf{y}) = 0\right\}$, будем называть *регулярным*.

Любой регулярный оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ замкнут и имеет плотную в $\mathbb{H}$ область определения (см., например, [16]). Спектр этого оператора состоит из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, расположенных в некоторой горизонтальной полосе $\{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| < \alpha\}$, причем $\lambda_n \to \pm\infty$ при $n \to \pm\infty$.

Через $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^t$ будем обозначать вектор-функции на отрезке $[0,\pi]$. Чтобы не усложнять запись, мы будем писать $\mathbf{f} \in L_\alpha$, имея в виду, что $f_1 \in L_\alpha[0,\pi]$ и $f_2 \in L_\alpha[0,\pi]$, или $P \in L_\alpha$, имея в виду, что все компоненты матрицы лежат в $L_\alpha[0,\pi]$. При этом мы положим

$$\|\mathbf{f}\|_{(L_\alpha[0,\pi])^2} = \|\mathbf{f}\|_\alpha = \left(\int\limits_0^\pi |f_1(x)|^\alpha\,dx + \int\limits_0^\pi |f_2(x)|^\alpha\,dx\right)^{\alpha'}$$

при $\alpha \in [1,\infty)$ и

$$\|\mathbf{f}\|_{(L_\infty[0,\pi])^2} = \|\mathbf{f}\|_\infty = \|\mathbf{f}\|_{C[0,\pi]} = \max\left\{\sup_{x\in[0,\pi]} |f_1(x)|,\ \sup_{x\in[0,\pi]} |f_2(x)|\right\}.$$

Рассматривая оператор T, действующий в пространстве $\mathbb{H}$, мы будем обозначать его норму $\|T\|$.

Регулярный оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ называется *сильно регулярным*, если $[J_{12} + \epsilon^2 J_{34}]^2 + 4\epsilon^2 J_{23}J_{14} \neq 0$, где $\epsilon = \exp\{\frac{i}{2}\int\limits_0^\pi (p_4(t) - p_1(t))\,dt\}$. В сильно регулярном случае все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ асимптотически просты. Через $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ обозначим систему собственных и присоединенных функций такого оператора (присоединенных функций может быть лишь конечное число). Собственные функции мы нормируем условием $\|\mathbf{y}_n\| = 1$. Выбор присоединенных функций проводим стандартным образом с помощью канонических по Келдышу цепочек.

Отправной точкой для наших рассуждений является теорема о базисности Рисса системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Эта теорема была доказана в [16] и независимо в [15]. Обозначим через $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ произвольный ортонормированный базис пространства $\mathbb{H}$ и определим оператор $T_0 : \mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{y}_n$. Поскольку система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса, то этот оператор однозначно продолжается до непрерывного и ограниченного оператора в $\mathbb{H}$. При этом величину $\|T_0\| \cdot \|T_0^{-1}\|$ будем называть *константой Рисса* базиса $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (она, очевидно, не зависит от выбора базиса $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$). Сам оператор T_0 и константа Рисса определяются потенциалом P и краевыми условиями U.

Важно отметить, что свойство сильной регулярности оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ определяется не только краевыми условиями, но и потенциалом. Зависимость свойства сильной регулярности от потенциала пропадает, если величина $\int\limits_0^\pi (p_4(t) - p_1(t))\,dt$ не меняется. В частности, это так, если потенциал P является внедиагональным, т. е. $p_1 = p_4 = 0$.

Далее в работе мы будем изучать зависимость константы Рисса от потенциала P, считая краевые условия U и величину $\int\limits_0^\pi (p_4(t) - p_1(t))\,dt$ фиксированными и такими, что $[J_{12} + \epsilon^2 J_{34}]^2 + 4\epsilon^2 J_{23}J_{14} \neq 0$. В частности, оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ всегда будет сильно регулярен.

Даже если число $[J_{12} + \epsilon^2 J_{34}]^2 + 4\epsilon^2 J_{23}J_{14} \neq 0$ фиксировано, а $\mathbf{K}$ — компакт в $L_1[0,\pi]$, величина $\sup\limits_{P\in\mathbf{K}} \|T_0\| \cdot \|T_0^{-1}\|$ не обязана быть конечной (этот эффект возникает, если при изменении потенциала несколько собственных значений сталкиваются и образуют жорданову клетку). Несложно доказать, что сильная регулярность гарантирует асимптотическую простоту спектра оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Это означает, что изменение оператора T_0 на подходящем конечномерном подпространстве ведет к ограниченности констант Рисса. А именно, для произвольного фиксированного множества индексов $J_N \subset \mathbb{Z}$ (здесь N — мощность множества J_N) положим $\mathcal{H}_J := \mathrm{Lin}\{\mathbf{y}_n\}_{n\in J_N}$ и заменим базис $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in J_N}$ собственных и присоединенных функций на ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n\in J_N}$ корневых функций пространства $\mathcal{H}_J$. Теперь определим оператор

$$T\mathbf{e}_n = \begin{cases} \mathbf{y}_n, & \text{если } n \notin J_N, \\ \varphi_n, & \text{если } n \in J_N, \end{cases}$$

на базисе $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и продолжим его по непрерывности на все $\mathbb{H}$ (непрерывность оператора T следует из непрерывности оператора T_0, поскольку эти два оператора отличаются лишь на конечномерном пространстве). Заметим, что оператор T зависит от выбора множества J_N и базиса $\{\varphi_n\}_{n\in J_N}$, но его норма $\|T\|$ (так же, как и константа Рисса $\|T\|\cdot\|T^{-1}\|$) от выбора базиса $\{\varphi_n\}_{n\in J_N}$ уже не зависит. В работе [7] было показано, что *если* $\mathbf{K}$ *— компакт в* $L_1[0,\pi]$, *а число число* $[J_{12}+\epsilon^2 J_{34}]^2 + 4\epsilon^2 J_{23}J_{14} \neq 0$ *фиксировано, то найдется такой номер* N (*он зависит от выбора компакта* $\mathbf{K}$), *что, положив* $J_N = \{n : |n| \leqslant N\}$, *получим* $\sup\limits_{P\in\mathbf{K}} \|T\|\cdot\|T^{-1}\| \leqslant C$, *где* C *также зависит только от* $\mathbf{K}$.

В этой работе мы изучим случай, когда потенциал P пробегает шар радиуса R пространства $L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa > 1$ (при этом число $[J_{12}+\epsilon^2 J_{34}]^2 + 4\epsilon^2 J_{23}J_{14}$ по-прежнему считается фиксированным и ненулевым). Теперь уже нельзя ограничиться изменением оператора T_0 на подпространствах, отвечающих множествам J_N вида $\{n : |n| \leqslant N\}$: варьируя потенциал в шаре большого радиуса, можно добиться столкновения пары собственных значений со сколь угодно большими номерами. Тем не менее, оказывается, что и в этой ситуации можно дать ограничения на мощность множества J_N. Сформулируем основной результат работы (он был анонсирован авторами в [5]).

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathcal{L}_{P,U}$ *— сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом* $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,2]$, $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$. *Пусть краевые условия* U *и величина* $\int\limits_0^\pi (p_4(t)-p_1(t))\,dt$ *фиксированы. Тогда для каждого* P, $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, *существует такое множество индексов* $J_N \subset \mathbb{Z}$, *что* $\|T\|\cdot\|T^{-1}\| \leqslant C$, *где величины* C *и* N *зависят только от радиуса шара* R *и краевых условий* U.

Насколько нам известно, для случая системы корневых функций оператора Дирака это утверждение является новым. Тематика равномерных оценок для констант Рисса является классической для систем экспонент. Такие оценки также естественным образом возникают в теории фреймов и теории интерполяции целых функций (см., например, [11, 12], [17, гл. 4], [2] и ссылки там).

Отметим еще, что в процессе доказательство получено одно утверждение, представляющее самостоятельный интерес: *число иррегулярных*[1] *собственных значений оператора* $L_{P,U}$ *ограничено величиной* $C = C(R,U)$ (*при условии, что число* ϵ *фиксировано*). Дело в том, что действуя так же, как при доказательстве теоремы 4.3 в работе [16], для регулярных собственных значений можно получить оценки вида

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\mathcal{R}}} |\lambda_n - \lambda_n^0|^{\varkappa'}\Big)^{1/\varkappa'} \leqslant C(R,U)\|P\|_{L_\varkappa[0,\pi]}.$$

Таким образом, утверждение об оценке числа иррегулярных собственных значений влечет ограниченность нелинейного отображения $F : P \mapsto \{\lambda_n - n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $F : L_2[0,\pi] \to l_2(\mathbb{Z})$, что является важным моментом при получении теорем устойчивости для прямых и обратных спектральных задач. Подобные утверждения для случая оператора Штурма—Лиувилля можно найти, например, в работах [8, 14].

[1] Определение регулярных и иррегулярных собственных значений см. ниже после леммы 3.2

2. Предварительные сведения

Через $\mathcal{L}_{0,U}$ мы будем обозначать оператор Дирака с краевыми условиями U и нулевым потенциалом $P \equiv 0$.

Утверждение 2.1 (см. [13, раздел 2]). *Характеристический определитель оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ равен $\Delta_0(\lambda) = J_{23}e^{i\pi\lambda} - J_{14}e^{-i\pi\lambda} - [J_{12} + J_{34}]$. Спектр оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ имеет вид*

$$\lambda_n^0 = \begin{cases} \zeta_0 + n, & \text{если } n \text{ четно}, \\ \zeta_1 + n, & \text{если } n \text{ нечетно}, \end{cases} \qquad \text{где } \zeta_0 = -\frac{i}{\pi}\ln z_0, \quad \zeta_1 = -\frac{i}{\pi}\ln z_1 - 1.$$

Здесь z_0 и z_1 — корни квадратного уравнения $J_{23}z^2 - [J_{12} + J_{34}]z - J_{14} = 0$, а значения логарифма фиксируются в полосе $\operatorname{Im}\ln z \in (-\pi, \pi]$. Корни z_0 и z_1 различны в точности тогда, когда краевые условия сильно регулярны. В этом случае величина $d = \inf_{n\neq m} |\lambda_n^0 - \lambda_m^0|$ строго положительна. Для определенности будем считать, что $\operatorname{Re}\lambda_0^0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_1^0$, а в случае равенства вещественных частей, что $\operatorname{Im}\lambda_0^0 < \operatorname{Im}\lambda_1^0$. Резольвента $\mathcal{R}_0(\lambda) := (\mathcal{L}_{0,U} - \lambda I)^{-1}$ определена везде, кроме точек λ_n^0, и является интегральным оператором $\mathcal{R}_0(\lambda) : \mathbf{f} \mapsto \int_0^\pi G_0(\xi, x, \lambda)\mathbf{f}(\xi)\,d\xi$. Собственные функции $\mathbf{y}_n^0$ любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ образуют базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$.

Рассмотрим теперь оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с ненулевым потенциалом. Функцию P мы будем считать суммируемой, а краевые условия регулярными. Заметим, что случай потенциала общего вида можно свести к случаю внедиагональной матрицы $P(x)$, перейдя к подобному оператору.

Утверждение 2.2 (см. [6, утверждение 1.3]). *Пусть $P(x)$ — произвольная матрица размера 2×2 с элементами $p_j \in L_1[0,\pi]$, $j = 1, 2, 3, 4$, а матрица $\mathcal{U}$ задает регулярные краевые условия. Тогда оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ подобен оператору $\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}} + \gamma I$, где $\widetilde{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{p}_2(x) \\ \widetilde{p}_3(x) & 0 \end{pmatrix}$, $\widetilde{p}_2(x) = p_2(x)e^{i(\psi(x)-\varphi(x))}$, $\widetilde{p}_3(x) = p_3(x)e^{i(\varphi(x)-\psi(x))}$, $\varphi(x) = \gamma x - \int_0^x p_1(t)dt$, $\psi(x) = \int_0^x p_4(t)dt - \gamma x$, $\gamma = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^\pi (p_1(t) + p_4(t))dt$, $\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{C}, \widetilde{D})$, $\widetilde{C} = C$, $\widetilde{D} = \exp\left(\dfrac{i}{2}\int_0^\pi (p_1(t) - p_4(t))dt\right) D$. А именно, $\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}} = W^{-1}\mathcal{L}_{P,U}W$, где W — оператор умножения на матрицу $W(x) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi(x)} & 0 \\ 0 & e^{i\psi(x)} \end{pmatrix}$.*

Замечание 2.1. Отметим, что если краевые условия U были регулярны, то и условия $\widetilde{U}$ остаются регулярными. В случае сильной регулярности условий U новые краевые условия сильно регулярны. Для нас также важно то, что $\widetilde{P} \in L_\varkappa[0,\pi]$ в том случае, если $P \in L_\varkappa[0,\pi]$. Кроме того, если $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, то $\|W\|_{\mathbb{H}} \leqslant e^{2R}$, $\|W^{-1}\|_{\mathbb{H}} \leqslant e^{2R}$ и $\|\widetilde{P}\|_{L_\varkappa} \leqslant Re^{4R}$. Это означает, что равномерные оценки, полученные для оператора $\widetilde{T}$, автоматически влекут равномерные оценки нормы оператора $T = W\widetilde{T}$. То же верно и для оператора T^{-1}, так что теорему 1.1 достаточно доказать для случая внедиагональной матрицы P.

Итак, начиная с этого момента будем считать, что

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & p_2(x) \\ p_3(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Через $E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e_{11}(x,\lambda) & e_{12}(x,\lambda) \\ e_{21}(x,\lambda) & e_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix}$ мы обозначим фундаментальную матрицу решений уравнения $\ell_P(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}$ с начальным условием $E(0,\lambda) = I$. При $P \equiv 0$ будем пользоваться обозначением $E_0(x,\lambda)$. Очевидно, что $E_0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{ix\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-ix\lambda} \end{pmatrix}$.

Введем также матрицу $E(x,\lambda)E^{-1}(a,\lambda)$, которую обозначим через $\mathcal{E}(a,x,\lambda)$, где $0 \leqslant a,\ x \leqslant \pi$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Прямым подсчетом получаем

$$\mathcal{E}(a,x,\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11}(a,x,\lambda) & \mathcal{E}_{12}(a,x,\lambda) \\ \mathcal{E}_{21}(a,x,\lambda) & \mathcal{E}_{22}(a,x,\lambda) \end{pmatrix},$$
$$\text{где}\quad \mathcal{E}_{j1}(a,x,\lambda) = e_{j1}(x,\lambda)e_{22}(a,\lambda) - e_{j2}(x,\lambda)e_{21}(a,\lambda), \tag{2.2}$$
$$\mathcal{E}_{j2}(a,x,\lambda) = e_{j2}(x,\lambda)e_{11}(a,\lambda) - e_{j1}(x,\lambda)e_{12}(a,\lambda), \quad j = 1,\,2.$$

Легко видеть, что спектр оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ состоит из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — нулей характеристического определителя $\Delta(\lambda) = J_{12}+J_{34}+J_{13}e_{12}(\pi,\lambda)+J_{14}e_{22}(\pi,\lambda)+J_{32}e_{11}(\pi,\lambda)+J_{42}e_{21}(\pi,\lambda)$.

