РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 65, № 3, 2019

Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала на Общероссийском математическом портале: http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. М. Варфоломеев*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев*

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Подписано в печать 26.06.2019. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 25,11. Тираж 150 экз. Заказ 1224.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 65, No. 3, 2019

Proceedings of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003
Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website at *All-Russian Mathematical Portal*: http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: ***E. M. Varfolomeev***
Computer design: ***E. M. Varfolomeev***

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Printing run 150 copies.

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 3 (2019). С. 339–389

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-339-389 УДК 517.9

УМНОЖЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И АЛГЕБРЫ МНЕМОФУНКЦИЙ

© 2019 г. **А. Б. АНТОНЕВИЧ, Т. Г. ШАГОВА**

Аннотация. Работа посвящена обсуждению методов и подходов, связанных с приданием смысла произведению обобщенных функций, которое в общем случае не определено в классической теории. Показано, что в основе проблемы лежит незамыкаемость в пространстве распределений оператора умножения на гладкую функцию. Изложен общий метод построения новых объектов, называемых новыми обобщенными функциями, или мнемофункциями, которые сохраняют основные свойства обычных обобщенных функций и при этом образуют алгебры. Описаны различные способы вложения пространств распределений в алгебры мнемофункций. Все идеи и рассуждения проиллюстрированы на наиболее простом примере пространства обобщенных функций на окружности. Некоторые эффекты, возникающие при исследовании уравнений с обобщенными коэффициентами, продемонстрированы на примере линейного дифференциального уравнения первого порядка.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Создание теории обобщенных функций (распределений) позволило решить многие задачи математической физики и теории линейных дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами [7, 10, 11, 38]. Однако в рамках этой классической теории невозможно задать произведение произвольных распределений, что является препятствием для приложений к уравнениям с обобщенными коэффициентами и нелинейным задачам. В связи с этим разрабатывались различные подходы к решению задачи умножения распределений (В. К. Иванов [18], Б. Дамянов и Х. Христов [27–30], С. Т. Завалищин и А. Н. Сесекин [17], Э. Розингер [37]). Наибольший резонанс в этом направлении вызвали работы французского математика Ж. Ф. Коломбо [31, 32]. Модификация этой конструкции была предложена Ю. В. Егоровым в работе [15], содержащей довольно подробную историю вопроса. Общий подход заключается во введении (для заданного пространства распределений) новых объектов, сохраняющих ряд свойств распределений и образующих алгебры, т. е. допускающих корректно заданное умножение. Эти объекты называют *новыми обобщенными функциями*, *мнемофункциями*, или *нелинейными обобщенными функциями*. На основе анализа предшествующих конструкций в работах [2, 25] был описан общий метод построения таких алгебр. Истории вопроса и дальнейшему развитию теории таких алгебр и их приложений посвящена обширная литература (см., например, [21, 26, 33, 35, 36]), сделать обзор которой не представляется возможным.

Целью данной работы является только обсуждение методов, связанных с приданием смысла произведению обобщенных функций из заданного пространства. Для конкретности общие рассуждения иллюстрируются на одном из наиболее простых примеров — пространстве распределений на окружности. Изложенный подход применим и для более сложных пространств распределений.

2. Пространство распределений на прямой

Напомним сначала определение пространства обобщенных функций (распределений) на прямой. *Пространство основных функций* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ состоит из бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций φ с компактным носителем, т. е. таких, что $\varphi(x) = 0$ при $|x| > C_\varphi$. В этом пространстве вводится сходимость: последовательность φ_n сходится к нулевой функции, если

i) существует C_0, при котором для всех n выполнено $\varphi_n(x) = 0$ при $|x| > C_0$;

ii) последовательность $\varphi_n^{(j)}(x)$ производных порядка j равномерно сходится к нулю для любого $j = 0, 1, \ldots$.

Существует топология τ на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, сходимость в которой совпадает с введенной, но эта топология описывается достаточно сложно, в связи с чем обычно используется только понятие сходимости в указанном пространстве. Функции из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ называют *основными*, или *пробными*.

Линейный функционал f на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ называется *непрерывным*, если $f(\varphi_n) \to 0$ для любой последовательности φ_n, сходящейся к нулю в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Для значений таких функционалов обычно используется обозначение $f(\varphi_n) :=< f, \varphi_n >$.

Пространство, сопряженное к $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, т. е. множество $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, называется *пространством распределений* (*обобщенных функций*) на $\mathbb{R}$. В этом пространстве вводится *слабая сходимость*: последовательность распределений f_n сходится к распределению f_0, если

$$< f_n, \varphi > \to < f_0, \varphi > \text{ для любого } \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

В пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ задано *дифференцирование* по формуле $< f', \varphi >:= - < f, \varphi' >$ и определено *умножение* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ на любую функцию $g \in C^\infty(\mathbb{R})$: $< gf, \varphi >=< f, g\varphi >$.

Если u — локально интегрируемая функция, то формула

$$< f_u, \varphi >= \int u(x)\varphi(x)dx \tag{2.1}$$

задает распределение, при этом если u отлична от нуля на множестве положительной меры, то $f_u \neq 0$. Из этого следует, что пространство $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ вкладывается в пространство распределений. Распределение, представимое в виде (2.1), называется *регулярным*.

Одно из замечательных свойств пространства обобщенных функций заключается в том, что у любого распределения, в том числе у локально интегрируемой функции, существуют производные любого порядка, являющиеся обобщенными функциями.

Примером нерегулярного распределения (их называют *сингулярными*) служит дельта-функция Дирака — функционал $< \delta_0, \varphi >= \varphi(0)$, который является производной в смысле обобщенных функций разрывной функции Хевисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Функция $\dfrac{1}{x}$ не является локально интегрируемой, но ей можно поставить в соответствие целое семейство (нерегулярных) распределений, которые задаются следующим образом. Функция $g(x) = \ln|x|$ дифференцируема при $x \neq 0$ и $g'(x) = \dfrac{1}{x}$. Поскольку g локально интегрируема, ей соответствует регулярное распределение $f_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. По определению, $\mathcal{P}\Big(\dfrac{1}{x}\Big) = f_g'$, где дифференцирование понимается в смысле распределений.

Функция $g_C(x) = \ln|x| + C\Theta(x)$ дифференцируема при $x \neq 0$ и ее производная также есть $\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$. Производная в смысле обобщенных функций функции $g_C(x)$ есть

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big) + C\delta_0. \tag{2.2}$$

Таким образом, функции $\dfrac{1}{x}$ соответствует семейство распределений (2.2).

Введение обобщенных функций как функционалов на пространстве основных функций является не только удачным математическим приемом, но имеет и физический смысл. Например, состояние физической системы часто описывается с помощью интегрируемой функции $\rho(x)$ — плотности распределения числовой характеристики вещества (массы, заряда, энергии, температуры и т. п.). Заметим, что не существует физического прибора, который измерял бы значение $\rho(x)$ в заданной точке, реальные приборы измеряют только усредненные значения, которые в случае существования плотности выражаются формулой вида

$$\int \rho(x)\varphi(x)dx,$$

где функция φ характеризует конкретный прибор (*приборная функция*). Таким образом, величины, которые могут быть измерены (только они имеют физический смысл!), являются значениями функционала, соответствующего функции $\rho(x)$. Если у распределения вещества плотность не существует, то такие величины все равно определены для всех φ и задают функционал на пространстве приборных функций.

3. Проблема умножения распределений

Введенное выше умножение не определено для произвольных распределений, в частности, это означает, что пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ не является дифференциальной алгеброй. Напомним, что векторное пространство G называется *дифференциальной алгеброй*, если

- задано ассоциативное и коммутативное умножение;
- задано линейное отображение $G \ni f \to f' \in G$, называемое *дифференцированием*;
- эти операции связаны соотношением $(fg)' = f'g + fg'$.

Поскольку пространство распределений есть расширение пространства обычных функций, построенное так, чтобы в нем операция дифференцирования была всюду определена, Л. Шварц поставил вопрос о следующем шаге обобщения: *построить расширение пространства распределений до дифференциальной алгебры, в которой всюду определены дифференцирование и умножение*.

В первоначальном варианте задача была сформулирована Л. Шварцем следующим образом: построить дифференциальную алгебру G и линейное вложение

$$R : \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \to G$$

такие, что дифференцирование и умножение в пространстве распределений переходят в соответствующие операции в G, т. е. выполнены равенства

$$R(f') = [R(f)]', \tag{3.1}$$

$$R(af) = R(a)R(f) \text{ для } a \in C^\infty,\ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3.2}$$

Если такая алгебра G построена, то можно определить произведение произвольных распределений как элемент из G:

$$f \otimes g := R(f)R(g) \in G, \quad f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Но при рассмотрении этой задачи Л. Шварц заметил, что введенное умножение неассоциативно [39]. Им был приведен пример выражения

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big) \times x \times \delta_0,$$

которое принимает разные значения при разной расстановке скобок. А именно,

$$\Big[\mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big) \times x\Big] \times \delta_0 = 1 \times \delta_0 = \delta_0,$$

но при этом

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big) \times \big[x \times \delta_0\big] = \mathcal{P}\Big(\frac{1}{x}\Big) \times 0 = 0.$$

Из этого примера следует, что невозможно задать ассоциативную и коммутативную операцию умножения на всем пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и, более того, нельзя вложить это пространство в какую-либо коммутативную и ассоциативную алгебру G таким образом, чтобы выполнялись свойства (3.1) и (3.2).

Вместе с тем формальные выражения, в которые входят произведения распределений, встречаются во многих прикладных задачах, в связи с чем вопрос о нахождении произведения распределений рассматривался многими специалистами.

Отправная точка почти всех исследований в этом направлении следующая. Распределение f может быть аппроксимировано семейством гладких функций f_ε. Для распределений на прямой наиболее часто используется следующий метод аппроксимации. Пусть $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 1$. Тогда семейство

$$\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big) \tag{3.3}$$

сходится к δ_0 и носители функций ψ_ε стягиваются к точке 0. Пусть

$$T_x\psi_\varepsilon(t) = \psi_\varepsilon(t-x).$$

Тогда

$$f_\varepsilon(x) = < f, T_x\psi_\varepsilon > \tag{3.4}$$

есть семейство гладких функций, сходящееся к f при $\varepsilon \to 0$.

Заметим, что иногда оказывается более удобным вместо семейств гладких функций $f_\varepsilon(x)$, зависящих от непрерывно меняющегося положительного малого параметра ε, рассматривать последовательности $\{f_n\}$ таких функций. Приведенные ниже утверждения справедливы и для этого случая, если считать, что малый параметр принимает только значения $\dfrac{1}{n}$.

Пусть $f_\varepsilon(x)$ есть некоторое семейство гладких функций, сходящихся к распределению f, и $g_\varepsilon(x)$ — аналогичное семейство для распределения g. Естественно определить произведение распределений как предел в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ соответствующих произведений:

$$f \times g := \lim_{n\to\infty} f_\varepsilon g_\varepsilon. \tag{3.5}$$

Но такое определение некорректно по двум причинам:

i) такой предел зависит от выбора аппроксимирующих семейств;

ii) может оказаться, что предел не существует.

Приведем примеры, иллюстрирующие сказанное.

Пример 3.1. В пространстве распределений имеем $e^{inx} \to 0, \quad e^{-inx} \to 0$, причем сходимость к нулю очень быстрая: последовательность $< e^{inx}, \varphi >$ убывает быстрее любой степени $1/n$. Но при этом $e^{inx}e^{-inx} = 1 \to 1$. Тогда, согласно формуле (3.5), получаем, что $0 \times 0 = 1$, что абсурдно.

Пример 3.2. Рассмотрим, что может соответствовать при аппроксимативном подходе произведению $\delta\Theta$, не определенному в классической теории.

Заменим δ-функцию на ее аппроксимацию вида (3.3), а Θ-функцию на $\Gamma_\varepsilon(x) = \Gamma\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, где

$$\Gamma(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \gamma(s)ds, \quad \gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{\mathbb{R}} \gamma(t)dt = 1.$$

Тогда произведение $\psi_\varepsilon(x)\Gamma_\varepsilon(x)$ в пространстве распределений сходится к $C\delta$, где постоянная

$$C = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(x)\Gamma(x)dx$$

зависит от ψ и γ, т. е. от выбранных аппроксимаций.

Пример 3.3. Семейство (3.3) сходится к дельта-функции, но квадраты этих функций

$$[\psi_\varepsilon(t)]^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\psi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big]^2$$

не имеют предела в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, т. е. в этом пространстве нет элемента, который бы играл роль квадрата дельта-функции, откуда можно сделать вывод, что такой квадрат может быть только элементом некоторого более широкого пространства.

Препятствия к введению всюду определенного произведения распределений заключаются в сформулированных выше свойствах i) и ii).

Свойство i) отражает то, что операция умножения (на своей области определения) является разрывным и даже незамыкаемым отображением в топологии пространства распределений, а свойство ii) показывает, что пространство, в котором могут лежать произведения распределений, должно быть шире, чем исходное пространство.

4. Замыкание незамыкаемых операторов

4.1. Расширения линейных операторов. Чтобы проанализировать указанные выше препятствия, рассмотрим сначала частный случай задачи, а именно вопрос об определении умножения распределений на некоторое заданное распределение u, и обсудим связи этой задачи с вопросами общей теории операторов.

Умножение на u есть линейный оператор U, определенный на всюду плотном подпространстве $C^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$, состоящем из гладких функций. Задача о задании произведения uv для некоторых распределений v, не являющихся гладкими функциями, есть задача о построении расширения этого оператора, т. е. задании его продолжения на более широкое подпространство.

Вопрос о построении расширений линейных операторов является одним из классических. В общей постановке он заключается в следующем. Пусть X есть топологическое векторное пространство, X_0 — его векторное подпространство, и задан линейный оператор A, действующий из X_0 в некоторое пространство Y. Требуется построить его продолжение на более широкое подпространство (или на все X).

Напомним сначала известные факты о построении таких расширений, для примера будем рассматривать операторы в банаховых пространствах, но рассуждения полностью аналогичны в случае локально выпуклых топологических векторных пространств.

Заметим, что одним из частных случаев рассматриваемой задачи является вопрос о продолжении линейного ограниченного функционала $f_0 : X_0 \to \mathbb{C}$, т. е. случай, когда $Y = \mathbb{C}$. Согласно теореме Хана—Банаха, для любого f_0 существует линейный ограниченный функционал f, являющийся продолжением f_0 на все пространство X.

Заметим, что если подпространство X_0 не является всюду плотным, то даже для линейных ограниченных операторов ответ в общем случае отрицательный — может не существовать ограниченного продолжения на все X. Но в случае, когда X_0 всюду плотно в X, пространство Y банахово и оператор A ограничен, задача тривиальна — существует и при том единственное продолжение оператора на все X, которое может быть задано следующим образом.

Для любого $x_0 \in X$ существует последовательность $x_n \in X_0$, сходящаяся к x_0, для любой такой последовательности существует предел последовательности образов Ax_n, который не зависит от выбора x_n. Это позволяет определить продолжение на все X

$$\widetilde{A}x_0 = \lim_{n\to\infty} Ax_n, \tag{4.1}$$

которое является линейным ограниченным оператором из X в Y.

В интересующем нас случае рассматриваемый линейный оператор разрывен и определен на всюду плотном подпространстве X_0. Обозначим через X_1 множество таких $x_0 \in X$, что имеется хотя бы одна последовательность $x_n \in X_0$, такая, что $x_n \to x_0$ и при этом существует $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$. Кажется естественным задать значение искомого расширения в точке x_0 формулой (4.1), но в общем случае такое определение некорректно, так как правая часть может зависеть от выбора последовательности. Оператор, у которого такой предел не зависит от выбора последовательности, называется *замыкаемым*. Свойство замыкаемости оператора обычно формулируется как условие, что из того, что $x_n \to 0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$, следует, что $y = 0$. При выполнении этого условия формула (4.1) определяет оператор $\overline{A}$, корректно заданный на X_1, называемый *замыканием* оператора A. На X_1 определена т. н. *норма графика*

$$\|x\|_1 = \|x\| + \|\overline{A}x\|,$$

относительно которой пространство X_1 полно.

Пример 4.1. Типичным примером такой конструкции является определение т. н. *сильной производной*. Пусть $X = Y = L_1[0,1]$, и A есть оператор дифференцирования, определенный на $C^1[0,1] \subset L_1[0,1]$

$$(Ax)(t) = x'(t).$$

Говорят, что функция $u_0 \in L_1[0,1]$ *сильно дифференцируема*, если существует последовательность $u_n \in C^1[0,1]$, такая, что $u_n \to u_0$ в $L_1[0,1]$ и при этом в $L_1[0,1]$ существует $\lim u_n' := y$. Тогда функция y называется *сильной производной* функции u_0. Корректность этого определения следует из замыкаемости оператора дифференцирования (относительно рассматриваемых норм). Действительно, пусть $u_n \to 0$ и $\lim u_n' = y$ в $L_1[0,1]$. Из представления

$$u_n(x) - u_n(0) = \int\limits_0^x u_n'(s)ds \tag{4.2}$$

и сходимости последовательности u_n' в $L_1[0,1]$ получаем, что последовательность $u_n(x) - u_n(0)$ равномерно сходится. Поэтому она сходится в $L_1[0,1]$, а так как $u_n \to 0$ в $L_1[0,1]$, то последовательность постоянных функций $u_n(0)$ также сходится в $L_1[0,1]$, что возможно только, когда эта числовая последовательность сходится. Поэтому последовательность u_n также равномерно сходится и, следовательно, сходится к нулю. Мы имеем право перейти к пределу в (4.2), откуда получаем, что

$$\int\limits_0^x y(s)ds = 0 \quad \forall\ x,$$

что возможно только в случае, когда $y(x) = 0$ почти всюду.

Таким образом, оператор сильного дифференцирования является замыканием классического оператора дифференцирования. Из сказанного выше получаем, что область определения этого замыкания состоит из функций, представимых в виде

$$u(x) = u(0) + \int\limits_0^x y(s)ds, \text{ где } y \in L_1[0,1],$$

т. е. из абсолютно непрерывных функций (С. Л. Соболев использовал для этого пространства обозначение $W_1^1[0,1]$).

Аналогично задается замыкание оператора дифференцирования в пространстве $L_2[0,1]$; область определения этого замыкания состоит из абсолютно непрерывных функций, представимых в виде

$$u(x) = u(0) + \int\limits_0^x y(s)ds, \text{ где } y \in L_2[0,1].$$

Это подпространство обозначается $W_2^1[0,1]$ или $H^1[0,1]$.

Пример 4.2. Рассмотрим в $L_1[0,1]$ уравнение с начальным условием:

$$u'(x) = f(x),\ u(0) = C.$$

Это вырожденный случай задачи Коши. Этой задаче соответствует оператор A с областью определения $C^1[0,1] \subset L_1[0,1]$, действующий в прямую сумму $Y = L_1[0,1] \oplus \mathbb{R}$ по формуле $Au = (u', u(0))$. Из приведенных выше рассуждений получаем, что этот оператор также замыкаем, область определения замыкания есть $W_1^1[0,1]$ и $\overline{A}u = (u', u(0))$, где u' есть сильная производная.

Пример 4.3. Пусть оператор A определен на $C^1[0,1] \subset L_1[0,1]$, действует в прямую сумму $Y = L_1[0,1] \oplus \mathbb{R}^2$ по формуле $Au = (u', u(0), u'(0))$. Этот оператор внешне похож на оператор из примера 4.2, но здесь картина качественно меняется. Действительно, последовательность

$$u_n(x) = \begin{cases} x(1-nx)^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1/n; \\ 0, & x > 1/n. \end{cases}$$

принадлежит области определения, сходится к нулю в $L_1[0,1]$, и при этом последовательность образов имеет ненулевой предел: $u_n' \to 0$ в $L_1[0,1]$, но $u_n'(0) = 1 \to 1$. Из этого следует, что рассматриваемый оператор незамыкаем.

4.2. Замыкание незамыкаемого оператора. В работе [24] был рассмотрен вопрос о том, *какой оператор может играть роль замыкания в случае незамыкаемого оператора*. Ответ естественный и по существу уже содержится в конструкции замыкания, если ее записать в несколько другом виде.

Первый шаг этой конструкции заключается в построении множества $\widetilde{G}$, состоящего из последовательностей $x_n \in X_0$, таких, что x_n сходится в X и последовательность образов Ax_n сходится в Y. Две последовательности x_n и $\widetilde{x}_n$ называются *эквивалентными*, если $x_n - \widetilde{x}_n \to 0$ и $A(x_n - \widetilde{x}_n) \to 0$. Пусть G есть пространство, состоящее из классов эквивалентных последовательностей из $\widetilde{G}$. На этом пространстве определен оператор $\overline{A} : G \to Y$, который ставит в соответствие классу эквивалентности элемент

$$G \ni \{x_n\} \mapsto \lim_{n\to\infty} Ax_n \in Y. \tag{4.3}$$

Второй шаг конструкции замыкания заключается в проверке того, что отображение

$$G \ni \{x_n\} \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n \in X$$

устанавливает биекцию между G и некоторым подпространством X_1 в X.

Первый шаг этой конструкция применим к любому линейному оператору, так как он не использует замыкаемость.

Определение 4.1. *Замыканием* оператора A с областью определения $X_0 \subset X$ будем называть оператор, определенный на построенном пространстве G и действующий по формуле (4.3).

Для пояснения того, чем отличается случай замыкаемого оператора от случая незамыкаемого, напомним геометрический смысл описанной конструкции.

Пусть

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \oplus Y$$

есть график оператора. Тогда $\widetilde{G}$ есть множество всех лежащих в $G(A)$ последовательностей Коши в смысле нормы из $X \oplus Y$, а пространство G есть пополнение графика $G(A)$, которое, в силу полноты $X \oplus Y$, есть замыкание $\overline{G(A)}$. При этом действие оператора $\overline{A}$ есть проектирование P_Y на вторую координату.

Пусть X_1 есть проекция $\overline{G(A)}$ на X. Условие замыкаемости оператора эквивалентно тому, что замыкание графика является графиком некоторого оператора. Это значит, что проектирование на первую координату инъективно, что позволяет отождествить точку из $\overline{G(A)}$ с его первой проекцией, после чего получаем оператор, определенный на подпространстве X_1 в X.

В случае незамыкаемого оператора проектирование P_X на первую координату не является инъективным и возникает ненулевое подпространство

$$M = P_X^{-1}(0) = \{y \in Y : \exists x_n \in X_0, \text{ такая, что } x_n \to 0,\ Ax_n \to y\} \subset Y.$$

Будем называть его *мерой незамыкаемости* оператора A.

Тогда G представляется в виде прямой суммы $M \oplus X_1$, причем проектирование P_X задает на G структуру расслоенного пространства над X_1. Прообразом точки $x \in X_1$ здесь является множество

$$P_X^{-1}(x) = \{(x, \xi) : \xi \in M\},$$

которое не является векторным подпространством в G, но имеет естественную структуру векторного пространства, т. е. здесь имеем дело с векторным расслоением. Таким образом, построенный оператор $\overline{A}$ определен на элементах векторного расслоения G над X_1.

Пример 4.4. Замыкание оператора из примера 4.3. В этом примере оператор A определен на $C^1[0,1] \subset L_1[0,1]$, действует в прямую сумму $Y = L_1[0,1] \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ по формуле $Au = (u', u(0), u'(0))$. Мерой незамыкаемости этого оператора является одномерное подпространство $M = \{(0,0,\xi) \in L_1[0,1] \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\}$. Пространство $\widetilde{G}$ есть множество последовательностей $u_n \in C^1$, для каждой из которых существует четыре предела: двух функциональных последовательностей $u_n \to u_0$ и $u'_n \to y$ в $L_1[0,1]$ и пределы двух числовых последовательностей $u_n(0)$ и $u'_n(0)$.

Как показано в примере 4.2, из первых двух условий следует, что функция u_0 абсолютно непрерывна и $u_n(0) \ \to u_0(0)$. Особенность рассматриваемого случая заключается в том, что у предельной функции u_0 производная $u'_0(0)$ может не существовать и, даже если она существует, может быть, что последовательность $u'_n(0)$ не сходится к $u'_0(0)$.

Согласно общей конструкции, две последовательности из $\widetilde{G}$ называются *эквивалентными*, если для них все указанные выше пределы совпадают.

Обратим внимание на то, что возникающие здесь классы эквивалентности меньше, чем в примере 4.2, и каждый класс эквивалентности из примера 4.2 содержит много различных классов из рассматриваемого примера.

Полученный класс эквивалентности u состоит из последовательностей дифференцируемых функций u_n, сходящихся к абсолютно непрерывной функции u_0 специальным образом, он задается абсолютно непрерывной функцией u_0 и числом $\xi = \lim u'_n(0)$, которое можно интерпретировать как значение производной $u'(0)$. Таким образом, каждый класс эквивалентности, связанный с u_0, «помнит» о способе приближения u_n к u_0, а именно, сохраняет дополнительную информацию о поведении значений $u'_n(0)$. В этом примере пространство из классов эквивалентных последовательностей изоморфно пространству $W_1^1[0,1] \oplus \mathbb{R}$. При этом замыкание оператора действует по формуле, внешне выглядящей как формула для исходного оператора $\overline{A}u = (u', u(0), u'(0))$. Но здесь u' есть сильная производная, а значение $u'(0)$ определяется как $\lim u'_n(0)$.

Где может быть использовано это пространство? В классических функциональных пространствах переопределенная задача Коши

$$u'(x) = f(x), \ u(0) = C_0, \ u'(0) = C_1, \tag{4.4}$$

неразрешима для произвольной функции $f \in L_1[0,1]$. А во введенном пространстве G задача (4.4) имеет решение, и притом единственное, для любого $f \in L_1[0,1]$.

Аналогичное пространство может быть построено с помощью семейств функций, зависящих от малого параметра ε. Такие семейства естественно возникают при рассмотрении т. н. сингулярно возмущенных задач. Простейший пример — задача Коши

$$\varepsilon u''(x) + u'(x) = f(x), \ u(0) = C_0, \ u'(0) = C_1 \tag{4.5}$$

для уравнения с малым параметром при второй производной.

Пусть u_ε — решения задачи (4.5), а v_ε — решения аналогичной задачи

$$\varepsilon v''(x) + v'(x) = f(x), \ v(0) = C_0, \ v'(0) = C_2.$$

Оба эти семейства сходятся к одной и той же абсолютно непрерывной функции u_0, являющейся решением задачи Коши

$$u'_0(x) = f(x), \ u_0(0) = C_0, \tag{4.6}$$

но их не следует отождествлять между собой, так как они по-разному приближаются к u_0 и каждое из них содержит некоторую дополнительную информацию о способе приближения: $u'_\varepsilon(0) = C_1$, а $v'_\varepsilon(0) = C_2$. Это и означает, что решениями задачи (4.5) естественно считать элементы из построенного расширенного пространства, изоморфного $W_1^1[0,1] \oplus \mathbb{R}$.

Пример 4.5. Связь пополнений пространства по двум нормам. В качестве еще одного примера рассмотрим классический вопрос, при анализе которого возникают аналогичные эффекты.

Пусть на векторном пространстве X_0 заданы две нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. Вопрос заключается в описании соотношений между соответствующими пополнениями X_1 и X_2. Если нормы эквивалентны, т. е. при некоторых постоянных выполнены неравенства $\|x\|_1 \leqslant C_1\|x\|_2, \|x\|_2 \leqslant C_2\|x\|_1$, то $X_1 = X_2$ — пополнения совпадают как векторные пространства.

Часто встречается случай, когда выполнено только одно неравенство: $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$. Во многих примерах оказывается, что при этом условии имеет место естественное вложение X_2 в X_1. Например, пусть $X_0 = C^1[0,1]$ и

$$\|x\|_1 = \int\limits_0^1 |x(t)|dt, \ \|x\|_2 = \int\limits_0^1 |x(t)|dt + \int\limits_0^1 |x'(t)|dt.$$

Здесь пополнение по первой норме есть $X_1 = L_1[0,1]$, пополнение по второй норме X_2 фактически было рассмотрено в примере 4.1, это пополнение есть пространство $W_1^1[0,1]$, состоящее из абсолютно непрерывных функций, и здесь $W_1^1[0,1] \subset L_1[0,1]$.

Однако обратим внимание на то, что в общем случае нет вложения X_2 в X_1. Для примера рассмотрим на $X_0 = C^1[0,1]$ нормы

$$\|x\|_1 = \int\limits_0^1 |x(t)|dt, \quad \|x\|_2 = \int\limits_0^1 |x(t)|dt + |x(0)|.$$

Здесь имеем другое соотношение пространств: пополнение X_1 есть, как и выше, $L_1[0,1]$, а пополнение X_2 изоморфно $L_1[0,1] \oplus \mathbb{C}$, и оно шире, чем X_1, в отличие от предыдущего примера.

За счет чего возникает такое отличие? Элементы из пополнения X_2 суть классы эквивалентности последовательностей Коши в смысле второй нормы. Если (x_n) есть такая последовательность Коши из класса, задающего элемент $x \in X_2$, то из заданного неравенства следует, что она является последовательностью Коши относительно первой нормы и определяет элемент из пополнения X_1. Тем самым определено непрерывное отображение

$$J : X_2 \ni x \to \lim_{n\to\infty} x_n \in X_1.$$

Но это отображение может не быть инъективным, т. е. может не быть вложением X_2 в X_1. Для инъективности нужно дополнительное условие *согласования норм*: *если* $\|x_n\|_1 \to 0$ *и* x_n *есть последовательность Коши в смысле второй нормы, то* $\|x_n\|_2 \to 0$.

Связь с задачей о замыкании оператора заключается в следующем. Тождественное отображение $J_0 x = x$ пространства X_0 будем рассматривать как отображение нормированного пространства $(X_0, \|x\|_2) \subset X_2$ в нормированное пространство $(X_0, \|x\|_1) \subset X_1$. Поскольку J_0 есть ограниченный линейный оператор, отображение J есть его замыкание, определенное на всем X_2. Но обратное отображение J_0^{-1}, действующее из $(X_0, \|x\|_1)$ в $(X_0, \|x\|_2)$, может быть незамыкаемым оператором. Согласование норм есть в точности условие замыкаемости этого оператора.

В общем случае, когда условие согласования норм не выполнено, получаем, что отображение J имеет ненулевое ядро M, поэтому X_2 не изоморфно своему образу $\widehat{X_2} = J(X_2) \subset X_1$, а представляется в виде векторного расслоения: $X_2 = \widehat{X_2} \oplus M$.

4.3. Расширенное замыкание линейного оператора. Вернемся к задаче о расширении оператора U умножения на заданное распределение u. Из свойства ii) раздела 3 получаем, что этот оператор незамыкаем, его мера незамыкаемости есть некоторое ненулевое подпространство $M_u \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Его замыкание $\overline{U}$ в смысле определения 4.1 есть оператор, заданный на некотором векторном расслоении $G_u = M_u \oplus X_1$ над подпространством $X_1 \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

При этом остается открытым вопрос о том, как задать расширение оператора U на распределениях, не принадлежащих X_1. Этот вопрос приводит к еще одному обобщению конструкции замыкания.

При построении замыкания оператора A рассматривалось векторное пространство $\widetilde{G}$, состоящее из последовательностей $x_n \in X_0$, таких, что x_n сходится в X и последовательность образов Ax_n сходится в Y. При этом две последовательности считались эквивалентными, если $x_n - \widetilde{x}_n \to 0$ и $A(x_n - \widetilde{x}_n) \to 0$. Искомое обобщение получаем, если отказаться от требования существования предела последовательности образов Ax_n.

Рассмотрим векторное пространство $\widehat{G}$, состоящее из всех последовательностей (x_n, Ax_n) точек графика $G(A)$, таких, что x_n сходится в X. Пусть $\widehat{G}_0$ есть подпространство в $\widehat{G}$, состоящее из последовательностей, таких, что $x_n \to 0$ и $Ax_n \to 0$, и рассмотрим фактор-пространство $\widehat{G}^* = \widehat{G}/\widehat{G}_0$.

Здесь переход к фактор-пространству равносилен введению того же отношения эквивалентности, что и выше: $(x_n, Ax_n) \sim (\widetilde{x}_n, A\widetilde{x}_n)$, если $x_n - \widetilde{x}_n \to 0$ и $A(x_n - \widetilde{x}_n) \to 0$.

Пусть $\widehat{Y}$ есть пространство всех последовательностей (y_n) в Y, и пусть

$$Y^* = \widehat{Y}/\widehat{Y}_0, \text{ где } \widehat{Y}_0 = \{(y_n) \in Y : y_n \to 0\}.$$

Заметим, что Y^* является расширением исходного пространства Y, т. к. последнее естественно вкладывается в Y^*: точке $y \in Y$ ставится в соответствие класс эквивалентности, состоящий из последовательностей, сходящихся к y. После введения этих пространств определяем оператор $\widehat{A}$, действующий из $\widehat{G}^*$ в Y^* по формуле

$$\widehat{A}([(x_n, Ax_n)]) = [(Ax_n)] \in Y^*. \tag{4.7}$$

Аналогично предыдущему, здесь $\widehat{G}^*$ изоморфно $X \oplus M$, и это пространство будем рассматривать как векторное расслоение над X.

Определение 4.2. *Расширенным замыканием оператора* A будем называть оператор $\widehat{A}$, определенный на векторном расслоении $\widehat{G}^*$ над X и действующий в расширенное пространство Y^* по формуле (4.7).

Заметим, что по построению $G \subset \widehat{G}^*$ оператор $\overline{A}$ отображает G в $Y \subset Y^*$, и на G его действие совпадает с действием $\widehat{A}$, т. е. последний оператор является расширением $\overline{A}$.

Подводя итог сказанному, видим, что в случае незамыкаемого оператора A, действующего из X в Y, расширенное замыкание действует в новых пространствах, которые возникают в результате построений двух типов:

1. *дробление исходного пространства* X — каждая точка $x \in X$ распадается на обширное семейство новых элементов (слои над x);
2. *добавление новых элементов* к финальному пространству Y.

Обратим внимание на то, что аналогичные операции использовались уже при переходе от обычных функций к обобщенным, т. к. кроме добавления новых элементов (сингулярных распределений), происходило и дробление — функции $\dfrac{1}{x}$ соответствует не одно распределение, а целое семейство.

Замечание 4.1. С точки зрения приложений естественность введения новых пространств при построении замыкания оператора можно интерпретировать следующим образом. Пусть изучается некоторое воздействие на систему. В первоначальной модели явления считается, что состояния системы описываются элементами из пространства X, а результаты воздействия описываются элементами пространства Y, а именно, для некоторых «простых» состояний (из подпространства $X_0 = D(A)$) задан оператор A, описывающий результат воздействия на систему: при состоянии x в результате получаем на выходе $Ax \in Y$.

Задача заключается в описании результата воздействия для более сложных состояний системы. Ситуация, когда переход к замыканию графика приводит к многозначному оператору, соответствует тому, что в исходной постановке задачи недостаточно информации для получения однозначного ответа о реакции системы, находящейся в более сложном состоянии. Конструкция замыкания в новом смысле подсказывает выход: для получения однозначного результата нужна дополнительная информация о рассматриваемом более сложном состоянии, соответствующем точке $x_0 \in X$, а именно, о том, как это состояние возникло из простых. Иначе говоря, для рассматриваемых систем требуется уточнение постановки задачи — состояние описывается специально построенным классом эквивалентных последовательностей $x_n \in D(A)$ и не определяется однозначно по предельной точке $x_0 \in X$.

С этой точки зрения переход к расширению $\widehat{Y}$ пространства Y требуется в ситуации, когда для системы, находящейся в состоянии $x_0 \in X$, последовательность Ax_n не сходится в Y, т. е. результат эксперимента не описывается элементом первоначально выбранного пространства Y.

4.4. Нестандартное расширение поля $\mathbb{R}$. Обратим внимание на то, что описанные выше конструкции аналогичны построениям из *нестандартного анализа*, который имеет содержательные применения во многих задачах [13]. Напомним описание одного из нестандартных расширений поля $\mathbb{R}$.

Пусть $\widehat{\mathbb{R}}$ есть пространство всех последовательностей (y_n) в $\mathbb{R}$. Доказывается, что на множестве $\mathbb{N}$ существует (конечно-аддитивная) мера μ, определенная на алгебре всех подмножеств из $\mathbb{N}$, такая, что для всех $\omega \subset \mathbb{N}$ значение $\mu(\omega)$ есть 0 или 1, причем $\mu(\omega) = 0$ для любого конечного ω. Пусть $\widehat{\mathbb{R}}_0 \subset \widehat{\mathbb{R}}$ есть подпространство, состоящее из последовательностей, равных нулю почти всюду по мере μ. Нестандартное расширение $\mathbb{R}$ есть фактор-пространство

$$\mathbb{R}^* = \widehat{\mathbb{R}}/\widehat{\mathbb{R}}_0.$$

Эта конструкция может быть описана в других терминах. Пространство $\widehat{\mathbb{R}}$ имеет естественную структуру алгебры, $\widehat{\mathbb{R}}_0$ есть один из ее максимальных идеалов, содержащих все финитные последовательности, поэтому $\mathbb{R}^*$ есть фактор-алгебра по максимальному идеалу.

Оказывается, что построенное пространство $\mathbb{R}^*$ является полем: если $[(y_n)] \neq 0$, то $\mu(\{n : y_n \neq 0\}) = 1$, и тогда последовательность

$$z_n = \begin{cases} \dfrac{1}{y_n}, & y_n \neq 0; \\ 0, & y_n = 0, \end{cases}$$

задает элемент, обратный к $[(y_n)]$.

Далее на множестве классов эквивалентности задается отношение порядка:

$$[(x_n)] \prec [(y_n)], \text{ если } \quad x_n \leqslant y_n \text{ почти всюду.}$$

Этот порядок линейный: если $\mu(\{n : x_n \leqslant y_n\}) = 1$, то $[(x_n)] \prec [(y_n)]$; в противном случае $\mu(\{n : x_n \leqslant y_n\}) = 0$, и тогда $[(y_n)] \prec [(x_n)]$.

Элемент $\gamma \in \mathbb{R}^*$ называется *бесконечно малым*, если $-a \prec \gamma \prec a$ для любого положительного $a \in \mathbb{R}$. С каждым числом $x \in \mathbb{R}$ связана т. н. *монада* — множество нестандартных чисел, отличающихся от x на бесконечно малую величину.

Элемент $\Gamma \in \mathbb{R}^*$ называется *бесконечно большим*, если $a \prec |\Gamma|$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

Обычной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ставится в соответствие ее *нестандартное расширение* $f^* : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, действующее по формуле, аналогичной (4.7):

$$f^*([(x_n)]) = [(f(x_n))].$$

Таким образом, при построении нестандартного анализа при переходе от $\mathbb{R}$ к $\mathbb{R}^*$ использованы операции, аналогичные описанным выше: дробление точек из $\mathbb{R}$ с помощью введения бесконечно малых величин и добавление бесконечно больших величин. А переход от функции к ее нестандартному расширению соответствует переходу от оператора к его расширенному замыканию.

5. Алгебры мнемофункций

Оператор умножения на заданное распределение действует из пространства распределений в себя, т.е здесь $X = Y$ в обозначениях предыдущего раздела. Так как естественно потребовать, чтобы расширенное замыкание такого оператора также действовало из некоторого нового пространства Z в себя, построение Z требует операций двух видов: дробление элементов исходного пространства и его расширения путем добавления качественно новых элементов. Как показано ниже, именно это происходит при построении алгебр мнемофункций.

Согласно постановке задачи, данной Л. Шварцем, решением проблемы умножения элементов из заданного пространства распределений E можно считать расширение E до дифференциальной алгебры, т. е. построение дифференциальной алгебры $G(E)$ и вложения $R : E \to G(E)$.

При этом пример Шварца показывает, что не существует вложений, удовлетворяющих условиям (3.1) и (3.2). Поэтому строились алгебры и вложения, обладающие более слабыми свойствами. Наибольший резонанс в этом направлении вызвали работы Ж. Ф. Коломбо [31], который построил дифференциальную алгебру и вложение, при котором ослабление (3.2) заключается в том, что только гладкие функции вкладываются вместе со своим умножением:

$$R(fg) = R(f)R(g) \text{ для } f \in C^\infty,\ g \in C^\infty. \tag{5.1}$$

Одна из наиболее широких и простых алгебр указанного типа была построена Ю. В. Егоровым [31].

Это направление исследований называют *нелинейной теорией обобщенных функций*, построенные дифференциальные алгебры — *алгебрами типа Коломбо*, а их элементы — *новыми обобщенными функциями*, или *мнемофункциями*.

В [2,25] были проанализированы методы построения искомых алгебр и предложена общая схема их построения, описанная ниже.

Обычно существует много различных вложений R, каждое из них позволяет определить произведение произвольных распределений как мнемофункцию: по определению считается, что

$$u \otimes_R v = R(u)R(v) \in G(E). \tag{5.2}$$

Поскольку условие (3.2) не может быть выполнено, т. е. умножение, заданное (5.2), не может совпадать с введенным выше умножением распределения на гладкую функцию, при таком подходе операция умножения корректируется — изменяется так, что становится ассоциативной.

В основе конструкции искомых дифференциальных алгебр лежат семейства гладких функций, зависящие от малого параметра ε. Каждое классическое пространство распределений E содержит некоторое подпространство $\mathcal{E}$, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций, причем это подпространство является дифференциальной алгеброй.

Способом аппроксимации R называется семейство операторов $R_\varepsilon : E \to \mathcal{E}$, такое, что семейство гладких функций $f_\varepsilon = R_\varepsilon f$ сходится к f в E.

При заданном R множество всех семейств гладких функций $R(E) = \{f_\varepsilon = R_\varepsilon f : f \in E\}$ не является алгеброй. Поэтому первый шаг построения заключается в выборе дифференциальной алгебры $\widetilde{G(E)}$, состоящей из семейств гладких функций $f_\varepsilon \in \mathcal{E}$ и включающей множества вида $R(E)$, соответствующие некоторым «естественным» методам аппроксимации.

Пространство $\widetilde{G(E)}$ весьма обширно, поэтому искомая алгебра мнемофункций $G(E)$ определяется как фактор-алгебра $G(E) = \widetilde{G(E)}/J$, где J — идеал в $\widetilde{G(E)}$, инвариантный относительно дифференцирования.

Основная сложность заключается в выборе идеала J. Метод аппроксимации R задает отображение $E \ni u \to [(R_\varepsilon u)] \in G(E)$, но чтобы оно было вложением, нужно, чтобы из равенства классов эквивалентности $[(R_\varepsilon u)] = [(R_\varepsilon v)]$ следовало, что $u = v$. Рассмотрим подпространство

$$N = \{(f_\varepsilon) \in \widetilde{G(E)} : f_\varepsilon \to 0 \ \text{ в } \ E\}.$$

Если $J \subset N$, то $R_\varepsilon u - R_\varepsilon v \in N$, откуда

$$u = \lim R_\varepsilon u = \lim R_\varepsilon v = v.$$

Полученное условие $J \subset N$ есть ограничение сверху, которое означает, что идеал не должен быть очень большим. Заметим, что N не является идеалом, поэтому всегда $J \neq N$. Именно это отличие приводит к распаду распределения из исходного пространства на целое семейство элементов нового типа (мнемофункций), устроенное как фактор-пространство N/J.

Далее особый интерес представляют вложения, обладающие дополнительными свойствами (свойства вложений обсуждаются ниже). Выполнение этих свойств сводится к требованию, что идеал содержит некоторые элементы специального вида, т. е. он достаточно большой. Например, для выполнения условия (5.1) нужно, чтобы идеал J содержал разности $R_\varepsilon(f)R_\varepsilon(g) - R_\varepsilon(fg)$ для всех $f, g \in \mathcal{E}$. А для выполнения условия (3.1) нужно, чтобы идеал J содержал разности $R_\varepsilon(f') - [R_\varepsilon(f)]'$ для всех $f \in E$.

Таким образом, идеал J должен удовлетворять двум условиям противоположного характера, которые могут быть несовместимы. Например, в случае $E = \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ и $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R})$ не существует идеала, содержащего разности $R_\varepsilon(f)R_\varepsilon(g) - R_\varepsilon(fg)$ для всех $f \in \mathcal{E},\ g \in E$.

Рассмотрим вопросы, связанные с построением и исследованием алгебр мнемофункций $G(E)$ на примере пространства периодических распределений [5]. Это одно из наиболее просто устроенных пространств обобщенных функция, благодаря чему полученные результаты более наглядны, чем в общем случае.

6. Пространство периодических распределений

Окружность, как многообразие, может быть реализована как подмножество комплексной плоскости $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ и как фактор-пространство $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Соответственно, для пространств функций или распределений на окружности возникают две реализации: их можно рассматривать как периодические функции переменной t на прямой $\mathbb{R}$ с периодом 2π и как функции комплексной переменной z, определенные на $\mathbb{S}^1$. Такие пространства изоморфны, изоморфизм устанавливается с помощью замены $z = e^{it}$. При этом каждая из реализаций имеет свои преимущества в смысле более простого вида встречающихся формул.

Пространство $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ состоит из комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций, периодических с периодом 2π. Изоморфное ему пространство $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ состоит из функций, бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{S}^1$. Обратим внимание на то, что здесь имеется в виду дифференцирование не по z, а по переменной t при представлении $z = e^{it}$. Если функция переменной z определена и аналитична в окрестности единичной окружности, связь этих производных задается формулой $f' = iz\dfrac{df}{dz}$. Например, $(z^n)' = inz^n$.

Топология на пространстве $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ задается с помощью счетной системы норм

$$p_m(\varphi) = \sum_{j=0}^{m} \max_z |\varphi^{(j)}(z)|, \ \varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1). \tag{6.1}$$

Пространство обобщенных функций (распределений) $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определяется как сопряженное к пространству $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, т. е. состоит из непрерывных линейных функционалов на $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Для значений функционала f в точке φ обычно используется обозначение $f(\varphi) \equiv < f, \varphi >$.

На пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ задается сходимость, соответствующая $*$-слабой топологии в сопряженном пространстве: последовательность f_n сходится к f, если

$$< f_n, \varphi > \to < f, \varphi > \text{ для любого } \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1).$$

Функцию, заданную на окружности, можно интегрировать по комплексной переменной z и по вещественной переменной t. Поскольку на окружности $z = e^{it}$, имеем $dz = ie^{it}dt$ и $dt = \dfrac{1}{iz}dz = |dz|$, эти интегралы связаны равенством

$$\int_0^{2\pi} u(e^{it})dt = \int_{\mathbb{S}^1} u(z)|dz| = \int_{\mathbb{S}^1} u(z)\frac{dz}{iz}.$$

Пространство $L_1(\mathbb{S}^1)$ (и, в частности, $C(\mathbb{S}^1)$) вкладывается в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ по формуле

$$L_1(\mathbb{S}^1) \ni u \to < u, \varphi >= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1} u(z)\varphi(z)|dz| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\varphi(e^{it})dt. \tag{6.2}$$

Всюду ниже интегралы вычисляются по всей окружности $\mathbb{S}^1$. Нормирующий множитель $\dfrac{1}{2\pi}$ вводится для того, чтобы приведенные ниже формулы имели более простой вид.

Каждая функция φ из $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ разлагается в ряд Фурье

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_k z^k,$$

сходящийся в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, где коэффициенты Фурье суть

$$\varphi_k = \frac{1}{2\pi}\int \varphi(z) z^{-k}|dz| =< \varphi, z^{-k} >,$$

причем последовательность φ_k убывает быстрее любой степени $\frac{1}{|k|}$. Поэтому элементы из $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определяются однозначно по своим значениям на функциях z^k, $k \in \mathbb{Z}$, и представляются в виде рядов Фурье

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k z^k, \tag{6.3}$$

где коэффициенты Фурье суть $C_k =< f, z^{-k} >$. Эти коэффициенты для каждого f возрастают не быстрее некоторой степени $|k|$. Распределение f как функционал действует по формуле

$$< f, \varphi >= \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \varphi_k.$$

Например, дельта-функция δ_ξ, сосредоточенная в точке $\xi \in \mathbb{S}^1$, задается формулой $< \delta_\xi, \varphi >= \varphi(\xi)$, она разлагается в ряд

$$\delta_\xi = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi^{-k} z^k.$$

В различных вопросах анализа активно используются рациональные функции, в частности, вида $f(z) = \frac{1}{(z-\xi)^n}$. При $|\xi| = 1$ такие функции неинтегрируемы на окружности, но каждой из них естественно соответствует целое семейство распределений. В частности, особый интерес представляет распределение $\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)$, которое задается выражением

$$< \mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big), \varphi >= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{S}^1} \frac{\varphi(z)}{z-1} |dz|,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Разложение этого распределения в ряд Фурье имеет вид

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big) = \frac{1}{2}\Bigg[\sum_{-\infty}^{-1} z^k - \sum_{0}^{+\infty} z^k\Bigg].$$

В пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ задано *дифференцирование*

$$< f', \varphi >:= - < f, \varphi' >,$$

которое в терминах коэффициентов Фурье задается формулой

$$f' = \sum_{-\infty}^{\infty} ik C_k z^k.$$

В пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определено также *умножение* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ на любую функцию $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$:

$$< gf, \varphi >=< f, g\varphi >, \quad g \in C^\infty(\mathbb{S}^1), \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1).$$

В терминах коэффициентов Фурье это произведение задается с помощью операции свертки последовательностей: если f имеет разложение (6.3), а

$$g = \sum_{-\infty}^{\infty} A_k z^k, \tag{6.4}$$

то

$$g * f = \sum_{-\infty}^{\infty} B_k z^k, \text{ где } B_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j A_{k-j}.$$

Пусть $|\xi| = 1$. Отображение $\alpha(z) = \xi z$ есть поворот окружности, оно порождает по формуле

$$(T_\xi \varphi)(z) = \varphi(\xi z)$$

оператор поворота, действующий в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ и других пространствах функций на окружности. Соответственно, определен оператор поворота в пространстве распределений:

$$< T_\xi f, \varphi > = < f, T_{\bar{\xi}} \varphi > = < f, T_\xi^{-1} \varphi > .$$

Для обычных функций на окружности *операция свертки* задается формулой

$$(f * g)(z) = \frac{1}{2\pi} \int f(\xi) g\Big(\frac{z}{\xi}\Big) |d\xi|.$$

Для заданного распределения g функция

$$\psi(z) = < g, T_z \varphi >$$

принадлежит $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Это позволяет задать свертку распределений формулой

$$< f * g, \varphi > = < f, < g, T_z(\varphi) >> .$$

На окружности свертка существует для любой пары распределений, при разложениях (6.3) и (6.4) в ряды Фурье свертка переходит в почленное произведение коэффициентов Фурье:

$$f * g = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k A_k z^k.$$

Сингулярный интегральный оператор Коши S на окружности задается как свертка с распределением $2\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)$, при разложении (6.3) этот оператор действует по формуле

$$Sf = \sum_{-\infty}^{-1} C_k z^k - \sum_{0}^{+\infty} C_k z^k. \tag{6.5}$$

Очевидно, что $S^2 = I$, поэтому операторы

$$P^\pm = \frac{1}{2}[I \pm S]$$

являются проекторами. Пространство периодических распределений описано в [4, 5, 7, 10], например.

7. Алгебра мнемофункций на окружности и вложения распределений в эту алгебру

7.1. Конструкция алгебры. Построим одну из возможных алгебр мнемофункций, соответствующих пространству $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$.

При построении искомой алгебры будем исходить из того, что при типичных методах аппроксимации семейства вида $u_\varepsilon = R_\varepsilon u$ удовлетворяют оценкам вида

$$p_m(u_\varepsilon) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{m+\nu}}.$$

Пространство, состоящее из семейств, удовлетворяющих таким оценкам, не является алгеброй, поэтому построим более широкое пространство.

Рассмотрим семейства $\{f_\varepsilon\}$, зависящие от малого параметра ε и состоящие из бесконечно дифференцируемых функций f_ε на $\mathbb{S}^1$, такие, что для каждого $\{f_\varepsilon\}$ существуют числа μ и ν, при которых имеет место оценка

$$p_m(f_\varepsilon) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{\mu m+\nu}}. \tag{7.1}$$

Здесь и ниже через C будем обозначать разные константы, так как их явный вид в рассматриваемых вопросах несущественен. Обозначим множество, состоящее из всех таких семейств, через $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$.

Лемма 7.1. *В пространстве* $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ *определены естественные операции умножения и дифференцирования*:

$$\{f_\varepsilon\} \times \{g_\varepsilon\} = \{f_\varepsilon g_\varepsilon\}, \quad \{f_\varepsilon\}' = \{f_\varepsilon{}'\}.$$

Это пространство с введенными операциями является дифференциальной алгеброй.

Доказательство. Утверждение следует из того, что для норм (6.1) выполнено неравенство

$$p_m(fg) \leqslant Cp_m(f)p_m(g),$$

отражающее непрерывность умножения в пространстве $C^m(\mathbb{S}^1)$.

Поэтому, если для f_ε выполнена оценка (7.1), а для g_ε — оценка

$$p_m(g_\varepsilon) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{\mu_1 m+\nu_1}},$$

то

$$p_m(f_\varepsilon g_\varepsilon) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{(\mu+\mu_1)m+(\nu+\nu_1)}}.$$

Замкнутость пространства относительно дифференцирования следует из неравенства

$$p_m(f'_\varepsilon) \leqslant p_{m+1}(f_\varepsilon).$$

□

Пространство $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ весьма обширно, поэтому для получения более обозримого пространства вводится отношение эквивалентности и рассматривается фактор-пространство, состоящее из классов эквивалентности. В векторных пространствах всегда рассматриваются отношения эквивалентности следующего вида: f и g *эквивалентны*, если $f - g \in L$, где L есть некоторое заданное подпространство. Это позволяет корректно задать операции сложения и умножения на число. Но, чтобы на фактор-пространстве алгебры по подпространству L можно было задать операцию умножения, L должно быть идеалом.

Пусть $\mathcal{N}_0$ есть подпространство, состоящее из семейств, сходящихся к нулю в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$:

$$\mathcal{N}_0 = \{f_\varepsilon : \lim_{\varepsilon\to 0} < f_\varepsilon, \varphi >= 0 \ \text{ для любого } \varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)\}.$$

Семейства f_ε и g_ε называют *слабо эквивалентными*, если $f_\varepsilon - g_\varepsilon \in \mathcal{N}_0$. Такое отношение эквивалентности естественно в теории распределений, но множество $\mathcal{N}_0$ не является идеалом в $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, откуда следует, что при таком отношении эквивалентности на фактор-пространстве невозможно корректно задать операцию умножения. Более того, $\mathcal{N}_0$ не является даже подалгеброй.

В алгебре $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ существует много идеалов, с помощью каждого из них можно задавать отношения эквивалентности. Из ряда соображений следует, что эквивалентные семейства должны быть слабо эквивалентными. Это выполнено, если искомый идеал принадлежит подпространству $\mathcal{N}_0$, т. е. он достаточно малый. С другой стороны, чем меньше идеал, тем больше фактор-алгебра, поэтому желательно выбрать идеал по возможности большим.

С теоретической точки зрения здесь наиболее подходящим является какой-нибудь максимальный идеал в $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, при таком выборе идеала фактор-алгебра является расширением пространства гладких функций в смысле нестандартного анализа. Однако максимальные идеалы не выписываются в явном виде, поэтому в соответствующей фактор-алгебре нельзя провести конкретные вычисления.

Более удобным оказывается подпространство

$$J(\mathbb{S}^1) = \{g_\varepsilon : \forall p \text{ и } m\ \exists\ C : p_m(g_\varepsilon) \leqslant C\varepsilon^p\}.$$

Лемма 7.2. *Подпространство $J(\mathbb{S}^1)$ является дифференциальным идеалом в алгебре $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$.*

Доказательство. То, что $J(\mathbb{S}^1)$ является подпространством, инвариантным относительно дифференцирования, очевидно.

Если $f_\varepsilon \in \widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, $g_\varepsilon \in J(\mathbb{S}^1)$, то для произведения имеем оценку

$$p_m(f_\varepsilon g_\varepsilon) \leqslant p_m(f_\varepsilon)p_m(g_\varepsilon) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{\mu m+\nu}} \times C\varepsilon^p = C\varepsilon^{p-\mu m-\nu}.$$

Так как число p произвольное, получаем, что это произведение принадлежит $J(\mathbb{S}^1)$. □

Алгебра мнемофункций на окружности $G(\mathbb{S}^1)$ определяется как фактор-алгебра

$$G(\mathbb{S}^1) = \widetilde{G(\mathbb{S}^1)}/J(\mathbb{S}^1).$$

С описанной конструкцией связана *алгебра обобщенных комплексных чисел* $\widetilde{\mathbb{C}} \subset G(\mathbb{S}^1)$. Она порождена семействами f_ε постоянных (не зависящих от z). Эта алгебра содержит, в частности, элементы вида ε^k, причем при $k > 0$ это бесконечно малые величины, а при $k < 0$ — бесконечно большие. Алгебра $G(\mathbb{S}^1)$ является модулем над алгеброй $\widetilde{\mathbb{C}}$.

Для пояснения взаимосвязи построенной алгебры с пространством распределений напомним другую конструкцию пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$. Рассмотрим подпространство $\widetilde{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}$ в $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, состоящее из таких семейств f_ε, что для каждого $\varphi \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} < f_\varepsilon, \varphi >$.

Теорема 7.1. *Фактор-пространство* $\widetilde{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}/\mathcal{N}_0$ *изоморфно пространству распределений* $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$.

Этот способ введения распределений детально описан в [7], где содержится доказательство теоремы 7.1. В этой книге и других работах этих авторов использовались последовательности гладких функций, т. е. случай, когда малый параметр принимает только значения $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, в связи с чем такая конструкция распределений названа *секвенциальным подходом*.

Эта конструкция пространства распределений позволяет пояснить истоки некорректности задачи об умножении классических обобщенных функций:

1. пространство $\widetilde{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}$ не является алгеброй, это приводит к тому, что в фактор-пространстве нет элементов, которые могли бы служить кандидатами на произведение для произвольной пары элементов;
2. подпространство $\mathcal{N}_0$ не является идеалом в алгебре $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, это приводит к тому, что произведения представителей из одного класса эквивалентности попадают в разные классы, т. е. не определяется корректно произведение классов;
3. то, что $\mathcal{N}_0$ не является подалгеброй, приводит к утверждениям типа $0 \times 0 \neq 0$: произведение двух элементов из нулевого класса эквивалентности может не принадлежать этому классу.

Как видно из вышесказанного, построение алгебры мнемофункций можно считать модификацией секвенциального подхода к построению пространства распределений: в обоих случаях строится пространство, состоящее из классов эквивалентности семейств гладких функций, удовлетворяющих оценкам вида (7.1), а модификация заключается в следующем:

- вместо пространства $\widetilde{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}$ рассмотрено более широкое пространство $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, являющееся алгеброй;
- отношение эквивалентности задано не с помощью подпространства $\mathcal{N}_0$, а с помощью идеала $J(\mathbb{S}^1)$, содержащегося в этом подпространстве.

Эти отличия приводят к тому, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ все семейства из $\mathcal{N}_0$ отождествляются с нулем, а в алгебре мнемофункций они порождают бесконечно малые величины. Но именно учет таких бесконечно малых позволяет корректно определить операцию умножения.

В работе Ю. В. Егорова [15] была предложена несколько другая, но родственная конструкция. Применительно к рассматриваемому случаю окружности, Ю. В. Егоров рассмотрел более широкую алгебру $\widetilde{G_E(\mathbb{S}^1)}$, состоящую из произвольных семейств $\{f_\varepsilon\}$, не требуя выполнения оценок (7.1). В этой более широкой алгебре множество $J(\mathbb{S}^1)$ не является идеалом, поэтому Ю. В. Егоров использовал идеал

$$J_0(\mathbb{S}^1) = \{f_\varepsilon : \forall p \text{ и } m\ \exists \varepsilon_0 > 0 : f_\varepsilon = 0 \ \text{ при } \ \varepsilon < \varepsilon_0\}.$$

Соответствующая фактор-алгебра $G_E(\mathbb{S}^1) := \widetilde{G_E(\mathbb{S}^1)}/J_0(\mathbb{S}^1)$ есть *алгебра новых обобщенных функций по Егорову*.

Заметим, что множество $J_0(\mathbb{S}^1)$ является идеалом в алгебре $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ и с его помощью можно построить еще одну алгебру мнемофункций $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}/J_0(\mathbb{S}^1)$. Но эта алгебра практически не отличается от первоначальной алгебры $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$.

7.2. Отношение ассоциированности и асимптотические разложения мнемофункций. Основной интерес представляют взаимосвязи построенной алгебры мнемофункций с пространством распределений. Прежде всего устанавливается отношение *ассоциированности*. Поскольку $J(\mathbb{S}^1) \subset \mathcal{N}_0$, то если семейство f_ε сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ к f, то любое эквивалентное семейство также сходится к f.

Будем говорить, что класс эквивалентности $[f_\varepsilon]$, содержащий f_ε, *ассоциирован с распределением* f, если семейство f_ε сходится в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ к f. Обозначим через $G_{as}(\mathbb{S}^1)$ подпространство в $G(\mathbb{S}^1)$, состоящее из семейств, ассоциированных с распределениями. По построению имеем, что G_{as} есть фактор-пространство: $G_{as}(\mathbb{S}^1) = \widetilde{\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)}/J(\mathbb{S}^1)$. На $G_{as}(\mathbb{S}^1)$ отношение ассоциированности порождает отображение перехода к пределу

$$Lim : G_{as}(\mathbb{S}^1) \ni [f_\varepsilon] \to Lim([f_\varepsilon]) := \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1).$$

Отображение Lim сюръективно, но не является инъективным: с каждым распределением u связано обширное множество $G_{as}(u)$, состоящее из мнемофункций, ассоциированных с u, которое является аффинным подпространством в $G_{as}(\mathbb{S}^1)$. Если в $G_{as}(u)$ выбрать произвольный элемент f_0, то отображение

$$G_{as}(u) \ni f \to f - f_0 \in G_{as}(0)$$

задает изоморфизм между $G_{as}(u)$ и векторным пространством $G_{as}(0)$, которое по построению изоморфно фактор-пространству $\mathcal{N}_0/J(\mathbb{S}^1)$. Обратим внимание на то, что такой изоморфизм не является каноническим, так как в общем случае нет оснований выделить в аффинном подпространстве $G_{as}(u)$ один из элементов, который следует объявить нулевым. Таким образом, степень неоднозначности соответствия между $G_{as}(\mathbb{S}^1)$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ определяется тем, насколько подпространство $\mathcal{N}_0$ больше идеала $J(\mathbb{S}^1)$. Как отмечалось выше, элементы фактор-пространства $\mathcal{N}_0/J(\mathbb{S}^1)$ есть бесконечно малые, т. е. два элемента из $G_{as}(u)$ отличаются на бесконечно малую мнемофункцию.

Дополнительную информацию о свойствах мнемофункции можно получить с помощью анализа асимптотического поведения величин $< f_\varepsilon, \varphi >$. Фактически выражение $< F, \varphi > := < f_\varepsilon, \varphi >$ задает обобщенный линейный функционал F на $C^\infty(\mathbb{S}^1)$, т. е. функционал со значениями в алгебре обобщенных чисел $\widetilde{\mathbb{C}}$. В частности, для $f_\varepsilon \in \mathcal{N}_0$ имеем $< f_\varepsilon, \varphi > \to 0$, т. е. значения соответствующего функционала являются бесконечно малыми.