Утверждение 2.3 (см. [16, теорема 4.3], [6, утверждение 3.1], [10, утверждение 6])**.** *Для любого регулярного оператора Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa > 1$, найдется такое число $\alpha_0 = \alpha_0(R,U)$, что спектр оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ (и оператора $\mathcal{L}_{0,U}$) лежит в горизонтальной полосе $\Pi_{\alpha_0} = \{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| < \alpha_0\}$, а вне этой полосы резольвента $\mathcal{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}$ представляется абсолютно сходящимся операторным рядом*

$$\mathcal{R}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty}(-\mathcal{R}_0(\lambda)P)^k\mathcal{R}_0(\lambda), \tag{2.3}$$

слагаемые которого допускают оценку $\|(-\mathcal{R}_0P)^k\mathcal{R}_0\|_{\mathbb{H}} \leqslant C^{k+1}(U)\|P\|_\varkappa^k|\operatorname{Im}\lambda|^{-1-k/\varkappa'}$ (число α_0 здесь выбирается так, что $C(U)\|P\|_\varkappa|\operatorname{Im}\lambda|^{-1/\varkappa'} < 1/2$, а сама резольвента допускает оценку $\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant 2C(U)|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}$). Резольвента определена везде вне точек $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и является интегральным оператором с интегральным ядром

$$G(\xi,x,\lambda) = i\left(\frac{J_{12}}{\Delta(\lambda)} - \chi_{\xi>x}(t,x)\right)\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11}(\xi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(\xi,x,\lambda) \\ \mathcal{E}_{21}(\xi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(\xi,x,\lambda) \end{pmatrix} +$$
$$+\frac{i}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11}(\pi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(\pi,x,\lambda) \\ \mathcal{E}_{21}(\pi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(\pi,x,\lambda) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} J_{14} & J_{24} \\ J_{13} & J_{23} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e_{22}(\xi,\lambda) & e_{12}(\xi,\lambda) & -e_{21}(\xi,\lambda) & -e_{11}(\xi,\lambda) \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где $\chi_{\xi>x}$ — характеристическая функция треугольника $\xi > x$.

Начиная с этого момента, мы зафиксируем число α_0 так, чтобы оно удовлетворяло условиям утверждения. Более того, увеличивая при необходимости число α_0, можно считать, что полоса Π_{α_0} содержит все точки $\{\lambda_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ с их $d/4$-окрестностями (напомним, что $d = \inf\limits_{n\neq m}|\lambda_n^0 - \lambda_m^0|$). Положим еще $\alpha = \alpha_0 + d/4$. Важно отметить, что величины α и α_0 зависят только от R и U.

Сформулируем теперь результаты об асимптотическом поведении матрицы $E(x,\lambda)$ при $\Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty$. Для оценки остатков мы введем функции $\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\lambda) = \int\limits_0^x p_j(t)e^{2i\varepsilon\lambda t}\,dt$, $j = 2,3$, $\varepsilon = \pm 1$; $\Upsilon(\lambda) = \max\limits_{j,\varepsilon,x}|\upsilon_{j,\varepsilon}(\lambda,x)|$.

Утверждение 2.4 (см. [4, теорема 1], [4, теорема 2])**.** *Пусть $P \in L_1[0,\pi]$, $\|P\|_{L_1} \leqslant R$, а число α фиксировано выше. Тогда для любой точки*

$$\lambda \in \mathcal{D} = \{\lambda \in \Pi_\alpha : \Upsilon(\lambda) \leqslant \kappa\}, \qquad \text{где}\ \ \kappa = \kappa(R,U), \tag{2.5}$$

справедливо представление $e_{jk}(x,\lambda) = e_{jk}^0(x,\lambda) + \eta_{jk}(x,\lambda)$, $j,\,k = 1,\,2$, где остатки η_{jk} допускают равномерные оценки

$$\max_{j,k,x}|\eta_{jk}(x,\lambda)| \leqslant M\Upsilon(\lambda) \tag{2.6}$$

с константой $M = M(R,U)$.

3. Доказательство основного результата

Асимптотическое представление для матрицы $E(x,\lambda)$, таким образом, доказано лишь при достаточно малых значениях функции $\Upsilon(\lambda)$. В виду этого важно отметить, что $\Upsilon(\lambda) \to 0$ при $\Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty$ (см. [4, лемма 1]). Покажем, как можно усилить это утверждение при $P \in L_\varkappa$, $\varkappa > 1$.

Напомним, что *пространством Харди* H^p в полосе Π_α называется банахово пространство голоморфных в Π_α функций с конечной нормой $\|f\|_{H^p} = \sup\limits_{|y|<\alpha}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p\,dx\Big)^{1/p}$.

Мерой Карлесона в полосе Π_α называется любая мера μ, для которой конечна величина $N_\mu := \sup\limits_{\sigma\in\mathbb{R}}\mu(Q_\sigma)$, где Q_σ — квадрат с вершинами $\sigma\pm\alpha\pm i\alpha$. Известно (см., например, [1, теорема 5.6, гл. 1]), что для любой функции $f\in H^p(\Pi_\alpha)$ и любой меры Карлесона μ в полосе Π_α выполнено $f\in L_p(d\mu)$ и $\|f\|_{L_p(d\mu)}\leqslant C\|f\|_{H^p}$ с константой C, зависящей только от α и N_μ.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется зафиксировать меру Карлесона следующим образом. Построим семейство контуров γ_n, $n\in\mathbb{Z}$. Вначале определим контур γ_n как объединение окружности $C_n=\{|\lambda-\lambda_n^0|=d/4\}$ и двух отрезков $I_n^+=[\lambda_n^0+id/4, \operatorname{Re}\lambda_n^0+i\alpha_0]$ и $I_n^-=[\operatorname{Re}\lambda_n^0-i\alpha_0, \lambda_n^0-id/4]$. Может случится так, что отрезок I_n^+ пересекает окружность C_{n+1}. В этом случае мы заменим часть отрезка I_n^+, лежащую внутри C_{n+1}, на *левую* дугу окружности C_{n+1}. Аналогично, если отрезок I_n^- пересекает окружность C_{n-1}, то заменим его часть, попавшую внутрь окружности, на *правую* дугу. Отметим, что в силу построения (и распределения собственных значений λ_n^0) отрезок I_n^+ не может пересечься ни с какой окружностью, кроме C_{n+1} и, аналогично, может I_n^- пересечь только C_{n-1}.

Заметим, что для любой точки $\lambda\in\gamma_n$ выполнены ограничения $\operatorname{Re}\lambda_n^0-d/4\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant\operatorname{Re}\lambda_n^0+d/4$. Поскольку $\operatorname{Re}(\lambda_{n+2}^0-\lambda_n^0)=2$, а $d\leqslant 1$, то расстояние между контурами γ_n и γ_{n+2} не меньше, чем $3/2$. Введем также обозначение $\check\gamma_n=\gamma_n\cup\operatorname{int}\gamma_n$, где $\operatorname{int}\gamma_n=\{\lambda : |\lambda-\lambda_n^0|<d/4\}$.

Теперь определим множества K_n как замкнутые $d/4$ окрестности контуров γ_n. Отметим, что $\lambda_n^0\in K_n$, а площадь множества K_n не превосходит $\alpha_0 d+\pi d^2/2$. Обозначим далее $K=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}K_n$ и определим меру μ как обычную плоскую меру с носителем K.

Лемма 3.1. *Мера μ является карлесоновой, причем число N_μ зависит только от R и U. При этом для любой функции $f\in L_\nu(K)$ имеет место оценка*

$$\|f\|^\nu_{L_\nu(K)}\leqslant\sum_{n\in\mathbb{Z}}\|f\|^\nu_{L_\nu(K_n)}\leqslant 2\|f\|^\nu_{L_\nu(K)} \tag{3.1}$$

для любого $\nu\in[1,\infty)$.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует непосредственно из определения и построения множества K. Заметим теперь, что возможны три ситуации: множества K_n попарно не пересекаются; каждое множество K_{2n} имеет непустое пересечение с множеством K_{2n+1}, но других попарных пересечений нет; каждое множество K_{2n} имеет непустое пересечение с множеством K_{2n-1}, а других попарных пересечений нет. В любом случае расстояние между K_n и K_{n+2} равно, по меньшей мере, $2-d\geqslant 1$, откуда вытекает неравенство (3.1). □

Лемма 3.2. *Пусть $P\in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa\in(1,2]$, $\|P\|_{L_\varkappa}\leqslant R$, а число $h>0$ произвольно. Тогда неравенство $\sup\limits_{\lambda\in\check\gamma_n}\Upsilon(\lambda)\leqslant h$ выполнено для всех множеств $\check\gamma_n$, за исключением конечного числа N, причем $N\leqslant C(R,U)h^{-\varkappa'}(h^{-\varkappa'}+1)$.*

Доказательство. Зафиксируем индексы j, ε и точку $x\in[0,\pi]$. Функция $\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\lambda)$ переменной λ есть преобразование Фурье (или обратное преобразование Фурье, это зависит от знака ε) функции $p_j(t)\cdot\chi_{[0,x]}(t)$, где $\chi_{[0,x]}(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0,x]$. Тогда, согласно теореме Пэли—Винера, функция $\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\lambda)$ принадлежит пространству Харди $H^{\varkappa'}$ и $\|\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\lambda)\|_{H^{\varkappa'}}\leqslant C_{abs}\|P\|_{L_\varkappa}$. Положим $v_n=\|\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\lambda)\|_{L_{\varkappa'}(K_n)}$. В силу (3.1), $\{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in l_{\varkappa'}$ и $\|\{v_n\}\|_{l_{\varkappa'}}\leqslant C(R,U)$. Зафиксируем произвольное положительное число $b>0$ и заметим, что $\operatorname{mes}\{n : v_n>b\}\leqslant\dfrac{C(R,U)}{b^{\varkappa'}}$ (здесь и далее символом mes обозначаем мощность подмножества целых индексов).

Рассмотрим индекс n, для которого $v_n\leqslant b$. По теореме о среднем значении голоморфной функции $\upsilon(\lambda)$ имеем $\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\lambda)=\dfrac{16}{\pi d^2}\iint\limits_{|\xi-\lambda|\leqslant d/4}|\upsilon_{j,\varepsilon}(x,\xi)|\,d(\operatorname{Re}\xi)\,d(\operatorname{Im}\xi)$. Выбирая произвольную точку

$\lambda \in \check{\gamma}_n$, приходим к оценке $|v_{j,\varepsilon}(x,\lambda)| \leqslant \left(\dfrac{\pi d^2}{4}\right)^{1/\varkappa - 1} v_n$. Теперь «разморозим» точку $x \in [0,\pi]$ и заметим, что $|v_{j,\varepsilon}(x,\lambda) - v_{j,\varepsilon}(y,\lambda)| \leqslant \operatorname{ch}(2\alpha)\left|\int\limits_x^y |p_j(t)|dt\right| \leqslant \operatorname{ch}(2\alpha)R|y-x|^{1/\varkappa'}$.

Это означает, что для всех точек y из окрестности точки x радиуса a справедлива оценка $\sup\limits_{\lambda\in\check{\gamma}_n} |v_{j,\varepsilon}(y,\lambda)| \leqslant \left(\dfrac{\pi d^2}{4}\right)^{1/\varkappa-1} b + \operatorname{ch}(2\alpha)Ra^{1/\varkappa'} \leqslant 2\left(\dfrac{\pi d^2}{4}\right)^{1/\varkappa-1} b$ при выборе $a = (b/(2\operatorname{ch}(2\alpha)R))^{\varkappa'}$.

Рассмотрим теперь разбиение отрезка $[0,\pi]$ диаметром a (это разбиение содержит не более $\pi/a + 1$ точек). Легко видеть, что $\operatorname{mes}\{n : v_n(x) > b$ хотя бы для одной точки x разбиения$\} \leqslant \left(\dfrac{\pi}{a}+1\right)\dfrac{C(R,U)}{b^{\varkappa'}}$. Для всех остальных целых n выполнено неравенство $\sup\limits_{x\in[0,\pi],\ \lambda\in\check{\gamma}_n} |v_{j,\varepsilon}(x,\lambda)| \leqslant 2\left(\dfrac{\pi d^2}{4}\right)^{1/\varkappa-1} b = h$ при соответствующем выборе числа b. Количество «исключенных» индексов n не превосходит $\left(\dfrac{\pi}{a}+1\right)\dfrac{C(R,U)}{b^{\varkappa'}} = C(R,U)h^{-\varkappa'}(h^{-\varkappa'}+1)$. □

Согласно [16, теорема 4.5], нумерация точек спектра оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ проводится так, что

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1) \quad \text{при } |n| \to \infty. \tag{3.2}$$

Ясно, что последнее условие задает индексацию точек спектра не однозначно, а лишь с точностью до перестановки конечного числа номеров. Здесь нам потребуется эту нумерацию уточнить. Для этого обозначим $m = m(U) := \inf\limits_{\lambda\in\gamma_0\cup\gamma_1} |\Delta_0(\lambda)| > 0$, где $\Delta_0(\lambda)$ — характеристический определитель задачи с нулевым потенциалом. В силу 2-периодичности функции $\Delta_0(\lambda)$ неравенство $|\Delta_0(\lambda)| \geqslant m$ выполнено для всех точек $\lambda \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n$. Строки матрицы $\mathcal{U}$ всегда можно домножить на ненулевые коэффициенты так, чтобы неравенство $|J_{\alpha\beta}| \leqslant 1$ выполнялось для всех индексов α и β.

Пусть далее $\kappa = \kappa(R,U)$ и $M = M(R,U)$ — константы, введенные в (2.5), (2.6) соответственно. Назовем контур γ_n *регулярным*, если $\sup\limits_{\lambda\in\check{\gamma}_n} \Upsilon(\lambda) \leqslant \kappa$ и $\sup\limits_{\lambda\in\gamma_n} \Upsilon(\lambda) \leqslant m/(8M)$. В противном случае γ_n назовем *иррегулярным*. В силу леммы 3.2, количество иррегулярных контуров оценивается величиной $N = N(R,U)$. Для регулярных контуров

$$|\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leqslant |J_{13}\eta_{12}(\pi,\lambda)| + |J_{14}\eta_{22}(\pi,\lambda)| + |J_{32}\eta_{11}(\pi,\lambda)| + |J_{42}\eta_{21}(\pi,\lambda)| \leqslant 4M\Upsilon(\lambda) \leqslant \frac{m}{2}$$

для всех $\lambda \in \gamma_n$, откуда $|\Delta(\lambda)| \geqslant m/2$.

Из теоремы Руше для голоморфных функций $\Delta_0(\lambda)$, $\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)$ и контура $C_n = \{|\lambda - \lambda_n^0| = d/4\}$ следует, что внутри окружности C_n, отвечающей регулярному контуру γ_n, лежит ровно одно собственное значение оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Это собственное значение мы индексируем номером n и назовем *регулярным* собственным значением.

Далее, существует такое натуральное число n_0, что все контуры γ_n при $|n| \geqslant n_0$ регулярны, так что введенная здесь нумерация согласована с соотношением (3.2), т. е. является уточнением предыдущей нумерации. Оставшиеся собственные значения занумеруем оставшимися в нашем распоряжении целыми индексами произвольным образом и назовем *иррегулярными* собственными значениями. Дефекта нумерации при этом не возникает (множество иррегулярных собственных значений конечно и равномощно множеству оставшихся индексов), поскольку он отсутствовал в предыдущей нумерации. Множество целых индексов, отвечающих регулярным и иррегулярным собственным значениям, обозначим через $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ и $\mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}$ соответственно. Из леммы 3.2 вытекает следующее важное утверждение.

Следствие 3.1. *Число иррегулярных собственных значений* $\operatorname{mes}\mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}$ *не только конечно для каждого фиксированного потенциала* P, *но и равномерно ограничено по любому шару* $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, *если* $\varkappa > 1$.

Подчеркнем, что число $n_0 = n_0(P,U) := \max\{|n| : n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}\}$ также конечно, но величина $\sup\limits_{\|P\|_{L_\varkappa}\leqslant R} n_0(P,U)$ может быть бесконечной (более того, это действительно так для достаточно больших R).

Лемма 3.3. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_\varkappa$ вида* (2.1)*, причем $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, а $\varkappa > 1$. Тогда на любом регулярном контуре γ_n резольвента $\mathcal{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}$ допускает оценку*

$$\sup_{\lambda\in\gamma_n} \|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant C(R,U). \tag{3.3}$$

Доказательство. Согласно утверждению 2.4, для любого $\lambda \in \gamma_n$ справедливо представление $e_{jk}(x,\lambda) = e^0_{jk}(x,\lambda) + \eta_{jk}(x,\lambda)$. Учитывая оценку (2.6) и явный вид функций $e^0_{jk}(x,\lambda)$, приходим к неравенству $\sup\limits_{x\in[0,\pi],\,\lambda\in\gamma_n} |e_{jk}(x,\lambda)| \leqslant C(R,U)$, $j,\,k = 1,\,2$. Тогда, с учетом равенств (2.2) и оценки $\inf\limits_{\lambda\in\gamma_n} |\Delta(\lambda)| \geqslant m/2$, где $m = m(U)$, из (2.4) получаем $\sup\limits_{\lambda\in\gamma_n,\,0\leqslant\xi,\,x\leqslant\pi} |g_{jk}(\xi,x,\lambda)| \leqslant C(R,U)$, $j,k = 1,\,2$, где мы обозначили $G(\xi,x,\lambda) = (g_{jk}(\xi,x,\lambda))_{j,\,k=1,\,2}$. Доказанная оценка влечет утверждение леммы. □

Обозначим через γ_n^+ контур, полученный из γ_n удалением левой половины окружности C_n и добавлением двух вертикальных лучей $(\operatorname{Re}\lambda_n^0 - i\infty, \operatorname{Re}\lambda_n^0 - i\alpha_0]$ и $[\operatorname{Re}\lambda_n^0 + i\alpha_0, \operatorname{Re}\lambda_n^0 + i\infty)$. Ориентируем γ_n^+ по убыванию $\operatorname{Im}\lambda$. Аналогично, через γ_n^- будем обозначать контур, полученный из γ_n добавлением тех же лучей, удалением правой половины окружности C_n и ориентированный по возрастанию $\operatorname{Im}\lambda$.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_\varkappa$ вида* (2.1)*, причем $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, а $\varkappa > 1$. Тогда $\left\|\int\limits_{\gamma_n^\pm} \mathcal{R}(\lambda)\,d\lambda\right\| \leqslant C(R,U)$ для любого $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$.*

Доказательство. Воспользуемся представлением (2.3) для резольвенты в виде операторного ряда. Все слагаемые этого ряда, кроме первого, оцениваются одинаково. По определению, длина контура γ_n не превосходит $\pi d + 2\alpha_0$. Тогда, в силу неравенства (3.3), остается провести оценку только двух несобственных интегралов по лучам $(\operatorname{Re}\lambda_n^0 - i\infty, \operatorname{Re}\lambda_n^0 - i\alpha_0]$ и $[\operatorname{Re}\lambda_n^0 + i\alpha_0, \operatorname{Re}\lambda_n^0 + i\infty)$. Оценим интеграл по верхнему лучу (рассуждения для другого интеграла полностью аналогичны):

$$\left\|\int\limits_{\sigma+i\alpha_0}^{\sigma+i\infty} (-\mathcal{R}_0(\lambda)P)^k\mathcal{R}_0(\lambda)\,d\lambda\right\| \leqslant \int\limits_{\alpha_0}^{\infty} C^{k+1}(U)R^k\tau^{-k/\varkappa'}\,\frac{d\tau}{\tau} \leqslant \frac{\varkappa' C^{k+1}(U)R^k}{k\alpha_0^{k/\varkappa'}},$$

где $k \geqslant 1$, а $\lambda = \sigma + i\tau$. Полученный ряд сходится в силу выбора числа α_0, и его сумма не превосходит $2\varkappa' C(U)$.

Таким образом, остается оценить слагаемое ряда (2.3) с номером $k = 0$, т. е. доказать, что величина $\left\|\int\limits_{\gamma_n^\pm} \mathcal{R}_0(\lambda)\,d\lambda\right\|$ конечна. Воспользуемся представлением резольвенты невозмущенного оператора в виде ряда $\mathcal{R}_0(\lambda) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \dfrac{(\cdot,\mathbf{z}_j^0)\mathbf{y}_j^0}{\lambda - \lambda_j^0}$. Здесь $\{\mathbf{y}_j^0\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — система собственных функций оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ с нулевым потенциалом (напомним, что краевые условия сильно регулярны, а значит все собственные значения λ_j^0 однократны), $\{\mathbf{z}_j^0\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная к ней. Каждая из этих систем образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$, следовательно, для любой функции $\mathbf{f} \in \mathbb{H}$ справедлива оценка

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\mathbf{f},\mathbf{z}_j^0)|^2 \leqslant C\|f\|^2. \tag{3.4}$$

Непосредственным интегрированием получаем, что $\int\limits_{\gamma_n^-} \mathcal{R}_0(\lambda)\,d\lambda = \sum\limits_{j\leqslant n} i\pi(\cdot,\mathbf{z}_j^0)\mathbf{y}_j^0 - \sum\limits_{j>n} i\pi(\cdot,\mathbf{z}_j^0)\mathbf{y}_j^0$. Отсюда и из (3.4) вытекает ограниченность величины $\left\|\int\limits_{\gamma_n^-} \mathcal{R}_0(\lambda)\,d\lambda\right\|$. Оценка для интеграла по γ_n^+ получается аналогично. □

Для любого $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ собственное значение λ_n однократно. Обозначим через $\mathbf{y}_n$ соответствующую собственную функцию, нормированную условием $\|\mathbf{y}_n\| = 1$, и пусть $\mathcal{H}_{\mathfrak{R}} := \overline{\mathrm{Lin}\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}}$. Наша ближайшая цель — построить спектральный проектор на подпространство $\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}$. Для этого необходимо построить контур, охватывающий все регулярные собственные значения и не содержащий ни одного иррегулярного собственного значения. Мы построим такой контур следующим образом. Будем говорить, что два регулярных индекса $n < n'$ лежат в одной компоненте, если все целые числа $k \in (n, n')$ также регулярны. Легко видеть, что множество $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ состоит из $\nu \leqslant N+1$ компонент, где $N := \mathrm{mes}\,\mathbb{Z}_{\mathfrak{I}} = N(R,U)$. Занумеруем эти компоненты по возрастанию и обозначим через $n_1 < n_2 < \dots < n_{2\nu}$ их крайние точки. Таким образом, множество $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ теперь записано в виде $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}} = (-\infty, n_1] \sqcup [n_2, n_3] \sqcup \dots \sqcup [n_{2\nu}, +\infty)$. Выберем произвольное число $b > \alpha_0$ и для каждого $n \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\gamma_{n,b}^{\pm}$ часть контура $\gamma_n^{\pm}$, расположенную в полосе $\{|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant b\}$. Теперь рассмотрим контур $\Gamma_b = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\nu} \Gamma_{j,b}$, где $\Gamma_{j,b} = \gamma_{n_{2j-1},b}^{+} \cup [\mathrm{Re}\,\lambda_{n_{2j-1}}^0 - ib, \mathrm{Re}\,\lambda_{n_{2j}}^0 - ib] \cup \gamma_{n_{2j},b}^{-} \cup [\mathrm{Re}\,\lambda_{n_{2j}}^0 + ib, \mathrm{Re}\,\lambda_{n_{2j-1}}^0 + ib]$.

Лемма 3.5. *Контур Γ_b охватывает все иррегулярные собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и не содержит ни одного регулярного собственного значения. Таким образом, оператор $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}} := I - \mathcal{P}_{\mathfrak{I}}$, где $\mathcal{P}_{\mathfrak{I}} := \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_b} \mathcal{R}(\lambda)\,d\lambda$, является спектральным проектором на подпространство $\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}$.*

Доказательство. По построению, контур Γ_b действительно не содержит ни одного регулярного собственного значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, так что нам остается проследить за иррегулярными λ_n. Для этого мы рассмотрим семейство потенциалов $P_t(x) = tP(x)$, $t \in [0,1]$, и обозначим $\mathcal{L}_t = \mathcal{L}_{P_t,U}$, $\mathcal{R}_t(\lambda) = (\mathcal{L}_t - \lambda I)^{-1}$ и $\mathcal{P}_{\mathfrak{I},t} = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_b} \mathcal{R}_t(\lambda)\,d\lambda$. Непосредственно из определения имеем $\Upsilon(tP;\lambda) = t\Upsilon(P;\lambda)$, а значит, любой регулярный для потенциала P контур γ_n остается регулярным и для потенциала tP. Таким образом, проектор $\mathcal{P}_{\mathfrak{I},t}$ корректно определен для любого $t \in [0,1]$. Теперь воспользуемся утверждением о непрерывной зависимости резольвенты от потенциала (см. [16, теорема 4.6]). А именно, для любой фиксированной точки $t \in [0,1]$, для любого $\varepsilon > 0$, найдется такая δ-окрестность точки t, что для любого s из этой окрестности выполнено $\sup\limits_{\lambda\in\Gamma_b} \|\mathcal{R}_t(\lambda) - \mathcal{R}_s(\lambda)\| < \varepsilon$. Тогда семейство операторов $\mathcal{P}_{\mathfrak{I},t}$ непрерывно по $t \in [0,1]$ в операторной норме. Остается заметить, что контур Γ_b содержит все точки λ_n^0 спектра оператора $\mathcal{L}_0$ с номерами $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}$ и не содержит ни одной точки с номером $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$. Таким образом, $\dim \mathcal{P}_{\mathfrak{I},0} = \mathrm{mes}\,\mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}$. В силу непрерывной зависимости (см. [3, лемма 4.10, гл. 1]), ту же размерность имеет и проектор $\mathcal{P}_{\mathfrak{I}}$. □

Оценка $\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant 2C(U)|\mathrm{Im}\,\lambda|^{-1}$ на норму резольвенты, приведенная в утверждении 2.3, позволяет осуществить предельный переход $\mathcal{P}_{\mathfrak{I}} = \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_b} \mathcal{R}(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{\Gamma} \mathcal{R}(\lambda)\,d\lambda$, где $\Gamma = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\nu} \Gamma_j$, а $\Gamma_j = \gamma_{n_{2j-1}}^{+} \cup \gamma_{n_{2j}}^{-}$. Следующее утверждение о равномерной ограниченности нормы проекторов $\mathcal{P}_{\mathfrak{I}}$ и $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ является ключевым для доказательства теоремы 1.1.

Утверждение 3.1. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с внедиагональным потенциалом $P \in L_{\varkappa}[0,\pi]$, $\varkappa > 1$, $\|P\|_{L_{\varkappa}} \leqslant R$. Тогда $\|\mathcal{P}_{\mathfrak{I}}\| + \|\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}\| \leqslant C(R,U)$.*

Доказательство. В силу леммы 3.4 имеет место $\|\mathcal{P}_{\mathfrak{I}}\| \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\sum\limits_{j=1}^{2\nu}\left\|\int\limits_{\gamma_{n_j}^{\pm}} \mathcal{R}(\lambda)\,d\lambda\right\| \leqslant \dfrac{\nu}{\pi}C(R,U)$. Остается заметить, что $\nu \leqslant N+1$, где $N = \mathrm{mes}\,\mathbb{Z}_{\mathfrak{I}} = N(R,U)$, согласно следствию 3.1. □

Мы определили функции $\mathbf{y}_n$ только для $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$. Действуя классическим методом выбора максимальных цепочек присоединенных функций, можно определить функции $\mathbf{y}_n$ для всех собственных значений λ_n, $n \in \mathbb{Z}$. Как доказано в [16, теорема 4.9], эта система является базисом Рисса для любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P \in L_1$. Однако утверждение о равномерной базисности такой системы неверно. Поэтому в подпространстве $\mathcal{H}_{\mathfrak{J}} := \operatorname{Rn} \mathcal{P}_{\mathfrak{J}}$ мы (произвольным образом) выберем ортонормированный базис $\{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$. Полученную систему $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} \cup \{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$ будем называть системой корневых функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Конечно, замена линейного базиса на конечномерном подпространстве $\mathcal{H}_{\mathfrak{J}}$ не нарушает свойства базисности Рисса системы. Наша цель сейчас — описать биортогональную к $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} \cup \{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$ систему. Для этого напомним (см. [6, утв. 3.2]), что сопряженный оператор $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ совпадает с оператором $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$, где $P^*(x) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{p_3}(x) \\ \overline{p_2}(x) & 0 \end{pmatrix}$, а сопряженные краевые условия U^* задаются матрицей $\mathcal{U}^* = \begin{pmatrix} \overline{J_{23}} & \overline{J_{13}} & -\overline{J_{12}} & 0 \\ 0 & -\overline{J_{34}} & \overline{J_{24}} & \overline{J_{23}} \end{pmatrix}$ (выбор матрицы, задающей сопряженные краевые условия, неоднозначен, но для определенности мы фиксируем здесь выбор $\mathcal{U}^*$).

Замечание 3.1. Заметим, что множества $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$, построенные по операторам $\mathcal{L}_{P,U}$ и $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ совпадают. Действительно, для любого регулярного (сильно регулярного) оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ сопряженный оператор $(\mathcal{L}_{P,U})^* = \mathcal{L}_{P^*,U^*}$ также является регулярным (сильно регулярным). Собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$ совпадают (с учетом кратности) с числами $\overline{\lambda}_n$. Поскольку $\upsilon_{2,\pm}(P^*; x, \lambda) = \overline{\upsilon_{3,\mp}(P; x, \overline{\lambda})}$ и $\upsilon_{3,\pm}(P^*; x, \lambda) = \overline{\upsilon_{2,\mp}(P; x, \overline{\lambda})}$, то $\Upsilon(P^*; \lambda) = \Upsilon(P; \overline{\lambda})$. Поскольку резольвента сопряженного оператора равна $\mathcal{R}^*(\overline{\lambda})$, то проектор Рисса, построенный по множеству регулярных (иррегулярных) собственных значений оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ равен $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}{}^*$ (соответственно, $\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}{}^*$). Таким образом регулярное и иррегулярное подпространства, построенные по оператору $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ совпадают с $\mathcal{H}_{\mathfrak{J}}{}^{\perp}$ и $\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}{}^{\perp}$, соответственно.