При вычислениях в алгебре мнемофункций часто встречаются случаи, когда такое семейство функционалов допускает асимптотическое разложение по степеням ε в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$:

$$< f_\varepsilon, \varphi > = \sum_{k=k_0}^{\infty} < u_k, \varphi > \varepsilon^k, \text{ где } \ u_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1). \tag{7.2}$$

Обратим внимание на то, что здесь речь идет именно об асимптотических разложениях, т. е. равенство в (7.2) означает, что последовательность конечных сумм

$$< F_N, \varphi > = \sum_{k=k_0}^{N} < u_k, \varphi > \varepsilon^k$$

сходится к $< f_\varepsilon, \varphi >$ асимптотически, т. е. их разность убывает быстрее, чем ε^N.

При этом асимптотическое разложение может начинаться с отрицательной степени ε, т. е. главным членом разложения может оказаться некоторое распределение с бесконечно большим коэффициентом.

Таким образом, наглядная информация о поведении мнемофункции содержится в ее асимптотическом разложении в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, при этом асимптотическое разложение у бесконечно малых мнемофункций начинается с положительной степени ε, а асимптотическое разложение семейства f_ε, ассоциированного с u, имеет вид

$$< f_\varepsilon, \varphi > = < u, \varphi > + < u_1, \varphi > \varepsilon + < u_2, \varphi > \varepsilon^2 + \dots . \tag{7.3}$$

Заметим, что в идейном плане связь между $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ и G_{as} аналогична связи между многообразием M и его касательным расслоением TM.

Действительно, рассмотрим множество гладких кривых $f(\varepsilon)$, проходящих через заданную точку a многообразия M, т. е. таких, что $f(0) = a$. Если на этом множестве ввести отношение эквивалентности $f(\varepsilon) \sim g(\varepsilon)$ для $f(\varepsilon) - g(\varepsilon) = o(\varepsilon)$, то множество классов эквивалентности есть касательное пространство TM_a в точке $a \in M$, а объединение всех касательных пространств есть касательное расслоение TM.

Согласно определению, касательный вектор есть класс эквивалентных кривых, приближающихся к точке по одному направлению, т. е. такой класс сохраняет информацию («помнит») только об этом направлении.

Аналогично, семейство f_ε, допускающее разложение (7.3), можно рассматривать как «кривую» в пространстве распределений $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, проходящую через точку u. Тогда распределение u_1 из асимптотического разложения (7.3) описывает, по какому направлению «кривая» приближается к u. А остальные члены разложения более детально описывают путь, по которому «кривая» приближается к f. По определению, два семейства гладких функций попадают в один класс эквивалентности, если они «очень похоже» ведут себя при $\varepsilon \to 0$, т. е. класс эквивалентности *помнит* о том, как элементы этих семейств приближались к своему пределу, в связи с чем для них было предложено название «мнемофункции» (от греческого «мнемо» — память).

Приходится отметить, что асимптотическое разложение содержит только часть информации о поведении мнемофункции, в общем случае даже полное (по всем степеням ε) асимптотическое разложение не позволяет однозначно определить f_ε; в частности, асимптотические разложения для f_ε и g_ε не определяют однозначно их произведение. Это проводит к тому, что при решении конкретных задач промежуточные вычисления следует проводить в алгебре мнемофункций, а асимптотическое разложение полезно построить только для окончательного результата, чтобы придать ему наглядность.

7.3. Вложения распределений в алгебру мнемофункций. Более детальная связь с распределениями устанавливается с помощью построения правых обратных к отображению Lim. Это линейные отображения $R : \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \to G_{as} \subset G(\mathbb{S}^1)$, такие, что $LimR(u) = u$. Согласно определению, образ $R(u)$ распределения u есть семейство гладких функций, сходящееся к u, т. е. такое отображение R задает способ аппроксимации распределений гладкими функциями и является вложением (инъективным отображением) $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру мнемофункций.

Заметим, что существует много правых обратных к отображению Lim: если R есть один из правых обратных, то оператор $R_1 : \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \to G_{as} \subset G(\mathbb{S}^1)$ является правым обратным тогда и только тогда, когда оператор $R - R_1$ отображает $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в $\mathcal{N}_0$.

Взятое в обратном порядке произведение отображений $RLim : G_{as} \to G_{as}$ является проектором в G_{as}. Поэтому формула $f = RLimf + (f - RLimf)$ задает разложение пространства G_{as} в прямую сумму
$$G_{as} = Im(R) \oplus G_{as}(0).$$
Поскольку образ $Im(R)$ изоморфен $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, получаем разложение
$$G_{as} = \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \oplus G_{as}(0),$$
при котором проекция на первую координату есть отображение ассоциированности Lim.

Обратим внимание на то, что полученное разложение определяется вложением R: в аффинном подпространстве $G_{as}(u)$ нулевым элементом объявляется $R(u)$.

Как уже отмечалось, при заданном R произведение произвольных распределений есть, по определению, мнемофункция
$$u \otimes v := R(u)R(v) \in G(\mathbb{S}^1).$$

Для описания свойств такого произведения обычно требуется установить его связь с распределениями. Если произведение $R(u)R(v)$ ассоциировано с распределением h, то естественно считать это h произведением uv, порожденным заданным способом аппроксимации R.

Как сказано выше, более детальную информацию о мнемофункции $R(u)R(v)$ дает ее асимптотическое разложение в пространстве распределений, которое может существовать и тогда, когда произведение $R(u)R(v)$ не ассоциировано с каким-нибудь распределением. Таким образом, задача описания произведения распределений в значительной степени сводится к построению асимптотического разложения для $R(u)R(v)$. При этом могут возникнуть асимптотические разложения с бесконечно большими и с бесконечно малыми коэффициентами, причем последние также играют существенную роль в рассматриваемых вопросах.

7.4. Свойства вложений. Поскольку существует много способов вложения распределений в алгебру мнемофункций $R : \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1) \to G(\mathbb{S}^1)$, выясним, какими дополнительными свойствами могут обладать разные вложения [4].

7.4.1. Инвариантность относительно вращений. В случае окружности одним из естественных требований на вложение является его инвариантность относительно вращений. В случае распределений на прямой рассматривается инвариантность относительно сдвигов.

Пусть $|\xi| = 1$. Как отмечалось ранее, поворот окружности, заданный формулой $\alpha(z) = \xi z$, порождает оператор поворота, действующий в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ по формуле $(T_\xi \varphi)(z) = \varphi(\xi z)$. Соответственно, оператор поворота действует в алгебре мнемофункций и в пространстве распределений.

Свойство инвариантности вложения R заключается в перестановочности с поворотом: если $R(f) = f_\varepsilon$, то
$$R(T_\xi f) = T_\xi f_\varepsilon.$$
Из этого следует специальный вид такого оператора. Запишем разложения образов функций z^k при действии R:
$$R(z^k) = \sum_j A_{jk} z^j.$$
При повороте окружности образ z^k есть $T_\xi z^k = \xi^k z^k$. Если R есть произвольный оператор, перестановочный с поворотами, то выполняется равенство $R(\xi^k z^k) = \xi^k R z^k$. При разложении в ряд Фурье получаем
$$\sum_j A_{jk} \xi^k z^j = \sum_j A_{jk} \xi^j z^j,$$
откуда $A_{jk}[\xi^j - \xi^k] = 0$ и, следовательно, $A_{jk} = 0$ при $k \neq j$. Если обозначить $A_{kk} = A_k$, получаем, что оператор действует по формуле
$$Rf = \sum_j A_k C_k z^k,$$
т. е. оператор R есть свертка с распределением, для которого A_k являются коэффициентами разложения в ряд Фурье. В частности, равенство $R(z^k) = A_k(\varepsilon) z^k$, т. е. перестановочность с поворотами, означает, что функции z^k являются собственными функциями оператора R.

Применяя сказанное, при каждом фиксированном ε получаем, что каждый способ аппроксимации, инвариантный относительно вращений, имеет вид
$$R(f) = f_\varepsilon = f * \psi_\varepsilon, \tag{7.4}$$
где $*$ — операция свертки в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, а ψ_ε есть некоторое семейство распределений.

Операция свертки использует групповую структуру окружности, при этом точка 1 выделяется, так как она является нейтральным элементом группы и свертка с δ_1 есть единичный оператор. Поэтому $\delta_1 * \psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon$, откуда получаем, что ψ_ε есть семейство гладких функций, сходящееся к δ_1. Таким образом, при выполнении условия инвариантности способ аппроксимации однозначно определяется по аппроксимациям δ_1.

Если использовать разложения Фурье
$$\psi_\varepsilon(z) = \sum A_k(\varepsilon) z^k,$$
то
$$R(f) = f_\varepsilon(z) = \sum_k A_k(\varepsilon) C_k z^k, \tag{7.5}$$
где при фиксированном ε коэффициенты $A_k(\varepsilon)$ убывают быстрее любой степени $\dfrac{1}{k}$, а при фиксированном k из сходимости ψ_ε к δ_1 следует, что $A_k(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.

В приложениях существенно свойство (3.1) — перестановочность вложения с дифференцированием:
$$R(f') = R(f)'. \tag{7.6}$$

Лемма 7.3. *Вложение R перестановочно с дифференцированием тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно поворотов.*

Доказательство. Операция свертки перестановочна с дифференцированием, поэтому из (7.4) следует (7.6).

Пусть выполнено (7.6). Рассмотрим разложение образа $R(z^k) = \sum_j B_j(\varepsilon)z^j$. Из (7.6) получаем, что $ik\sum_j B_j(\varepsilon)z^j = \sum_j B_j(\varepsilon)ij\ z^j$, откуда следует, что $B_j(\varepsilon) = 0$ при $j \neq k$, т. е. $R(z^k) = B_k(\varepsilon)z^k$, что и требовалось. □

Наиболее простым и естественным является способ аппроксимации, задаваемый с помощью частичных сумм ряда Фурье. Так как каждое распределение f разлагается в ряд (6.3), формула

$$R_F(f) = f_n = \sum_{-n}^{n} C_k z^k \tag{7.7}$$

задает вложение $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$. В этом примере через $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$ обозначается алгебра мнемофункций, порожденная последовательностями гладких функций.

С точки зрения теории рядов Фурье, формулы вида (7.5) задают методы суммирования таких рядов. Задача суммирования рядов связана, например, с тем, что для непрерывной функции f последовательность частичных сумм (7.7) может не сходиться равномерно. Но существует много методов суммирования вида (7.5), которые улучшают сходимость — при которых $f_\varepsilon(z)$ равномерно сходятся к f. Аналогично, способы аппроксимации, заданные формулами вида (7.5), могут обладать свойствами, которых нет у вложения (7.7), порожденного частичными суммами ряда Фурье.

Ниже рассматриваются вложения, инвариантные относительно поворотов.

7.4.2. Локальность умножения. Для распределения не определено значение в заданной точке, но можно говорить о его значении на открытом множестве. Говорят, что распределения f и g *равны на открытом подмножестве* U, если $< f,\varphi >=< g,\varphi >$ для всех φ, у которых носитель принадлежит U. Это соответствует тому, что значение f на открытом подмножестве U определятся как сужение функционала f на подпространство, состоящее из таких φ.

Носителем распределения f называется наименьшее замкнутое множество $\operatorname{supp} f$, на дополнении к которому $f = 0$.

Свойство локальности умножения распределения f на гладкую функцию g заключается в том, что произведение gf на каждом открытом множестве U зависит только от значений g и f на нем. В частности, если $g = 0$ на U или $f = 0$ на U, то произведение gf также есть нуль на U.

Будем говорить, что для вложения R выполняется *свойство локальности умножения*, если из условия $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$ следует, что $R(f)R(g) = 0$.

На первый взгляд может показаться, что это свойство всегда выполнено. Это «подтверждается» следующим рассуждением. Если $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$, то существует гладкая функция γ, такая, что $\gamma(z) = 1$ на $\operatorname{supp} f$ и $\gamma(z) = 0$ на $\operatorname{supp} g$. Тогда $f = \gamma f$, $g = (1-\gamma)f$, откуда $R(f)R(g) = R[\gamma(1-\gamma)]R(f)R(g) = 0$.

Однако эти вычисления предполагают, что выполнено равенство

$$R(\gamma f) = R(\gamma)R(f) \text{ для любых } \gamma \in C^\infty(\mathbb{S}^1),\ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1). \tag{7.8}$$

Но, согласно известному примеру Л. Шварца, пространство распределений не может быть вложено в ассоциативную коммутативную алгебру таким образом, чтобы сохранялось произведение гладкой функции на распределение. Это означает, что при любом вложении R пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в (произвольную) алгебру равенство (7.8) не может быть выполнено для всех $\gamma \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ и $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$. Таким образом, приведенное рассуждение некорректно и, в общем случае, если $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$, то произведение $R(g)R(f)$ может быть отличным от нуля в $G(\mathbb{S}^1)$.

7.4.3. Согласованность вложения с умножением в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. В работах Ж. Ф. Коломбо [31, 32], которые имели наибольший резонанс в этой тематике, рассматривалась задача о построении вложения, удовлетворяющего условию согласованности с умножением в $C^\infty(\mathbb{S}^1)$. Это условие является ослаблением условия (7.8), которое не может быть выполнено. В рассматриваемом случае задача Коломбо формулируется следующим образом.

Существует естественное вложение R_0 алгебры $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ в $G(\mathbb{S}^1)$, при котором функции $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ ставится в соответствие стационарное семейство $f_\varepsilon = f$, т. е. не зависящее от ε.

Задача Коломбо. *Требуется построить дифференциальную алгебру G и вложение R пространства распределений в G, которое для бесконечно дифференцируемых функций совпадает с естественным вложением R_0 в G.*

Применительно к рассматриваемому пространству распределений на окружности, в задаче Коломбо требуется построить вложение, при котором

$$R(f) = R_0(f) \quad \text{для} \quad f \in C^\infty(\mathbb{S}^1). \tag{7.9}$$

Это условие означает, что для гладких функций f рассматриваемые аппроксимации должны быстро сходится к f.

При выполнении (7.9) $C^\infty(\mathbb{S}^1)$ вкладывается не только как подпространство, но и как алгебра, т. е.

$$R(fg) = R(f)R(g) \text{ для всех } f,\ g \in C^\infty(\mathbb{S}^1). \tag{7.10}$$

Основной результат Ж. Ф. Коломбо заключается в построении искомой алгебры для пространств распределений на $\mathbb{R}^m$. При этом алгебра, построенная Коломбо, устроена существенно сложнее описанной выше.

Ниже показано, что особенностью случая распределений на окружности, описанного в данной работе, является то, что вложения, для которых выполнено (7.9) и (7.10), существуют для рассмотренной более простой алгебры мнемофункций $G(\mathbb{S}^1)$.

8. Вложения $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в $G(\mathbb{S}^1)$

Рассмотрим конкретные классы вложений вида (7.4) с точки зрения выполнения указанных выше свойств.

8.1. Вложения, удовлетворяющие условию локальности умножения. Произведение $R(\delta_\xi) \times R(\delta_1) = \psi_\varepsilon\Big(\dfrac{z}{\xi}\Big) \times \psi_\varepsilon(z)$ двух δ-функций, сосредоточенных в разных точках, в общем случае отлично от нуля. Но если носители функций $\psi_\varepsilon(z)$ стягиваются к точке 1 при $\varepsilon \to 0$, то при достаточно малых ε последнее произведение есть нуль и выполнено свойство локальности умножения. Оно выполняется также, если значения $\psi_\varepsilon(z)$ при $z \neq 1$ быстро стремятся к нулю, тогда произведение $\psi_\varepsilon(z) \times \psi_\varepsilon\Big(\dfrac{z}{\xi}\Big)$ принадлежит идеалу $J(\mathbb{S}^1)$.

Лемма 8.1. *Если носители функций $\psi_\varepsilon(z)$, задающих вложение по формуле* (7.4)*, стягиваются к точке* 1*, то свойство локальности умножения выполнено для произвольных распределений.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} g = \varnothing$. Условие, что носители функций $\psi_\varepsilon(z)$ стягиваются к точке 1, означает, что $\psi_\varepsilon(z) = 0$ при $|z-1| > \gamma(\varepsilon)$, где $\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Поскольку $f_\varepsilon = f * \psi_\varepsilon$, $f_\varepsilon(z) = 0$ вне $\gamma(\varepsilon)$-окрестности замкнутого множества $\operatorname{supp} f$. Аналогично $g_\varepsilon(z) = 0$ вне $\gamma(\varepsilon)$-окрестности замкнутого множества $\operatorname{supp} g$. При достаточно малом ε такие окрестности не пересекаются, т. е. объединение их дополнений есть $\mathbb{S}^1$. Поэтому при достаточно малом ε имеем $f_\varepsilon(z) \times g_\varepsilon(z) \equiv 0$, что и требовалось. □

Способы аппроксимации, которые обычно рассматриваются в пространствах распределений на прямой, задаются формулами вида (3.4) следующим образом. Выбирается функция $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 1$. Тогда семейство

$$\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big) \tag{8.1}$$

сходится к δ_0 и их носители стягиваются к точке 0. Соответствующий способ аппроксимации задается выражением (7.4), где $*$ есть операция свертки в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. При таком способе аппроксимации очевидно выполнено свойство локальности умножения.

Здесь семейство (8.1) порождено одной фиксированной функцией ψ, называемой *профилем*. Такие аппроксимации удобны для исследования благодаря тому, что свойства аппроксимирующего семейства f_ε описываются через ψ, в частности, с использованием моментов этой функции.

В случае периодических распределений (распределений на окружности) нет полной аналогии этой конструкции, так как, например, если функция $\psi(t)$ периодическая, то семейство вида (8.1) не сходится к δ-функции. Чтобы задать описанную выше аппроксимацию с помощью свертки на окружности, нужно модифицировать конструкцию.

Пусть $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 1$, и носитель расположен внутри интервала $(-\pi, \pi)$. При каждом ε зададим функцию $\dfrac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\dfrac{t}{\varepsilon}\Big)$ при $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$ и продолжим на $\mathbb{R}$ с периодом 2π, т. е. рассмотрим функцию

$$\psi_\varepsilon(t) = \sum_j \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t + 2j\pi}{\varepsilon}\Big). \tag{8.2}$$

Тогда формула

$$R(f) = f_\varepsilon = f * \psi_\varepsilon, \tag{8.3}$$

где $*$ — уже операция свертки в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, задает тот же способ аппроксимации, обладающий свойством локальности умножения.

Но детальный анализ этого способа аппроксимации на окружности усложняется по сравнению со случаем на прямой. Это связано с тем, что нет непосредственной связи между коэффициентами Фурье функций ψ_ε при разных ε, так как

$$\psi_\varepsilon(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(2\pi k\varepsilon)e^{ikt},$$

где $\hat{\psi}$ есть преобразование Фурье функции ψ на $\mathbb{R}$.

Таким образом, условие локальности умножения приводит к усложнению конструкции вложения. Заметим также, что требование локальности умножения не всегда оправдано с физической точки зрения. Например, δ-функция моделирует ситуацию, когда вещество распределено так, что основная часть массы сосредоточена в малой окрестности заданной точки. При умножении двух плотностей, соответствующих таким дельта-функциям, сосредоточенным в разных точках, возникает произведение большой плотности на малую, а такое произведение может дать конечный эффект, т. е. ненулевую плотность. Поэтому не всегда произведение двух дельта-функций, сосредоточенных в разных точках, следует считать нулем.

8.2. Согласованность с умножением гладких функций. Препятствием к построению вложения, согласованного с умножением гладких функций, является следующий факт.

Теорема 8.1. *Если вложение периодических распределений построено с помощью свертки с функциями вида* (8.1)*, где ψ финитная функция, то выполнено условие локальности умножения, а условия* (7.9) *и* (7.10) *согласованности с умножением гладких функций не выполняются.*

Это утверждение следует из двух лемм.

Лемма 8.2. *Пусть $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ — гладкая быстро убывающая функция на $\mathbb{R}$, в частности, финитная, $M_0(\psi) = \int \psi(t)dt = 1$, и f — бесконечно дифференцируемая периодическая функция. Семейство гладких функций $f_\varepsilon = f * \psi_\varepsilon$, где $\psi_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\dfrac{t}{\varepsilon}\Big)$, имеет асимптотическое разложение*

$$f_\varepsilon(t) \sim f(t) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} f(t)^{(j)} M_j(\psi)\varepsilon^j, \tag{8.4}$$

где

$$M_j(\psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^j \psi(t)dt, \ j \in \mathbb{N}$$

— моменты функции ψ.

Доказательство. Согласно формуле Тейлора

$$f(s)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f(t)^{(j)}(s-t)^j+r_n(s-t),$$

где остаточный член оценивается через производную $f(t)^{(n+1)}$. Так как эта производная ограничена, имеем оценку $|r_n(s-t)|\leqslant C|s-t|^{n+1}$. Поэтому

$$f_\varepsilon(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(s)\frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t-s}{\varepsilon}\Big)ds=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f(t)^{(j)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(s-t)^j\frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t-s}{\varepsilon}\Big)ds+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}r_n(s-t)\frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t-s}{\varepsilon}\Big)ds=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}f(t)^{(j)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(-\varepsilon\tau)^j\psi(\tau)d\tau+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}r_n(-\varepsilon\tau)\psi(\tau)d\tau=$$

$$=f(t)+\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}f(t)^{(j)}M_j(\psi)\varepsilon^j+o(\varepsilon^n), \tag{8.5}$$

что и требовалось. □

Лемма 8.3. *Если $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\psi\neq 0$, то бесконечное множество моментов $M_j(\psi)$ отлично от нуля.*

Доказательство. Предположим, что $M_j(\psi)=0$ для всех j, за исключением конечного числа. В силу компактности носителя ψ, преобразование Фурье $\hat\psi$ является аналитической функцией, причем она стремится к нулю на бесконечности в силу гладкости ψ. При преобразовании Фурье моменты переходят (с точностью до множителя) в значения соответствующих производных. Поэтому $\hat\psi^{(j)}(0)=0$ для всех $j\in\mathbb{N}$, за исключением конечного числа. Тогда из аналитичности $\hat\psi$ следует, что эта функция является ненулевым многочленом и, следовательно, не стремится к нулю на бесконечности, что приводит к противоречию. □

Доказательство теоремы 8.1. Пусть $M_p(\psi)$ есть ненулевой момент с наименьшим номером. Тогда, согласно (8.5), разность $f(t)-f_\varepsilon(t)$ ведет себя как ε^p и, следовательно, не принадлежит идеалу $J(\mathbb{S}^1)$, т. е. равенство (7.9) не выполнено.

Аналогично, для двух гладких функций имеем, согласно (8.5),

$$f_\varepsilon(t)\times g_\varepsilon(t)-(fg)_\varepsilon(t)=\frac{(-1)^p\varepsilon^p}{p!}\big[f(t)g(t)^{(p)}+f(t)^{(p)}g(t)-(f(t)g(t))^{(p)}\big]M_p(\psi)+o(\varepsilon^p).$$

Здесь при $p>1$ выражение в квадратной скобке отлично от нуля, из чего следует, что рассматриваемая разность не принадлежит идеалу $J(\mathbb{S}^1)$. При $p=1$ получаем, что разность $f(t)-f_\varepsilon(t)$ ведет себя как ε^{p_2}, где $M_{p_2}(\psi)$ есть второй из отличных от нуля моментов. □

Таким образом, если использовать методы аппроксимации, порожденные финитными функциями, то для выполнения условия (7.9) требуется строить алгебры, устроенные более сложно, чем $G(\mathbb{S}^1)$. Именно такие алгебры были впервые построены Ж. Ф. Коломбо. Опишем модификацию его конструкции, приводящую к построении алгебры, устроенной несколько проще, чем алгебра Коломбо.

Рассмотрим семейства бесконечно дифференцируемых функций $\{f_{q,\varepsilon}\}$, зависящие от двух параметров ε и $q\in\mathbb{N}$. Обозначим через $\widetilde{G_C(\mathbb{S}^1)}$ множество, состоящее из всех таких семейств, для каждого из которых существуют μ и ν, при которых имеет место оценка

$$p_m(f_{q,\varepsilon})\leqslant\frac{C}{\varepsilon^{\mu m+\nu}}. \tag{8.6}$$

Аналогично предыдущему, это множество является дифференциальной алгеброй.

Пусть

$$J_C(\mathbb{S}^1) = \{g_{q,\varepsilon} : \exists \;\; \mu_1 \;\; \text{и} \;\; \nu_1, \quad \text{что} \quad p_m(g_{q,\varepsilon}) \leqslant C\varepsilon^{q-\mu_1 m-\nu_1} \;\; \}.$$

Лемма 8.4. *Множество $J_C(\mathbb{S}^1)$ является дифференциальным идеалом в алгебре $\widetilde{G_C(\mathbb{S}^1)}$.*

Доказательство. Пусть $f_{q,\varepsilon} \in \widetilde{G_C(\mathbb{S}^1)}$ и $g_{q,\varepsilon} \in J_C(\mathbb{S}^1)$. Тогда

$$p_m(f_{q,\varepsilon} \times g_{q,\varepsilon}) \leqslant \frac{C_1}{\varepsilon^{\mu m+\nu}} C_2 \varepsilon^{q-\mu_1 m-\nu_1} = C\varepsilon^{q-(\mu+\mu_1)m-(\nu+\nu_1)},$$

т. е. это произведение принадлежит $J_C(\mathbb{S}^1)$. □

В силу леммы 8.4 фактор-пространство

$$G_C(\mathbb{S}^1) = \widetilde{G_C(\mathbb{S}^1)}/J_C(\mathbb{S}^1)$$

является дифференциальной алгеброй, которую будем называть *модифицированной алгеброй Коломбо*.

Для построения вложения в эту алгебру выберем последовательность финитных функций ψ_q, таких, что их носители лежат в окрестности точки 0 и $M_j(\psi_q) = 0$ при $1 \leqslant j < q$.

Теорема 8.2. *Отображение $R_C : f \to f_{q,\varepsilon} = f * \psi_{q,\varepsilon}$ задает вложение $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в $G_C(\mathbb{S}^1)$, для которого выполнено условие* (7.9) *согласования с умножением гладких функций и свойство локальности умножения.*

Доказательство. В силу условий на ψ_q получаем, что

$$p_m(f * \psi_{q,\varepsilon}) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{m+\nu}}.$$

Если $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, то, согласно (8.5), разность $f(t) - f_{q,\varepsilon}(t)$ убывает как ε^q. Поскольку свертка перестановочна с дифференцированием, аналогично ведет себя разность производных этих функций. Отсюда получаем, что

$$p_m(f - f * \psi_{q,\varepsilon}) \leqslant C\varepsilon^{q-m}$$

и разность $f - f_{q,\varepsilon}$ принадлежит идеалу $J_C(\mathbb{S}^1)$. □

Как было отмечено выше, условие (7.9) означает, что аппроксимации гладкой функции быстро сходятся к ней. Это выполнено для вложения (7.7), построенного с помощью последовательности частичных сумм ряда Фурье. Это отображение R_F инвариантно относительно поворотов и представляется в виде свертки:

$$f_n = f * \psi_n, \text{ где } \;\; \psi_n(z) = \sum_{-n}^{n} z^k = \begin{cases} \dfrac{z^{n+1} - z^{-n}}{z-1}, & z \neq 1, \\ 2n+1, & z = 1. \end{cases}$$

Теорема 8.3. *Отображение R_F является вложением $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру мнемофункций, для которого выполнено условие согласования с умножением, т. е. равенства* (7.9) *и* (7.10)*, а свойство локальности умножения не выполняется.*

Доказательство. То, что последовательность f_n принадлежит $\widetilde{G(\mathbb{S}^1)}$, следует из степенной оценки коэффициентов C_k. Действительно, для коэффициентов Фурье распределения f справедлива оценка $|C_k| \leqslant C(1+|k|)^p$. Поэтому

$$p_m(f_n) \leqslant \sum_{|k| \leqslant n} C(1+|k|)^{p+m} \leqslant C(2n+1)(1+n)^{p+m} \sim n^{p+m+1}.$$

Выполнение (7.9) следует из известного факта, что ряд Фурье функции $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ быстро сходится, т. е. $f - f_n \in J(\mathbb{S}^1)$.

Заметим, что при этом способе для гладких функций $f_n(z)g_n(z) \neq (fg)_n$, а равенство (7.10) выполняется только в фактор-алгебре, т. е. $f_n(z)g_n(z) - (fg)_n \in J(\mathbb{S}^1)$.

Распределению δ_ξ соответствует аппроксимирующая последовательность

$$\psi_n(\xi z) = \sum_{-n}^{n} \xi^{-k} z^k = \frac{\xi^{2n+1} - z^{2n+1}}{(\xi z)^n(\xi - z)}.$$

Поэтому произведению $\delta_\xi\ \delta_1$ соответствует последовательность

$$\psi_n(\xi z)\psi_n(z) = \frac{\xi^{2n+1} - z^{2n+1}}{(\xi z)^n(\xi - z)} \times \frac{z^{n+1} - z^{-n}}{z - 1},$$

которая не стремится к нулю и, следовательно, не принадлежит идеалу $J(\mathbb{S}^1)$. □

8.3. Совместная локальность и согласованность с умножением гладких функций. Согласно результатам предыдущего раздела, если рассматривать вложения, порожденные финитными функциями, то выполнено свойство локальности умножения, но для существования вложения, при котором также имеет место согласование с умножением (условие (7.9)), требуется алгебра, устроенная более сложно, чем $G(\mathbb{S}^1)$. А вложение, порожденное частичными суммами ряда Фурье, согласовано с умножением, но не обладает свойством локальности. Покажем, что существуют вложения в $G(\mathbb{S}^1)$, обладающие одновременно двумя указанными свойствами. Такие вложения удается построить, если отказаться от требования финитности функции ψ.

Рассмотрим пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, т. е. множество функций, бесконечно дифференцируемых и убывающих на бесконечности быстрее любой степени $\dfrac{1}{t}$. Для функций из этого пространства ситуация отлична от описанной в лемме 8.2.

Лемма 8.5. *В пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{S}^1)$ существуют функции ψ, такие, что*

$$M_0(\psi) = 1, \quad M_j(\psi) = 0 \quad \text{для } j \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Преобразование Фурье биективно отображает пространство $\mathcal{S}(\mathbb{S}^1)$ в себя. В этом пространстве существуют такие функции, что $\varphi(\xi) = 1$ в некоторой окрестности $(-\gamma, \gamma)$ точки 0. Тогда для функции ψ, которая является обратным преобразованием Фурье такой φ, выполнены свойства из утверждения леммы. Действительно, как уже отмечалось, при преобразовании Фурье моменты функции ψ переходят в производные в нуле функции φ, которые есть нуль. □

Ниже для упрощения выражений считаем, что $\gamma = 1$. Отметим, что, в отличие от функций из $\mathcal{D}(\mathbb{S}^1)$, преобразование Фурье функции из $\mathcal{S}(\mathbb{S}^1)$ может быть бесконечно дифференцируемой, но не аналитической функцией. Именно такой является выбранная выше функция φ.

Выберем функцию ψ со свойствами, описанными в лемме 8.5, построим семейство функций

$$\psi_\varepsilon(z) = \sum_j \frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t + 2j\pi}{\varepsilon}\Big) \tag{8.7}$$

и зададим способ аппроксимации формулой (7.4), где свертка понимается в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$. В терминах коэффициентов Фурье это отображение действует по правилу

$$R_\psi : f = \sum_k C_k z^k \to f_\varepsilon = \sum_k \varphi(2\pi k\varepsilon) C_k z^k, \tag{8.8}$$

где φ есть преобразование Фурье функции ψ.

Теорема 8.4. *При указанном выборе функции ψ_0 для вложения* (8.8) *выполнено условие согласования* (7.9) *и свойство локальности умножения.*

Доказательство. В рассматриваемом случае, согласно лемме 8.2, асимптотическое разложение имеет вид $f_\varepsilon \sim f$. Это означает, что разность $f - f_\varepsilon$ убывает быстрее любой степени ε. Так как это верно для всех производных функции, получаем, что $f - f_\varepsilon$ принадлежит идеалу.

Для проверки локальности умножения рассмотрим свойства функции ψ_ε из (8.7) на периоде — отрезке $[-\pi, \pi]$. Пусть $(-\gamma, \gamma)$ окрестность точки 0. Так как для любого p выполнено неравенство

$$|\psi(t)| \leqslant \frac{C}{(1 + |t|)^p},$$

для слагаемого из (8.7) имеем оценку

$$\Big|\frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t+2j\pi}{\varepsilon}\Big)\Big| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\frac{C}{\big(1+\frac{|t+2j\pi|}{\varepsilon}\big)^p} \leqslant \frac{C}{|t+2j\pi|^p}\varepsilon^{p-1}.$$

Поэтому

$$\sum_{j\neq 0}\frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{t+2j\pi}{\varepsilon}\Big) \leqslant C\sum_{j\neq 0}\frac{1}{|t+2j\pi|^p}\varepsilon^{p-1} = C_1\varepsilon^{p-1}.$$

При $j=0$ для соответствующего слагаемого получаем

$$\frac{1}{\varepsilon}\Big|\psi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big| \leqslant \begin{cases}\dfrac{C_2}{\varepsilon}, & |t|\leqslant\gamma,\\ \dfrac{C}{\gamma}\varepsilon^{p-1}, & |t|\geqslant\gamma.\end{cases}$$

Таким образом, вне любой окрестности нуля функции ψ_ε убывают быстрее любой степени ε. Поэтому при любом $t_0\neq 0$ произведение $\psi_\varepsilon(t)\times\psi_\varepsilon(t-t_0)$ убывает быстрее любой степени ε и, следовательно, принадлежит идеалу. □

9. Аналитическое представление распределений и порожденное им умножение

Рассмотрим еще один способ аппроксимации, часто используемый в анализе, основанный на известном аналитическом представлении распределений [9]. При таких аппроксимациях удается получить более явные результаты в задаче умножения распределений. В случае окружности аналитическое представление задается следующим образом. Рассмотрим разложение произвольного распределения f в ряд Фурье и запишем два оператора

$$(P^+f)(z) := f^+(z) = \sum_0^\infty C_k z^k, \tag{9.1}$$

$$(P^-f)(z) := f^-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} C_k z^k. \tag{9.2}$$

Из оценки коэффициентов C_k следует, что для любого $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{S}_1)$ ряд (9.1) сходится в круге $|z|<1$, его сумма $f^+(z)$ является аналитической функцией, а ряд (9.2) сходится при $|z|>1$ и его сумма $f^-(z)$ является функцией, аналитической при $|z|>1$ и стремящейся к нулю на бесконечности.

Таким образом, определено вложение $f\to(P^+f,P^-f)=(f^+,f^-)$ пространства распределений в пространство $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$ кусочно аналитических функций, т. е. пар (f^+,f^-), где функция $f^+(z)$ аналитическая при $|z|<1$, а $f^-(z)$ — при $|z|>1$. При этом аналитические функции $f^\pm(z)$ не произвольные, а такие, что при их разложении в степенной ряд коэффициенты растут не быстрее некоторой степени k.

Пара функций (f^+,f^-) называется *аналитическим представлением* распределения f, так как f выражается через эти функции по формуле

$$<f,\varphi>=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{S}^1}\Big[f^+((1-\varepsilon)z)+f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)\Big]\varphi(z)|dz|. \tag{9.3}$$

Распределения, имеющие аналитическое представление $(f^+,0)$ будем называть *положительными*, а имеющие представление $(0,f^-)$ — *отрицательными*.

Не любая пара (f^+,f^-), где функция $f^+(z)$ аналитическая при $|z|<1$, а $f^-(z)$ — при $|z|>1$, задает аналитическое представление распределения на окружности. Покажем, что функции $f^\pm(z)$, задающие такое представление, могут быть охарактеризованы в терминах скорости роста при $|z|\to 1$, а именно, это функции степенного роста, т. е. допускающие оценку

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{(1-|z|)^m}. \tag{9.4}$$

Рассматриваемый вопрос есть частный случай общей задачи об установлении связей между поведением аналитической функции и поведением коэффициентов соответствующего степенного ряда.

Наиболее известный результат в этом направлении заключается в установлении связи между порядком и типом целой функции и поведением коэффициентов при ее разложении [20]. Для функций, аналитических в круге, аналогичный результат получен в [6]. Для функций, аналитических в круге и имеющих степенной рост, описание поведения коэффициентов считается известным, но не включено в стандартную литературу по теории аналитических функций. Для полноты изложения приведем здесь соответствующее утверждение с доказательством.

Теорема 9.1. *Пусть $f(z) = \sum\limits_0^\infty a_k z^k$ причем ряд сходится при $|z| < 1$. Последовательность коэффициентов допускает степенную оценку тогда и только тогда, когда при $|z| \to 1$ функция f имеет рост не выше степенного.*

Доказательство. Пусть выполнена оценка (9.4). Тогда, согласно неравенству Коши,

$$|C_k| \leqslant \frac{M}{(1-|z|)^m |z|^k}.$$

В частности, положив $z = 1 - \dfrac{1}{k}$, получаем

$$|C_k| \leqslant \frac{Mk^m}{(1-\frac{1}{k})^k} \leqslant 4Mk^m.$$

Для получения утверждения в обратную сторону, воспользуемся утверждением из [14], говорящим, что сумма ряда

$$\sum_1^\infty k^\alpha z^k, \ \alpha > 0,$$

является аналитической функцией при $|z| = 1, z \neq 1$ и асимптотически ведет себя в окрестности точки $z = 1$ как

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-|z|)^{\alpha+1}}.$$

Поэтому, если имеет место оценка $|C_k| \leqslant Mk^m, \ k > 0$, то

$$|f(z)| \leqslant |a_0| + \sum_1^\infty Mk^m |z|^k \leqslant M_0 + \frac{\widetilde{M}}{(1-|z|)^{m+1}},$$

т. е. функция имеет рост не выше степенного. □

Аналитическое представление порождает естественную аппроксимацию распределения f: равенство (9.3) означает, что семейство гладких функций

$$R_a(f) = f_\varepsilon(z) = f^+((1-\varepsilon)z) + f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big) \tag{9.5}$$

сходится к f.

Теорема 9.2. *Формула $R_a(f) = f_\varepsilon(z)$, где функции $f_\varepsilon(z)$ заданы* (9.5)*, задает инвариантное вложение пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ в алгебру мнемофункций. Условие согласования с умножением* (7.10) *выполнено для пар положительных распределений, имеющих представление $f = (f^+, 0)$, $g = (g^+, 0)$, где функции f^+ и g^+ непрерывны в замкнутом круге, а также для пар отрицательных распределений вида $f = (0, f^-)$, $g = (0, g^-)$, где f^- и g^- непрерывны при $|z| \geqslant 1$.*

Доказательство. Из теоремы 9.1 следует, что семейство гладких функций $f_\varepsilon(z)$ имеет степенной рост и, значит, задает мнемофункцию.

Для функций $z^k, \ k \geqslant 0$ равенство (7.10) проверяется непосредственно. Действительно, пусть $f(z) = z^k$, $g(z) = z^m$, $f(z)g(z) = z^{k+m}$. Тогда $R_a(f) = (1-\varepsilon)^k z^k$, $R_a(g) = (1-\varepsilon)^m z^m$, $R_a(fg) = (1-\varepsilon)^{k+m} z^{k+m}$, и равенство $R_a(fg) = R_a(f)R_a(g)$, очевидно, выполнено. Из этого следует, что требуемое равенство выполнено для многочленов, откуда, переходя к пределу, получаем требуемое свойство для функций f^+ и g^+, непрерывных в замкнутом круге. Для пар функций, имеющих представление $f = (0, f^-)$, $g = (0, g^-)$, доказывается аналогично. □

Для дельта-функции рассматриваемое аппроксимирующее семейство имеет вид

$$R_a(\delta_1) = \psi_\varepsilon(z) = \frac{1}{1-(1-\varepsilon)z} + \frac{1-\varepsilon}{z-(1-\varepsilon)}, \tag{9.6}$$

поэтому рассматриваемый способ аппроксимации задается как свертка $R_a(f) = f * \psi_\varepsilon$.

Отметим, что при рассматриваемом способе аппроксимации равенство (7.9) не выполнено. Действительно, функции $f(z) = z$ соответствует мнемофункция $f_\varepsilon(z) = (1-\varepsilon)z$, при этом $f(z) - f_\varepsilon(z) = \varepsilon z$, откуда следует, что эта разность не принадлежит идеалу — она стремится к нулю как ε, а элементы идеала стремятся к нулю быстрее любой степени ε.

Из доказательства теоремы видно, что здесь равенство (7.10) выполнено не только в фактор-алгебре, но и на уровне представителей из классов эквивалентности, т. е. для непрерывных f^+ и g^+ имеем

$$(f^+ * \psi_\varepsilon) \times (g^+ * \psi_\varepsilon) = (f^+ g^+) * \psi_\varepsilon.$$

Возникает вопрос: существуют ли другие функции $\gamma \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$, такие, что

$$(f^+ * \gamma) \times (g^+ * \gamma) = (f^+ g^+) * \gamma? \tag{9.7}$$

Следующая теорема утверждает, что это практически единственный случай.

Теорема 9.3. *Если функция $\gamma(z)$ такова, что равенство* (9.7) *выполнено для всех гладких функций $f = (f^+, 0)$, то при некоторых ε и ξ, $|\xi| = 1$, имеем*

$$\gamma(z) = \frac{1}{1-(1-\varepsilon)\xi z} + g(z),$$

где $g = (0, g^-)$.

Доказательство. Пусть $\gamma(z) = \sum A_k z^k$. Заметим, что для функции f указанного вида свертка с $\gamma(z)$ не зависит от коэффициентов разложения $\gamma(z)$ с отрицательными номерами. Поэтому функцию

$$g^-(z) = \sum_{-\infty}^{-1} A_k z^k$$

можно выбирать произвольным образом. Тогда $z^k * \gamma(z) = A_k z^k$, $z^m * \gamma(z) = A_m z^m$, $z^{k+m} * \gamma(z) = A_{k+m} z^{k+m}$. Из (9.7) следует, что для коэффициентов разложения выполнено $A_{k+m} = A_k A_m$. При $k = 0$ получаем, что $A_0 = 1$. Пусть $A_1 = r\xi$, где $|\xi| = 1$, тогда $A_k = r^k \xi^k$, причем для сходимости ряда должно быть $r < 1$. Таким образом, обозначив $1 - r = \varepsilon$, получаем требуемое представление $\gamma(z)$. $\square$

При аналитическом представлении пространство распределений отождествляется с множеством пар аналитических функций (f^+, f^-), описанных выше. Произведение мнемофункций $f_\varepsilon(z) g_\varepsilon(z)$ при каждом ε также имеет аналитическое представление $(h_\varepsilon^+(z), h_\varepsilon^-(z))$, где функции $h_\varepsilon^\pm(z)$ аналитически зависят от z.

Рассмотрим такое произведение более детально. Так как вложение фиксировано, то произведение распределений f и g будем обозначать $f \times g$ или fg. Тогда результат умножения распределений $(f^+, f^-) \times (g^+, g^-)$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} R_a(f)R_a(g) &= \Big[f^+((1-\varepsilon)z) + f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)\Big]\Big[g^+((1-\varepsilon)z) + g^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)\Big] = \\ &= f^+((1-\varepsilon)z)g^+((1-\varepsilon)z) + f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)g^+((1-\varepsilon)z) + \\ &\quad + f^+((1-\varepsilon)z)g^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big) + f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)g^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big). \end{aligned} \tag{9.8}$$

Здесь

$$f^+((1-\varepsilon)z)g^+((1-\varepsilon)z) = R_a(f^+g^+, 0),$$

$$f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)g^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big) = R_a(0, f^-g^-),$$

т. е. сумма первого и четвертого слагаемых есть аналитическое представление распределения, заданного парой (f^+g^+, f^-g^-). При фиксированном ε сумма двух остальных слагаемых

$$\gamma_\varepsilon(z) := f^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big)g^+((1-\varepsilon)z) + f^+((1-\varepsilon)z)g^-\Big(\frac{z}{1-\varepsilon}\Big) \tag{9.9}$$

есть функция, аналитическая в кольце

$$K_\varepsilon = \Big\{z:\ 1-\varepsilon < |z| < \frac{1}{1-\varepsilon}\Big\}.$$

Ее аналитическое представление задается с помощью применения операторов $P^\pm$. Таким образом, в пространстве $\mathcal{A}(\mathbb{S}^1)$ кусочно аналитических функций, т. е. пар (f^+, f^-), задающих аналитическое представление, умножение действует по следующему правилу.

Теорема 9.4. *В пространстве кусочно аналитических функций, т. е. пар (f^+, f^-), задающих аналитическое представление, результат умножения $(f^+, f^-)\times(g^+, g^-)$ может быть представлен в виде*

$$R_a(f)R_a(g) = h^+_\varepsilon(z) + h^-_\varepsilon(z), \tag{9.10}$$

где

$$h^+_\varepsilon(z) = R_a(f^+g^+, 0) + P^+(\gamma_\varepsilon(z)), \tag{9.11}$$

$$h^-_\varepsilon(z) = R_a(0, f^-g^-) + P^-(\gamma_\varepsilon(z)). \tag{9.12}$$

Следствие 9.1. *Если $f = (f^+, 0)$, $g = (g^+, 0)$, то $(f^+, 0)\times(g^+, 0) = (f^+g^+, 0)$.*

Следствие 9.2. *Если $f = (0, f^-)$, $g = (0, g^-)$, то $(0, f^-)\times(0, g^-) = (0, f^-g^-)$.*

10. Алгебра рациональных мнемофункций на окружности

Распределение $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$ будем называть *рациональным*, если при его аналитическом представлении функции $f^\pm$ являются рациональными. Заметим, что любая пара рациональных функций $f^\pm$, таких, что f^+ аналитична при $|z|<1$, а f^- аналитична при $|z|>1$, задает аналитическое представление некоторого распределения. Поэтому подпространство $\mathcal{D}'_R(\mathbb{S}^1)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{S}^1)$, состоящее из рациональных распределений, изоморфно пространству пар (f^+, f^-) указанных рациональных функций.

Выделение таких распределений мотивируется двумя причинами. Во-первых, многие наиболее употребительные распределения являются рациональными, и в приложениях вопрос о придании смысла произведению возникает именно для таких распределений. В частности, аналитическое представление δ_ξ есть

$$\delta_\xi = \Big(-\frac{\xi}{z-\xi}, \frac{\xi}{z-\xi}\Big), \tag{10.1}$$

а аналитическое представление $\mathcal{P}\Big(\dfrac{1}{z-\xi}\Big)$ есть

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-\xi}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-\xi}, \frac{1}{z-\xi}\Big), \tag{10.2}$$

откуда видно, что эти распределения являются рациональными.

Во-вторых, как будет показано ниже, правило умножения таких распределений задается в явном виде, что позволяет получить более конкретные результаты, чем в общем случае.

Рациональное распределение с аналитическим представлением $\Big(\dfrac{1}{(z-\xi)^n}, 0\Big)$, $|\xi|\geqslant 1$, будем обозначать $\dfrac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, а через $\dfrac{1}{(z-\eta)^{m-}}$ — распределение с аналитическим представлением $\Big(0, \dfrac{1}{(z-\eta)^m}\Big)$, $|\eta|\leqslant 1$. Для многочленов $p(z)$ рассматриваем вложение в алгебру с помощью аналитического представления $(p(z), 0)$, тогда соответствующая мнемофункция есть $p_\varepsilon(z) = p((1-\varepsilon)z)$.

Согласно следствию 9.1, произведение $(f^+, 0)\times(g^+, 0)$ определено для любых функций f^+ и g^+, аналитических в области $|z|<1$, и при этом

$$(f^+, 0)\times(g^+, 0) = (f^+g^+, 0). \tag{10.3}$$

В частности

$$(z,0)\times\Big(\frac{1}{z-\xi},0\Big)=\Big(\frac{z}{z-\xi},0\Big).$$

Обратим внимание на то, что

$$\frac{z}{z-\xi}=1+\frac{\xi}{z-\xi},$$

т. е. умножение на z сводится к умножению на постоянную и добавлению 1. Используя эту формулу, получаем далее

$$(z^2,0)\times\Big(\frac{1}{z-\xi},0\Big)=(z,0)\times\Big(1+\frac{\xi}{z-\xi},0\Big)=\Big(z+\xi\Big(1+\frac{\xi}{z-\xi}\Big),0\Big)=\Big(z+\xi+\frac{\xi^2}{z-\xi},0\Big).$$

Аналогично, по следствию 9.2

$$(0,f^-)\times(0,g^-)=(0,f^-g^-) \tag{10.4}$$

для любых функций f^- и g^-, аналитических в области $|z|>1$.

Поэтому для задания правила умножения рациональных распределений достаточно найти произведение элементов вида $(f^+,0)\times(0,g^-)$.

Рассмотрим сначала произведения распределений $\dfrac{1}{(z-\xi)^+}$ и $\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$. Напомним, что разложения в ряд Фурье для этих распределений имеют вид

$$\frac{1}{(z-\xi)^+}=-\sum_0^{+\infty}\xi^{-k-1}z^k;\quad \frac{1}{(z-\eta)^-}=\sum_{-\infty}^{-1}\eta^{-k-1}z^k. \tag{10.5}$$

Следующая лемма описывает произведение таких распределений.

Лемма 10.1. *Если* $|\xi|\leqslant 1$, $|\eta|\geqslant 1$ *то*

$$\Big(\frac{1}{z-\xi},0\Big)\times\Big(0,\frac{1}{z-\eta}\Big)=\Big(\frac{C_1(r;\xi;\eta)}{z-\xi},\frac{C_2(r;\xi;\eta)}{z-\eta}\Big), \tag{10.6}$$

где $C_1(r;\xi;\eta)=\dfrac{r^2}{\xi-\eta r^2}$, $C_2(r;\xi;\eta)=\dfrac{1}{\eta r^2-\xi}$.

Доказательство. Мнемофункция, соответствующая распределению $\dfrac{1}{(z-\xi)^+}$, имеет вид

$$R_a\Big(\frac{1}{(z-\xi)^+}\Big)=\frac{1}{rz-\xi},$$

где $r=1-\varepsilon$. Для $\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$ мнемофункция, или аппроксимирующее семейство, есть

$$R_a\Big(\frac{1}{(z-\eta)^-}\Big)=\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}.$$

Их произведение есть семейство гладких функций на окружности

$$R_a\Big(\frac{1}{(z-\xi)^+}\Big)R_a\Big(\frac{1}{(z-\eta)^-}\Big)=\frac{1}{rz-\xi}\,\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}. \tag{10.7}$$

Согласно правилу умножения в пространстве кусочно-аналитических функций (теореме 9.4), при каждом ε для функции (10.7) нужно построить аналитическое представление, т. е. применить операторы $P^{\pm}$. Основное упрощение для рассматриваемых функций заключается в том, что применение этих операторов равносильно разложению произведения конкретных рациональных функций на сумму элементарных дробей, что осуществляется с помощью простых вычислений. В результате получаем

$$\frac{1}{rz-\xi}\,\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}=C_1(r;\xi;\eta)\frac{1}{rz-\xi}+C_2(r;\xi;\eta)\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta}, \tag{10.8}$$

где

$$C_1(r;\xi;\eta)=\frac{r^2}{\xi-\eta r^2};\quad C_2(r;\xi;\eta)=\frac{1}{\eta r^2-\xi}$$

и эти коэффициенты связаны соотношением $C_1(r;\xi;\eta) = -r^2C_2(r;\xi;\eta)$. Правая часть равенства (10.8) есть аппроксимирующее семейство для (10.6), что и требовалось показать. $\square$

Рассмотрим отдельно произведение в смысле мнемофункций для распределений z^+ и $\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$, так как оно не согласованно с обычным умножением гладкой функции на распределение.

Лемма 10.2. *Если* $|\eta| \leqslant 1$, *то*

$$(z,0)\times\Big(0,\frac{1}{z-\eta}\Big) = \Big(r^2,\frac{\eta r^2}{z-\eta}\Big); \tag{10.9}$$

$$(z^n,0)\times\Big(0,\frac{1}{z-\eta}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} z^k r^{2(n-k)}\eta^{n-k-1}, \frac{\eta^n r^{2n}}{z-\eta}\Big). \tag{10.10}$$

Доказательство. Рассмотрим произведение аппроксимирующих семейств

$$R_a(z^+)R_a\Big(\frac{1}{(z-\eta)^-}\Big) = rz\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta} = r^2 + \frac{\eta r^2}{\frac{z}{r}-\eta}.$$

Последнее равенство здесь соответствует применению операторов $P^{\pm}$.

При вычислении произведения $(z^n,0)\times\Big(0,\dfrac{1}{z-\eta}\Big)$ возникают другие выражения. Аппроксимирующее семейство для распределения $(z^n,0)$ есть r^nz^n, поэтому при умножении аппроксимаций получаем семейство гладких функций

$$r^nz^n\times\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta},$$

аналитическое представление которых содержит положительные и отрицательные компоненты. Здесь искомый результат можно получить с помощью процедуры деления многочленов с остатком:

$$r^n\times\frac{z^n}{\frac{z}{r}-\eta} = p_{n-1}(rz) + M\frac{1}{\frac{z}{r\eta}-1},$$

где число $M = \eta^n r^{2n}$, а $p_{n-1}(z)$ есть многочлен степени $n-1$ переменной z с коэффициентами, зависящими от r и от η. Эти коэффициенты могут быть найдены непосредственным делением или с помощью метода неопределенных коэффициентов, но наиболее просто требуемое выражение получается с помощью разложения в ряд Фурье. Если

$$\frac{1}{(z-\eta)^-} = \sum_{-\infty}^{-1}\eta^{-k-1}z^k,$$

то

$$r^nz^n\times\frac{1}{\frac{z}{r}-\eta} = \sum_{k=0}^{n-1}(rz)^k r^{2(n-k)}\eta^{n-1-k} + r^{2n}\eta^n\frac{1}{\frac{z}{r\eta}-1}.$$

Последнее выражение является аппроксимирующим семейством для распределения с аналитическим представлением (10.10). $\square$

Следующая теорема полностью описывает алгебру, порожденную рациональными мнемофункциями.

Теорема 10.1. *Векторное пространство* $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$, *состоящее из элементов вида*

$$\sum_{k=0}^{m}A_k^+(\varepsilon)(1-\varepsilon)^kz^k + \sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{B_{kj}^+(\varepsilon)}{((1-\varepsilon)z-\xi_k)^j} + \sum_{k=1}^{n^-}\sum_{k=1}^{p_k^-}\frac{B_{kj}^-(\varepsilon)}{(\frac{z}{1-\varepsilon}-\eta_k)^j}, \tag{10.11}$$

где $|\xi_k| \geqslant 1$, $|\eta_k| \leqslant 1$, $A_k^+(\varepsilon)$, $B_{kj}^+(\varepsilon)$, $B_{kj}^-(\varepsilon) \in \mathbb{C}^*$, *является наименьшей алгеброй, содержащей все мнемофункции* $R_a(f)$, $f \in \mathcal{D}'_R(\mathbb{S}^1)$, *и обобщенные числа. В этой алгебре элементы вида* $\dfrac{1}{(z-\xi)^+}$, $\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$ *и* z^+ *являются образующими, а закон умножения задается однозначно соотношениями* (10.3), (10.4), (10.6), (10.9).

Доказательство. Так как над полем комплексных чисел только многочлен первой степени является неприводимым, то любую рациональную функцию можно представить в виде линейной комбинации элементарных дробей: если

$$Q(z)=\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)^{p_i},$$

то

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{0}^{m}A_k z^k+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\frac{B_{ij}}{(z-z_i)^j},\qquad A_k,\ B_{ij}\in\mathbb{C},\ z_i\in\mathbb{C}.$$

При аналитическом представлении рационального распределения $f=(f^+,f^-)$ функция f^+ является аналитической при $|z|<1$, поэтому, если она рациональна, ее разложение на элементарные дроби имеет вид

$$f^+(z)=\sum_{0}^{m}A_k^+ z^k+\sum_{k=1}^{n^+}\sum_{j=1}^{p_k^+}\frac{B_{kj}^+}{(z-\xi_k)^j},\quad \text{где}\quad |\xi_k|\geqslant 1. \tag{10.12}$$

Рациональная функция f^- является аналитической при $|z|>1$ и стремится к нулю на бесконечности, поэтому ее разложение на элементарные дроби следующее:

$$f^-(z)=\sum_{k=1}^{n^-}\sum_{j=1}^{p_k^-}\frac{B_{kj}^-}{(z-\eta_k)^j},\quad \text{где}\quad |\eta_k|\leqslant 1. \tag{10.13}$$

Таким образом, умножение аппроксимаций, порожденных аналитическими представлениями рациональных распределений, сводится к вычислению произведений (в указанном выше смысле) слагаемых в приведенных формулах (10.12) и (10.13), т. е. элементарных дробей и z^k.

Как было отмечено ранее, для положительных распределений имеем

$$(f^+,0)\times(g^+,0)=(f^+g^+,0).$$

Соответственно,

$$(0,f^-)\times(0,g^-)=(0,f^-g^-).$$

Поэтому вопрос сводится к вычислению произведений положительных элементов на отрицательные. В рассматриваемом случае рациональных распределений это произведения вида $(f^+,0)\times(0,g^-)$, где f^+ есть элементарная дробь или функция z^k, а g^- есть элементарная дробь.

Для случая, когда $f^+=\dfrac{1}{z-\xi}$, $g^-=\dfrac{1}{z-\eta}$, такое произведение описано в лемме 10.1 и находится по формуле (10.6). Произведения элементарных дробей других степеней, т. е. когда $f^+=\dfrac{1}{(z-\xi)^n}$, $g^-=\dfrac{1}{(z-\eta)^m}$, вычисляются с помощью рекуррентных соотношений через произведения первых степеней, т. е. с помощью равенства (10.6). Например, при $n=1$, $m=2$:

$$\frac{1}{(z-\xi)^+}\frac{1}{(z-\eta)^{2-}}=\left[\frac{1}{(z-\xi)^+}\frac{1}{(z-\eta)^-}\right]\frac{1}{(z-\eta)^-}=\left(\frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\xi},\frac{c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\eta}\right)\times\left(0,\frac{1}{z-\eta}\right)=$$

$$=\left(\frac{c_1^2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\xi},\frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\eta}+\frac{c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{(z-\eta)^2}\right). \tag{10.14}$$

А при $n=2$, $m=1$

$$\frac{1}{(z-\xi)^{2+}}\frac{1}{(z-\eta)^-}=\left(\frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\xi},\frac{c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\eta}\right)\times\left(\frac{1}{z-\xi},0\right)=$$

$$=\left(\frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)}{(z-\xi)^2}+\frac{c_1(\varepsilon;\xi;\eta)c_2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\xi},\frac{c_2^2(\varepsilon;\xi;\eta)}{z-\eta}\right).$$

Значит, равенство (10.6) задает правило умножения распределений $\dfrac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, $\dfrac{1}{(z-\eta)^{m-}}$.

Правило умножения z^+ на $\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$ описано в лемме 10.2 и находится через соотношение (10.9). Тут и далее $r = 1-\varepsilon$. Как было показано ранее, из него получаем формулу умножения на степень z^+, соотношение (10.10), и формулы для умножения z на степени $\dfrac{1}{(z-\eta)^-}$, например,

$$z^+ \times \frac{1}{(z-\eta)^{2-}} = \Big[z^+\frac{1}{(z-\eta)^-}\Big]\frac{1}{(z-\eta)^-} = \Big(r^2, \frac{\eta r^2}{z-\eta}\Big) \times \Big(0, \frac{1}{z-\eta}\Big) = \Big(0, \frac{\eta r^2}{(z-\eta)^2} + \frac{r^2}{z-\eta}\Big).$$

Произведения других степеней определяются аналогично.

Таким образом, произведение элементов вида (10.11) вычисляется на основе соотношений (10.6), (10.9) и является элементом из $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$. Так как элементы вида (10.11) принадлежат любой алгебре, содержащей все мнемофункции $R_a(f)$, $f \in \mathcal{D}'_R(\mathbb{S}^1)$ и обобщенные числа, получаем, что $\mathcal{R}(\mathbb{S}^1)$ есть наименьшая такая подалгебра. □

Как отмечалось при описании общего подхода, наглядное описание произведения дает его асимптотическое разложение. Начнем с исследования поведения найденных выше произведений вида $\dfrac{1}{(z-\xi)^+} \times \dfrac{1}{(z-\eta)^-}$.

Утверждение 10.1. *Если $\xi \neq \eta$, то имеет место асимптотическое разложения произведения*

$$\frac{1}{(z-\xi)^+} \times \frac{1}{(z-\eta)^-} = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots,$$

где u_0 есть распределение с аналитическим представлением

$$u_0 = \Big(\frac{1}{\xi-\eta}\frac{1}{z-\xi}, \frac{1}{\eta-\xi}\frac{1}{z-\eta}\Big),$$

а распределение u_1 имеет аналитическое представление

$$u_1 = \Big(-\frac{2\xi}{(\xi-\eta)^2}\frac{1}{z-\xi}, \frac{2\eta}{(\xi-\eta)^2}\frac{1}{z-\eta}\Big).$$

Доказательство. Если $\xi \neq \eta$, то существует конечный предел коэффициентов $C_1(r;\xi;\eta)$ и $C_2(r;\xi;\eta)$ при $r \to 1$, т. е. их разложения начинаются с (конечного) числа, а именно

$$C_1(r;\xi;\eta) = \frac{r^2}{\xi-\eta r^2} = \frac{1}{\xi-\eta} - \frac{2\xi}{(\xi-\eta)^2}\varepsilon + \dots;$$

$$C_2(r;\xi;\eta) = \frac{1}{\eta r^2-\xi} = \frac{1}{\eta-\xi} + \frac{2\eta}{(\xi-\eta)^2}\varepsilon + \dots.$$

Поэтому при условии, что $\xi \neq \eta$, мнемофункция вида (10.7) ассоциирована с распределением u_0, имеющим аналитическое представление

$$u_0 = \Big(\frac{1}{\xi-\eta}\frac{1}{z-\xi}, \frac{1}{\eta-\xi}\frac{1}{z-\eta}\Big),$$

а второй член разложения в пространстве мнемофункции имеет вид $\varepsilon R_a(u_1)$, где u_1 имеет аналитическое представление

$$u_1 = \Big(-\frac{2\xi}{(\xi-\eta)^2}\frac{1}{z-\xi}, \frac{2\eta}{(\xi-\eta)^2}\frac{1}{z-\eta}\Big).$$

□

Здесь обратим внимание на то, что если $|\xi| > 1$, то $f(z) = \dfrac{1}{z-\xi}$ является гладкой функцией на окружности и первый член разложения u_0 есть произведение распределения $g = \dfrac{1}{(z-\eta)^-}$ на эту гладкую функцию в смысле умножения в пространстве распределений. Таким образом, здесь разность $R_a(fg) - R_a(f)R_a(g)$ отлична от нуля, но является бесконечно малой. Это еще раз показывает, что при рассматриваемом вложении нет согласованности с умножением в пространстве распределений (условие (7.8) не выполнено), но указанная разность ассоциирована с нулем, т. е. при переходе к алгебре мнемофункций умножение корректируется с помощью добавления бесконечно малых.

Если $|\xi| > 1$, а $|\eta| < 1$, то обе функции f и g являются гладкими на окружности, но из сказанного выше следует, что при рассматриваемом вложении условие Коломбо (7.10) согласованности с умножением гладких функций также не выполнено.