Зафиксируем теперь произвольный индекс $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ и рассмотрим спектральный проектор $\mathcal{P}_n := \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \mathcal{R}(\lambda)\, d\lambda$ (окружность $C_n = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n^0| = d/4\}$ мы ориентируем против часовой стрелки). Поскольку внутри контура лежит ровно одно собственное значение λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, то $\mathcal{P}_n$ — одномерный проектор вида $\mathcal{P}_n = (\cdot, \mathbf{z}_n)\mathbf{y}_n$. Очевидно, что $(\mathcal{L}_{P,U})^* \mathbf{z}_n = \overline{\lambda_n} \mathbf{z}_n$. При этом норма $\|\mathbf{z}_n\|$ может не равняться 1, хотя $1 \leqslant \|\mathbf{z}_n\| = \|\mathcal{P}_n\| \leqslant \dfrac{d}{4} \sup\limits_{\lambda \in C_n} \|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant C(R, U)$.

Известно, что $(\mathbf{z}_n, \mathbf{y}_m) = \delta_{nm}$ (здесь $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$, а $m \in \mathbb{Z}$), так что мы в результате предъявили часть биортогональной системы к $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} \cup \{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$.

Мы готовы определить оператор T смены базиса, оценка на норму которого вместе с оценкой норму $\|T^{-1}\|$ составляет утверждение основной теоремы. Выберем произвольный ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в пространстве $\mathbb{H}$ и положим $\mathrm{E}_{\mathfrak{J}} = \operatorname{Lin}\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$ и $\mathrm{E}_{\mathfrak{R}} = \overline{\operatorname{Lin}\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}}$. Операторы ортогонального проектирования на $\mathrm{E}_{\mathfrak{J}}$ и $\mathrm{E}_{\mathfrak{R}}$ обозначим $Q_{\mathfrak{J}}$ и $Q_{\mathfrak{R}}$ соответственно. Выберем в пространстве $\mathcal{H}_{\mathfrak{J}}$ произвольный ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$ и определим операторы $T_{\mathfrak{R}} : \mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{y}_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ и $T_{\mathfrak{J}} : \mathbf{e}_n \mapsto \varphi_n$ для $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}$. Система $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}$ составляет базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки, а система $\{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}}$ конечна, так что оба оператора $T_{\mathfrak{R}}$ и $T_{\mathfrak{J}}$ по непрерывности продолжаются на подпространства $\mathrm{E}_{\mathfrak{R}}$ и $\mathrm{E}_{\mathfrak{J}}$ соответственно. Положим $T := T_{\mathfrak{R}} Q_{\mathfrak{R}} + T_{\mathfrak{J}} Q_{\mathfrak{J}}$. Легко видеть, что $T^{-1} = T_{\mathfrak{R}}^{-1} \mathcal{P}_{\mathfrak{R}} + T_{\mathfrak{J}}^{-1} \mathcal{P}_{\mathfrak{J}}$. Важно отметить, что в силу утверждения 3.1 выполнено $\|T\| \leqslant \|T_{\mathfrak{R}}\| + 1$, $\|T^{-1}\| \leqslant \|T_{\mathfrak{R}}^{-1}\| \|\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}\| + \|\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}\| \leqslant C(R, U) \|T_{\mathfrak{R}}^{-1}\|$. Итак, для доказательства теоремы 1.1 нам достаточно получить оценку $\|T_{\mathfrak{R}}\| + \|T_{\mathfrak{R}}^{-1}\| \leqslant C(R, U)$.

По определению, $T_{\mathfrak{R}}^* : \mathcal{H}_{\mathfrak{J}}{}^{\perp} \to \mathrm{E}_{\mathfrak{R}}$, $T_{\mathfrak{R}}^* \mathbf{z}_n = \mathbf{e}_n$, $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$, и $\|(T_{\mathfrak{R}}^*) x\|^2 = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} |(x, \mathbf{y}_n)|^2$, так что оценка нормы $\|T_{\mathfrak{R}}\|$ сводится к оценке константы Бесселя системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}$. Аналогично, $T_{\mathfrak{R}}^{-1} : \mathcal{H}_{\mathfrak{R}} \to \mathrm{E}_{\mathfrak{R}}$, $T_{\mathfrak{R}} \mathbf{y}_n = \mathbf{e}_n$, $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$, и $\|T_{\mathfrak{R}}^{-1} x\|^2 = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} |(x, \mathbf{z}_n)|^2$. Перейдем к нормированным векторам $\mathbf{z}_n / \|\mathbf{z}_n\|$ и учтем, что $\|\mathbf{z}_n\| \leqslant C(R, U)$. Теперь заметим, что векторы $\mathbf{z}_n / \|\mathbf{z}_n\|$ суть нормированные собственные векторы оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$, отвечающие регулярным его собственным значениям, а значит, оценка для этой системы повторяет оценку для системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1.1 нам остается получить оценку вида
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_\mathcal{R}} |(x,\mathbf{y}_n)\|^2 \leqslant \beta(R,U)\|x\|^2 \tag{3.5}$$
для произвольного вектора $x\in\mathbb{H}$. Мы начнем с двух вспомогательных утверждений.

Утверждение 3.2. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}_\mathcal{R}}$ — *последовательность регулярных собственных значений оператора* $\mathcal{L}_{P,U}$ *с внедиагональным потенциалом* $P\in L_\varkappa$, $\varkappa>1$, $\|P\|_{L_\varkappa}\leqslant R$, *и сильно регулярными краевыми условиями* U. *Тогда найдется константа* $\beta=\beta(R,U)$ *такая, что* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_\mathcal{R}}\left\|\int\limits_0^\pi f(x)e^{i\lambda_n x}dx\right\|^2\leqslant\beta\|f\|^2_{L_2}$ *для произвольной функции* $f\in L_2$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Фурье $\hat f(\lambda)=\int\limits_0^\pi f(x)e^{i\lambda x}dx$. Согласно теореме Пэли—Винера, $\hat f\in H^2(\Pi_\alpha)$ и $\|\hat f\|_{H^2}\leqslant C_{abs}\|f\|_{L_2}$. Рассмотрим точечную меру $d\mu=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_\mathcal{R}}\delta_{\lambda_n}$. Поскольку для любых двух регулярных собственных значений
$$|\lambda_n-\lambda_m|\geqslant|\lambda_n^0-\lambda_m^0|-|\lambda_n-\lambda_n^0|-|\lambda_m-\lambda_m^0|\geqslant d-\frac{d}{4}-\frac{d}{4}=\frac{d}{2},$$
то последовательность $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}_\mathcal{R}}$ — несгущающаяся. Тогда $d\mu$ является карлесоновой мерой (более того, легко видеть, что $\gamma_\mu\leqslant(16\alpha_0^2)/(\pi d^2)$, т. е. зависит только от R и U). Отсюда
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_\mathcal{R}}\left\|\int_0^\pi f(x)e^{i\lambda_n x}dx\right\|^2=\|\hat f\|^2_{L_2(d\mu)}\leqslant\beta(R,U)\|f\|^2_{L_2}.$$
□

Лемма 3.6. *Пусть система* $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ *является бесселевой в пространстве* $L_2[a,b]$ *и* $\sum\limits_{n=1}^\infty|(f,\varphi_n)|^2\leqslant\beta\|f\|^2_{L_2}$. *Пусть* $\{\tau_n(x)\}_1^\infty$ — *абсолютно непрерывные на* $[a,b]$ *функции, причем* $|\tau_n(a)|\leqslant T$, $|\tau_n'(x)|\leqslant\tau(x)\in L_1[a,b]$, $n=1,2,\dots$, *где число* T *и функция* τ *не зависят от* n.

Тогда система $\{\varphi_n(x)\tau_n(x)\}_1^\infty$ *также является бесселевой в пространстве* $L_2[a,b]$, *причем* $\sum\limits_{n=1}^\infty|(f,\varphi_n\tau_n)|^2\leqslant2\beta(T^2+\|\tau\|^2_{L_1})\|f\|^2_{L_2}$.

Доказательство. Для каждого конечного N имеем
$$\sum_{n=1}^N|(f,\varphi_n\tau_n)|^2\leqslant2\sum_{n=1}^N|(f,\varphi_n(x)\tau_n(a))|^2+2\sum_{n=1}^N|(f,\varphi_n(x)(\tau_n(x)-\tau_n(a)))|^2\leqslant$$
$$\leqslant2\beta T^2\|f\|^2_{L_2}+2\sum_{n=1}^N\left|\int_a^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)\int_a^x\overline{\tau}_n'(\xi)\,d\xi\,dx\cdot\int_a^b\overline{f}(y)\varphi_n(y)\int_a^y\tau_n'(\zeta)\,d\zeta\,dy\right|.$$
Распишем последнюю сумму подробнее.
$$\sum_{n=1}^N\left|\int_a^b\int_a^b\overline{\tau}_n'(\xi)\tau_n'(\zeta)\left(\int_\xi^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)\,dx\int_\zeta^b\overline{f}(y)\varphi_n(y)\,dy\right)d\xi\,d\zeta\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int_a^b\int_a^b\tau(\xi)\tau(\zeta)\sum_{n=1}^N\left|(f\chi_{[\xi,b]},\varphi_n)\right|\left|(\varphi_n,f\chi_{[\zeta,b]})\right|\,d\xi\,d\zeta\leqslant$$
$$\leqslant\beta\int_a^b\int_a^b\tau(\xi)\tau(\zeta)\cdot\|f\chi_{[\xi,b]}\|\cdot\|f\chi_{[\zeta,b]}\|\,d\xi\,d\zeta\leqslant\beta\int_a^b\int_a^b\tau(\xi)\tau(\zeta)\,d\xi\,d\zeta\cdot\|f\|^2.$$
Устремив $N\to\infty$, получаем утверждение леммы. □

Сформулируем теперь утверждение о функциях $\mathbf{y}_n$.

Утверждение 3.3 (см. [9, теорема 4]). *Пусть* $\mathcal{L}_{P,U}$ — *сильно регулярный оператор Дирака, причем потенциал* $P \in \mathcal{L}_1$ *имеет вид* (2.1), $\|P\|_{L_1} < R$.

Тогда для всех собственных значений $\lambda_n \in \mathcal{D}$, *где* $\mathcal{D} = \{\lambda \in \Pi_\alpha : \Upsilon(\lambda) \leqslant \kappa\}$, $\kappa = \kappa(R, U)$, *для нормированных собственных функций* $\mathbf{y}_n$ *справедливо представление*: $y_{1,n}(x) = e^{i\lambda_n x}\tau_{1,n}(x)$, $y_{2,n}(x) = e^{-i\lambda_n x}\tau_{2,n}(x)$, *причем* $|\tau_{j,n}(0)| \leqslant C = C(R, U)$, $j = 1, 2$, *а производные функций* $\tau_{j,n}(x)$ *подчинены оценке* $|\tau'_{j,n}(x)| \leqslant C(R, U)(|p_2(x)| + |p_3(x)|)$ *почти всюду на* $[0, \pi] \ni x$.

Вспомним, что для любого $n \in \mathbb{Z}_\mathcal{R}$ неравенство $\Upsilon(\lambda) \leqslant \kappa$ выполнено не только на γ_n, но и для всех точек круга $|\lambda - \lambda_n^0| \leqslant d/4$, в частности, для точек λ_n. Соединяя вместе утверждения 3.2, 3.3 и лемму 3.6, выводим оценку (3.5). Теорема 1.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984.
2. *Гринив Р. О.* Равномерно ограниченные семейства базисов Рисса из экспонент, синусов и косинусов// Мат. заметки. — 2010. — *87*, № 4. — С. 542–553.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
4. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом// Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 1. — С. 573–584.
5. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Базисность Рисса из подпространств для системы Дирака с суммируемым потенциалом// Докл. РАН. — 2015. — *462*, № 3. — С. 274–277.
6. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 128–152.
7. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Оценки констант Рисса для системы с суммируемым потенциалом// Дифф. уравн. — 2018. — принято к печати.
8. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Равномерная устойчивость обратной задачи Штурма—Лиувилля по спектральной функции в шкале соболевских пространств// Тр. МИАН. — 2013. — *283*. — С. 188–203.
9. *Садовничая И. В.* Равномерные асимптотики собственных значений и собственных функций системы Дирака с суммируемым потенциалом// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 8. — С. 1039–1049.
10. *Садовничая И. В.* Равносходимость спектральных разложений для системы Дирака с потенциалом из пространств Лебега// Тр. МИАН. — 2016. — *293*. — С. 296–324.
11. *Седлецкий А. М.* Негармонический анализ// Итоги науки и техн. Сер. мат. и ее прилож. — 2006. — *96*. — С. 106–211.
12. *Avdonin S. A., Ivanov S. A.* Families of exponentials. The method of moments in controllability problems for distributed parameter systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
13. *Djakov P., Mityagin B.* Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions// Indiana Univ. Math. J. — 2012. — *61*, № 1. — С. 359–398.
14. *Hryniv R. O.* Analyticity and uniform stability of the inverse singular Sturm—Liouville spectral problem// Inverse Problems. — 2011. — *27*. — С. 1–25.
15. *Lunyov A. A., Malamud M. M.* On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *441*. — С. 57–103.
16. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential// Math. Notes. — 2014. — *96*, № 5. — С. 3–36.
17. *Young R. M.* An introduction to nonharmonic Fourier series. — San Diego: Acad. Press, 2001.

А. М. Савчук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
E-mail: artem_savchuk@mail.ru

И. В. Садовничая
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
E-mail: ivsad@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-180-193 UDC 517.984.52

Uniform Basis Property of the System of Root Vectors of the Dirac Operator

© 2018 **A. M. Savchuk, I. V. Sadovnichaya**

Abstract. We study one-dimensional Dirac operator $\mathcal{L}$ on the segment $[0,\pi]$ with regular in the sense of Birkhoff boundary conditions U and complex-valued summable potential $P = (p_{ij}(x))$, $i, j = 1, 2$. We prove uniform estimates for the Riesz constants of systems of root functions of a strongly regular operator $\mathcal{L}$ assuming that boundary-value conditions U and the number $\int\limits_0^\pi (p_1(x) - p_4(x))\,dx$ are fixed and the potential P takes values from the ball $B(0,R)$ of radius R in the space $L_\varkappa$ for $\varkappa > 1$. Moreover, we can choose the system of root functions so that it consists of eigenfunctions of the operator $\mathcal{L}$ except for a finite number of root vectors that can be uniformly estimated over the ball $\|P\|_\varkappa \leqslant R$.