Обратим внимание также на случай, когда $\xi \neq \eta$, но при этом $|\xi| = 1$ и $|\eta| = 1$. Тогда оба распределения f и g имеют сингулярности на окружности, их произведение в смысле распределений не определено, но произведение в смысле мнемофункций ассоциировано с распределением u_0. Это является подтверждением общепринятого мнения, что если множества точек сингулярности двух распределений не пересекаются, то их произведение можно определить достаточно естественным образом. Однако следует отметить, что произведение может быть определено и в том случае, когда два распределения имеют общие особенности, например, если эти распределения положительны.

Качественно другую ситуацию имеем, если $\xi = \eta$, что возможно только в случае, когда $|\xi| = 1$ и $|\eta| = 1$. Тогда оба сомножителя имеют особенность в одной и той же точке.

Утверждение 10.2. *Произведение* $\dfrac{1}{(z-\xi)^+} \times \dfrac{1}{(z-\xi)^-}$ *имеет асимптотическое разложение*

$$\frac{1}{(z-\xi)^+} \times \frac{1}{(z-\xi)^-} = -\frac{1}{2\xi\varepsilon}\delta_\xi - \frac{3}{4\xi}\frac{1}{(z-\xi)^+} - \frac{1}{4\xi}\frac{1}{(z-\xi)^-} + o(1),$$

в котором главным членом является δ-функция с бесконечно большим коэффициентом.

Доказательство. В рассматриваемом случае коэффициенты $C_1(r)$ и $C_2(r)$ являются бесконечно большими при $r \to 1$ и имеют разложение

$$\begin{aligned} c_1(\varepsilon;\xi) &= \frac{(1-\varepsilon)^2}{\xi(1-(1-\varepsilon)^2)} = \frac{1}{2\xi\varepsilon} - \frac{3}{4\xi} + \frac{1}{8\xi}\varepsilon + \frac{3}{16\xi}\varepsilon^2 + \ldots; \\ c_2(\varepsilon;\xi) &= \frac{1}{\xi((1-\varepsilon)^2-1)} = -\frac{1}{2\xi\varepsilon} - \frac{1}{4\xi} - \frac{1}{8\xi}\varepsilon - \frac{1}{16\xi}\varepsilon^2 + \ldots. \end{aligned} \tag{10.15}$$

Отсюда получаем асимптотическое разложение для произведения

$$\frac{1}{(z-\xi)^+}\frac{1}{(z-\xi)^-} = c_1(\varepsilon;\xi)\frac{1}{(z-\xi)^+} + c_2(\varepsilon;\xi)\frac{1}{(z-\xi)^-} = \tag{10.16}$$

$$= \frac{1}{2\xi\varepsilon}\Big[\frac{1}{(z-\xi)^+} - \frac{1}{(z-\xi)^-}\Big] - \frac{3}{4\xi}\frac{1}{(z-\xi)^+} - \frac{1}{4\xi}\frac{1}{(z-\xi)^-} + o\Big(1\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2\xi\varepsilon}\delta_\xi - \frac{3}{4\xi}\frac{1}{(z-\xi)^+} - \frac{1}{4\xi}\frac{1}{(z-\xi)^-} + o(1).$$

□

11. Произведения, ассоциированные с распределениями

В общем случае произведение распределений f и g, порожденное заданным вложением, есть мнемофункция. В литературе особо выделяются пары распределений f и g, произведение которых ассоциировано с некоторым распределением u, так как тогда можно считать, что $f \times g = u$, т. е. произведением распределений является снова распределение. В общем случае вряд ли можно получить явное описание таких пар распределений. Но для пар рациональных распределений могут быть описаны все случаи, когда их произведение ассоциировано с распределением.

Как уже отмечалось, произведение рациональных распределений есть линейная комбинация произведений элементарных рациональных мнемофункций вида $\dfrac{1}{(z-\xi)^{n+}}$, $\dfrac{1}{(z-\eta)^{n-}}$ и z^{n+}. Согласно полученным выше утверждениям, каждое произведение $\dfrac{1}{(z-\xi)^{n+}} \times \dfrac{1}{(z-\eta)^{n-}}$ представляется в виде линейной комбинации элементарных рациональных мнемофункций с коэффициентами, зависящими от ε. При этом, если в соответствующее выражение для произведения входят члены вида $\dfrac{1}{(z-\xi)^{n+}} \times \dfrac{1}{(z-\xi)^{m-}}$, возникают слагаемые с бесконечно большими коэффициентами, которые не ассоциированы с распределениями. Однако такие слагаемые могут войти в окончательное представление для произведения несколько раз с разными коэффициентами. Таким образом, условие существования распределения, ассоциированного с соответствующим произведением, заключается в том, что сумма коэффициентов при каждом произведении указанного вида имеет конечный предел.

Отметим сразу один случай, когда это условие выполнено для произвольных мнемофункций. Если

$$f = f^+ + f^-, \quad g = t(f^+ - f^-), \text{ где } \quad t \in \mathbb{C}, \tag{11.1}$$

то $f \times g = t(f^+)^2 - t(f^-)^2$ и это произведение есть распределение, имеющее аналитическое представление $(t(f^+)^2, -t(f^-)^2)$.

В общем случае связь (11.1) между распределениями достаточна, но не является необходимой для того, чтобы произведение было ассоциировано с распределением. Сначала рассмотрим пример рациональных распределений, имеющих особенность только в одной точке, для которых условие (11.1) является и необходимым.

Теорема 11.1. *Пусть $f = (f^+, f^-)$, $g = (g^+, g^-)$, где*

$$f^\pm = \frac{A_1^\pm}{(z-1)^\pm} + \frac{A_2^\pm}{(z-1)^{2\pm}} \neq 0; \quad g^\pm = \frac{B_1^\pm}{(z-1)^\pm} + \frac{B_2^\pm}{(z-1)^{2\pm}}.$$

Произведение распределений f и g ассоциировано с некоторым распределением u_0 тогда и только тогда, когда при некотором t для коэффициентов выполнены соотношения

$$B_1^+ = tA_1^+, \quad B_2^+ = tA_2^+, \quad B_1^- = -tA_1^-, \quad B_2^- = -tA_2^-. \tag{11.2}$$

При выполнении этих условий распределение u_0 имеет аналитическое представление

$$u_0 = (f^+g^+, f^-g^-).$$

Доказательство. Имеем

$$f \times g = (f^+ + f^-) \times (g^+ + g^-) = f^+g^+ + f^-g^- + f^+g^- + g^+f^-.$$

Сумма $f^+g^+ + f^-g^-$ ассоциирована с распределением u_0, имеющим аналитическое представление $u_0 = (f^+g^+, f^-g^-)$, а бесконечно большие слагаемые появляются только в сумме двух последних слагаемых, которая имеет вид

$$f^+g^- + g^+f^- = \frac{A_2^+B_2^- + A_2^-B_2^+}{(z-1)^{2+}(z-1)^{2-}} +$$

$$+ \frac{A_2^+B_1^- + A_1^-B_2^+}{(z-1)^{2+}(z-1)^-} + \frac{A_1^+B_2^- + A_2^-B_1^+}{(z-1)^+(z-1)^{2-}} + \frac{A_1^+B_1^- + A_1^-B_1^+}{(z-1)^+(z-1)^-}.$$

Полученное выражение есть нуль, если все числа в числителях дробей являются нулями:

$$\begin{cases} A_2^+B_2^- + A_2^-B_2^+ = 0, \\ A_2^+B_1^- + A_1^-B_2^+ = 0, \\ A_1^+B_2^- + A_2^-B_1^+ = 0, \\ A_1^+B_1^- + A_1^-B_1^+ = 0. \end{cases} \tag{11.3}$$

Систему (11.3) можно исследовать следующим образом. Рассмотрим многочлены

$$f^+(x) = A_1^+x + A_2^+x^2; \quad f^-(y) = A_1^-y + A_2^-y^2;$$

$$g^+(x) = B_1^+x + B_2^+x^2; \quad g^-(y) = B_1^-y + B_2^-y^2.$$

Тогда система (11.3) равносильна условию, что

$$f^+(x)g^-(y) + g^+(x)f^-(y) = 0,$$

из которого, разделяя переменные, получаем условия пропорциональности многочленов

$$\frac{g^+(x)}{f^+(x)} = -\frac{g^-(y)}{f^-(y)} = t = const.$$

Далее покажем, что если равенства (11.3) не выполнены, то разложение $f^+g^- + g^+f^-$ содержит члены с бесконечно большими коэффициентами и, следовательно, не ассоциировано с каким-нибудь распределением. Действительно, согласно правилу умножения

$$f^+g^- + g^+f^- = (A_2^+B_2^- + A_2^-B_2^+)\left(\frac{c_1^2(\varepsilon)}{(z-1)^{2+}} + \frac{2c_1^2(\varepsilon)c_2(\varepsilon)}{(z-1)^+} + \frac{2c_1(\varepsilon)c_2^2(\varepsilon)}{(z-1)^-} + \frac{c_2^2(\varepsilon)}{(z-1)^{2-}}\right) +$$

$$+\Big[c_2(\varepsilon)(A_2^+B_1^- + A_1^-B_2^+) + c_1(\varepsilon)(A_1^+B_2^- + A_2^-B_1^+)\Big]\left(\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^+} + \frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^-}\right) +$$

$$+(A_1^+B_1^- + A_1^-B_1^+)\left(\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^+} + \frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^-}\right) + (A_2^+B_1^- + A_1^-B_2^+)\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^{2+}} + (A_1^+B_2^- + A_2^-B_1^+)\frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^{2-}}.$$

Здесь слагаемые

$$\frac{2c_1(\varepsilon)c_2^2(\varepsilon)}{(z-1)^-} \quad \text{и} \quad \frac{2c_1^2(\varepsilon)c_2(\varepsilon)}{(z-1)^+}$$

линейно независимы и, так как коэффициенты $c_1(\varepsilon)$ и $c_2(\varepsilon)$ ведут себя как $\frac{1}{\varepsilon}$, только эти слагаемые имеют наибольшую скорость роста $\frac{1}{\varepsilon^3}$. Поэтому для существования ассоциированного распределения необходимо обращение в нуль коэффициента перед этими слагаемыми:

$$A_2^+B_2^- + A_2^-B_2^+ = 0.$$

Аналогично, слагаемые

$$(A_2^+B_1^- + A_1^-B_2^+)\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^{2+}} + (A_1^+B_2^- + A_2^-B_1^+)\frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^{2-}}$$

растут как $\frac{1}{\varepsilon}$, линейно независимы между собой и с остальными слагаемыми, поэтому необходимо, чтобы

$$A_2^+B_1^- + A_1^-B_2^+ = 0, \quad A_1^+B_2^- + A_2^-B_1^+ = 0.$$

При выполнении этих условий остается только выражение

$$\frac{c_1(\varepsilon)}{(z-1)^+} + \frac{c_2(\varepsilon)}{(z-1)^-},$$

растущее как $\frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому для существования распределения, ассоциированного с произведением, коэффициент при этом выражении также должен обратиться в нуль:

$$A_1^+B_1^- + A_1^-B_1^+ = 0.$$

Таким образом получаем, что условие (11.2) необходимо и достаточно для того, чтобы рассматриваемое произведение было ассоциировано с распределением u_0. □

Аналогично получаем необходимые и достаточные условия существования ассоциированного распределения для произведения произвольной пары рациональных распределений.

Пусть задан конечный набор комплексных чисел $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$, где $|z_k| = 1$. Как показано выше, вопрос о существовании ассоциированного распределения для произведения сводится к исследованию произведений рациональных распределений f и g с аналитическими представлениями вида

$$f = \Big(\sum_{k=1}^m f_k^+(z), \sum_{k=1}^m f_k^-(z)\Big), \tag{11.4}$$

где

$$f_k^+(z) = \sum_{j=1}^p \frac{A_{kj}^+}{(z-z_k)^j}, \quad f_k^-(z) = \sum_{j=1}^p \frac{A_{ij}^-}{(z-z_k)^j},$$

и

$$g = \Big(\sum_{k=1}^m g_k^+(z), \sum_{k=1}^m g_k^-(z)\Big), \tag{11.5}$$

где

$$g_k^+(z) = \sum_{j=1}^{p} \frac{B_{kj}^+}{(z-z_k)^j}, \quad g_k^-(z) = \sum_{j=1}^{p} \frac{B_{ij}^-}{(z-z_k)^j}.$$

Теорема 11.2. *Произведение fg рациональных мнемофункций* (11.4) *и* (11.5) *ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда для каждого $k, 1 \leqslant k \leqslant m$, существует число t_k, такое, что*

$$B_{kj}^+ = t_k A_{kj}^+, \quad B_{kj}^- = -t_k A_{kj}^-.$$

В книге [7] приведены только три примера конечных произведений, т. е. когда результатом произведения распределений является распределение. На окружности аналогами этих примеров будут произведения

$$\Big(\delta_1 + 2i\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)\Big)\Big(\delta_1 - 2i\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)\Big), \quad \delta_1\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big), \quad \Big(\delta_1 \pm 2\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big)\Big)^2.$$

Все эти произведения удовлетворяют полученному в теореме условию, при этом можно привести много других примеров.

В заключение этого раздела рассмотрим пример Шварца на окружности и выясним, что представляет входящее в этот пример произведение распределений $\mathcal{P}\Big(\dfrac{1}{z-1}\Big)$, $z-1$ и δ_1. При умножении в пространстве распределений такое произведение принимает разные значения при разной расстановке скобок. А именно

$$\Big\{\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big) \times (z-1)\Big\} \times \delta_1 = 1 \times \delta_1 = \delta_1,$$

но при этом

$$\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big) \times \{(z-1) \times \delta_1\} = \mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big) \times 0 = 0.$$

А при перестановке порядка сомножителей получаем выражение, которое не определено

$$\Big\{\mathcal{P}\Big(\frac{1}{z-1}\Big) \times \delta_1\Big\} \times (z-1).$$

В силу формул (10.1) и (10.2) получаем, что

$$R_a\Big(\mathcal{P}(\frac{1}{z-1})\Big)R_a((z-1))R_a(\delta_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\frac{z}{r}-1} - \frac{1}{rz-1}\Big) - \varepsilon\Big(\frac{1}{\frac{z}{r}-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{z}{r}-1)^2}\Big) + \frac{\varepsilon^2}{2}\Big(\frac{1}{\frac{z}{r}-1} + \frac{1}{(\frac{z}{r}-1)^2}\Big),$$

откуда видно, что асимптотическое разложение этого произведения имеет вид

$$\frac{1}{2}\delta_1 - \varepsilon\frac{1}{(z-1)^-} - \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{(z-1)^{2-}} + o(\varepsilon).$$

Таким образом, произведение из примера Шварца ассоциировано с $\dfrac{1}{2}\delta_1$.

12. Об уравнениях с обобщенными коэффициентами

12.1. Аппроксимационный подход. Рассмотрение вложения сразу всего пространства распределений в алгебру мнемофункций представляет интерес в первую очередь с теоретической точки зрения как решение поставленной Л. Шварцем проблемы. Но в конкретных задачах, в которых появляются произведения распределений, возникают и другие вопросы, связанные с теорией мнемофункций. Среди таких задач в первую очередь отметим теорию нелинейных уравнений и дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами.

С точки зрения приложений в указанных задачах основная сложность заключается в том, что первично поставленная задача некорректна — математическая модель исследуемого процесса слишком грубая, это проявляется в том, что для соответствующего уравнения не определено понятие решения. Общий подход основан на уточнении постановки задачи с помощью добавления бесконечно малых, которые в первичной постановке не учитывались. Такое уточнение есть внесение дополнительной информации, которая извлекается из предметной области и обычно не содержится в первично поставленной задаче.

Например, в теории нелинейных уравнений специальный интерес представляют разрывные решения типа ударных волн [12, 37]. Соответствующие уравнения содержат нелинейные слагаемые, например, вида $u'_x u$, а для разрывной функции u такое произведение не определено, тем самым не определено понятие разрывного решения.

Уточнение постановки задачи заключается в добавлении к нелинейному уравнению членов, содержащих малый параметр ε. Решение такого возмущенного уравнения есть семейство гладких функций u_ε, т. е. некоторая мнемофункция. Решением исходного уравнения объявляется предел решений u_ε при $\varepsilon \to 0$, т. е. распределение u, ассоциированное с этой мнемофункцией.

Таким образом, в этих задачах способ аппроксимации искомого решения (семейство u_ε) возникает из уточненного уравнения и диктуется физическим смыслом задачи. В классических примерах из гидродинамики исходное уравнение обычно соответствует случаю идеальной жидкости, а добавочный член отражает учет малой (порядка ε) вязкости, поэтому такой подход называют *методом исчезающей вязкости*.

Общая схема аппроксимационного подхода при исследовании линейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами также содержит уточнение постановки задачи и заключается в следующем. Пусть L есть линейное дифференциальное выражение с обобщенными коэффициентами. Это выражение формально — оно содержит слагаемые, которые не определены, и задача заключается в построении оператора в подходящем функциональном пространстве, соответствующего рассматриваемому L, что эквивалентно введению понятия решения для уравнения $Lu = f$. Обычно исходное выражение непосредственно задает оператор A_0, определенный только на некотором довольно узком подпространстве, а задача заключается в построении расширения A этого оператора. Исследованию свойств соответствующих операторов A для различных типов дифференциальных выражений с обобщенными коэффициентами посвящена обширная литература, но мы здесь ограничимся только обсуждением некоторых вопросов, связанных с построением таких расширений.

Аппроксимационный подход к исследованию рассматриваемых уравнений заключается в замене коэффициентов, являющихся обобщенными функциями, на ассоциированные с ними мнемофункции. Здесь выбор соответствующих мнемофункций есть внесение дополнительной информации, уточняющей постановку задачи. Получаем семейство L_ε (корректно определенных) дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами в подходящем пространстве. Поскольку для каждого распределения существует много ассоциированных мнемофункций, возникает много различных семейств операторов L_ε, ассоциированных с исходным выражением. Во многих случаях решения u_ε соответствующих уравнений $L_\varepsilon u_\varepsilon = f$ сходятся к некоторой функции (или распределению) u. Тогда u естественно считать *решением исходного уравнения, соответствующим выбранному способу аппроксимации коэффициентов*.

С более общей точки зрения здесь удобнее исследовать семейство операторов со спектральным параметром $L_\varepsilon - \lambda I$. Тогда решения соответствующих уравнений есть

$$u_\varepsilon = (L_\varepsilon - \lambda I)^{-1} f$$

и задача сводится к доказательству сильной сходимости резольвент $(L_\varepsilon - \lambda I)^{-1}$. При этом предел резольвент есть резольвента некоторого оператора A, который называется *пределом семейства L_ε в смысле резольвентой сходимости*. Рассмотрение операторов со спектральным параметром позволяет получить более общие результаты, так как при конкретном фиксированном значении λ_0 может оказаться, что это число является спектральным значением для A, и тогда не существует предел семейства функций $(L_\varepsilon - \lambda_0 I)^{-1} f$.

Преимущество такого подхода заключается в том, что обычно семейство L_ε не сходится в пространстве операторов и оператор A нельзя определить как предел L_ε при других типах сходимости.

Основная техническая сложность при этом заключается, разумеется, в исследовании поведения семейства u_ε решений ассоциированного уравнения в пространстве мнемофункций и нахождении предела — оператора A. Здесь в первую очередь возникают следующие вопросы.

1. Для каких формальных дифференциальных выражений L с обобщенными коэффициентами и каких аппроксимаций этих коэффициентов существует предел семейства L_ε в смысле резольвентной сходимости?
2. Какие операторы могут быть пределами аппроксимирующих семейств при разных способах аппроксимации, и в каких случаях предел не зависит от выбранного способа аппроксимации коэффициентов?

12.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Для пояснения возникающих здесь проблем и возможных вариантов ответов рассмотрим наиболее простой случай — линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$u' - au = f \tag{12.1}$$

с обобщенным коэффициентом a. На этом модельном примере удобно продемонстрировать возникающие эффекты и отличия от классической теории дифференциальных уравнений, причем можно результаты сформулировать явно. Для уравнений более высокого порядка и уравнений с частными производными имеют место аналогичные эффекты, но получение соответствующих утверждений требует значительно более тонких вычислений.

Напомним, что решение однородного уравнения (12.1) с интегрируемым коэффициентом a задается формулой

$$V(x) = \exp\Big[\int_{-1}^{x} a(s)ds\Big], \tag{12.2}$$

а решение задачи Коши для неоднородного уравнения с условием $u(-1) = M$ — формулой

$$u(x) = MV(x) + V(x)\int_{-1}^{x} \frac{1}{V(t)} f(t)dt. \tag{12.3}$$

Сразу обратим внимание на то, что нахождение V состоит из двух шагов: нахождения первообразной $g(x)$ от a и вычисления экспоненты $\exp g(x)$, а формула (12.3) дополнительно включает умножение и интегрирование. Поэтому если a и f являются обобщенными функциями, то для получения аналогичной формулы нужно придать смысл этим операциям. Для обобщенной функции a первообразная (такое распределение, что $g' = a$) существует. Поэтому придание смысла формуле (12.2), т. е. введение понятия решения для однородного уравнения с обобщенным коэффициентом, связано с определением экспоненты от распределения g.

Согласно общему подходу будем вместо распределений a и f рассматривать их аппроксимации гладкими функциями a_ε и f_ε. Получаем уравнение с малым параметром (уравнение в пространстве мнемофункций)

$$u_\varepsilon' - a_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon, \tag{12.4}$$

для которого решение задачи Коши есть

$$u_\varepsilon(x) = M\exp\Big[\int_{-1}^{x} a_\varepsilon(s)ds\Big] + \exp\Big[\int_{-1}^{x} a(s)ds\Big]\int_{-1}^{x}\exp\Big[-\int_{-1}^{t} a_\varepsilon(s)ds\Big] f_\varepsilon(t)dt. \tag{12.5}$$

Если это семейство гладких функций u_ε сходится (в пространстве распределений или в заданном функциональном пространстве), то его предел u будем называть *решением исходного уравнения, порожденным выбранным способом аппроксимации*. Покажем на примерах, что возможно много качественно различных случаев поведения семейства решений (12.5).

Пример 12.1. Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u' - b\delta u = f, \quad b = const,$$

в пространстве $L_2([-1,1])$. Задача заключается в определении понятия решения для этого уравнения, содержащего формальное выражение с обобщенным коэффициентом.

Так как $\delta = 0$ вне любой окрестности нуля, решение однородного уравнения, при любом его разумном определении как функции, должно иметь вид

$$u(x) = \begin{cases} C, & x < 0; \\ C_1, & x > 0, \end{cases} \tag{12.6}$$

или, в другой записи,

$$u(x) = C + (C_1 - C)\Theta(x).$$

При подстановке такой функции в уравнение возникает произведение $\delta\Theta$, которое не определено, и из уравнения нельзя найти C_1. Это еще раз показывает, что в рамках классической теории понятие решения для данного уравнения не определено.

Заменим δ-функцию на ее аппроксимацию вида $\varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\varphi\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$. Ввиду того, что для малых ε носители функций $\varphi_\varepsilon(x)$ будут содержаться в отрезке $[-1, 1]$, обозначим

$$\Phi(x) = \int\limits_{-1}^{x} \varphi(t)dt,$$

и тогда решение уравнения с $\varphi_\varepsilon(x)$ есть

$$V_\varepsilon(x) = C \exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big].$$

Из этого выражения видно, что $V_\varepsilon(x)$ сходятся к функции

$$V(x) = C\big[1 + (e^b - 1)\Theta(x)\big]. \tag{12.7}$$

Таким образом, решением однородного уравнения является кусочно постоянная функция (12.7), удовлетворяющая условию на скачок в точке 0, зависящему от коэффициента b:

$$u(+0) = e^b u(-0).$$

Обратим внимание на то, что первообразные для δ есть обычные функции вида $g(x) = \Theta(x) + \widetilde{C}$, и, подставляя их в (12.2), т. е. вычисляя экспоненту формально, получаем те же самые решения.

Замечание 12.1. При подстановке (12.7) в уравнение получаем равенство

$$C(e^b - 1)\delta = bC[\delta + (e^b - 1)\delta\Theta(x)],$$

из которого находим произведение

$$\delta\Theta = \frac{e^b - 1 - b}{b(e^b - 1)}\,\delta.$$

Обратим внимание на то, что полученное значение для $\delta\Theta$ зависит от коэффициента b уравнения. Это объясняется тем, что в приведенных вычислениях используется аппроксимация для $\Theta(x)$, которая диктуется рассматриваемым уравнением и аппроксимацией δ, что и приводит к зависимости результата от b. Это рассуждение еще раз показывает, что нельзя однозначно определить произведение $\delta\Theta$.

Если f есть функция из $L_2[-1, 1]$, то решения аппроксимирующего уравнения

$$u' - b\frac{1}{\varepsilon}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) = f,$$

удовлетворяющие условию $u(-1) = C$, суть

$$u_\varepsilon(x) = C \exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] + \exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] \int\limits_{-1}^{x} \exp\Big[-b\Phi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big] f(t)dt.$$

Здесь тоже можно перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$; в результате получаем, что

$$u_\varepsilon(x) \to u(x) = \begin{cases} C + \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt, & x < 0; \\ Ce^b + \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt, & x > 0. \end{cases}$$

Если обозначить

$$u_0(x) = C + \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt,\ x \in [-1,1],$$

то полученное решение можно записать в виде

$$u(x) = u_0(x) + u_0(-1)(e^b - 1)\Theta(x).$$

Рассмотрим, какой оператор ставится в соответствие формальному выражению $Lu = u' - b\delta u$ в результате проведенных вычислений.

Оператор дифференцирования определен на подпространстве $H^1[-1,1] \subset L_2[-1,1]$, состоящем из абсолютно непрерывных функций, у которых производные принадлежат $L_2[-1,1]$. Для такой функции $\delta u = u(0)\delta$, и это произведение принадлежит $L_2[-1,1]$ только в случае $u(0) = 0$. Таким образом, формальное выражение задает оператор A_0 в $L_2[-1,1]$, определенный только на подпространстве $D(A_0) = \{u \in H^1[-1,1] : u(0) = 0\}$ и действующий как дифференцирование. Поэтому любой оператор, который естественно поставить в соответствие формальному выражению, должен быть некоторым расширением A_0.

Полученная выше формула решения означает, что в данном случае мы формальному выражению $Lu = u' - b\delta u$ поставили в соответствие оператор A_b, определенный на подпространстве $D(A_b) \subset H^1[-1,0] \oplus H^1[0,1]$ вида

$$D(A) = \big\{u(x) = u_0(x) + u_0(-1)(e^b - 1)\Theta(x) : u_0 \in H^1[-1,1]\big\}$$

и действующий по формуле $A_b u(x) = u_0'(x)$.

Обратим внимание на два обстоятельства. Прежде всего заметим, что в данном примере оператор A_b не зависит от выбранного способа аппроксимации δ-функции. Также отметим, что построенный оператор не является замыканием A_0.

Рассмотрим, что изменится, если строить оператор в немного более широком пространстве, а именно, в пространстве

$$F[-1,1] = \{f + M\delta; f \in L_2[-1,1],\ M \in \mathbb{C}\},$$

содержащем дельта-функцию. Пусть $\psi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$ есть аппроксимация δ из правой части уравнения, порожденная функцией $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда решение аппроксимирующего уравнения

$$u' - b\varphi_\varepsilon u = f + M\psi_\varepsilon,$$

удовлетворяющие условию $u(-1) = C$, есть

$$u_\varepsilon(x) = C\exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] + \exp\Big[b\Phi\Big(\frac{s}{\varepsilon}\Big)\Big]\int\limits_{-1}^{x}\exp\Big[-b\Phi\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big]f(t)dt +$$

$$+ M\exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\int\limits_{-1}^{x}\exp\Big[-b\Phi\Big(\frac{s}{\varepsilon}\Big)\Big]\frac{1}{\varepsilon}\psi\Big(\frac{s}{\varepsilon}\Big)ds.$$

Сделав замену переменных $t = \dfrac{s}{\varepsilon}$ в интеграле из последнего слагаемого, получаем для него выражение

$$h_\varepsilon(x) = M\exp\Big[b\Phi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\int\limits_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{x}{\varepsilon}}\exp[-b\Phi(t)]\psi(t)dt,$$

в котором можно перейти к пределу:

$$h_\varepsilon(x) \to h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ Me^b\Gamma, & x > 0, \end{cases}$$

где

$$\Gamma = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp[-b\Phi(t)]\psi(t)dt.$$

Таким образом, решения u_ε сходятся к функции

$$u(x) = \begin{cases} C + \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt, & x < 0; \\ Ce^b + Me^b\Gamma + \int\limits_{-1}^{x} f(t)dt, & x > 0. \end{cases}$$

С операторной точки зрения здесь формальному выражению поставлен в соответствие оператор A в пространстве $F[-1,1]$ с областью определения

$$D(A) = H^1[-1,0] \oplus H^1[0,1],$$

каждая функция u из которой представляется в виде

$$u = u_0 + \lambda\Theta = u_0 + u_0(-1)(e^b - 1)\Theta + \mu\Theta, \text{ где } \mu = \lambda - u_0(-1)(e^b - 1), \ u_0 \in H^1[-1,1].$$

Действие оператора задается формулой

$$Au = u_0' + \frac{\mu}{e^b\Gamma}\delta.$$

Прежде всего отметим принципиальное отличие — в результат входит число Γ, которое зависит от способов аппроксимации коэффициента и правой части. Таким образом, при определении понятия решения уравнения в пространстве L_2 использование мнемофункций играло техническую роль, но в более широком пространстве, включающем распределения, уже само решение зависит от способов аппроксимации.

Пример 12.2. Что изменится, если рассмотреть уравнение

$$u' - b\delta' u = 0, \quad b = const,$$

в котором коэффициент есть производная δ-функции?

Так как первообразная для δ' есть распределение δ, то формальное решение, удовлетворяющее условию $u(-1) = C$, задается согласно формуле (12.2) выражением вида $Ce^{b\delta}$, которое не определено. Это указывает на то, что здесь могут быть препятствия к построению решения в каком-либо смысле.

Заменив δ' на ее аппроксимацию $\delta_\varepsilon'(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\varphi'\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, получаем решения аппроксимирующего однородного уравнения

$$V_\varepsilon(x) = C\exp\Big[b\frac{1}{\varepsilon}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big].$$

Это семейство функций вне любой окрестности нуля равномерно сходится к постоянной C. Но при этом семейство $V_\varepsilon(x)$ может экспоненциально возрастать в окрестности точки 0 и не сходится к постоянной C в пространстве распределений.

Ограничимся здесь выводом, что уравнения, коэффициенты которых имеют больший порядок сингулярности, устроены сложнее, и для их исследования нужны другие подходы.

Пример 12.3. Классические решения дифференциального уравнения

$$u' + \frac{1}{x}u = 0 \tag{12.8}$$

суть функции вида

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{C}{x}, & x < 0; \\ \dfrac{C_1}{x}, & x > 0. \end{cases} \tag{12.9}$$

Обратим внимание на то, что для этого уравнения решение задачи Коши с условием $u(-1) = -C$ есть $u(x) = \dfrac{C}{x}$ при $x < 0$. Это решение уходит на бесконечность при $x \to -0$ и в классической теории дифференциальных уравнений нет методов, позволяющих естественным образом продолжить это решение на положительную полуось.

Рассмотрим, что можно считать решением уравнения (12.8) с точки зрения теории мнемофункций.

Прежде всего напомним, что функции $\dfrac{1}{x}$ соответствует целое семейство распределений вида $a = P\Big(\dfrac{1}{x}\Big) + M\delta$, поэтому с уравнением (12.8) связано семейство уравнений с обобщенными коэффициентами. Первое уточнение постановки задачи заключается в том, что мы должны выбрать одно из этих распределений a и рассмотреть соответствующее формальное уравнение.

Для рассматриваемого распределения a первообразная есть локально интегрируемая функция

$$g(x) = \ln|x| + M\Theta(x),$$

т. е. это распределение имеет первый порядок сингулярности. Тогда формальным решением уравнения (12.8) в пространстве распределений является функция

$$u(x) = -C\exp[-g(x) + g(-1)] = \begin{cases} C\dfrac{1}{x}, & x < 0; \\ -Ce^{-M}\frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

Это функция вида (12.9), у которой $C_1 = -Ce^{-M}$. Обратим внимание, что наиболее естественное решение, у которого $C_1 = C$, получаем в двух случаях: когда $a = P\Big(\dfrac{1}{x}\Big) \pm i\pi\delta$.

Можно ли построенную функцию u считать решением в смысле теории распределений или теории мнемофункций? Прежде всего обратим внимание на то, что этой функции, как и $\dfrac{1}{x}$, соответствует целое семейство распределений. Поэтому для получения корректного ответа нужно выяснить, какое распределение U из этого семейства соответствует построенному решению u и можно ли говорить о выполнении равенства

$$U' + aU = 0, \tag{12.10}$$

причем следует уточнить, в каком смысле это равенство понимается. В частности, так как U' является распределением, равенство может быть выполнено только в особых случаях, когда a и U есть пара сингулярных распределений, для которых произведение снова является распределением.

Точный смысл сказанному придается с помощью общего подхода, согласно которому обобщенный коэффициент a следует заменить на его аппроксимацию гладкими функциями a_ε, рассмотреть соответствующее уравнение

$$u'_\varepsilon(x) + a_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = 0 \tag{12.11}$$

и исследовать поведение семейства его решений

$$u_\varepsilon(x) = -C\exp\Big[\int\limits_{-1}^{x} a_\varepsilon(s)ds\Big].$$

Если $u_\varepsilon \to U$, то из уравнения получаем, что $a_\varepsilon u_\varepsilon \to -U'$, т. е. произведение заданных аппроксимаций для a и U ассоциировано с распределением.

Наиболее просто исследовать сходимость, если ограничиться рассмотрением аппроксимаций, порожденных аналитическими представлениями распределений на прямой. Для рассматриваемых a такие аппроксимации имеют вид

$$a_\varepsilon(x) = \lambda\frac{1}{x+i\varepsilon} + (1-\lambda)\frac{1}{x-i\varepsilon}.$$

На прямой справедлив аналог теоремы 11.1, согласно которому произведение aU ассоциировано с некоторым распределением тогда и только тогда, когда

$$U_\varepsilon(x) = -C\Big[\lambda\frac{1}{x+i\varepsilon} - (1-\lambda)\frac{1}{x-i\varepsilon}\Big]$$

и в этом случае

$$a_\varepsilon(x)u_\varepsilon(x) = -C\Big[\lambda^2\frac{1}{(x+i\varepsilon)^2} - (1-\lambda)^2\frac{1}{(x-i\varepsilon)^2}\Big].$$

Так как при этом
$$U'_\varepsilon(x) = -C[-\lambda\frac{1}{(x+i\varepsilon)^2} + (1-\lambda)\frac{1}{(x-i\varepsilon)^2}],$$
равенство $U' + aU = 0$ выполнено только если $\lambda = \lambda^2$. При $\lambda = 1$ получаем $a_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x+i\varepsilon}$, и это есть аппроксимация распределения $P\Big(\dfrac{1}{x}\Big) - i\pi\delta$; при $\lambda = 0$ имеем $a_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x-i\varepsilon} \to P\Big(\dfrac{1}{x}\Big) + i\pi\delta$.

Таким образом, в пространстве рациональных распределений решения уравнения (12.10) при рассматриваемых распределениях a существуют только для двух распределений $a = P\Big(\dfrac{1}{x}\Big) \pm i\pi\delta$, и тогда $U = Ca$.

Пример 12.4. В рассматриваемый круг вопросов вписываются также уравнения, в которых коэффициенты совершают высокочастотные колебания. Мы упоминаем здесь эту тематику только чтобы отметить, что теория усреднения для уравнений с высокочастотными слагаемыми имеет идейные связи с теорией мнемофункций. В теории уравнений с высокочастотными слагаемыми обычно рассматриваются дифференциальные уравнения с малым параметром, а основные результаты утверждают, что соответствующие решения u_ε сходятся к решению т. н. усредненного дифференциального уравнения. В простых случаях усредненное уравнение строится по исходному уравнению прямым усреднением [22] (например, переменные коэффициенты заменяются на их средние значения), но наиболее интересны ситуации, когда усредненное уравнение получается с помощью более сложной процедуры [16, 19, 23] (коэффициенты заменяются на постоянные, отличные от средних значений).

Рассмотрим простейшее уравнение из этого класса. Пусть a есть гладкая периодическая функция с периодом τ. Тогда мнемофункция $a_\varepsilon(x) = a\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, совершающая высокочастотные колебания, сходится в смысле распределений к среднему значению функции a — постоянной
$$A = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau a(s)ds.$$
Поэтому уравнение
$$u'_\varepsilon(x) - a\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)u_\varepsilon(x) = f(x) \tag{12.12}$$
можно рассматривать как одно из уравнений в пространстве мнемофункций, ассоциированных с усредненным уравнением
$$u'(x) - Au(x) = f(x)$$
с постоянным коэффициентом A.

Возникающие здесь эффекты продемонстрируем на примере решения задачи Коши с условием $u(0) = 1$ для однородного уравнения.

Обозначив
$$F_\varepsilon(x) = \int_0^x a\Big(\frac{s}{\varepsilon}\Big)ds,$$
получаем, что
$$V_\varepsilon(x) = \exp F_\varepsilon(x),$$
и вопрос заключается в описании асимптотического поведения этого семейства функций. Введенная функция имеет вид $F_\varepsilon(x) = Ax + \varepsilon\omega\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, где $\omega(x)$ есть периодическая функция с периодом τ и нулевым средним. Например, если $a_\varepsilon(x) = 1 + \cos\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, то $F_\varepsilon(x) = x + \varepsilon\sin\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$. Поэтому решение можно представить в виде
$$u_\varepsilon(x) = \exp[Ax]\exp\Big[\varepsilon\omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] = \exp[Ax]\Big[1 + \varepsilon\omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \frac{1}{2}\Big[\varepsilon\omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]^2 + \dots\Big],$$
откуда получаем простейший случай утверждений из теории усреднения для дифференциальных уравнений [22]: решения $u_\varepsilon(x)$ сходятся равномерно на каждом конечном промежутке к функции $\exp Ax$ — решению задачи Коши для усредненного уравнения.

Но поведение решений меняется, если амплитуда высокочастотных колебаний при $\varepsilon \to 0$ растет. Пусть, например,

$$a_\varepsilon(x) = A + \frac{1}{\varepsilon^d} a_0\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$

где a_0 периодическая функция с нулевым средним значением. Тогда

$$F_\varepsilon(x) = Ax + \frac{1}{\varepsilon^{d-1}} \omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big),$$

где $\omega(x)$ есть периодическая функция с периодом τ и нулевым средним. Здесь при $d < 1$, как и выше, решения $u_\varepsilon(x)$ сходятся к $\exp Ax$, при $d > 1$ множитель $\dfrac{1}{\varepsilon^{d-1}}$ растет и предела не существует. Поэтому наиболее интересным является случай показателя $d = 1$. Тогда

$$u_\varepsilon(x) = \exp Ax \exp \omega\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Особенность этого случая заключается в том, что здесь семейство периодических функций $\exp \omega\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$ сходится в смысле распределений к среднему значению функции $\exp \omega(x)$, а это среднее значение больше, чем 1.

Например, если $a(x) = \dfrac{1}{\varepsilon} \cos x$, то

$$u_\varepsilon(x) = \exp\Big[\sin\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]$$

и среднее значение есть

$$\widetilde{A} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \exp[\sin(x)]dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \int\limits_{-\pi}^{\pi} [\sin(x)]^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{64} + \dots .$$

Таким образом, в этом примере наблюдаем качественно новый эффект: решение задачи Коши для усредненного уравнения есть $u(x) \equiv 1$, а решения u_ε сходятся в пространстве распределений к некоторой постоянной $\widetilde{A} > 1$.

Рассмотрим в качестве еще одного примера задачу Коши с условием $u(0) = 0$ для уравнения

$$u'_\varepsilon(x) - a_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) = 1$$

с $a_\varepsilon(x) = 1 + \dfrac{1}{\varepsilon} \cos\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$. Здесь решение задачи Коши для уравнения

$$u'(x) - u(x) = 1,$$

в котором коэффициент заменен на его среднее значение, есть $u(x) = e^x - 1$. При этом

$$u_\varepsilon(x) = \exp\Big[x + \sin\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] \int\limits_0^x \exp\Big[-x - \sin\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\Big] dt,$$

и можно показать, что это семейство сходится в пространстве распределений к $\widetilde{A}^2(e^x - 1)$. Поскольку $\widetilde{A} > 1$, то построенное решение растет быстрее, чем решение задачи Коши для формально усредненного уравнения.

12.3. Оператор Шредингера с точечным взаимодействием. Среди дифференциальных выражений с обобщенными коэффициентами особую роль играют выражения вида

$$-\Delta + \sum_{y \in Y} a_y \delta_y,$$

где Δ — лапласиан в $\mathbb{R}^d$, Y — дискретное (конечное или счетное) подмножество в $\mathbb{R}^d$, δ_y — функция Дирака, сосредоточенная в точке y. Такие выражения эвристически описывают квантово-механические системы, порожденные точечными источниками, расположенными в точках y, где коэффициенты a_y суть т. н. константы связи, характеризующие интенсивность соответствующих источников. История вопроса и обширная библиография содержатся в известной монографии [1].

Ограничимся несколькими замечаниями, поясняющими связь рассматриваемого вопроса с теорией мнемофункций. Первой математически строгой работой, посвященной построению по формальному выражению $-\Delta + a_y\delta_y$ самосопряженного оператора в $L_2(\mathbb{R}^3)$, была статья Березина и Фаддеева [8].

Пусть $N_y \subset L_2(\mathbb{R}^d$ есть подпространство, состоящее из гладких функций, обращающихся в нуль в некоторой окрестности точки y. На N_y оператор, который может соответствовать формальному выражению $-\Delta + a_y\delta_y$, должен совпадать с $-\Delta$, и, следовательно, должен быть одним из самосопряженных расширений оператора $-\Delta_y$, определяемого как сужение $-\Delta$ на N_y. При $d = 1$ у оператора $-\Delta_y$ существует четырехпараметрическое семейство самосопряженных расширений, при $d = 2$ и $d = 3$ семейство самосопряженных расширений однопараметрическое, а при $d \geqslant 4$ существует только одно самосопряженное расширение — оператор $-\Delta$.

Чтобы по формальному выражению построить соответствующий самосопряженный оператор, нужно, согласно общему подходу, заменить коэффициент δ_y аппроксимирующим семейством гладких функций и для полученного семейства корректно заданных операторов L_ε найти предел в смысле резольвентной сходимости.

При $d = 3$ оказалось, что предел в смысле резольвентной сходимости, отличный от $-\Delta$, существует только при бесконечно малых коэффициентах вида $a_y = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2$, у которых a_1 принадлежит некоторому дискретному множеству, зависящему от выбранного способа аппроксимации дельта-функции. В результате оказывается, что построенный предельный оператор не определяется по формальному выражению, а зависит от способа аппроксимации дельта-функции.

В рассматриваемом выражении δ-функция задает оператор умножения, действующий на гладких функциях по формуле $\delta_y u = u(y)\delta_y$, который является оператором ранга 1, не определенным в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Но его можно аппроксимировать (многими способами) семействами операторов конечного ранга в $L_2(\mathbb{R}^d)$, в результате чего также получаем семейство корректно заданных операторов, для которого нужно найти предел в смысле резольвентной сходимости. Здесь резольвенты аппроксимирующих операторов выписываются в явном виде, что упрощает нахождение предела резольвент. Такой подход описан, например, в [3].

При $d = 1$ оператор, соответствующий формальному выражению, может быть найден из эвристических соображений. У уравнения

$$u'' + a\delta u = f$$

обычно рассматриваются непрерывные решения, у которых первая производная может иметь в точке 0 скачок $u'(+0) - u'(-0)$. При дифференцировании в пространстве распределений получаем

$$u'' + a\delta u = u''(x) + [u'(+0) - u'(-0)]\delta + a\delta u(0),$$

где $u''(x)$ есть обычная производная, вычисленная при $x \neq 0$. Чтобы полученное распределение принадлежало пространству $L_2(\mathbb{R})$, члены, содержащие δ, должны уничтожиться, откуда возникает условие сопряжения

$$u'(+0) - u'(-0) + au(0) = 0.$$

К этому же результату можно прийти с помощью анализа резольвент аппроксимирующих операторов.

При построении оператора, соответствующего более сложному выражению

$$-u'' + \sum_{y\in Y} a_y\delta_y u,$$

функции из области определения также должны удовлетворять условиям сопряжения

$$u'(y+0) - u'(y-0) + a_y u(y) = 0 \quad \text{для каждого} \quad y \in Y.$$

Соответствующие операторы подробно исследованы в [34], причем обнаружено, что оператор, заданный условиями сопряжения, может оказаться несамосопряженным.

13. Заключение

В работе была рассмотрена проблема умножения обобщенных функций и описан общий подход к ее решению. Проведен анализ различных способов вложения пространств распределений в алгебру мнемофункций. С ряда точек зрения наиболее естественным является способ вложения с помощью аналитического представления распределений. При таком вложении для рациональных распределений правило умножения задается в явном виде и удается описать все случаи, когда произведение является распределением.

Отмечена связь задачи умножения распределений с таким направлениями, как расширения линейных операторов, нестандартный анализ, квантовая механика, теория уравнений с обобщенными коэффициентами, теория уравнений с малым параметром.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Холден Х.* Решаемые модели в квантовой механике. — М.: Мир, 1991.
2. *Антоневич А.Б., Радыно Я.В.* Об общем методе построения алгебр обобщенных функций// Докл. АН СССР. — 1991. — *43*, № 3. — С. 680–684.
3. *Антоневич А.Б., Романчук Т.А.* Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций. — Saarbrucken: LAP Lambert, 2012.
4. *Антоневич А.Б., Шагова Т.Г.* Вложения распределений в алгебру мнемофункций на окружности// Пробл. физ. мат. и техн. — 2018. — *37*, № 4. — С. 52–61.
5. *Антоневич А.Б., Шагова Т.Г., Шкадинская Е.В.* Алгебра мнемофункций на окружности// Пробл. физ. мат. и техн. — 2018. — *36*, № 3. — С. 55–62.
6. *Антоневич А.Б., Шукур Али А.* О росте аналитической функции в круге// Докл. НАН Беларуси. — 2016. — *60*, № 5. — С. 41–45.
7. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. — М.: Мир, 1976.
8. *Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом// Докл. АН СССР. — 1961. — *137*, № 5. — С. 1011–1014.
9. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. — М.: Мир, 1965.
10. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. — М.: Наука, 1979.
11. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматлит, 1959.
12. *Данилов В.Г., Маслов В.П., Шелкович В.М.* Алгебры особенностей сингулярных решений квазилинейных строго гиперболических систем первого порядка// Теор. мат. физ. — 1998. — *114*, № 1. — С. 3–55.
13. *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ. — М.: Мир, 1980.
14. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Гостехиздат, 1957.
15. *Егоров Ю.В.* К теории обобщенных функций// Усп. мат. наук. — 1990. — *45*, № 5. — С. 3–40.
16. *Жиков В.В., Пастухова С.Е.* Об операторных оценках в теории усреднения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 3. — С. 27–122.
17. *Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.* Импульсные процессы. Модели и приложения. — М.: Наука, 1991.
18. *Иванов В.К.* Гиперраспределения и умножение распределений Шварца// Докл. АН СССР. — 1972. — *204*, № 5. — С. 1045–1048.
19. *Левенштам В.Б.* Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми (усреднения и асимптотики). — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2010.
20. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
21. *Мельникова И.В., Бовкун В.А., Алексеева У.А.* Решение квазилинейных стохастических задач в абстрактных алгебрах Коломбо// Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 12. — С. 1653–1663.
22. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наукова думка, 1971.
23. *Суслина Т.А.* Усреднение задачи Дирихле для эллиптических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами// Алгебра и анализ. — 2017. — *29*, № 2. — С. 139–192.
24. *Antonevich A., Burachewskij A., Radyno Ya.* On closability of nonclosable operators// Panamer. Math. J. — 1997. — *7*, № 4. — С. 37–51.
25. *Antonevich A.B., Radyno Ya.V.* On the problem of distributions multiplication// 10th Conf. «Problems and Methods in Mathematical Physics», Chemnitz, Germany, Sep. 13–17. — Leipzig: Teubner, 1994. — С. 9–14.
26. *Baglini L.L., Giordano P.* The Category of Colombeau algebras// Monatsh. Math. — 2017. — *182*. — С. 649–674.
27. *Christov Ch., Damianov B.* Asymptotic functions — a new class of generalized functions. I// Bulgar. J. Phys. — 1978. — *6*. — С. 543–556.
28. *Christov Ch., Damianov B.* Asymptotic functions — a new class of generalized functions. II// Bulgar. J. Phys. — 1979. — *1*. — С. 3–23.

29. *Christov Ch., Damianov B.* Asymptotic functions — a new class of generalized functions. III// Bulgar. J. Phys. — 1979. — *3*. — C. 245–256.
30. *Christov Ch., Damianov B.* Asymptotic functions — a new class of generalized functions. IV// Bulgar. J. Phys. — 1979. — *4*. — C. 377–397.
31. *Colombeau J. F.* A multiplication of distributions// J. Math. Anal. Appl. — 1983. — *94*. — C. 96–115.
32. *Colombeau J. F.* New generalized functions and multiplication of distributions. — Amsterdam: North-Holland, 1984.
33. *Grosser M., Kunzinger M., Oberguggenberger M., Steinbauer R.* Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
34. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* 1-D Schrödinger operator with local point interaction on a discrete set// J. Differ. Equ. — 2010. — *249*. — C. 253–304.
35. *Nedeljkov M., Pilipovic S., Scarpalezos D.* Linear theory of Colombeau's generalized functions. — Harlow: Addison-Wesley Longman, 1998.
36. *Oberguggenberger M.* Multiplication of distributions and application to partial differential equations. — Harlow: Longman Higher Education, 1992.
37. *Rosinger E. E.* Generalized solutions of nonlinear partial differential equations. — North-Holland: Mathematics Studies, 1987.
38. *Schwartz L.* Théorie des distributions: en 2 vol. — Paris: Hermann, 1950.
39. *Schwartz L.* Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions// C. R. Acad. Sci. Paris. — 1954. — *239*. — C. 847–848.

А. Б. Антоневич
Белорусский государственный университет,
Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, д. 4
E-mail: antonevich@bsu.by

Т. Г. Шагова
Белорусский государственный университет,
Беларусь, 220030, г. Минск, пр. Независимости, д. 4
E-mail: tanya.shagova@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-339-389 UDC 517.9

Multiplication of Distributions and Algebras of Mnemofunctions

© 2019 **A. B. Antonevich, T. G. Shagova**

Abstract. In this paper, we discuss methods and approaches for definition of multiplication of distributions, which is not defined in general in the classical theory. We show that this problem is related to the fact that the operator of multiplication by a smooth function is nonclosable in the space of distributions. We give the general method of construction of new objects called new distributions, or mnemofunctions, that preserve essential properties of usual distributions and produce algebras as well. We describe various methods of embedding of distribution spaces into algebras of mnemofunctions. All ideas and considerations are illustrated by the simplest example of the distribution space on a circle. Some effects arising in study of equations with distributions as coefficients are demonstrated by example of a linear first-order differential equation.

REFERENCES

1. S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Krohn Hoegh, and H. Holden, *Reshaemye modeli v kvantovoy mekhanike* [Solvable Models in Quantum Mechanics], Mir, Moscow, 1991 (Russian translation).
2. A. B. Antonevich and Ya. V. Radyno, "Ob obshchem metode postroeniya algebr obobshchennykh funktsiy" [On general method of construction of distribution algebras], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1991, **43**, No. 3, 680–684 (in Russian).

3. A. B. Antonevich and T. A. Romanchuk, *Uravneniya s del'ta-obraznymi koeffitsientami: metod konechnomernykh approksimatsiy* [Equations with Delta-Like Coefficients: Finite-Dimensional Approximation Method], LAP Lambert, Saarbrucken, 2012 (in Russian).
4. A. B. Antonevich and T. G. Shagova, "Vlozheniya raspredeleniy v algebru mnemofunktsiy na okruzhnosti" [Embeddings of distributions into the algebra of mnemofunctions on a circle], *Probl. fiz. mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2018, **37**, No. 4, 52–61 (in Russian).
5. A. B. Antonevich, T. G. Shagova, and E. V. Shkadinskaya, "Algebra mnemofunktsiy na okruzhnosti" [Algebra of mnemofunctions on a circle], *Probl. fiz. mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2018, **36**, No. 3, 55–62 (in Russian).
6. A. B. Antonevich and A. Shukur Ali, "O roste analiticheskoy funktsii v kruge" [On grows of an analytical function in a circle], *Dokl. NAN Belarusi* [Rep. Nat. Acad. Sci. Belarus], 2016, **60**, No. 5, 41–45 (in Russian).
7. P. Antosik, Ya. Mikusinskiy, and R. Sikorskiy, *Teoriya obobshchennykh funktsiy. Sekventsial'nyy podkhod* [Theory of Distributions. Sequential Approach], Mir, Moscow, 1976 (in Russian).
8. F. A. Berezin and L. D. Faddeev, "Zamechanie ob uravnenii Shredingera s singulyarnym potentsialom" [A note on the Schrödinger equation with singular potential], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1961, **137**, No. 5, 1011–1014 (in Russian).
9. G. Bremerman, *Raspredeleniya, kompleksnye peremennye i preobrazovaniya Fur'e* [Distributions, complex variables and Fourier transforms], Mir, Moscow, 1965 (Russian translation).
10. V. S. Vladimirov, *Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike* [Distributions in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
11. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi* [Distributions and Operations over Them], Fizmatlit, Moscow, 1959 (in Russian).
12. V. G. Danilov, V. P. Maslov, and V. M. Shelkovich, "Algebry osobennostey singulyarnykh resheniy kvazilineynykh strogo giperbolicheskikh sistem pervogo poryadka" [Algebras of singularities of singular solutions to first-order quasilinear strictly hyperbolic systems], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1998, **114**, No. 1, 3–55 (in Russian).
13. M. Davis, *Prikladnoy nestandartnyy analiz* [Applied Nonstandard Analysis], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
14. M. A. Evgrafov, *Asimptoticheskie otsenki i tselye funktsii* [Asymptotic Estimates and Whole Functions], Gostekhizdat, Moscow, 1957 (in Russian).
15. Yu. V. Egorov, "K teorii obobshchennykh funktsiy" [To the theory of distributions], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1990, **45**, No. 5, 3–40 (in Russian).
16. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [On operator estimates in the averaging theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 3, 27–122 (in Russian).
17. S. T. Zavalishchin and A. N. Sesekin, *Impul'snye protsessy. Modeli i prilozheniya* [Impulse Processes. Models and Applications], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
18. V. K. Ivanov, "Giperraspredeleniya i umnozhenie raspredeleniy Shvartsa" [Hyperdistributions and multiplication of Schwarz distributions], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1972, **204**, No. 5, 1045–1048 (in Russian).
19. V. B. Levenshtam, *Differentsial'nye uravneniya s bol'shimi vysokochastotnymi slagaemymi (usredneniya i asimptotiki)* [Differential Equations with Large High-Frequency Terms (Averages and Asymptotics)], YUFU, Rostov-na-Donu, 2010 (in Russian).
20. A. I. Markushevich, *Teoriya analiticheskikh funktsiy* [Theory of Analytic Functions], GITTL, Moscow—Leningrad, 1950 (in Russian).
21. I. V. Mel'nikova, V. A. Bovkun, and U. A. Alekseeva, "Reshenie kvazilineynykh stokhasticheskikh zadach v abstraktnykh algebrakh Kolombo" [Solution of quasilinear stochastic problems in abstract Colombo algebras], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 12, 1653–1663 (in Russian).
22. Yu. A. Mitropol'skiy, *Metod usredneniya v nelineynoy mekhanike* [Averaging Method in Nonlinear Mechanics], Naukova dumka, Kiev, 1971 (in Russian).
23. T. A. Suslina, "Usrednenie zadachi Dirikhle dlya ellipticheskikh uravneniy vysokogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami" [Averaging of the Dirichlet problem for higher-order elliptic equations with periodic coefficients], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2017, **29**, No. 2, 139–192 (in Russian).
24. A. Antonevich, A. Burachewskij, and Ya. Radyno, "On closability of nonclosable operators," *Panamer. Math. J.*, 1997, **7**, No. 4, 37–51.

25. A. B. Antonevich and Ya. V. Radyno, “On the problem of distributions multiplication,” 10*th Conf. Problems and Methods in Mathematical Physics, Chemnitz, Germany, Sep.* 13–17, Teubner, Leipzig, 1994, pp. 9–14.
26. L. L. Baglini and P. Giordano, “The Category of Colombeau algebras,” *Monatsh. Math.*, 2017, **182**, 649–674.
27. Ch. Christov and B. Damianov, “Asymptotic functions — a new class of generalized functions. I,” *Bulgar. J. Phys.*, 1978, **6**, 543–556.
28. Ch. Christov and B. Damianov, “Asymptotic functions — a new class of generalized functions. II,” *Bulgar. J. Phys.*, 1979, **1**, 3–23.
29. Ch. Christov and B. Damianov, “Asymptotic functions — a new class of generalized functions. III,” *Bulgar. J. Phys.*, 1979, **3**, 245–256.
30. Ch. Christov and B. Damianov, “Asymptotic functions — a new class of generalized functions. IV,” *Bulgar. J. Phys.*, 1979, **4**, 377–397.
31. J. F. Colombeau, “A multiplication of distributions,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1983, **94**, 96–115.
32. J. F. Colombeau, *New generalized functions and multiplication of distributions*, North-Holland, Amsterdam, 1984.
33. M. Grosser, M. Kunzinger, M. Oberguggenberger, and R. Steinbauer, *Geometric theory of generalized functions with applications to general relativity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.
34. A. S. Kostenko and M. M. Malamud, “1-D Schrödinger operator with local point interaction on a discrete set,” *J. Differ. Equ.*, 2010, **249**, 253–304.
35. M. Nedeljkov, S. Pilipovic, and D. Scarpalezos, *Linear theory of Colombeau’s generalized functions*, Addison-Wesley Longman, Harlow, 1998.
36. M. Oberguggenberger, *Multiplication of distributions and application to partial differential equations*, Longman Higher Education, Harlow, 1992.
37. E. E. Rosinger, *Generalized solutions of nonlinear partial differential equations*, Mathematics Studies, North-Holland, 1987.
38. L. Schwartz, *Théorie des distributions: en 2 vol*, Hermann, Paris, 1950.
39. L. Schwartz, “Sur l’impossibilité de la multiplication des distributions,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1954, **239**, 847–848.

A. B. Antonevich
Belarusian State University, Minsk, Belarus
E-mail: antonevich@bsu.by

T. G. Shagova
Belarusian State University, Minsk, Belarus
E-mail: tanya.shagova@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 3 (2019). С. 390–433

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433 УДК 517.968

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ

© 2019 г. **А. С. КАЛИТВИН, В. А. КАЛИТВИН**

Аннотация. Линейные операторы и уравнения с частными интегралами рассматриваются в банаховых идеальных пространствах, в пространствах вектор-функций и в пространствах непрерывных функций. Изучаются действие, регулярность, двойственность, алгебры, фредгольмовость, обратимость и спектральные свойства таких операторов. Описываются основные свойства линейных уравнений с частными интегралами. Показано, что эти уравнения существенно отличаются от обычных интегральных уравнений. Приведены условия, при которых справедлива альтернатива Фредгольма и условия равенства нулю спектрального радиуса оператора Вольтерра с частными интегралами, строятся резольвенты обратимых уравнений. Рассматриваются уравнения Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами и отмечаются проблемы, приводящие к линейным уравнениям с частными интегралами.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В обзоре рассматриваются линейные интегральные уравнения с частными интегралами. Особенностью уравнений является наличие в них интегралов, в которых неизвестная функция интегрируется по части переменных. Эти интегралы определяют частично интегральные операторы, которые не являются интегральными операторами и у которых отсутствует полная непрерывность. Для линейного уравнения второго рода с частными интегралами не выполняется альтернатива Фредгольма даже в общем случае ядер любой гладкости, а спектральный радиус линейного оператора Вольтерра с частными интегралами в общем случае ядер не равен нулю.

В связи с многочисленными приложениями линейных уравнений с частными интегралами к изучению различных задач теории упругих оболочек [10, 34, 35, 98], механики сплошных сред [1–5, 35–38, 45, 53, 57, 72, 85, 86, 93, 94, 96, 98], интегродифференциальных уравнений [98] и других проблем [59, 70, 71, 79, 87, 98], актуальны следующие вопросы: выбор «естественных» пространств, в которых целесообразно рассматривать изучаемые операторы и уравнения, и которые «естественны» для приложений; определение условий равенства нулю спектрального радиуса операторов Вольтерра с частными интегралами и построение решений интегральных уравнений с такими операторами с использованием резольвентных ядер; описание условий фредгольмовости и обратимости линейных уравнений с частными интегралами и построение резольвент таких уравнений.

Изучению линейных интегральных уравнений Вольтерра посвящена обширная литература, для линейных интегральных уравнений Вольтерра с частными интегралами ситуация совершенно иная. Такие уравнения впервые систематически изучались, по-видимому, в книгах [18, 88, 111].

Однозначная разрешимость уравнений Вольтерра с непрерывными ядрами и с частными интегралами

$$\lambda x(t,s) = \int\limits_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_a^t\int\limits_c^s n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s) \quad (1.1)$$

устанавливалась методом последовательных приближений, а также методом Вольтерра, состоящим в последовательном решении двух одномерных уравнений Вольтерра с параметрами и обычного двумерного уравнения Вольтерра. Эти методы применимы также в случае ограниченных измеримых ядер и основаны на равенстве нулю спектрального радиуса рассматриваемых операторов. Равенство нулю спектрального радиуса оператора Вольтерра с частными интегралами в пространстве непрерывных функций и в пространствах Лебега доказывалось в [23] с применением свойства Андо. Однако приведенное в [23] свойство Андо оказалось не вполне удобным для изучения операторов Вольтерра с частными интегралами. Более приемлемым оказалось используемое в данной статье свойство Андо, принадлежащее первому автору статьи [35,41,57,65,104]. В связи с использованием свойства Андо, были определены классы ядер, обладающих этим свойством. Для линейных уравнений Вольтерра с частными интегралами и ядрами из этих классов получены теоремы об однозначной разрешимости уравнений и представлении их решений с применением резольвентных ядер. Признаки обращения в нуль спектрального радиуса действующего в пространстве непрерывных функций линейного оператора Вольтерра с частными интегралами и теоремы о разрешимости соответствующих уравнений рассмотрены в [57, 65, 94], условия равенства нулю спектрального радиуса этого же оператора и условия разрешимости линейных интегральных уравнений с такими операторами в других классах функциональных пространствах — в [35, 41, 104].

Линейные операторы и уравнения с одномерными частными интегралами и переменными пределами интегрирования изучались в [50, 58, 63]. Оказалось, что свойства таких операторов и уравнений существенно отличаются от свойств линейных интегральных операторов и уравнений Вольтерра. Некоторые результаты об уравнениях Вольтерра с частными интегралами на неограниченных областях получены в [64].

Линейные операторы и уравнения с ядрами Вольтерра

$$\lambda x(t,s) = \int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_T\int\limits_S n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s) \quad (1.2)$$

и с многомерными частными интегралами, где T и S — компактные множества в конечномерных пространствах, рассматривались в [55,57,67]. В работах [57,67] получены условия равенства нулю спектрального радиуса рассматриваемых операторов и формулы для решения линейных уравнений Вольтерра с частными интегралами в пространстве непрерывных функций. При этом решения уравнений представлялись с использованием резольвентных ядер.