REFERENCES

1. J. Garnett, *Ogranichennye analiticheskie funktsii* [Bounded Analytic Functions], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
2. R. O. Griniv, “Ravnomerno ogranichennye semeystva bazisov Rissa iz eksponent, sinusov i kosinusov” [Uniformly bounded families of Riesz bases consisting of exponents, sinuses, and cosines], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2010, **87**, No. 4, 542–553 (in Russian).
3. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
4. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, “Asimptoticheskie formuly dlya fundamental’nykh resheniy sistemy Diraka s kompleksnoznachnym summiruemym potentsialom” [Asymptotical formulas for fundamental solutions of the Dirac system with complex-valued summable potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 1, 573–584 (in Russian).
5. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, “Bazisnost’ Rissa iz podprostranstv dlya sistemy Diraka s summiruemym potentsialom” [Riesz basis property from subspaces for the Dirac system with summable potential], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2015, **462**, No. 3, 274–277 (in Russian).
6. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, “Bazisnost’ Rissa so skobkami dlya sistemy Diraka s summiruemym potentsialom” [The Riesz basis property with brackets for Dirac systems with summable potentials], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 128–152 (in Russian).
7. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, “Otsenki konstant Rissa dlya sistemy s summiruemym potentsialom” [Estimates of the Riesz constants for a system with summable potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2018, to be published (in Russian).
8. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, “Ravnomernaya ustoychivost’ obratnoy zadachi Shturma—Liuvillya po spektral’noy funktsii v shkale sobolevskikh prostranstv” [Uniform stability of the inverse Sturm–Liouville problem with respect to a spectral functions in the scale of Sobolev spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 188–203 (in Russian).
9. I. V. Sadovnichaya, “Ravnomernye asimptotiki sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy sistemy Diraka s summiruemym potentsialom” [Uniform asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions of a Dirac system with summable potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 8, 1039–1049 (in Russian).
10. I. V. Sadovnichaya, “Ravnoskhodimost’ spektral’nykh razlozheniy dlya sistemy Diraka s potentsialom iz prostranstv Lebega” [Equiconvergence of spectral expansions for a Dirac system with potential from Lebesgue spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2016, **293**, 296–324 (in Russian).
11. A. M. Sedletskiy, “Negarmonicheskiy analiz” [Nonharmonic analysis], *Itogi nauki i tekhn. Ser. mat. i ee prilozh.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Appl.], 2006, **96**, 106–211 (in Russian).
12. S. A. Avdonin and S. A. Ivanov, *Families of Exponentials. The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
13. P. Djakov and B. Mityagin, “Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions,” *Indiana Univ. Math. J.*, 2012, **61**, No. 1, 359–398.
14. R. O. Hryniv, “Analyticity and uniform stability of the inverse singular Sturm—Liouville spectral problem,” *Inverse Problems.*, 2011, **27**, 1–25.

15. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, “On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **441**, 57–103.
16. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, “The Dirac operator with complex-valued summable potential,” *Math. Notes.* , 2014, **96**, No. 5, 3–36.
17. R. M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Acad. Press, San Diego, 2001.

A. M. Savchuk
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: artem_savchuk@mail.ru

I. V. Sadovnichaya
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: ivsad@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 64, № 1 (2018). С. 194–210

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-194-210 УДК 517.956.3 + 517.983

ИДЕНТИФИКАЦИЯ В ОБЩИХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЗАДАЧАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2018 г. **А. ФАВИНИ, Г. МАРИНОЧИ, Х. ТАНАБЕ, Я. ЯКУБОВ**

Аннотация. В гильбертовом пространстве X рассматривается абстрактная задача

$$M^*\frac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$
$$My(0) = My_0,$$

где L — замкнутый линейный оператор в X, M — оператор (не обязательно обратимый) из $\mathcal{L}(X)$, $z \in X$. При дополнительном условии, заключающемся в том, что $\Phi[My(t)] = g(t)$, где $\Phi \in X^*$, а $g \in C^1([0,\tau];\mathbb{C})$, ищутся условия, при которых можно найти такую функцию f из $C([0,\tau];\mathbb{C})$, для которой y есть сильное решение указанной абстрактной задачи, т. е., $My \in C^1([0,\tau];X)$ и $Ly \in C([0,\tau];X)$. Аналогичная задача рассматривается и для уравнения второго порядка по времени. Приводятся различные примеры указанных общих задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение и основные обозначения

В математической литературе рассматривались некоторые частные случаи следующей общей задачи: найти пару функций (y, f) из $C([0,\tau];D(L)) \times C([0,\tau];\mathbb{C})$, удовлетворяющую задаче

$$M^*\frac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{1.1}$$
$$My(0) = My_0, \tag{1.2}$$
$$\Phi[My(t)] = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{1.3}$$

при условии $g(0) = \Phi[My_0]$, где L — замкнутый линейный оператор в X, $M \in \mathcal{L}(X)$, т. е., M — линейный ограниченный (не обязательно обратимый) оператор в X, $y_0 \in X$, $g \in C([0,\tau];\mathbb{C})$, $\Phi \in X^*$, $z \in X$.

В [2] рассмотрен случай, в котором z заменено но M^*z для некоторого z из X; в [3] задача (1.1)–(1.3) решена при некоторых конкретных условиях на My_0 и $ML^{-1}z$.

В настоящей работе при предположении о том, что существует ограниченный оператор L^{-1}, указанная задача изучается в очень общей ситуации. В разделе 2 задача (1.1)–(1.3) изучается при помощи многозначных линейных операторов (подобно [4]). В разделе 3 предлагается более прямой подход, учитывающий представление объемлющего пространства $X = N(T) \oplus \overline{R(T)}$, где

Первый автор является членом G.N.A.M.P.A., и данная работа на 60% согласована с исследовательской программой G.N.A.M.P.A.-I.N.D.A.M. Последний автор поддержан средствами RFO Болонского университета и министерством абсорбции Израиля.

$T = ML^{-1}M^*$, в виде прямой суммы. В разделе 4 изучается эволюционное уравнение второго порядка

$$C^{1/2}\frac{d}{dt}(C^{1/2}y'(t)) + By'(t) + Ay(t) = f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

где $C = C^* \in \mathcal{L}(X)$, A и B — подходящие замкнутые линейные операторы в X, $z \in X$. Раздел 5 содержит ряд конкретных приложений указанных абстрактных результатов к обыкновенным дифференциальным уравнениям и дифференциальным уравнениям в частных производных.

2. Уравнения первого порядка. Метод многозначных операторов

Прежде всего напомним некоторые результаты работы [4], касающиеся дифференциальных задач в гильбертовом пространстве H. Начнем с задачи

$$\begin{cases} M^*\dfrac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + M^*f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ My(0) = w_0, \end{cases} \tag{DE}$$

где M — линейный ограниченный оператор в H, L — замкнутый линейный однозначный оператор в H, w_0 — заданный элемент пространства H и $f \in C([0,\tau];H)$. Мы полагаем, что

$$\mathrm{Re}\langle Lu, u\rangle_H \leqslant \beta\|Mu\|_H^2, \quad \exists\beta \in \mathbb{R}, \forall u \in D(L), \tag{2.1}$$

$$R(\lambda_0 M^*M - L) \supseteq R(M^*) \tag{2.2}$$

и для некоторого λ_0, превосходящего β, оператор $(\lambda_0 M^*M - L)^{-1}$ однозначен на $R(M^*)$.

Следующая лемма — это фактически [4, теорема 2.10, с. 38].

Лемма 2.1. *Если условия* (2.1)-(2.2) *выполнены, то для любой f из $C^1([0,\tau];H)$ и любого w_0, удовлетворяющего соотношению*

$$w_0 = My_0, \quad Ly_0 \in R(M^*), \tag{2.3}$$

существует такое y_0 из $D(L)$, что задача (DE) *имеет единственное решение y, для которого*

$$My \in C^1([0,\tau],H), \; Ly \in C([0,\tau];H). \tag{2.4}$$

Ключевой шаг доказательства заключается в том, что при наложенных условиях $A - \beta I = (M^*)^{-1}LM^{-1} - \beta I$ является максимальным диссипативным оператором в H. Отсюда также следует, что $H = N(T) \oplus \overline{R(T)}$, где $T = A^{-1} = ML^{-1}M^*$.

Чтобы решить общую задачу

$$\begin{cases} M^*\dfrac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ My(0) = w_0, \end{cases} \tag{DE1}$$

надо наложить следующее условие, более сильное, чем (2.2): существует такое λ_0, превосходящее β, что

$$R(\lambda_0 M^*M - L) = H, \text{ а оператор } (\lambda_0 M^*M - L)^{-1} \text{ однозначен и ограничен.} \tag{2.5}$$

Тогда замена $y(t) = x(t) - L^{-1}f(t)$ преобразует задачу (DE1) к виду

$$M^*\frac{d}{dt}(Mx(t)) - M^*ML^{-1}f'(t) = Lx(t) - f(t) + f(t) = Lx(t),$$

т. е., к виду

$$\begin{aligned} &M^*\frac{d}{dt}(Mx(t)) = Lx(t) + M^*ML^{-1}f'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ &Mx(0) = My_0 + ML^{-1}f(0). \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующее утверждение.

Лемма 2.2 (см. [4, следствие 2.11, с. 39])**.** *Если выполняются условия* (2.1) *и* (2.5)*, то для любой f из $C^2([0,\tau];H)$ и для любого w_0, удовлетворяющего соотношению $w_0 = My_0$, где $Ly_0 + f(0) \in R(M^*)$, существует такое y_0 из $D(L)$, что задача* (DE1) *имеет единственное решение y, для которого $My \in C^1([0,\tau];H)$ и $Ly \in C([0,\tau];H)$.*

Отметим, что, если $\mathcal{A}=(M^*)^{-1}LM^{-1}$, то замена $Mx(t)=\xi(t)$ преобразует последнюю начальную задачу в начальную задачу

$$\begin{aligned}&\frac{d\xi(t)}{dt}-ML^{-1}f'(t)\in\mathcal{A}\xi(t),\quad 0\leqslant t\leqslant\tau,\\&\xi(0)=ML^{-1}[Ly_0+f(0)].\end{aligned}$$

Напомним некоторые обозначения, определения и результаты, которые нужны, чтобы рассмотреть дифференциальные уравнения второго порядка по времени.

Пусть H — (комплексное) гильбертово пространство с внутренним произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$. Пусть V — гильбертово пространство, непрерывно и плотно вложенное H, и пусть имеет место непрерывное вложение $V\subset H\subset V'$, где V' обозначает пространство, двойственное к V. Скалярное произведение, в котором один сомножитель принадлежит V, а второй принадлежит V', обозначается через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Введем линейные операторы A,B,C следующим образом. Оператор A принадлежит $\mathcal{L}(V,V')$ и обладает свойствами

(i) $\langle Au,v\rangle=\langle u,Av\rangle$ для любых u,v из V;
(ii) $\langle Au,u\rangle\geqslant\omega_0\|u\|_V^2$ для любых $u\in V$,

где ω_0 — положительная постоянная. Введем оператор A_H с областью определения $D(A_H)=\{v\in V; Av\in H\}$ такой, что $A_Hv=Av$ для любого v из $D(A_H)$. Хорошо известно, что такой оператор A_H самосопряжен в H. Пусть $A^{1/2}$ обозначает квадратный корень из A_H. Тогда $D(A^{1/2})=V$, а соотношение $\langle Au,v\rangle=\langle A^{1/2}u,A^{1/2}v\rangle_H$ выполняется для всех u,v из V. Наложим на B и C следующие условия:

(iii) B — замкнутый линейный оператор в H, для которого $D(B)\supseteq D(A^{1/2})=V$;
(iv) $\mathrm{Re}\langle Bu,u\rangle_H\geqslant 0$ для любого u из V;
(v) $C=C^*\in\mathcal{L}(H)$, $C\geqslant 0$.

В [4, лемма 6.10, с. 211] получен следующий результат.

Лемма 2.3. *Если условия* (i)–(v) *выполняются, то задача*

$$\begin{cases}C^{1/2}\dfrac{d}{dt}(C^{1/2}u'(t))+Bu'(t)+A_Hu(t)=C^{1/2}f(t),\quad 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ u(0)=u_0,\quad C^{1/2}u'(0)=C^{1/2}u_1\end{cases}\tag{P'}$$

допускает единственное решение при условии, что $f\in C^1([0,\tau];H)$, $u_0\in D(A_H)$, $u_1\in D(A^{1/2})$ *и существует такое* w *из* H, *что* $A_Hu_0+Bu_1=C^{1/2}w$.

Чтобы доказать лемму 2.3, заметим, что задача (P') эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}I&0\\0&C^{1/2}\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}I&0\\0&C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\u'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-I\\A_H&B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\u'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I&0\\0&C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\f(t)\end{pmatrix},\\&\begin{pmatrix}I&0\\0&C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(0)\\u'(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I&0\\0&C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\u_1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Вводя пространство $X=D(A^{1/2})\times H$ со скалярным произведением, заданным соотношением $\langle(x,y),(x_1,y_1)\rangle_X=\langle A^{1/2}x,A^{1/2}x_1\rangle_H+\langle y,y_1\rangle_H$, где $(x,y),(x_1,y_1)\in X$, и, определяя операторы M и L соотношениями

$$\begin{aligned}&D(M)=X,\ M(x,y)=(x,C^{1/2}y),\ (x,y)\in X,\\&D(L)=D(A_H)\times D(A^{1/2}),\ L(x,y)=(y,-A_Hx-By),\end{aligned}$$

мы видим, что условия (i)–(v) позволяют применить лемму 2.1.

Используя многозначные операторы, преобразуем задачу (1.1)–(1.3) в дифференциальное включение (здесь z заменено на M^*z):

$$\frac{d}{dt}(My(t))-f(t)z\in(M^*)^{-1}Ly(t),\quad 0\leqslant t\leqslant\tau.$$

Далее, с помощью замены $My(t) = x(t)$ получаем, что

$$\begin{aligned}&\frac{dx(t)}{dt} - f(t)z \in (M^*)^{-1}LM^{-1}x(t),\\&x(0) = My_0,\\&\Phi[x(t)] = g(t).\end{aligned}$$

Если $(M^*)^{-1}LM^{-1} = A$, то имеем

$$\begin{aligned}&\frac{dx(t)}{dt} - f(t)z \in Ax(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\&x(0) = My_0 = w_0,\\&\Phi[x(t)] = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\end{aligned}$$

где $g(0) = \Phi[My_0]$. Тогда, как известно из [4], имеем $x(t) = e^{tA}w_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}zf(s)ds$. Следовательно, условие $\Phi[x(t)] = g(t)$ переходит в интегральное уравнение

$$\Phi[e^{tA}w_0] + \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)A}z]f(s)ds = g(t). \tag{2.6}$$

Такое интегральное уравнение второго рода однозначно разрешимо и его решение f принадлежит $C^1([0,\tau];\mathbb{C})$. Имеем следующий результат об однозначной разрешимости.

Теорема 2.1. *Пусть операторы M, M^*, L удовлетворяют условиям* (2.1)-(2.2). *Тогда задача* (1.1)–(1.3)*, в которой $f(t)z$ заменено на $M^*f(t)z$, допускает единственное решение (y, f), принадлежащее $C([0,\tau]; H) \times C^1([0,\tau];\mathbb{C})$, если $g \in C^2([0,\tau];\mathbb{C})$, $\Phi[z] \neq 0$, $My_0 = w_0 = A^{-1}w_1$ и существуют такие z_1, w_2 из H, для которых $w_1 = A^{-1}w_2$ и $z = A^{-1}z_1$.*

Доказательство. Можно продифференцировать обе части уравнения (2.6). Получим уравнение

$$\Phi[e^{tA}w_1] + \Phi[z]f(t) + \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)A}z_1]f(s)ds = g'(t).$$

Это интегральное уравнение допускает единственное решение f из $C([0,\tau];\mathbb{C})$ (см. [5]). Продифференцировав обе части полученного уравнения и применив представление

$$\int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)A}z_1]f(s)ds = \int\limits_0^t \Phi[e^{sA}z_1]f(t-s)ds,$$

мы получаем, что

$$\begin{aligned}\Phi[e^{tA}w_2] + \Phi[z]f'(t) + \Phi[e^{tA}z_1]f(0) + \int\limits_0^t \Phi[e^{sA}z_1]f'(t-s)ds = g''(t) = \Phi[e^{tA}w_2]+\\+ \Phi[z]f'(t) + \Phi[e^{tA}z_1]f(0) + \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)A}z_1]f'(s)ds.\end{aligned}$$

Из [5] известно, что это интегральное уравнение допускает единственное непрерывное решение, а именно, $f'(t)$, что и завершает доказательство. □

Можно предположить, что с помощью леммы 2.2 аналогичным образом решается и общая задача (1.1)–(1.3). Однако замена $y(t) = x(t) - f(t)L^{-1}z$ преобразует уравнение (1.1) в уравнение

$$M^*\frac{d}{dt}(Mx(t)) - f'(t)M^*ML^{-1}z = Lx(t),$$

а значит, функция $Mx(t)=\xi(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}&\frac{d\xi(t)}{dt}-f'(t)ML^{-1}z\in A\xi(t),\quad 0\leqslant t\leqslant\tau,\\&\xi(0)=w_0+f(0)ML^{-1}z,\\&\Phi[\xi(t)]=g(t)+f(t)\Phi[ML^{-1}z],\quad 0\leqslant t\leqslant\tau,\end{aligned}$$

где $A=(M^*)^{-1}LM^{-1}$, $w_0=My_0$. Следовательно, чтобы получить строгое решение

$$\xi(t)=e^{tA}[w_0+f(0)ML^{-1}z]+\int\limits_0^t e^{(t-s)A}ML^{-1}zf'(s)ds,$$

мы должны предположить, что $f\in C^2([0,\tau];\mathbb{C})$. Наконец, интегрирование по частям дает соотношение

$$\xi(t)=e^{tA}w_0+f(0)e^{tA}ML^{-1}z-f(0)e^{tA}ML^{-1}z+ML^{-1}zf(t)+\int\limits_0^t e^{(t-s)A}(M^*)^{-1}zf(s)ds=$$
$$=e^{tA}w_0+ML^{-1}zf(t)+\int\limits_0^t e^{(t-s)A}(M^*)^{-1}zf(s)ds.$$

Им можно воспользоваться только при условии, что $z=M^*z_1$ для некоторого z_1 из X, а именно этого условия мы должны избегать.

Рассмотрим теперь задачу

$$\begin{aligned}&M^*\frac{d}{dt}(My(t))=Ly(t)+f(t)M^*z,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau,\\&My(0)=w_0,\\&\Phi[My(t)]=g(t),\quad 0\leqslant t\leqslant\tau,\end{aligned}$$

где $g(0)=\Phi[w_0]$, при условиях (2.1)-(2.2), наложенных на M, M^*, L. Как и ранее, запишем первое уравнение в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}(My(t))-f(t)z\in(M^*)^{-1}Ly(t).$$

Замена $(M^*)^{-1}Ly(t)\ni x(t)$, т. е., $y(t)=L^{-1}M^*x(t)$, дает соотношения

$$\frac{d}{dt}(Tx(t))=x(t)+f(t)z,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau,\tag{2.7}$$
$$Tx(0)=w_0,\tag{2.8}$$
$$\Phi[Tx(t)]=g(t),\quad 0\leqslant t\leqslant\tau,\tag{2.9}$$

где $T=ML^{-1}M^*\in\mathcal{L}(H)$.

Из [2] известно, что пространство H представимо в виде прямой суммы $H=N(T)\oplus\overline{R(T)}$, где $N(T)$ — ядро оператора T, а $R(T)$ — его образ (и то, и другое — в топологии, индуцированной H). Кроме того, если $\widetilde{T}$ обозначает сужение T на $\overline{R(T)}$, то оператор $\widetilde{T}$ обратим, и оператор $\widetilde{T}^{-1}$: $\overline{R(T)}\to\overline{R(T)}$ генерирует в $\overline{R(T)}$ C_0-полугруппу. Обозначим через P оператор проектирования на $N(T)$ вдоль $\overline{R(T)}$. Отметим, что включение $w_0\in\overline{R(T)}$ является необходимым. Тогда задача (2.7)–(2.9) эквивалентна задаче

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{T}(I-P)x(t))=(I-P)x(t)+f(t)(I-P)z,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau,\tag{2.10}$$
$$\widetilde{T}(I-P)x(0)=w_0=(I-P)w_0,\tag{2.11}$$
$$\Phi[\widetilde{T}(I-P)x(t)]=g(t),\quad 0\leqslant t\leqslant\tau,\tag{2.12}$$
$$0=Px(t)+f(t)Pz,\quad 0\leqslant t\leqslant\tau.\tag{2.13}$$

Хорошо известно (см., например, [6]), что, если f непрерывно дифференцируема на $[0,\tau]$ и $w_0 \in R(\widetilde{T}) = R(T)$, то задача (2.10)-(2.11) допускает единственное сильное решение и

$$\widetilde{T}(I-P)x(t) = e^{t\widetilde{T}^{-1}}w_0 + \int\limits_0^t e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)zf(s)ds.$$

Из (2.12) вытекает соотношение

$$\Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}w_0] + \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)z]f(s)ds = g(t). \tag{2.14}$$

Следовательно, если $(I-P)z \in R(T)$, то можно продифференцировать левую и правую части (2.14); выполнив это дифференцирование, получаем, что

$$\Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}w_0] + \Phi[(I-P)z]f(t) + \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)z]f(s)ds = g'(t). \tag{2.15}$$

Если $\Phi[(I-P)z] \neq 0$, то у (2.15) есть единственное решение f из $C([0,\tau];\mathbb{C})$. Если $g \in C^2([0,\tau];\mathbb{C})$ и $w_0 \in D((\widetilde{T}^{-1})^2) = R(\widetilde{T}^2) = R(T^2)$, то, учитывая, что

$$\int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)z]f(s)ds = \int\limits_0^t \Phi[e^{s\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)z]f(t-s)ds,$$

получаем уравнение

$$\begin{aligned}\Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-2}w_0] + \Phi[(I-P)z]f'(t) + \Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)z]f(0) + \\ + \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)z]f'(s)ds = g''(t),\end{aligned}$$

допускающее единственное решение f' из $C([0,\tau];\mathbb{C})$. Функция $Px(t)$ определяется из (2.13) соответственно. Итак, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Если операторы* M, M^*, L *удовлетворяют условиям* (2.1) *и* (2.5), $w_0 \in R(T^2)$, $g \in C^2([0,\tau];\mathbb{C})$, $g(0) = \Phi[w_0]$, $(I-P)z \in R(T)$ *и* $\Phi[(I-P)z] \neq 0$, *то задача*

$$\begin{aligned}&M^*\frac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t)M^*z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\ &My(0) = w_0,\\ &\Phi[My(t)] = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\end{aligned}$$

допускает единственное строгое решение (y,f), *для которого* $y \in C([0,\tau];D(L))$ *и* $f \in C^1([0,\tau];\mathbb{C})$.

Теорема 2.2 улучшает результаты [2, 3] и является своего рода альтернативной версией теоремы 2.1.

3. Общий случай

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.3) в предположении, что операторы M, M^*, L удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Замена $y(t) = x(t) - f(t)L^{-1}z$ преобразует задачу (1.1)–(1.3) к виду

$$M^*\frac{d}{dt}(Mx(t)) = Lx(t) + f'(t)M^*ML^{-1}z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau \tag{3.1}$$

$$Mx(0) = w_0 + f(0)ML^{-1}z, \tag{3.2}$$

$$\Phi[Mx(t)] = g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z], \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.3}$$

где $\Phi[w_0] = g(0)$, $w_0 = My_0$. Другими словами, из (3.1) получаем включение

$$\frac{d}{dt}(Mx(t)) - f'(t)ML^{-1}z \in (M^*)^{-1}Lx(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Введем новую переменную $\xi(t)$ соотношением $x(t) = L^{-1}M^*\xi(t)$. Тогда задача (3.1)–(3.3) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(T\xi(t)) = \xi(t) + f'(t)ML^{-1}z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.4}$$

$$T\xi(0) = w_0 + f(0)ML^{-1}z, \tag{3.5}$$

$$\Phi[T\xi(t)] = g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z], \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.6}$$

где $T = ML^{-1}M^* \in \mathcal{L}(X)$.

Как отмечалось выше, из [2] следует, что $N(T) = \overline{R(T)}^{\perp}$, если $L = L^*$. Вообще говоря, имеем равенство $X = N(T) \oplus \overline{R(T)}$. Напомним, что P обозначает оператор проектирования на $N(T)$ вдоль $\overline{R(T)}$, а $\widetilde{T}$ есть сужение T на $\overline{R(T)}$, причем $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(\overline{R(T)})$, и $\widetilde{T}^{-1}$ генерирует сильно непрерывную полугруппу в $\overline{R(T)}$ (см., например, [2, 3]).

Тогда задача (3.4)–(3.6) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(\widetilde{T}(I-P)\xi(t)) = (I-P)\xi(t) + f'(t)(I-P)ML^{-1}z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.7}$$

$$\widetilde{T}(I-P)\xi(0) = (I-P)w_0 + f(0)(I-P)ML^{-1}z, \tag{3.8}$$

$$Pw_0 + f(0)PML^{-1}z = 0, \tag{3.9}$$

$$0 = P\xi(t) + f'(t)PML^{-1}z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.10}$$

$$\Phi[\widetilde{T}(I-P)\xi(t)] = g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z], \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{3.11}$$

Перейдем к формальному доказательству основной теоремы. Мы уже имеем соотношение

$$\widetilde{T}(I-P)\xi(t) = e^{t\widetilde{T}^{-1}}[(I-P)w_0 + f(0)(I-P)ML^{-1}z] + \int\limits_0^t e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}zf'(s)ds.$$

Выполнив интегрирование по частям, получаем, что

$$\widetilde{T}(I-P)\xi(t) = e^{t\widetilde{T}^{-1}}[(I-P)w_0 + f(0)(I-P)ML^{-1}z] + f(t)(I-P)ML^{-1}z -$$
$$- f(0)e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z + \int\limits_0^t \widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}zf(s)ds =$$
$$= e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0 + f(t)(I-P)ML^{-1}z + \int\limits_0^t \widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}zf(s)ds, \tag{3.12}$$

что приводит нас к выводу о том, что $\sup\limits_{t>0}\|\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z\| < \infty$, т. е., если $\widetilde{T}^{-1}$ генерирует аналитическую полугруппу в $\overline{R(T)}$, то согласно [1] $(I-P)ML^{-1}z$ принадлежит пространству Фавара F_1 для оператора $\widetilde{T}^{-1}$.

Применяя Φ к обеим частям равенства (3.12) и используя соотношение (3.11), получаем соотношение

$$\Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0] + f(t)\Phi[(I-P)ML^{-1}z] + \int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(s)ds =$$
$$= g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z],$$

т. е.,

$$f(t)\Phi[PML^{-1}z] = \int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(s)ds + \Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0] - g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{3.13}$$

Если $\Phi[PML^{-1}z] \neq 0$, то получаем классическое интегральное уравнение первого рода. Учитывая [5], приходим к выводу, что (3.13) допускает единственное глобальное непрерывное решение f на отрезке $[0,\tau]$. Однако от $f(t)$ нам требуется бо́льшая регулярность, а именно, принадлежность пространству $C^2([0,\tau];\mathbb{C})$. В интеграле из (3.13) применим замену $t-s=r$. Получим, что

$$\int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(s)ds = \int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{r\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(t-r)dr,$$

а значит,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(s)ds = \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(0) + \\ + \int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f'(s)ds.$$

Следовательно, продифференцировав обе части равенства (3.13), мы получаем соотношение

$$f'(t)\Phi[PML^{-1}z] = \int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f'(s)ds + \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(0) + \\ + \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0] - g'(t).$$

Действуя таким же образом, мы получаем соотношение

$$f''(t)\Phi[PML^{-1}z] = \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f'(0) + \int\limits_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f''(s)ds + \\ + \Phi[\widetilde{T}^{-2}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(0) + \Phi[\widetilde{T}^{-2}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0] - g''(t).$$

Отсюда следует, что, если

$$\sup_{t>0}\|\widetilde{T}^{-2}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z\|_X < \infty, \quad \sup_{t>0}\|\widetilde{T}^{-2}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0\|_X < \infty,$$

то функция f'' удовлетворяет классическому интегральному уравнению, а значит, непрерывна на $[0,\tau]$. Остается проверить выполнение соотношения (3.9). Поскольку $g(0) = \Phi[w_0]$, а из (3.8) и (3.11) следует, что $f(0) = \dfrac{\Phi[(I-P)w_0] - g(0)}{\Phi[PML^{-1}z]} = -\dfrac{\Phi[Pw_0]}{\Phi[PML^{-1}z]}$, соотношение (3.9) выполняется тогда и только тогда, когда $Pw_0 = \dfrac{\Phi[Pw_0]}{\Phi[PML^{-1}z]}PML^{-1}z$, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\Phi[PML^{-1}z]Pw_0 = \Phi[Pw_0]PML^{-1}z. \tag{3.14}$$

Отметим, что задача (3.7), (3.8), (3.11), в которой $\eta(t) = \widetilde{T}(I-P)\xi(t)$, может быть записана в форме

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = \widetilde{T}^{-1}\eta(t) + f'(t)(I-P)ML^{-1}z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{3.15}$$

$$\eta(0) = (I-P)w_0 - \frac{\Phi[Pw_0]}{\Phi[PML^{-1}z]}(I-P)ML^{-1}z, \tag{3.16}$$

$$\Phi[\eta(t)] = g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z], \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{3.17}$$

Значит, чтобы строгое решение задачи (3.15)-(3.16) существовало, нужно потребовать, чтобы $(I-P)w_0$ и $(I-P)ML^{-1}z$ принадлежали $R(T)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть* $X = N(T) \oplus \overline{R(T)}$, $T = ML^{-1}M^*$, *а* P — *оператор проектирования на* $N(T)$ *вдоль* $\overline{R(T)}$. *Пусть* $z \in X$, $\Phi[PML^{-1}z] \neq 0$, $\Phi \in X^*$, $(I-P)w_0 \in R(T)$, $(I-P)ML^{-1}z \in R(T)$, $g \in C^2([0,\tau];\mathbb{C})$, $g(0) = \Phi[w_0]$, $0 \in \rho(L)$, *где* $\rho(L)$ *обозначает резольвентное множество оператора* L. *Пусть выполняются соотношение* (3.14) *и неравенства*

$$\sup_{t>0} \|\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z\|_X < \infty, \quad \sup_{t>0} \|\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)w_0\|_X < \infty.$$

Тогда обратная задача (1.1)–(1.3)*, в которой* My_0 *заменено на* w_0*, допускает единственное решение* (y,f) *из* $C([0,\tau];D(L)) \times C^2([0,\tau];\mathbb{C})$.