Голоморфные решения уравнений Вольтерра с частными интегралами в комплексной области рассматривались в [7, 10, 61].

Описание некоторых приложений линейных уравнений Вольтерра с частными интегралами к изучению задач теории упругих оболочек, к решению интегродифференциальных и дифференциальных уравнений с частными производными и к исследованию других задач можно найти в [7, 10, 18, 88, 89, 98]. В частности, к линейным уравнениям Вольтерра с частными интегралами сводится задача Коши для интегродифференциального уравнения Барбашина, задача Гурса для дифференциального уравнения второго порядка с частными производными и ряд задач математической биологии. Изучение амплитудных функций регулярных и сингулярных струн приводит к отдельным случаям уравнений Вольтерра—Стильтьеса с частными интегралами [70, 71]. В [79] рассмотрена разрешимость уравнений Вольтерра с частными интегралами для ядра оператора преобразования в методе обратной задачи, а в [15] — разрешимость уравнения Гельфанда—Левитана.

Линейные уравнения Вольтерра с частными интегралами содержатся в более общем классе линейных уравнений Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами

$$\lambda x(t,s) = \int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_T\int\limits_S n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s), \quad (1.3)$$

которые содержат интеграл, определяющий частично интегральный оператор Вольтерра, и интеграл, не определяющий частично интегральный или интегральный оператор Вольтерра. К линейным уравнениям Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами приводятся различные задачи механики сплошных сред, смешанных задач эволюционного типа, осесимметричных контактных задач, контактных задач теории ползучести неоднородно-стареющих тел и другие задачи. Линейные уравнения Вольтерра—Фредгольма соответствующих задач рассматривались в [35,41,58,96,98], в этих же работах приводятся ссылки на работы В. М. Александрова, Н. Х. Арутюняна, Е. В. Коваленко, А. В. Манжирова, Л. А. Галина, И. Г. Горячевой с приложениями уравнений Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами. Операторы Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами не являются вполне непрерывными даже в общем случае гладких ядер, а для уравнений с такими операторами не выполняется альтернатива Фредгольма. В связи с этим важное значение приобрело описание спектральных свойств линейных операторов Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами, условий фредгольмовости, обратимости и регуляризации соответствующих уравнений [35, 41, 57, 65, 96, 98].

Линейные уравнения Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами содержатся в множестве уравнений, записываемых в виде (1.3), причем в (1.3) может отсутствовать интеграл, определяющий частично интегральный оператор Вольтерра. В данной работе приводятся общие свойства операторов, соответствующих этим уравнениям, условия их фредгольмовости и спектральные свойства. Формулы для спектра и различных частей спектра отдельных классов таких операторов связаны с соответствующими формулами для спектра и частей спектра тензорных произведений операторов на тензорных произведениях банаховых пространств. Работа содержит теоремы о существенном спектре Шехтера оператора Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами. Приведенные в разделе 4 примеры показывают особенности изучаемых в работе интегральных уравнений, их принципиальное отличие от обычных интегральных уравнений Фредгольма. В этом же разделе изучаются также условия, при которых для линейного уравнения второго рода с частными интегралами справедлива альтернатива Фредгольма, частные случаи линейных уравнений с частными интегралами, показано, что линейное уравнение второго рода с частными интегралами и непрерывными заданными функциями может иметь непрерывное, ограниченное разрывное и неограниченное решения, строятся резольвента и решение уравнения Вольтерра с частными интегралами, раздел содержит условия фредгольмовости и обратимости уравнений Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами. В разделе 5 отмечаются некоторые проблемы, приводящиеся к линейным уравнениям с частными интегралами, выписываются эти уравнения и даются ссылки на соответствующие работы. В заключении приводятся комментарии о других проблемах линейных операторов и уравнений с частными интегралами.

2. Пространства и операторы с частными интегралами

2.1. Функциональные пространства. В интегральных и интегродифференциальных уравнениях математической физики, механики сплошных сред, теории вероятностей и других задач, содержащих операторы с частными интегралами, решения уравнений понимаются в различных смыслах. Это естественно приводит к необходимости изучения операторов и уравнений с частными интегралами в подходящих классах пространств и, в частности, в банаховых идеальных пространствах, пространствах вектор-функций и в других пространствах.

2.1.1. Идеальные пространства [19, 20, 35, 68, 75]. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с σ-конечной полной мерой, $M = M(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство всех вещественных измеримых почти всюду конечных функций на Ω. Эквивалентные функции отождествляются. Пространство M линейно, в нем естественно вводится полуупорядоченность: для $x, y \in M$ пишем $x \leqslant y$, если $x(t) \leqslant y(t)$ почти всюду. Запись $x_n \downarrow$ означает, что $x_n \geqslant x_m$ при $m \geqslant n$, а $x_n \downarrow x$ означает, что $x_n \downarrow$ и $x_n(t)$ сходится к $x(t)$ почти всюду на Ω. Аналогично определяются записи $x_n \uparrow$ и $x_n \uparrow x$. Следующие определения применимы и в случае комплексного пространства M. Для $x \in M$ считаем, что $|x|(t) = |x(t)|$. Метрика в M задается равенством

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\mu(\Omega_n)} \int\limits_{\Omega_n} \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} d\mu(t),$$

где $\Omega_n \in \Sigma, \Omega = \cup_n \Omega_n, \Omega_n \cap \Omega_m = \varnothing$ при $n \neq m, \mu(\Omega_n) \neq 0$, сходимость по которой есть сходимость по мере. В этой метрике пространство M полное. Отметим [68], что последовательность функций $x_n \in M$ сходится по мере на множестве $D \in \Sigma$, $\mu(D) < \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ $\mu(\{t \in D : |x_n(t) - x(t)| > \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$. В случае произвольной меры $\mu(D)$ считается, что последовательность (x_n) сходится по мере на множестве D к функции x, если x_n сходится по мере к x на любом множестве $G \in \Sigma, G \subset D, \mu(G) < \infty$.

Следуя [68], *идеальным пространством* (ИП) на Ω будем называть линейное множество $X \subset M$ такое, что из $x \in X, y \in M, |y| \leqslant |x|$ следует $y \in X$. Для каждой функции x определяется носитель $\operatorname{supp} x = \{t \in \Omega : x(t) \neq 0\}$, а для пространства X носитель определяется как наименьшее измеримое множество, вне которого все функции из X равны нулю. В дальнейшем считаем, что Ω — носитель пространства X и пользуемся записью $X(\Omega)$, носитель определяется с точностью до множества нулевой меры.

ИП с монотонной нормой называется *нормированным идеальным пространством* (НИП), а монотонность нормы означает, что из условий $x, y \in X, |x| \leqslant |y|$ следует $\|x\| \leqslant \|y\|$. Для любого x из НИП X $\|x\| = \||x|\|$. Полное по норме НИП называется *банаховым идеальным пространством* (БИП).

Обобщением НИП и БИП являются *квазинормированные* (КНИП) и *квазибанаховы* (КБИП) *идеальные пространства*, определения и свойства которых детально рассмотрены в [40]. В частности, каждая сходящаяся по квазинорме к $x \in X$ последовательность $(x_n) \subset X$ сходится к x и по мере, а каждая последовательность Коши $(x_n) \subset X$ сходится по мере к некоторой функции $x \in M$. Отсюда следует, что каждое КНИП X непрерывно вложено в пространство M, а каждое ограниченное по квазинорме множество $E \subset X$ ограничено в линейном топологическом пространстве X, т. е. для любой окрестности нуля U существует число λ такое, что $E \subset \lambda U$.

В КНИП X эквивалентны утверждения: X является КБИП; если $0 \leqslant x_n \uparrow$ — последовательность Коши в X, то x_n сходится к $x \in X$ и по квазинорме; если $0 \leqslant x_n \uparrow$ — последовательность Коши в X, то существует $x = \sup x_n \in X$.

Важную роль в теории КНИП играют порядковые свойства квазинормы [40].

(A) Будем говорить, что в КНИП X квазинорма *порядково непрерывна*, или что в X *выполнено условие* (A), если $0 \leqslant x_n \downarrow 0 \Rightarrow \|x_n\| \to 0$;

(B) *монотонно полна*, или что в X *выполнено условие* (B), если $0 \leqslant x_n \uparrow \wedge \|x_n\| \leqslant a < \infty \Rightarrow \exists \sup x_n \in X$;

(C) *порядково полунепрерывна*, или что в X *выполнено условие* (C), если $0 \leqslant x_n \uparrow x \in X \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$.

Справедливы следующие свойства [40]:

1. КНИП с условием (B) есть КБИП;
2. В КНИП X выполнено условие (C) тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $(x_n) \subset X$, сходящейся по мере к $x \in X$, выполняется неравенство $\|x\| \leqslant \varliminf \|x_n\|$;
3. В КНИП X эквивалентны утверждения:
   а) в X выполнены условия (B) и (C);
   б) единичный шар $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ замкнут в M, т. е. если последовательность $(x_n) \subset B_X$ сходится по мере к $x \in M$, то $x \in B_X$.

Простейшими примерами ненормируемых КБИП с условиями $(A), (B), (C)$ являются пространства $L^p([0,1])$ $(0 < p < 1)$.

Аналогично терминологии, принятой в теории идеальных пространств [20], КНИП X называется *почти совершенным* (*совершенным*, *правильным*, *вполне правильным*) КНИП, если в нем выполнено условие (C) ((B) и (C); (A); (A) и (B)).

2.1.2. Специальные классы идеальных пространств [20, 68]. Пусть $X = X(\Omega)$ и $Y = Y(\Omega)$ — КБИП. Через Y/X обозначим пространство мультипликаторов из X в Y; оно состоит из определенных на Ω измеримых функций c, для которых $cx \in Y$ при любой функции $x \in X$ с квазинормой $\|c\|_{Y/X} = \sup\{\|cx\|_Y : \|x\| \leqslant 1\}$. Y/X — КБИП.

Двойственным к БИП $Z = Z(\Omega)$ пространством Z' называется совокупность определенных на Ω измеримых функций f, для которых $|(f,g)| = \left|\int\limits_{\Omega} f(t)g(t)d\mu\right| < \infty$ $(z \in Z)$. Алгебраические операции в Z' определяются обычным образом, а норма равенством $\|f\|_{Z'} = \sup\{|(f,z)| : \|z\|_Z \leqslant 1\}$.

Пусть $u_0(t)$ — неотрицательная измеримая функция из $M = M(\Omega, \Sigma, \mu)$. Через E_{u_0} обозначим пространство измеримых на Ω функций $x(t)$, для которых имеет смысл и конечна норма $\|x\|_{E_{u_0}} = \inf\{\lambda : |x| \leqslant \lambda\, u_0\}$, а через E'_{u_0} — пространство измеримых на Ω и равных нулю вне носителя функции u_0 функций x, для которых конечна норма $\|x\|_{E'_{u_0}} = \int\limits_{\Omega} |x(t)|u_0(t)d\mu$. E_{u_0} и E'_{u_0} — двойственные друг к другу совершенные пространства, причем E'_{u_0} — правильное пространство [20].

2.1.3. Пространства вектор-функций. Пусть T — компакт в некотором метрическом пространстве, μ — борелевская мера на T, заданная на борелевской σ-алгебре компакта T. Через C обозначим банахово пространство непрерывных на T функций с нормой $\|y\| = \sup\{|y(t)| : t \in T$, а через $C(Y)$ обозначим пространство непрерывных на T функций со значениями в Y; здесь Y — банахово пространство или КНИП на (S, Σ, ν). Вектор-функция $y \in C(Y)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup\{\|y(t)\|_Y < \infty : t \in T\} \text{ и } \lim_{t \to t_0} \|y(t) - y(t_0)\|_Y = 0.$$

$C(Y)$ — банахово (метризуемое квазинормированное или квазибанахово) пространство, если Y — банахово (КНИП или КБИП) пространство.

2.2. Линейные операторы с частными интегралами. Пусть T и S — заданные множества с выделенными в них σ-алгебрами $\Sigma(T)$ и $\Sigma(S)$, на которых заданы полные σ-конечные и счетно-аддитивные меры μ и ν, $\mu \times \nu$ — произведение этих мер, определенное на произведении $\Sigma(T) \times \Sigma(S)$ σ-алгебр $\Sigma(T)$ и $\Sigma(S)$. Через $M(T \times S)$ будем обозначать пространство измеримых на $T \times S$ вещественных или комплексных функций, а через X и Y — ИП функций из $M(T \times S)$.

2.2.1. Непрерывность действия и условия действия [35, 40, 41, 57, 65, 98]. Операторы C, L, M, N, K определим равенствами

$$(Cx)(t,s) = c(t,s)x(t,s), \tag{2.1}$$

$$(Lx)(t,s) = \int\limits_T l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\mu(\tau), \tag{2.2}$$

$$(Mx)(t,s) = \int\limits_S m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\nu(\sigma), \tag{2.3}$$

$$(Nx)(t,s) = \int\limits_{T \times S} n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\mu \times \nu(\tau,\sigma), \tag{2.4}$$

$$K = C + L + M + N \tag{2.5}$$

где $c(t,s), l(t,s,\tau), m(t,s,\sigma), n(t,s,\tau,\sigma)$ — измеримые по совокупности переменных функций, а интегралы понимаются в смысле Лебега—Радона. Операторы (2.2), (2.3) будем называть *частично интегральными операторами*, эти же операторы и оператор (2.5) будем называть также *операторами с частными интегралами*.

Для операторов с частными интегралами справедлив аналог теоремы С. Банаха о непрерывности интегрального оператора. Следующая теорема установлена в [106].

Теорема 2.1. *Если оператор K действует из КБИП X в КБИП Y или в $M(T \times S)$, то он непрерывен.*

Хорошо известно [68], что линейный непрерывный оператор A, действующий из БИП X в БИП X, является интегральным тогда и только тогда, когда любую последовательность $(x_n) \subset X$, сходящуюся по мере к функции $x \in X$ и удовлетворяющую условию $|x_n| \leqslant u \in X$, он переводит в последовательность $Ax_n \to Ax$ почти всюду. Простые примеры показывают, что операторы (2.2) и (2.3) не являются интегральными.

Действительно, пусть оператор (2.2) действует в $X = L^p([0,1] \times [0,1])$ $(1 < p < \infty)$ и для некоторой функции $u_0 = u_0(t)$ из $L^p([0,1])$ $y_0 = Lx_0 \neq 0$. Пусть $x_n(t,s) = u_0(t)v_n(s)$ — последовательность функций из X, сходящаяся по мере к $x \in X$, причем $|x_n| \leqslant 1$ и (x_n) не сходится почти всюду. Очевидно, последовательность (Lx_n) не сходится почти всюду. Следовательно, L не является интегральным оператором. Отсюда видно, что даже при $c(t,s) \equiv 0$ оператор (2.5) в общем случае не является интегральным.

Отметим, что оператор (2.5) действует из КБИП X в КБИП Y, если из X в Y действуют операторы (2.1)–(2.4). Обратное утверждение неверно по крайней мере в случае, когда хотя бы одно из множеств T и S содержит счетное число атомов. Справедливость этого обратного утверждения, в частности, связана и с вопросом единственности представления (2.5) рассматриваемого класса операторов — эта единственность не имеет места, если меры μ и ν на T и S соответственно не являются непрерывными. Однако эта единственность для непрерывных мер μ и ν на T и S справедлива — это вытекает из приводимой в пункте 2.2.2 теоремы о регулярности операторов с частными интегралами, которая также позволяет установить действие из X в Y операторов (2.1)–(2.4), когда из X в Y действует оператор (2.5), по крайней мере, в основных случаях.

2.2.2. Регулярность операторов с частными интегралами [35, 40, 98, 106]. Напомним, что линейный оператор $A : X \to Y$ называется *регулярным*, если существует такой положительный оператор $\tilde{A} : X \to Y$ (оператор $\tilde{A}$ называется *положительным*, если $\tilde{A}x \geqslant \theta$ при $x \geqslant \theta$), что $|Ax| \leqslant \tilde{A}|x|$ $(x \in X)$. Известная теорема Л. В. Канторовича [68] утверждает, что регулярность линейного оператора равносильна тому, что он преобразует ограниченные в смысле упорядоченности множества в множества, также ограниченные по упорядоченности. Далее среди операторов $\tilde{A}$ (их называют *мажорантами* оператора A) существует наименьшая (в смысле индуцированной упорядоченности пространства линейных операторов); эту наименьшую мажоранту принято называть *абсолютной величиной* A и обозначать через $|A|$.

Операторы $]C[,]L[,]M[,]N[,]K[$ определим равенствами

$$(]C[x)(t,s) = |c(t,s)|x(t,s), \tag{2.6}$$

$$(]L[x)(t,s) = \int_T |l(t,s,\tau)|x(\tau,s)d\mu(\tau), \tag{2.7}$$

$$(]M[x)(t,s) = \int_S |m(t,s,\sigma)|x(t,\sigma)d\nu(\sigma), \tag{2.8}$$

$$(]N[x)(t,s) = \int_{T\times S} |n(t,s,\tau,\sigma)|x(\tau,\sigma)d\mu\times\nu(\tau,\sigma), \tag{2.9}$$

$$]K[=]C[+]L[+]M[+]N[. \tag{2.10}$$

Приводимые далее теоремы 2.2–2.9 установлены в [106].

Теорема 2.2. *Пусть меры μ и ν непрерывны, и пусть оператор K с частными интегралами действует из пространства X в пространство Y. Тогда он является регулярным оператором в том и только в том случае, когда из X в Y действует оператор $]K[$. При этом $|K| =]K[$.*

Предположение о непрерывности мер μ и ν в условии теоремы 2.2 существенно. Если множество T или S содержит счетное число атомов, то утверждение теоремы 2.2 в общем случае неверно. Однако теорему можно модифицировать так, что она окажется верной и для мер, не являющихся непрерывными.

Пусть $\mu(T)$ и $\nu(S)$ конечны, T_d и S_d, T_c и S_c соответственно непустые дискретные и непрерывные части множеств T и S. Представление (2.5) оператора K будем называть *нормальным*, если $c(t,s) = 0$ при $(t,s) \in T_d \times S_d$, $l(t,s,\tau) = 0$ при $s \in S_d$, $m(t,s,\sigma) = 0$ при $t \in T_d$.

Среди представлений любого оператора с частными интегралами существуют нормальные. Действительно, определим «δ-функции» равенствами

$$\delta(t,\tau) = \begin{cases} \mu(T)^{-1}, \text{при } t = \tau, \\ 0, \text{при } t \neq \tau, \end{cases} \qquad \delta(s,\sigma) = \begin{cases} \mu(S)^{-1}, \text{при } s = \sigma, \\ 0, \text{при } s \neq \sigma. \end{cases}$$

Представление оператора K будет нормальным, если в (2.5) функции $c(t,s), l(t,s,\tau), m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ заменить функциями $c(t,s)\chi_{T_c\times S_c}(t,s)$,

$$c(t,s)\chi_{T_d\times S_c}(t,s)\delta(t,\tau)+l(t,s,\tau)\chi_{T\times S_c}(t,s),\ c(t,s)\chi_{T_c\times S_d}(t,s)\delta(s,\sigma)+m(t,s,\sigma)\chi_{T_c\times S}(t,s),$$

$$c(t,s)\chi_{T_d\times S_d}(t,s)\delta(t,\tau)\delta(s,\sigma)+l(t,s,\tau)\chi_{T\times S_d}(t,s)\delta(s,\sigma)+m(t,s,\sigma)\chi_{T_d\times S}(t,s)\delta(t,\tau)+n(t,s,\tau,\sigma)$$

соответственно, где через $\chi_\Omega(t,s)$ обозначена характеристическая функция множества Ω.

Теорема 2.3. *Пусть меры μ и ν конечны, оператор K с частными интегралами действует из пространства X в пространство Y, и пусть* (2.5) — *его нормальное представление. Тогда он регулярен в том и только в том случае, когда из X в Y действует оператор $]K[$. При этом $|K|=]K[$.*

2.2.3. Теоремы о двойственном операторе [35, 40, 98, 106]. Пусть A — линейный оператор, действующий из БИП X в БИП Y. *Двойственным* к нему называется линейный оператор A', определяемый равенством $(Ax,y)=(x,A'y)$ $(x\in X, y\in Y')$. Двойственный оператор существует не для каждого оператора A; он совпадает с сужением на Y' сопряженного оператора A^* и, следовательно, необходимым и достаточным условием его существования является включение $A^*Y'\subset X'$.

Оператор K^T, *транспонированный* оператору K, определим равенством

$$(K^Ty)(t,s)=c(t,s)y(t,s)+\int\limits_T l^*(t,s,\tau)y(\tau,s)d\mu(\tau)+\int\limits_S m^*(t,s,\sigma)y(t,\sigma)d\nu(\sigma)+$$

$$+\int\limits_{T\times S} n^*(t,s,\tau,\sigma)y(\tau,\sigma)d\mu\times\nu(\tau,\sigma), \tag{2.11}$$

где $l^*(t,s,\tau)=l(\tau,s,t), m^*(t,s,\sigma)=m(t,\sigma,s), n^*(t,s,\tau,\sigma)=n(\tau,\sigma,t,s)$.

Теорема 2.4. *Пусть оператор K с частными интегралами действует из БИП X в БИП Y. Тогда он обладает двойственным оператором и, более того,*

$$K'y=K^Ty\ (y\in Y', K^Ty\in M(T\times S)).$$

В общем случае K' не совпадает с K^T. Действительно, пусть в (2.5) функции c,m,n тождественно равны нулю, а

$$l(t,s,\tau)=\bar{l}(t,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)b_n(\tau),\quad \text{где } a_n(t)=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}}, 2^{-n}\leqslant t<2^{1-n},\\ 0, \text{при других } t,\end{cases}$$

$b_n(s)=\sin 2\pi ns$. Тогда оператор $K=L$ действует в $X=L^2([0,1]\times[0,1])$. Двойственный к L оператор L' существует и имеет вид $(L'y)(t,s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, y(\cdot,s)b_n(t)$. Если допустить, что транспонированный оператор L^T действует в X, то в $L^2([0,1])$ действует и оператор $(\tilde{L}x)=\int\limits_0^1 l(\tau,t)x(\tau)d\tau$. Однако П. Е. Соболевским показано, что оператор $\tilde{L}$ не определен на $L^2([0,1])$. Поэтому транспонированный оператор L^T не действует в X, в то время как двойственный оператор действует в X.

Частным случаем теоремы 2.4 является

Теорема 2.5. *Пусть оператор K с частными интегралами действует из БИП X в БИП Y и регулярен. Тогда он обладает двойственным оператором и $K'=K^T$.*

Ядра l,m,n назовем *симметричными*, если $l(t,s,\tau)=l(\tau,s,t), m(t,s,\sigma)=m(t,\sigma,s)$, $n(t,s,\tau,\sigma)=n(\tau,\sigma,t,s)$, и *кососимметричными*, $l(t,s,\tau)=-l(\tau,s,t), m(t,s,\sigma)=-m(t,\sigma,s)$, $n(t,s,\tau,\sigma)=-n(\tau,\sigma,t,s)$.

Теорема 2.6. *Если оператор K с симметричными или кососимметричными ядрами действует из БИП X в X', то оператор K обладает двойственным оператором, причем $K'=K^T$.*

2.2.4. Алгебры операторов с частными интегралами [35, 40, 98, 106]. Пусть X и Y — БИП, $\mathbf{L}(X,Y)$ — пространство непрерывных линейных операторов, действующих из X в Y, $\mathbf{L_r}(X,Y)$ — пространство регулярных линейных операторов, действующих из X в Y, $\mathbf{K_n}(X,Y)$ и $\mathbf{K_r}(X,Y)$ — соответственно пространства действующих из X в Y и действующих из X в Y регулярных операторов вида (2.5). Утверждения теорем 2.1 и 2.2 означают тогда справедливость включений $\mathbf{K_n}(X,Y) \subset \mathbf{L}(X,Y)$, $\mathbf{K_r}(X,Y) \subset \mathbf{L_r}(X,Y)$, причем в общем случае $\mathbf{K_n}(X,Y)$ и $\mathbf{K_r}(X,Y)$ не являются замкнутыми подпространствами пространств $\mathbf{L}(X,Y)$ и $\mathbf{L_r}(X,Y)$, если $\mathbf{L}(X,Y)$ и $\mathbf{L_r}(X,Y)$ рассматривать с обычной операторной нормой, построенной по нормам пространств X и Y. Ситуация становится иной, если $\mathbf{L_r}(X,Y)$ рассматривать с нормой Л. В. Канторовича

$$\|K\| = \||K|\|. \tag{2.12}$$

$\mathbf{K_r}(X,Y)$ с этой нормой является банаховым пространством.

Через Y/X обозначим БИП мультипликаторов из X в Y; оно состоит из определенных на Ω измеримых функций c, для которых $cx \in Y$ при любой функции $x \in X$ с нормой

$$\|c\|_{Y/X} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|cx\|_Y. \tag{2.13}$$

Через $\mathbf{R_l}(X,Y)$, $\mathbf{R_m}(X,Y)$, $\mathbf{R_n}(X,Y)$ обозначим соответственно множества измеримых по совокупности переменных функций $l(t,s,\tau): T\times S\times T \to (-\infty,+\infty)$, $m(t,s,\sigma): T\times S\times S \to (-\infty,+\infty)$ и $n(t,s,\tau,\sigma): T\times S\times T\times S \to (-\infty,+\infty)$, для которых $l(t,s,\tau)=0$ $(s\in S_d)$ и $m(t,s,\sigma)=0$ $(t\in T_d)$, и для которых конечны нормы

$$\|l(t,s,\tau)\|_{\mathbf{R_l}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} \left\| \int_T |l(t,s,\tau)x(\tau,s)|d\mu(\tau) \right\|, \tag{2.14}$$

$$\|m(t,s,\sigma)\|_{\mathbf{R_m}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} \left\| \int_S |m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)|d\nu(\sigma) \right\|, \tag{2.15}$$

$$\|n(t,s,\tau,\sigma)\|_{\mathbf{R_n}(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X\leqslant 1} \left\| \int_{T\times S} |n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)|d\mu\times\nu(\tau,\sigma) \right\|. \tag{2.16}$$

$\mathbf{R_l}(X,Y)$, $\mathbf{R_m}(X,Y)$ и $\mathbf{R_n}(X,Y)$ — БИП функций, определенных на $T\times S\times T$, $T\times S\times S$ и $T\times S\times T\times S$ соответственно. Определим прямую сумму

$$\mathbf{R}(X,Y) = \mathbf{R_c}(X,Y) \oplus \mathbf{R_l}(X,Y) \oplus \mathbf{R_m}(X,Y) \oplus \mathbf{R_n}(X,Y), \tag{2.17}$$

где $\mathbf{R_c}(X,Y)$ — подпространство пространства Y/X функций $c(t,s)$, для которых $c(t,s)=0$ при $(t,s)\in T_d\times S_d$, с нормой

$$\|(c,l,m,n)\|_{\mathbf{R}(X,Y)} = \|c\|_{\mathbf{R_c}(X,Y)} + \|l\|_{\mathbf{R_l}(X,Y)} + \|m\|_{\mathbf{R_m}(X,Y)} + \|n\|_{\mathbf{R_n}(X,Y)}. \tag{2.18}$$

Теорема 2.7. *Пусть X и Y — БИП. Тогда $\mathbf{K_r}(X,Y)$ — замкнутое подпространство пространства $\mathbf{L_r}(X,Y)$, изоморфное пространству $\mathbf{R}(X,Y)$, причем*

$$\|K\|_{\mathbf{K_r}(X,Y)} \leqslant \|(c,l,m,n)\|_{\mathbf{R}(X,Y)} \leqslant 4\|K\|_{\mathbf{K_r}(X,Y)}. \tag{2.19}$$

В приложениях полезна доказываемая с применением теоремы Фубини следующая

Теорема 2.8. *Пусть X, Y и Z — БИП,*

$$(K_jx)(t,s) = c_j(t,s)x(t,s) + \int_T l_j(t,s,\tau)x_j(\tau,s)d\mu(\tau) + \int_S m_j(t,s,\sigma)x_j(t,\sigma)d\nu(\sigma) +$$
$$+ \int_{T\times S} n_j(t,s,\tau,\sigma)x_j(\tau,\sigma)d\mu\times\nu(\tau,\sigma) \tag{2.20}$$

$(j=1,2)$ — операторы с частными интегралами, $K_1 \in \mathbf{K_r}(X,Y)$ и $K_2 \in \mathbf{K_r}(Y,Z)$. Тогда оператор $K = K_2K_1 \in \mathbf{K_r}(X,Z)$ и является оператором с частными интегралами, причем

$$c(t,s) = c_2(t,s)c_1(t,s), \tag{2.21}$$

$$l(t,s,\tau) = c_2(t,s)l_1(t,s,\tau) + l_2(t,s,\tau)c_1(\tau,s) + \int\limits_T l_2(t,s,\xi)l_1(\xi,s,\tau)d\mu(\xi), \tag{2.22}$$

$$m(t,s,\sigma) = c_2(t,s)m_1(t,s,\sigma) + m_2(t,s,\sigma)c_1(t,\sigma) + \int\limits_S m_2(t,s,\eta)m_1(t,\eta,\tau)d\nu(\eta), \tag{2.23}$$

$$n(t,s,\tau,\sigma) = c_2(t,s)n_1(t,s,\tau,\sigma) + n_2(t,s,\tau,\sigma)c_(\tau,\sigma) + l_2(t,s,\tau)m_1(\tau,s,\sigma) + m_2(t,\sigma)l_1(t,\sigma,\tau)+$$
$$+ \int\limits_T l_2(t,s,\xi)n_1(\xi,s,\tau,\sigma)d\mu(\xi) + \int\limits_S m_2(t,s,\eta)n_1(t,\eta,\tau,\sigma)d\nu(\eta) + \int\limits_T n_2(t,s,\xi,\sigma)l_1(\xi,\sigma,\tau)d\mu(\xi)+$$
$$+ \int\limits_T n_2(t,s,\xi,\sigma)l_1(\xi,\sigma,\tau)d\mu(\xi) + \int\limits_S n_2(t,s,\tau,\eta)m_1(\tau,\eta,\sigma)d\nu(\eta)+$$
$$+ \int\limits_{T\times S} n_2(t,s,\xi,\eta)n_1(\xi,\eta,\tau,\sigma)d\mu\times\nu(\xi,\eta). \tag{2.24}$$

Категорные свойства рассматриваемых классов операторов содержит вытекающая из теоремы 2.7

Теорема 2.9. *Пусть* X, Y *и* Z — *БИП. Тогда*

$$\mathbf{R_c}(X,Y)\mathbf{R_c}(Y,Z) \subset \mathbf{R_c}(X,Z), \mathbf{R_c}(X,Y)\mathbf{R_l}(Y,Z), \mathbf{R_l}(X,Y)\mathbf{R_c}(Y,Z) \subset \mathbf{R_l}(X,Z),$$
$$\mathbf{R_c}(X,Y)\mathbf{R_m}(Y,Z), \mathbf{R_m}(X,Y)\mathbf{R_c}(Y,Z) \subset \mathbf{R_m}(X,Z),$$
$$\mathbf{R_l}(X,Y)\mathbf{R_m}(Y,Z), \mathbf{R_m}(X,Y)\mathbf{R_l}(Y,Z) \subset \mathbf{R_n}(X,Z),$$
$$\mathbf{R}(X,Y)\mathbf{R_n}(Y,Z), \mathbf{R_n}(X,Y)\mathbf{R}(Y,Z) \subset \mathbf{R_n}(X,Z).$$

В частности, $\mathbf{R_c}(X,Y), \mathbf{R_l}(X,Y), \mathbf{R_m}(X,Y), \mathbf{R_n}(X,Y)$ *являются подалгебрами алгебры* $\mathbf{R}(X,Y)$, *а* $\mathbf{R_n}(X,Y)$ *и* $\mathbf{R_l}(X,Y) \oplus \mathbf{R_m}(X,Y) \oplus \mathbf{R_n}(X,Y)$ — *идеалами алгебры* $\mathbf{R}(X,Y)$.