Случай, в котором $\Phi[PML^{-1}z] = 0$, рассмотрен в [3, теорема 1]. Тогда уравнение (3.13) сводится к следующему интегральному уравнению второго рода:

$$\int_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}(I-P)ML^{-1}z]f(s)ds + \Phi[e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0] - g(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{3.18}$$

Повторяя те же рассуждения, что и выше, мы видим, что необходимо еще раз продифференцировать по времени. Действительно, дифференцируя (3.18), получаем соотношение

$$\Phi[\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f(t) + \int_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f(s)ds + \\ + \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}(I-P)w_0] - g'(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Предположим, что $\Phi[\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z] \neq 0$. Тогда такое интегральное уравнение допускает единственное глобальное решение f из $C([0,\tau];\mathbb{C})$. Однако нам требуется, чтобы f принадлежала $C^2([0,\tau];\mathbb{C})$. Рассуждая так же, как и выше, мы получаем, что

$$\Phi[\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f'(t) + \frac{d}{dt}\int_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{s\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f(t-s)ds + \\ + \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)w_0] - g''(t) = 0 = \Phi[\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f'(t) + \\ + \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f(0) + \int_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f'(s)ds + \\ + \Phi[\widetilde{T}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)w_0] - g''(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

и

$$\Phi[\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f''(t) + \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-2}(I-P)ML^{-1}z]f(0) + \\ + \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f'(0) + \int_0^t \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{(t-s)\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-1}(I-P)ML^{-1}z]f''(s)ds + \\ + \Phi[\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-2}(I-P)w_0] - g'''(t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3.2. *Пусть* $X = N(T) \oplus \overline{R(T)}$, $T = ML^{-1}M^*$, *а* P — *оператор проектирования на* $N(T)$ *вдоль* $\overline{R(T)}$. *Предположим, что* $z \in X$, $w_0, ML^{-1}z \in R(T)$, $\Phi \in X^*$, $\Phi[PML^{-1}z] = 0$, $\Phi[\widetilde{T}^{-1}ML^{-1}z] \neq 0$, $0 \in \rho(L)$, $g \in C^3([0,\tau];\mathbb{C})$, $g(0) = \Phi[w_0]$,

$$\sup_{t>0} \|\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-2}ML^{-1}z\|_X < \infty, \quad \sup_{t>0} \|\widetilde{T}^{-1}e^{t\widetilde{T}^{-1}}\widetilde{T}^{-2}w_0\|_X < \infty.$$

Тогда обратная задача (1.1)–(1.3), *в которой* My_0 *заменено на* w_0, *допускает единственное решение* (y, f) *из* $C([0,\tau]; D(L)) \times C^2([0,\tau]; \mathbb{C})$.

Замечание 3.1. Можно предположить, что общую задачу

$$\begin{aligned} &M^* \frac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ &My(0) = w_0, \\ &\Phi[My(t)] = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \end{aligned}$$

можно исследовать с помощью многозначных линейных операторов, используя введенную выше замену $y(t) = x(t) - f(t)L^{-1}z$. Очевидно, что после замены $Mx(t) = \xi(t)$ задача примет вид

$$\begin{aligned} &\frac{d\xi(t)}{dt} - f'(t)ML^{-1}z \in (M^*)^{-1}LM^{-1}\xi(t) := \mathcal{A}\xi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ &\xi(0) = w_0 + f(0)ML^{-1}z, \\ &\Phi[\xi(t)] = g(t) + f(t)\Phi[ML^{-1}z], \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \end{aligned}$$

Ее решение есть

$$\begin{aligned} \xi(t) &= e^{t\mathcal{A}}[w_0 + f(0)ML^{-1}z] + \int\limits_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}}ML^{-1}zf'(s)ds = \\ &= e^{t\mathcal{A}}[w_0 + f(0)ML^{-1}z] + f(t)ML^{-1}z - e^{t\mathcal{A}}f(0)ML^{-1}z + \\ &+ \int\limits_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}}\mathcal{A}ML^{-1}zf(s)ds = e^{t\mathcal{A}}w_0 + f(t)ML^{-1}z + \int\limits_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}}\mathcal{A}ML^{-1}zf(s)ds, \end{aligned}$$

однако последний интегральный член имеет смысл только в том случае, когда $z = M^*\overline{z}$ для некоторого $\overline{z}$ из X, а в этом случае мы получаем уравнение, ранее рассмотренное в теореме 2.1.

Замечание 3.2. Понятно, что $N(M^*) \subseteq N(ML^{-1}M^*)$. С другой стороны, если $ML^{-1}M^*z = 0$, то $0 = \langle ML^{-1}M^*z, z\rangle_X = \langle L^{-1}M^*z, M^*z\rangle_X$ и, следовательно, $\mathrm{Re}\langle L^{-1}M^*z, M^*z\rangle_X = 0$. Предположим, что $\mathrm{Re}\langle Ly, y\rangle_X \neq 0$ для любого ненулевого y. Тогда $\mathrm{Re}\langle L^{-1}y, y\rangle_X \neq 0$ для любого ненулевого y. Следовательно, $\mathrm{Re}\langle L^{-1}M^*z, M^*z\rangle_X = 0$ тогда и только тогда, когда $M^*z = 0$. Отсюда следует, что в этом случае справедливо равенство $N(ML^{-1}M^*) = N(M^*)$.

Замечание 3.3. Предположим, что L самосопряжен и справедливо соотношение $\mathrm{Re}\langle Lx, x\rangle_X = \langle Lx, x\rangle_X \leqslant 0$. Если $ML^{-1}M^*x = 0$, то $0 = \langle ML^{-1}M^*x, x\rangle_X = -\langle M(-L)^{1/2}(-L)^{1/2}M^*x, x\rangle_X = -\langle(-L)^{1/2}M^*x, (-L)^{1/2}M^*x\rangle_X$. Следовательно, $N(ML^{-1}M^*)$ совпадает с $N(M^*)$.

Замечание 3.4. Предположим, что $N(ML^{-1}M^*) = N(M^*)$. Рассмотрим $PML^{-1}z$, где P — оператор проектирования на $N(ML^{-1}M^*) = N(M^*)$ вдоль $\overline{R(ML^{-1}M^*)}$. Тогда $M^*PML^{-1}z = 0$, а значит,

$$0 = \langle M^*PML^{-1}z, L^{-1}z\rangle_X = \langle PML^{-1}z, ML^{-1}z\rangle_X = \|PML^{-1}z\|_X^2 + \langle PML^{-1}z, (I-P)ML^{-1}z\rangle_X.$$

С другой стороны, если L самосопряжен и $\langle Lx, x\rangle_X \leqslant 0$ для любого x из $D(L)$, то, как известно, оператор проектирования P тоже самосопряжен, а значит, $\langle Px, (I-P)x\rangle_X = \langle Px, x\rangle_X - \langle Px, Px\rangle_X = \langle Px, x\rangle_X - \langle P^2x, x\rangle_X = \langle Px, x\rangle_X - \langle Px, x\rangle_X = 0$. Следовательно, $0 = \|PML^{-1}z\|_X^2$, а значит, $ML^{-1}z \in \overline{R(ML^{-1}M^*)}$.

4. Уравнения второго порядка по времени

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_H$ рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &C^{1/2}\frac{d}{dt}(C^{1/2}y'(t)) + By'(t) + A_H y(t) = f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ &y(0) = y_0, \quad C^{1/2}y'(0) = C^{1/2}y_1, \end{aligned}$$

где C — ограниченный самосопряженный оператор в H, $C \geqslant 0$, B — замкнутый линейный оператор в H, A — линейный ограниченный оператор в другом гильбертовом пространстве V, ограниченно и плотно вложенном в H, а оператор A_H определен в разделе 2 (см. условия (i)–(v)). Потребуем также, чтобы $\Phi[C^{1/2}y(t)] = g(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, где g имеет гладкость, по крайней мере, $C^1([0,\tau];\mathbb{C})$. Разумеется, H отождествляется со своим двойственным пространством, а значит, имеют место вложения $V \subset H \subset V'$. Понятно, что условия согласования $\Phi[C^{1/2}y_0] = g(0)$, $\Phi[C^{1/2}y_1] = g'(0)$ тоже должны выполняться.

Тогда сформулированную выше задачу можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A_H & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = f(t) \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\
&\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}, \\
&\widetilde{\Phi}[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}] := \Phi[C^{1/2}y'(t)] = g'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.
\end{aligned}$$

Эта задача поставлена в объемлющем пространстве $X = D(A^{1/2}) \times H$ со скалярным произведением

$$\langle (x,y),(x_1,y_1)\rangle_X = (A^{1/2}x, A^{1/2}x_1)_H + (y,y_1)_H, \quad (x,y),(x_1,y_1) \in X.$$

Легко видеть, что действующие из X в X операторы M и L, определенные соотношениями

$$\begin{aligned}
&D(M) = X,\ M(y,x) = (y, C^{1/2}x), \quad (y,x) \in X, \\
&D(L) = D(A_H) \times D(A^{1/2}),\ L(y,x) = (x, -A_H y - Bx), \quad (y,x) \in D(L),
\end{aligned}$$

удовлетворяют всем условиям предыдущих разделов, если A_H имеет ограниченный обратный.

Если уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_H & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + f(t) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

где A_H имеет ограниченный обратный, то, вводя обозначения

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \\
&\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} - f(t) \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A_H & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & C^{1/2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} := \mathcal{A} \begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}, \\
&\begin{pmatrix} \xi(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ C^{1/2}y_1 \end{pmatrix}, \\
&\widetilde{\Phi}[\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix}] = \Phi[\eta(t)] = g'(t),
\end{aligned}$$

мы снова получаем обратную задачу на отрезке $[0,\tau]$.

Поскольку $\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = e^{t\mathcal{A}} \begin{pmatrix} y_0 \\ C^{1/2}y_1 \end{pmatrix} + \int\limits_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} f(s)ds$, то справедливо соотношение

$$\widetilde{\Phi}[e^{t\mathcal{A}} \begin{pmatrix} y_0 \\ C^{1/2}y_1 \end{pmatrix}] + \int\limits_0^t \widetilde{\Phi}[e^{(t-s)\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}] f(s)ds = g'(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau. \tag{4.1}$$

Дифференцируя его левую и правую части, получаем, что

$$\widetilde{\Phi}[e^{t\mathcal{A}}\mathcal{A} \begin{pmatrix} y_0 \\ C^{1/2}y_1 \end{pmatrix}] + \Phi[z]f(t) + \int\limits_0^t \widetilde{\Phi}[e^{(t-s)\mathcal{A}}\mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}] f(s)ds = g''(t),$$

где $\mathcal{A} \begin{pmatrix} y_0 \\ C^{1/2}y_1 \end{pmatrix}$ и $\mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$ легко вычисляются. Если $\Phi[z] \neq 0$, то такое решение f принадлежит $C([0,\tau];\mathbb{C})$.

В (4.1) используем соотношение $\int\limits_0^t \widetilde{\Phi}[e^{(t-s)\mathcal{A}}\begin{pmatrix}0\\z\end{pmatrix}]f(s)ds = \int\limits_0^t \widetilde{\Phi}[e^{s\mathcal{A}}\begin{pmatrix}0\\z\end{pmatrix}]f(t-s)ds$. Тогда, продифференцировав (4.1), получим интегральное уравнение для $f'(t)$, откуда следует, что $f \in C^1([0,\tau];\mathbb{C})$.

Возвращаясь к общему случаю, преобразуем пару $\begin{pmatrix}y(t)\\y'(t)\end{pmatrix}$ в виде

$$\begin{pmatrix}x(t)\\x_1(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & I\\-A_H & -B\end{pmatrix}^{-1} f(t)\begin{pmatrix}0\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(t)\\x_1(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-A_H^{-1}B & -A_H^{-1}\\I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\z\end{pmatrix} f(t) =$$
$$= \begin{pmatrix}x(t)\\x_1(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\0\end{pmatrix} f(t).$$

Тогда наша система принимает вид

$$\begin{pmatrix}I0\\0C^{1/2}\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}I0\\0C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\x_1(t)\end{pmatrix} + f'(t)\begin{pmatrix}I0\\0C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I0\\0C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0I\\-A_H-B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\x_1(t)\end{pmatrix},$$

т. е.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}I & 0\\0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\x_1(t)\end{pmatrix} + f'(t)\begin{pmatrix}I & 0\\0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}I & 0\\0 & C^{1/2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & I\\-A_H & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\x_1(t)\end{pmatrix}.$$

Таким образом, все предшествующие рассуждения разделов 2-3 можно повторить снова (оставим это заинтересованному читателю).

После применения указанной выше замены переменных $\begin{pmatrix}y(t)\\y'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(t)\\x_1(t)\end{pmatrix} + f(t)\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\0\end{pmatrix}$ (мы предполагаем, что $A_H^{-1} \in \mathcal{L}(H)$) рассматривая система принимает вид

$$\begin{pmatrix}I & 0\\0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}I & 0\\0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\x_1(t)\end{pmatrix} + f'(t)\begin{pmatrix}I & 0\\0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\0\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}0 & I\\-A_H & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\x_1(t)\end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$
$$x(0) = y_0 - f(0)A_H^{-1}z,$$
$$C^{1/2}x_1(0) = C^{1/2}y_1.$$

Следовательно, если $0 \leqslant t \leqslant \tau$, то

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}I & 0\\0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\x_1(t)\end{pmatrix} + f'(t)\begin{pmatrix}I & 0\\0 & C^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}I & 0\\0 & C^{1/2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & I\\-A_H & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\x_1(t)\end{pmatrix},$$

а значит, пара $(\xi(t),\eta(t)) = (x(t), C^{1/2}x_1(t))$ удовлетворяет включению

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi(t)\\\eta(t)\end{pmatrix} + f'(t)\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\0\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}I & 0\\0 & C^{1/2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & I\\-A_H & -B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\0 & C^{1/2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\xi(t)\\\eta(t)\end{pmatrix} := \mathcal{A}\begin{pmatrix}\xi(t)\\\eta(t)\end{pmatrix},$$
$$\xi(0) = y_0 - f(0)A_H^{-1}z,$$
$$\eta(0) = C^{1/2}y_1.$$

Если $f \in C^2([0,\tau];\mathbb{C})$, то такая задача допускает единственное решение

$$\begin{pmatrix}\xi(t)\\\eta(t)\end{pmatrix} = e^{t\mathcal{A}}\begin{pmatrix}y_0 - f(0)A_H^{-1}z\\C^{1/2}y_1\end{pmatrix} - \int\limits_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\0\end{pmatrix} f'(s)ds$$

и

$$\Phi[\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \eta(t)\end{pmatrix}] = \Phi_1[\xi(t)] + \Phi_2[\eta(t)] = \Phi[e^{t\mathcal{A}}\begin{pmatrix} y_0 - f(0)A_H^{-1}z \\ C^{1/2}y_1\end{pmatrix}] - \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\mathcal{A}}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}]f'(s)ds =$$

$$= \Phi[e^{t\mathcal{A}}\begin{pmatrix} y_0 - f(0)A_H^{-1}z \\ C^{1/2}y_1\end{pmatrix}] - \Phi[\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}]f(t) + \Phi[e^{t\mathcal{A}}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}f(0)] -$$

$$- \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\mathcal{A}}\mathcal{A}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}]f(s)ds = \Phi[e^{t\mathcal{A}}\begin{pmatrix} y_0 \\ C^{1/2}y_1\end{pmatrix}] -$$

$$- \Phi[\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}]f(t) - \int\limits_0^t \Phi[e^{(t-s)\mathcal{A}}\mathcal{A}\begin{pmatrix}A_H^{-1}z\\ 0\end{pmatrix}]f(s)ds = g(t).$$

Чтобы получить интегральное уравнение первого рода для $f(t)$, нужно наложить условие $\Phi_1[A_H^{-1}z] \neq 0$. Значит, нужно потребовать, чтобы $f(t)$ была дважды дифференцируемой, а это вынуждает нас накладывать на z условия, которых мы хотим избежать (см. замечание 3.1).

5. Примеры и приложения

Пример 5.1. Рассмотрим задачу (относительно неизвестной функции $v = v(x,t)$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(m(x)v)}{\partial t} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} + f(t)z(x), \quad -\infty < x < \infty, 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ m(x)v(x,0) = u_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{P}$$

Здесь $m(x)$ — характеристическая функция некоторого измеримого множества J на вещественной оси, $z(x)$ — заданная функция, u_0 — начальные данные. Эта задача рассматривается в пространстве $X = L^2(\mathbb{R})$. Если M — это действующий в пространстве X оператор умножения на функцию $m(x)$, то M ограничен в X и $M^* = M$. Следовательно, задача (P) формулируется в виде

$$M^*\frac{\partial(Mv(t))}{\partial t} = Lv(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$
$$Mv(0) = u_0,$$

где $L = -\dfrac{d}{dx}$ и $D(L) = H^1(\mathbb{R})$, а значит, L — замкнутый линейный оператор в X. Понятно, что лемма 2.1 или 2.2 выполняется.

Исследуем некоторые частные случаи этой задачи (см. подробности в [4, с. 41]).

(1) $J = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, $a < b$.
В этом случае существует такое λ_0, что $\lambda_0 > \beta$, $R(\lambda_0 M^*M - L) = X$ и оператор $(\lambda_0 M^*M - L)^{-1}$ однозначен. Таким образом, выполняется лемма 2.2.

(2) $J = (a, \infty)$.
Легко видеть, что в этом случае рассуждения, приведенные выше, неприменимы, однако существует такое λ_0, что $\lambda_0 > \beta$, $R(\lambda_0 M^*M - L) \supset R(M^*)$ и оператор $(\lambda_0 M^*M - L)^{-1}$ однозначен в $R(M^*)$. Следовательно, лемма 2.1 применима при условии, что $z = M^*z_1$, $z_1 \in H$.

Следовательно, используя теорему 2.1, получаем, что обратная задача, заключающаяся в восстановлении пары (v, f) из $C([0,\tau]; D(L)) \times C^1([0,\tau];\mathbb{C})$, одновременно удовлетворяющей задаче (P) и уравнению $\Phi[Mv(t)] = \int\limits_{\mathbb{R}} \eta(x)m(x)v(x,t)dx = g(t)$, $t \in [0,\tau]$, $\eta \in L^2(\mathbb{R})$, допускает единственное решение при некоторых условиях регулярности, наложенных на коэффициенты. С другой стороны, хорошо известно (см. [2,3]), что $X = N(T) \oplus \overline{R(T)}$, где $T = ML^{-1}M^* = ML^{-1}M$. Значит, можно применить и теорему 3.1, и теорему 3.2.

Пример 5.2 (уравнения Максвелла)**.** Предположим, что среда, заполняющая пространство $\mathbb{R}^3$, линейна, но может быть анизотропной и неоднородной. Тогда уравнения Максвелла могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\varepsilon(x) & 0\\ 0 & \mu(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \operatorname{rot}\\ -\operatorname{rot} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ H\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}G(x) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E\\ H\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}J'(x,t)\\ 0\end{pmatrix},$$

где $\varepsilon(x)$, $\mu(x)$ и $G(x)$, $x\in\mathbb{R}^3$, есть матрицы размерности 3×3, а J' есть заданная плотность принужденного тока. Наложим следующие условия:

(i) функция $\varepsilon(x)$ симметрична и неотрицательна для всех x из $\mathbb{R}^3$;

(ii) функция $\mu(x)$ симметрична и существует такое положительное δ, что $\mu(x)\geqslant\delta$ для всех x из $\mathbb{R}^3$;

(iii) существуют такое положительное δ и неотрицательное γ, что неравенство $((\gamma\varepsilon(x)+G(x))\xi,\xi)_{\mathbb{R}^3}\geqslant\delta|\xi|^2$, $\xi\in\mathbb{R}^3$, выполняется для всех x из $\mathbb{R}^3$.

Если $J'(x,t)=f(t)z(x), z(x)\in\mathbb{R}^3$, $f:[0,\tau]\to\mathbb{C}$, то указанная задача записывается в виде

$$M^*\frac{d(Mv(t))}{dt}=Lv(t)+f(t)\begin{pmatrix}z\\ 0\end{pmatrix},$$
$$Mv(0)=u_0$$

и ставится в пространстве $X=(L^2(\mathbb{R}^3))^6$, где M — оператор умножения на $\sqrt{C(x)}$, $C(x)=\begin{pmatrix}\varepsilon(x) & 0\\ 0 & \mu(x)\end{pmatrix}$, действующий в пространстве X ($M=M^*$), а замкнутый линейный оператор L определяется соотношениями

$$D(L)=\{v\in X;\sum_{i=1}^{3}a_i\frac{\partial v}{\partial x_i}\in X\},\qquad Lv=\sum_{i=1}^{3}a_i\frac{\partial v}{\partial x_i}+b(x)v,$$

где a_i, $i=1,2,3$, $b(x)=-\begin{pmatrix}G(x) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ — симметричные матрицы размерности 6×6. Тогда исходное уравнение принимает вид $\dfrac{\partial(C(x)v)}{\partial t}=\sum\limits_{i=1}^{3}a_i\dfrac{\partial v}{\partial x_i}+b(x)v+f(t)\begin{pmatrix}z\\ 0\end{pmatrix}$. Мы видим, что лемма 2.2 полностью применима (см. [4, с. 43]). Следовательно, можно рассмотреть соответствующую обратную задачу отыскания такой пары (v,f), для которой $\Phi[Mv(t)]=g(t)$, $\Phi\in[(L^2(\mathbb{R}^3))^6]^*$, $g\in C^3([0,\tau];\mathbb{C})$. Для этого можно использовать либо теорему 3.1, либо теорему 3.2, поскольку $X=N(T)\oplus\overline{R(T)}$, где $T=ML^{-1}M^*=ML^{-1}M$.

Пример 5.3. Рассмотрим следующую задачу относительно неизвестной пары (v,f):

$$(m(x)\frac{\partial}{\partial t})^2v(x,t)=\Delta v(x,t)+f(t)z(x),\quad (x,t)\in\Omega\times[0,\tau],$$
$$v(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,\tau],$$
$$v(x,0)=v_0(x),\ m(x)\frac{\partial v}{\partial t}(x,0)=v_1(x),\quad x\in\Omega,$$
$$\int\limits_{\Omega}\nu_1(x)v(x,t)dx+\int\limits_{\Omega}\nu_2(x)\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)m(x)dx=g(t),$$

где $z(x),\nu_1(x),\nu_2(x)\in L^2(\Omega)$, $g\in C([0,\tau];\mathbb{C})$.

Наши предыдущие результаты (см. [4, с. 44]) применимы к этому волновому уравнению Пуассона, если (ограниченная или неограниченная) область Ω пространства $\mathbb{R}^n$ имеет гладкую границу $\partial\Omega$, $m\in L^\infty(\Omega), m(x)\geqslant 0$ и m может обращаться в ноль в ограниченном подмножестве области Ω. Перепишем это уравнение в виде системы

$$\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & m(x)\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & m(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ v_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I\\ \Delta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ v_t\end{pmatrix}+f(t)\begin{pmatrix}0\\ z\end{pmatrix},$$

т. е. в виде

$$M^*\frac{d(Mv(t))}{dt}=Lv(t)+f(t)z^*,$$
$$Mv(0)=u_0,$$

где $z^* = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$. Тогда применима лемма 2.2 (см. [4, с. 45]), а к соответствующей обратной задаче применимы теоремы 3.1-3.2.

Пример 5.4. Пусть Ω — ограниченное открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ. Если $T > 0$, то обозначим $\Omega \times (0,T)$ через Q, а $\Gamma \times (0,T)$ — через Σ. Гиперболическо-параболическая задача

$$\begin{aligned}
&m_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + m_2(x)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(t)z(x), \quad (x,t) \in Q,\\
&u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma,\\
&u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega,\\
&\Phi[m_1(x)^{1/2}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)] = g'(t)
\end{aligned}$$

имеет решение (u,f) из $C([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times C^3([0,\tau];\mathbb{C})$ (см. [4, с. 214] и теоремы 3.1-3.2), если существуют такие неотрицательные непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции $m_1(x), m_2(x)$, что для любых функций u_0, u_1 из $D(A_H)$ существуют такие функции u_2 из $V = H_0^1(\Omega)$ и u_3 из H, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
&f(0)z + \Delta u_0 - m_2(x)u_1 = m_1(x)u_2,\\
&f'(0)z + \Delta u_1 - m_2(x)u_2 = m_1(x)^{1/2}u_3.
\end{aligned}$$

Отметим, что в данном случае равенство $A = -\Delta$ выполняется в вариационном смысле, а значит, $D(A_H) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Пример 5.5. Положим $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а значит, $MM^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^*M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
&M^*\frac{d(M\xi(t))}{dt} = L\xi(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,\\
&M\xi(0) = \xi_0,\\
&\Phi[M\xi(t)] = g(t),
\end{aligned}$$

где $\xi_0 = (y_0 + w_0, x_0, 0)$, $\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку $T = ML^{-1}M^* = MM^*$, справедливы равенства $N(T) = \{(0,0,w),\ w \in \mathbb{C}\}$, $R(T) = \overline{R(T)} = \{(y,x,0),\ y,x \in \mathbb{C}\}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I - P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Непосредственно решая систему уравнений, получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \\ w(t) \end{pmatrix} + f(t)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix},\\
&y(t) + x(t) + w(t) = g(t)
\end{aligned}$$

и $y(0) + w(0) = y_0 + w_0$, $x(0) = x_0$. Значит,

$$\begin{aligned}
&(y(t) + w(t))' = y(t) + f(t)z_1,\\
&x'(t) = x(t) + f(t)z_2,\\
&(y(t) + w(t))' = w(t) + f(t)z_3,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

т. е.

$$2(y(t)+w(t))' = y(t)+w(t)+f(t)(z_1+z_3),$$
$$x'(t) = x(t)+f(t)z_2.$$

Следовательно, $x(t) = e^t x_0 + z_2 \int\limits_0^t e^{t-s} f(s)ds$ и

$$y(t)+w(t) = e^{t/2}(y_0+w_0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t e^{(t-s)/2} f(s)(z_1+z_3)ds. \tag{5.2}$$

Получаем, что

$$y(t)+x(t)+w(t) = e^t x_0 + e^{t/2}(y_0+w_0) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t e^{(t-s)/2} f(s)(z_1+z_3)ds + z_2\int\limits_0^t e^{t-s} f(s)ds = g(t).$$

Тогда

$$g'(t) = e^t x_0 + e^{t/2}\frac{y_0+w_0}{2} + \frac{1}{2}(z_1+z_3)f(t) + z_2 f(t) + \frac{1}{4}\int\limits_0^t e^{(t-s)/2}(z_1+z_3)f(s)ds + z_2\int\limits_0^t e^{t-s} f(s)ds.$$

Если $\dfrac{z_1+z_3}{2} + z_2 \neq 0$, то такое уравнение имеет единственное решение $f(t)$.

Из (5.1) получаем, что $0 = y(t) - w(t) + f(t)(z_1 - z_3)$. Тогда из (5.2), получаем соотношения

$$y(t) = \frac{1}{2}f(t)(z_3-z_1) + \frac{1}{2}e^{t/2}(y_0+w_0) + \frac{1}{4}\int\limits_0^t e^{(t-s)/2}(z_1+z_3)f(s)ds,$$

$$w(t) = \frac{1}{2}f(t)(z_1-z_3) + \frac{1}{2}e^{t/2}(y_0+w_0) + \frac{1}{4}\int\limits_0^t e^{(t-s)/2}(z_1+z_3)f(s)ds.$$

Если применить теорему 3.2, то получим, что

$$\widetilde{T}^{-1}M\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1+z_3 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z_1+z_3}{2} \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а значит,

$$\Phi[\widetilde{T}^{-1}M\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}] = \frac{z_1+z_3}{2} + z_2$$

и, как и ранее, условие $z_1 + 2z_2 + z_3 \neq 0$ выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. — Berlin: Springer, 2000.
2. *Favini A., Marinoschi G.* Identification for degenerate problems of hyperbolic type// Appl. Anal. — 2012. — *91*, № 8. — C. 1511–1527.
3. *Favini A., Marinoschi G.* Identification for general degenerate problems of hyperbolic type// Bruno Pini Math. Anal. Semin. Univ. Bologna — 2016. — *7*. — C. 175–188.
4. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. — New York: Marcel Dekker, 1999.
5. *Lorenzi A.* An introduction to identification problems via functional analysis. — Berlin: De Gruyter, 2001.
6. *Pazy A.* Semigroup of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer-Verlag, 1983.

Angelo Favini
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Bologna, Italy
E-mail: angelo.favini@unibo.it

Gabriela Marinoschi
Institute of Statistical Mathematics and Applied Mathematics, Bucharest, Romania
E-mail: gabimarinoschi@yahoo.com

Hiroki Tanabe
Hirai Sanso 12-13, Takarazuka, 665-0817, Japan
E-mail: h7tanabe@jttk.zaq.ne.jp

Yakov Yakubov
Raymond and Beverly Sackler School of Mathematical Sciences, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel
E-mail: yakubov@post.tau.ac.il

DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-1-194-210 UDC 517.956.3 + 517.983

Identifications for General Degenerate Problems of Hyperbolic Type in Hilbert Spaces

© 2018 **A. Favini, G. Marinoschi, H. Tanabe, Ya. Yakubov**

Abstract. In a Hilbert space X, we consider the abstract problem

$$M^* \frac{d}{dt}(My(t)) = Ly(t) + f(t)z, \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$
$$My(0) = My_0,$$

where L is a closed linear operator in X and $M \in \mathcal{L}(X)$ is not necessarily invertible, $z \in X$. Given the additional information $\Phi[My(t)] = g(t)$ with $\Phi \in X^*$, $g \in C^1([0, \tau]; \mathbb{C})$. We are concerned with the determination of the conditions under which we can identify $f \in C([0, \tau]; \mathbb{C})$ such that y be a strict solution to the abstract problem, i.e., $My \in C^1([0, \tau]; X)$, $Ly \in C([0, \tau]; X)$. A similar problem is considered for general second order equations in time. Various examples of these general problems are given.

REFERENCES

1. K. -J. Engel and R. Nagel, *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, Berlin, 2000.
2. A. Favini and G. Marinoschi, "Identification for degenerate problems of hyperbolic type," *Appl. Anal.*, 2012, **91**, No. 8, 1511–1527.
3. A. Favini and G. Marinoschi, "Identification for general degenerate problems of hyperbolic type," *Bruno Pini Math. Anal. Semin. Univ. Bologna*, 2016, 175–188.
4. A. Favini and A. Yagi, *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1999.
5. A. Lorenzi, *An Introduction to Identification Problems via Functional Analysis*, De Gruyter, Berlin, 2001.
6. A. Pazy, *Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1983.

Angelo Favini
Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Bologna, Italy
E-mail: angelo.favini@unibo.it

Gabriela Marinoschi
Institute of Statistical Mathematics and Applied Mathematics, Bucharest, Romania
E-mail: gabimarinoschi@yahoo.com

Hiroki Tanabe
Hirai Sanso 12-13, Takarazuka, 665-0817, Japan
E-mail: h7tanabe@jttk.zaq.ne.jp

Yakov Yakubov
Raymond and Beverly Sackler School of Mathematical Sciences, Tel-Aviv University, Tel-Aviv, Israel
E-mail: yakubov@post.tau.ac.il