В силу теоремы 2.9 проверка включения $K \subset \mathbf{K_r}(X,Y)$ сводится к проверке четырех включений $c \in \mathbf{R_c}(X,Y), l \in \mathbf{R_l}(X,Y), m \in \mathbf{R_m}(X,Y), n \in \mathbf{R_n}(X,Y)$.

Проверка первого из них и последнего являются классическими задачами теории БИП и действующих в них операторов, описания пространств мультипликаторов и описания пространств Заанена ядер линейных интегральных операторов [19, 22]. Как и в случае пространства $\mathbf{R_n}(X,Y)$, простого и удобного описания пространств $\mathbf{R_l}(X,Y)$ и $\mathbf{R_m}(X,Y)$, по-видимому, не существует. Более того, их описание, скорее всего, существенно зависит от специальных свойств пространств X и Y, связанных с несимметричностью переменных t и s. Рассмотрим наиболее важный частный случай.

2.2.5. Операторы с частными интегралами в пространствах со смешанными нормами [35, 40, 98, 106]. Пусть U и V — БИП с носителями T и S соответственно, $V[U]$ (U — почти совершенное пространство), $U[V]$ (V — почти совершенное пространство) — БИП со смешанными нормами, т. е. пространства измеримых на $T \times S$ функций, для которых имеют смысл и конечны нормы $\|x(t,s)\|_{V[U]} = \|\|x(\cdot,s)\|_U\|_V$, $\|x(t,s)\|_{U[V]} = \|\|x(t,\cdot)\|_V\|_U$.

Опишем три подхода к исследованию условий действия операторов (2.2) и (2.3) в пространствах со смешанными нормами.

Определим два семейства линейных интегральных операторов

$$L(s)u(t) = \int\limits_T l(t,s,\tau)u(\tau)d\mu(\tau)\ (s \in S), \quad M(t)v(s) = \int\limits_S m(t,s,\sigma)v(\sigma)d\nu(\sigma)\ (t \in T). \tag{2.25}$$

Теорема 2.10. *Пусть* U_1 *и* U_2, V_1 *и* V_2 — *БИП с носителями* T *и* S *соответственно. Пусть почти при каждом* $s \in S$ *линейный интегральный оператор* $L(s)$ *действует из* U_1 *в* U_2 *и* $\|L(s)\|_{\mathbf{L}(U_1,U_2)} \in V_2/V_1$. *Тогда частично интегральный оператор* (2.2) *действует из пространства* $X = V_1[U_1]$ *в пространство* $Y = V_2[U_2]$, *где* U_1 *и* U_2 — *почти совершенные пространства, причем* $\|L\|_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|L(s)\|_{\mathbf{L}(U_1,U_2)}\|_{V_2/V_1}$.

Аналогично, если V_1 *и* V_2 — *почти совершенные БИП и почти при каждом* $t \in T$ *линейный оператор* $M(t)$ *действует из* V_1 *в* V_2 *и* $\|M(t)\|_{\mathbf{L}(V_1,V_2)} \in U_2/U_1$, *то частично интегральный* *оператор* (2.3) *действует из пространства* $X = U_1[V_1]$ *в пространство* $Y = U_2[V_2]$, *причем* $\|M\|_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|M(t)\|_{\mathbf{L}(V_1,V_2)}\|_{U_2/U_1}$.

Отметим, что в случае $V_2/V_1 = L^\infty$ или при $V_2/V_1 = E_{u_0}$ условия теоремы 2.10 являются и необходимыми для действия оператора (2.2) из X в Y. Если $U_2/U_1 = L^\infty$ или если $U_2/U_1 = E_{u_0}$, то условия теоремы 2.10 необходимы для действия оператора (2.3) из X в Y.

Пусть W_1 и W_2 — БИП с носителем Ω. Через $\mathbf{Z}(W_1, W_2)$ обозначим пространство Заанена ядер $z(t,s)$ линейных регулярных интегральных операторов, действующих из W_1 в W_2 с нормой

$$\|z(\xi,\eta)\|_{\mathbf{Z}(W_1,W_2)} = \sup_{\|w\|_{W_1}\leqslant 1}\left\|\int\limits_\Omega |z(\xi,\eta)|w(\eta)d\eta\right\|_{W_2}.$$

Теорема 2.11. *Пусть* U_1 *и* U_2, V_1 *и* V_2 — *БИП с носителями* T *и* S *соответственно, причем* U_1, U_2 — *почти совершенные пространства. Пусть почти при всех* $s \in S$ $l(t,s,\tau) \in \mathbf{Z}(U_1,U_2)$ *и* $\|l(\cdot,s,\cdot)\|_{\mathbf{Z}(U_1,U_2)} \in V_2/V_1$. *Тогда частично интегральный оператор* (2.2) *действует из пространства* $X = V_1[U_1]$ *в пространство* $Y = V_2[U_2]$, *регулярен и*

$$|||L|||_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|l(\cdot,s,\cdot)\|_{\mathbf{Z}(U_1,U_2)}\|_{V_2/V_1}.$$

Аналогично, если V_1 *и* V_2 — *почти совершенные БИП и почти при всех* $t \in T$ $m(t,s,\sigma) \in \mathbf{Z}(V_1,V_2)$ *и* $\|m(t,\cdot,\cdot)\|_{\mathbf{Z}(V_1,V_2)} \in U_2/U_1$, *то частично интегральный оператор* (2.3) *действует из пространства* $X = U_1[V_1]$ *в пространство* $Y = U_2[V_2]$, *регулярен и*

$$|||M|||_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|m(t,\cdot,\cdot)\|_{\mathbf{Z}(V_1,V_2)}\|_{U_2/U_1}.$$

Введем в рассмотрение два оператора

$$(\tilde{L}u)(t) = \int\limits_T \|l(t,\cdot,\tau)\|_{V_2/V_1} u(\tau)d\mu(\tau), \quad (\tilde{M}v)(s) = \int\limits_T \|m(\cdot,s,\sigma)\|_{U_2/U_1} v(\sigma)d\nu(\sigma).$$

Теорема 2.12. *Пусть* U_1 *и* U_2, V_1 *и* V_2 — *БИП с носителями* T *и* S *соответственно, причем* U_1 — *почти совершенное, а* U_2 — *совершенное или сепарабельное БИП. Пусть линейный интегральный оператор* $\tilde{L}$ *действует из* U_1 *в* U_2. *Тогда частично интегральный оператор* (2.2) *действует из пространства* $X = U_1[V_1]$ *в пространство* $Y = U_2[V_2]$, *регулярен и* $|||L|||_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|l(t,\cdot,\tau)\|_{V_2/V_1}\|_{\mathbf{Z}(U_1,U_2)}$.

Аналогично, если V_1 — *почти совершенное, а* V_2 — *совершенное или сепарабельное БИП, оператор* $\tilde{M}$ *действует из* V_1 *в* V_2. *Тогда частично интегральный оператор* (2.2) *действует из пространства* $X = V_1[U_1]$ *в пространство* $Y = V_2[U_2]$, *регулярен и* $|||M|||_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|m(\cdot,s,\sigma)\|_{U_2/U_1}\|_{\mathbf{Z}(V_1,V_2)}$.

Приведем еще два признака действия частично интегральных операторов в пространствах со смешанными нормами, основанные на использовании пространств мультипликаторов функций двух переменных.

Теорема 2.13. *Пусть* U_1 *и* U_2, V_1 *и* V_2 — *БИП с носителями* T *и* S *соответственно и* $X \in \{V_1[U_1], U_1[V_1]\}$.

Если $\|l(\cdot,s,\tau)\|_{U_2} \in Z = V_2[L^1]/X$, *то частично интегральный оператор* (2.2) *действует из* X *в* $Y = V_2[U_2]$, *регулярен и* $|||L|||_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|l(\cdot,s,\tau)\|_{U_2}\|_Z$.

Аналогично, если $\|m(t,\cdot,\sigma)\|_{V_2} \in W = U_2[L^1]/X$, *то частично интегральный оператор* (2.3) *действует из* X *в* $Y = U_2[V_2]$, *регулярен и* $|||M|||_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|m(t,\cdot,\sigma)\|_{V_2}\|_W$.

Теорема 2.14. *Пусть* U_1 *и* U_2, V_1 *и* V_2 — *БИП с носителями* T *и* S *соответственно и* $Y \in \{U_2[V_2], V_2[U_2]\}$.

Если $\|l(t,s,\cdot)\|_{U_1'} \in Z = V_1'[L^1]/Y'$, *то частично интегральный оператор* (2.2) *действует из* $X = V_1[U_1]$ *в* Y, *регулярен и* $|||L|||_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|l(t,s,\cdot)\|_{U_1'}\|_Z$.

Аналогично, если $\|m(t,s,\cdot)\|_{V_1'} \in W = U_1'[L^1]/Y'$, *то частично интегральный оператор* (2.3) *действует из* $X = U_1[V_1]$ *в* Y, *регулярен и* $|||M|||_{\mathbf{L}(X,Y)} \leqslant \|\|m(t,s,\cdot)\|_{V_1'}\|_W$.

Анализ утверждений теорем 2.10–2.14 показывает, что их утверждения относятся к различным пространствам функций со смешанными нормами, причем различными для операторов (2.2) и (2.3). Таким образом, в теоремах 2.10–2.14 содержатся 12 различных утверждений, являющихся достаточными признаками действия и (за исключением теоремы 2.10) регулярности частично интегральных операторов в четырех возможных БИП со смешанными нормами.

Теоремы 2.10–2.14 применены в [35, 40, 97, 98] к изучению условий действия и регулярности частично интегральных операторов в пространствах Орлича и Лебега со смешанными нормами, пространствах Орлича и пространствах Лебега $L^p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Из теоремы 2.10 вытекает следующее полезное утверждение: *частично интегральные операторы* (2.2) *и* (2.3) *действуют в* $L^p(T\times S)$ $(1<p<\infty)$ *тогда и только тогда, когда операторы* $L(s)$ *и* $M(t)$ *действуют в* $L^p(T)$ *и в* $L^p(S)$ *при почти всех* $s\in S$ *и* $t\in T$ *соответственно и их нормы равномерно ограничены.*

Приведем два утверждения о действии и регулярности оператора (2.5) в пространствах $L^\infty(T\times S)$ и в $L^1(T\times S)$ (см. [35, 40, 98, 106]).

Теорема 2.15. *Оператор* (2.5) *действует в* $L^\infty(T\times S)$ *тогда и только тогда, когда*

$$A = \operatorname{vraisup}\left[|c(t,s)| + \int\limits_T |l(t,s,\tau)|d\mu(\tau) + \int\limits_S |m(t,s,\sigma)|d\nu(\sigma) + \int\limits_{T\times S} |n(t,s,\tau,\sigma)|d\mu\times\nu(\tau,\sigma)\right] < \infty.$$

При этом его норма равна A.

Теорема 2.16. *Оператор* (2.5) *действует в* $L^1(T\times S)$ *тогда и только тогда, когда*

$$B = \operatorname{vraisup}\left[|c(t,s)| + \int\limits_T |l(\tau,s,t)|d\mu(\tau) + \int\limits_S |m(t,\sigma,s)|d\nu(\sigma) + \int\limits_{T\times S} |n(\tau,\sigma,t,s)|d\mu\times\nu(\tau,\sigma)\right] < \infty.$$

При этом его норма равна B.

2.2.6. Операторы с частными интегралами в $C(X)$ *и в пространствах непрерывных функций* [35, 40, 57, 98]. Пусть T — компактное множество в метрическом пространстве, μ — борелевская мера на $\Sigma(T)$, C — банахово пространство непрерывных на T функций с sup-нормой, X и Y — БИП на (S,Σ,ν) с носителем S, $C(X)$ и $C(Y)$ — пространства непрерывных на T функций со значениями в X и Y соответственно.

Так же, как в теореме 2.1, из действия оператора (2.5) из $C(X)$ в $C(Y)$ или в $M(S,\Sigma,\nu)$ следует его непрерывность.

Если T и S — компактные множества в метрических пространствах, μ и ν — борелевские меры на $\Sigma(T)$ и $\Sigma(S)$ соответственно, C — пространство непрерывных на $T\times S$ функций с sup-нормой, то действующий в пространстве C оператор (2.5) непрерывен.

Через $X'[Y], Y[X']; L^1[Y/X]; L^1[\mathbf{Z}(X,Y)], L^1[X'[Y]], Y[L^1[X']]$ обозначим пространства со смешанной нормой функций переменных $s,\sigma; s,\tau; s,\tau,\sigma$ соответственно, причем норма в $X, Y, Y/X$ вычисляется как норма функции переменной s, а X' — переменной σ, в L^1 — переменной τ, в $\mathbf{Z}(X,Y)$ — переменных s,σ.

Достаточные условия действия оператора (2.5) из $C(X)$ в $C(Y)$ содержит

Теорема 2.17. *Пусть выполнено одно из условий*:

a) $c\in C(Y/X), l\in C(L^1[Y/X]), m\in C(\mathbf{Z}(X,Y)), n\in C(L^1[\mathbf{Z}(X,Y)])$;

b) $c\in C(Y/X), l\in C(L^1[Y/X]), m\in C(X'[Y])\cup C(Y[X']), n\in C(L^1[X'[Y]])\cup C(Y[L^1[X']])$.

Тогда оператор (2.5) *действует из* $C(X)$ *в* $C(Y)$.

Предположим, что $\nu(S)<\infty$, $X=L^p$, $Y=L^q$ $(1\leqslant q\leqslant p\leqslant\infty)$, $p'=p(p-1)^{-1}$, $u=pq(p-q)^{-1}$. Тогда $X'=L^q$, $Y/X=L^u$ и из теоремы 2.17 вытекает

Теорема 2.18. *Пусть выполнено одно из условий*:

а) $c\in C(L^u), l\in C(L^1[L^u]), m\in C(\mathbf{Z}(L^p,L^q)), n\in C(L^1(\mathbf{Z}(L^p,L^q)))$;

б) $c\in C(L^u), l\in C(L^1[L^u]), m\in C(L^{p'}[L^q])\cup C(L^q[L^{p'}]), n\in C(L^1[L^{p'}[L^q]])\cup C(L^q[L^1[L^{p'}]])$.

Тогда оператор (2.5) *действует из* $C(L^p)$ *в* $C(L^q)$.

Отметим, что необходимые и достаточные условия действия оператора (2.5) с частными интегралами из $C(X)$ в $C(Y)$ неизвестны.

Приведем необходимые и достаточные условия действия оператора (2.5) с частными интегралами в пространстве непрерывных функций $C(T \times S)$ в наиболее важном частном случае $T = [a, b]$ и $S = [c, d]$. При получении таких условий существенную роль играет теорема Радона о представлении линейного непрерывного оператора в виде двумерного интеграла Стильтьеса [16].

Пусть

$$\chi(t,s,\tau,\sigma) = \begin{cases} 1, \tau \geqslant t > a \text{ и } \sigma \geqslant s > c \text{ или } \tau > t = a, \sigma > s \geqslant c, \\ 0, \tau < t \text{ или } \sigma < s, \text{ или } \tau = t = a, \text{ или } \sigma = s = c, \end{cases}$$

$$\chi(t,\tau) = \begin{cases} 1, \tau \geqslant t > a \text{ или } \tau > t = a, \\ 0, \tau < t \text{ или } \ \tau = t = a, \end{cases} \qquad \chi(s,\sigma) = \begin{cases} 1, \sigma \geqslant s > c \text{ или } \ \sigma > s = c, \\ 0, \sigma < s \text{ или } \ \sigma = s = c. \end{cases}$$

Определим функции

$$B(t,s) = c(t,s) + \int\limits_a^b l(t,s,\tau)d\tau + \int\limits_c^d m(t,s,\sigma)d\sigma + \int\limits_a^b \int\limits_c^d n(t,s,\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{2.26}$$

$$B_\xi(t,s) = \int\limits_a^\xi \left[\left(c(t,s) + \int\limits_c^d m(t,s,\sigma)d\sigma \right) \chi(t,\tau) + (\xi - \tau) \left(l(t,s,\tau) + \int\limits_c^d n(t,s,\tau,\sigma)d\sigma \right) \right] d\tau, \tag{2.27}$$

$$B_\eta(t,s) = \int\limits_c^\eta \left[\left(c(t,s) + \int\limits_a^b l(t,s,\tau)d\tau \right) \chi(s,\sigma) + (\eta - \sigma) \left(m(t,s,\sigma) + \int\limits_c^d n(t,s,\tau,\sigma)d\tau \right) \right] d\sigma, \tag{2.28}$$

$$B_{\xi\eta}(t,s) = \int\limits_a^\xi \int\limits_c^\eta [c(t,s)\chi(t,s,\tau,\sigma) + (\xi - \tau) l(t,s,\tau)\chi(s,\sigma) + (\eta - \sigma) m(t,s,\sigma)\chi(t,\tau) +$$
$$+ (\xi - \tau)(\eta - \sigma) n(t,s,\tau,\sigma)] d\tau d\sigma, \tag{2.29}$$

$$\gamma(t,s) = |c(t,s)| + \int\limits_a^b |l(t,s,\tau)|d\tau + \int\limits_c^d |m(t,s,\sigma)|d\sigma + \int\limits_a^b \int\limits_c^d |n(t,s,\tau,\sigma)| d\tau d\sigma. \tag{2.30}$$

Следующая теорема установлена в [95]. Другие критерии действия оператора (2.5) в $C([a, b] \times [c, d])$ содержатся в [57, 65].

Теорема 2.19. *Оператор* (2.5) *действует в пространстве* $C([a, b] \times [c, d])$ *в том и только в том случае, когда при каждом фиксированном* (ξ, η) *функции* (2.26)–(2.29) *непрерывны, а функция* (2.30) *ограничена. При выполнении этих условий оператор* (2.5) *непрерывен, а его норма определяется равенством* $\|K\| = \sup\limits_{[a,b]\times[c,d]} \gamma(t,s)$.

Отметим, что представление Радона линейного непрерывного оператора на $C([a, b] \times [c, d])$ неединственно. Представление же оператора K с частными интегралами в виде (2.5), как следует из теоремы 2.19, единственно.

Проверка непрерывности функций (2.26)–(2.29) в теореме 2.19 не всегда проста. Однако нетрудно привести удобные достаточные признаки действия оператора (2.5) в пространстве непрерывных функций.

Пусть T, S и Ω — компактные множества положительных борелевских мер μ, ν и ω в метрических пространствах с расстояниями ρ_1, ρ_2 и ρ, и пусть C — пространство непрерывных функций на $T \times S$. Функция $a(t, s, u)$ по определению принадлежит пространству $C(L^1(\Omega))$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $\rho_1(t_1, t_2) < \delta$, $\rho_2(s_1, s_2) < \delta$ $\int\limits_\Omega |a(t_1, s_1, u) - a(t_2, s_2, u)| d\omega(u) < \varepsilon$ и $\sup\limits_{T\times S} \|a(t, s, \cdot\|_{L^1} < \infty$.

Теорема 2.20. *Если функция $c(t,s)$ непрерывна на $C(T \times S)$, $l \in C(L^1(T))$, $m \in C(L^1(S))$, $n \in C(L^1(T \times S))$, то оператор* (2.5) *действует в $C(T \times S)$, причем* $\|K\| \leqslant \sup\limits_{T\times S}(|c(t,s)| + \|l(t,s,\cdot\|_{L^1(T)} + \|m(t,s,\cdot\|_{L^1(S)} + \|n(t,s,\cdot,\cdot\|_{L^1(T\times S)})$.

Условие теоремы выполняется, если c, l, m, n — непрерывные функции.

Аналогично пункту 2.2.4, обозначим через $\mathbf{K}(C)$ множество действующих в $C([a,b] \times [c,d])$ операторов (2.5). Из теоремы 2.19 следует, что $\mathbf{K}(C)$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{L}(C)$ непрерывных линейных операторов на C.

Пространство $\mathbf{L}(C)$ является банаховой алгеброй, в которой умножением является композиция операторов. В силу теоремы Фубини подпространство $\mathbf{K}(C)$ является подалгеброй алгебры $\mathbf{L}(C)$, причем утверждение теоремы 2.8 остается справедливым, если в нем заменить T на $[a,b]$, S на $[c,d]$, а меры рассматривать как меры Лебега на прямой.

Алгебра $\mathbf{K}(C)$ не является идеалом в $\mathbf{L}(C)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть композицию операторов из $\mathbf{K}(C)$ с оператором $D : x(t,s) \to x(t_0, s_0)$, где $(t_0, s_0) \in [a,b] \times [c,d]$.

Пусть $W = \mathbf{L_c}(C) \oplus \mathbf{L_l}(C) \oplus \mathbf{L_M}(C) \oplus \mathbf{L_n}(C)$, где L_c, L_l, L_m, L_n — множества действующих в $C([a,b] \times [c,d])$ операторов (2.1)–(2.4). Пространство W есть замкнутое подпространство пространства $\mathbf{K}(C)$. Примеры показывают [35, 57, 65, 98], что в $\mathbf{K}(C)$ существуют операторы, не принадлежащие W. Поэтому W — собственное подпространство в $\mathbf{K}(C)$.

Подпространства $\mathbf{L_c}(C)$ и $\mathbf{L_l}(C) \oplus \mathbf{L_M}(C) \oplus \mathbf{L_n}(C)$ суть идеалы в W и подалгебры в $\mathbf{K}(C)$, $\mathbf{L_n}(C)$ и $\mathbf{L_l}(C) \oplus \mathbf{L_m}(C) \oplus \mathbf{L_n}(C)$ не являются идеалами в $\mathbf{L}(C)$.

2.3. Спектральные свойства операторов с частными интегралами [69, 77, 102].

2.3.1. Спектральные свойства линейных ограниченных операторов. Пусть X — комплексное банахово пространство, R — ограниченный линейный оператор в X, λ — комплексное число, I — единичный оператор в X и $R(\lambda) = \lambda I - R$.

Через $\rho(R)$, $\sigma(R)$, $\sigma_p(R)$ и $\sigma_\pi(R)$ обозначим резольвентное множество, спектр, точечный и предельный спектры оператора R соответственно. Будем говорить, что $\lambda \in \mathbb{C}$ является *точкой области $n(d)$-нормальности* оператора R, если множество значений оператора $R(\lambda)$ замкнуто и размерность ядра $n(R(\lambda)) < \infty$ (коядра $d(R(\lambda)) < \infty$). Пересечение (объединение) области n-нормальности и области d-нормальности оператора R называется его *областью нетеровости* (*полуфредгольмовости*). Множество точек нетеровости с нулевым индексом $ind(R(\lambda)) = n(R(\lambda)) - d(R(\lambda))$ называется *областью фредгольмовости* оператора R.

Важное значение при изучении оператора R имеют его существенные спектры в смысле:

а) *Густавссона—Вайдмана множества* $\sigma_+(R)$, $\sigma_-(R)$, где $\sigma_+(R)$ $(\sigma_-(R))$ — дополнение до области $n(d)$-нормальности оператора R;
б) *Като* (*Вольфа*) *множество* $\sigma_{ek}(R) = \sigma_+(R) \cap \sigma_-(R)$ $(\sigma_{ew}(R) = \sigma_+(R) \cup \sigma_-(R))$;
в) *Шехтера множество* $\sigma_{es}(R)$, которое является объединением существенного спектра в смысле Вольфа и множества $\lambda \in \sigma(R)$, для которых оператор R является нетеровым оператором с ненулевым индексом;
г) *Браудера множество* $\sigma_{eb}(R)$ тех $\lambda \in C$, для которых выполнено по крайней мере одно из условий: множество значений оператора $R(\lambda)$ не замкнуто; λ — предельная точка $\sigma(R)$; $\bigcup\limits_{n\geqslant 0} Ker[R(\lambda)]^n$ имеет бесконечную размерность.

Для этих спектров справедливы следующие свойства [69, 103]:

$\sigma_+(R)$, $\sigma_-(R)$, $\sigma_{ek}(R)$, $\sigma_{ew}(R)$, $\sigma_{es}(R)$, $\sigma_{eb}(R)$, $\sigma_\pi(R)$, $\sigma(R)$ — компактные множества; $\sigma_{ek}(R) \subset \sigma_+(R), \sigma_-(R) \subset \sigma_{ew}(R) \subset \sigma_{es}(R) \subset \sigma_{eb}(R) \subset \sigma(R)$; $\sigma_{ek}(R) \cup \sigma_p(R) = \sigma_\pi(R) \subset \sigma(R)$; $\partial\sigma_{eb}(R) \subset \partial\sigma_{es}(R) \subset \partial\sigma_{ew}(R) \subset \partial\sigma_+(R), \partial\sigma_-(R) \subset \partial\sigma_{ek}(R)$; $\partial\sigma(R) = (\sigma(R) \setminus \sigma_{eb}(R)) \cup \partial\sigma_{eb}(R) \subset \partial\sigma_\pi(R)$, где $\partial\Phi$ обозначает границу множества Φ.

Через $t(R,\lambda)$ будем обозначать алгебраическую кратность собственного числа λ оператора R, а через $r(R)$ — его спектральный радиус.

2.3.2. Условия фредгольмовости операторов с частными интегралами. Как отмечалось выше, оператор (2.5) в общем случае есть не интегральный и не компактный оператор. Более того, оператор $\lambda I - K$ даже в простейшем случае единичных ядер l, m, n, функции $c(t,s) \equiv 0$ и $T = S = [0,1]$ не является не только фредгольмовым или нетеровым, но и n-нормальным и d-нормальным при $\lambda = 1$. В связи с этим возникает задача описания условий, при которых оператор левой части уравнения

$$(\lambda I - L - M - N)x = f \tag{2.31}$$

— обратимый, фредгольмов, нетеров, n-нормальный, d-нормальный, а также задача о сведении уравнения (2.31) к эквивалентному двумерному интегральному уравнению. Будем предполагать, что в уравнении (2.31) $\lambda \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\lambda = 1$. Тогда

$$I - L - M - N = (I-L)(I-M) - (N+LM) = I - L - M - N = (I-M)(I-L) - (N+ML). \tag{2.32}$$

Поэтому в случае существования ограниченных операторов $(I-L)^{-1}$ и $(I-M)^{-1}$ уравнение (2.31) эквивалентно любому из двух уравнений

$$(I - (I-M)^{-1}(I-L)^{-1})(N+LM)x = h_1, \quad (I - (I-L)^{-1}(I-M)^{-1})(N+ML)x = h_2, \tag{2.33}$$

где $h_1 = (I-M)^{-1}(I-L)^{-1}f$, $h_2 = (I-L)^{-1}(I-M)^{-1}f$. При естественных условиях $N + LM$ и $N + ML$ — двумерные интегральные операторы, а уравнения (2.33) — обычные интегральные уравнения, к которым уже можно применять все основные результаты классической теории интегральных уравнений.

Аналогично, если в (2.31) $\lambda = 1$ не является точкой спектра оператора $L+M$, то уравнение (2.31) эквивалентно интегральному уравнению

$$x = (I - L - M)^{-1}Nx + (I - L - M)^{-1})f. \tag{2.34}$$

Если теперь в (2.34) интегральный оператор N компактен, то для исследования этого уравнения может быть использована теория Рисса—Шаудера [68].

Таким образом, переход от уравнения (2.31) к эквивалентным уравнениям (2.33) и (2.34) связан с обратимостью операторов $I - L$, $I - M$, $I - L - M$. В приложениях обычно N — компактный оператор. Поэтому фредгольмовость, нетеровость, n-нормальность и d-нормальность уравнения (2.31) также определяются спектральными свойствами операторов L, M, $L + M$.

Обратимость операторов $I - L$ и $I - M$ связана с разрешимостью уравнений

$$u(t,s) = \int_T l(t,s,\tau)u(\tau,s)d\mu(\tau) + f(t,s), \quad v(t,s) = \int_S m(t,s,\sigma)v(t,\sigma)d\nu(\sigma) + f(t,s), \tag{2.35}$$

которые фактически являются обычными интегральными уравнениями с параметром s для первого уравнения (2.35) и параметром t для второго уравнения (2.35). Поэтому исследование уравнений семейств (2.35) сводится к исследованию семейств операторов (2.25).

В БИП $U = U(T)$ и $V = V(S)$ рассмотрим семейства интегральных уравнений

$$u(t) = \int_T l(t,s,\tau)u(\tau)d\mu(\tau) + g(t) \ (s \in S), \quad v(s) = \int_S m(t,s,\sigma)v(\sigma)d\nu(\sigma) + h(s) \ (t \in T), \tag{2.36}$$

где $g \in U$ и $h \in S$ — произвольные функции.

Пусть

$$]L(s)[u(t) = \int_T |l(t,s,\tau)|u(\tau)d\mu(\tau) \ (s \in S), \quad]M(t)[v(s) = \int_S |m(t,s,\sigma)|v(\sigma)d\nu(\sigma) \ (t \in T).$$

Предположим, что $r(]L(s)[) < 1$ $(s \in S)$, $r(]M(t)[) < 1$ $(t \in T)$, где $r(]L(s)[)$ и $r(]M(t)[)$ — спектральные радиусы операторов $]L(s)[$ и $]M(t)[$. В этом случае определены функции

$$\varphi(t,s,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} l^{(k)}(t,s,\tau) \ (s \in S, t,\tau \in T), \quad \psi(t,s,\sigma) = \sum_{k=1}^{\infty} m^{(k)}(t,s,\sigma) \ (t \in T, s,\sigma \in S), \tag{2.37}$$

где $l^{(k)}(t,s,\tau)$ и $m^{(k)}(t,s,\sigma)$ $(k = 1,2,\ldots)$ — итерированные ядра. При выполнении дополнительных условий

$$\varphi(t,s,\tau) \in \mathbf{R_l}(X,X), \ \psi(t,s,\sigma) \in \mathbf{R_m}(X,X), \tag{2.38}$$

$r(]L[) < 1$, $r(]M[) < 1$ функции

$$u(t,s) = f(t,s) + \int\limits_T \varphi(t,s,\tau) f(\tau,s) d\mu(\tau), \quad v(t,s) = f(t,s) + \int\limits_S \psi(t,s,\sigma) f(t,\sigma) d\nu(\sigma)$$

являются решениями уравнений (2.35).

Таким образом, справедлива

Теорема 2.21. *Пусть операторы L, M действуют в БИП X и регулярны. Если выполнены неравенства $r(]L(s)[) < 1$ $(s \in S)$, $r(]M(t)[) < 1$ $(t \in T)$ и условия* (2.38), *то операторы $I - L$ и $I - M$ обратимы в X. Если дополнительно N действует в X и регулярен, а хотя бы один из операторов $N + LM$ или $N + ML$ компактен, то оператор $I - L - M - N$ фредгольмов.*

Приведенные в теореме предположения не являются необходимыми. При доказательстве фредгольмовости оператора $I - L - M$ существенно используется предположение об обратимости операторов $I - L$ и $I - M$, т. е. условие $1 \notin \sigma(L) \cup \sigma(M)$. От этого предположения нельзя отказаться даже в практически важном частном случае операторов L, M, N с ядрами $l(t,s,\tau) \equiv l(t,\tau)$, $m(t,s,\sigma) \equiv m(s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$.

Пусть $L(s)$ $(s \in S)$ и $M(t)$ $(t \in T)$ — операторы (2.25). Через $I(L)$ и $I(M)$ обозначим множество ядер $l(t,s,\tau)$ и $m(t,s,\sigma)$, при которых операторы $I - L$ и $I - M$ регулярны и обратимы на БИП $U = U(T)$ и $V = V(S)$ соответственно, причем операторы $(I - L)^{-1}$ и $(I - M)^{-1}$ допускают представления

$$(I - L(s))^{-1} u(t) = u(t) + \int\limits_T a(t,s,\tau) u(\tau) d\mu(\tau), \ (I - M(t))^{-1} v(s) = v(s) + \int\limits_S b(t,s,\sigma) v(\sigma) d\nu(\sigma), \tag{2.39}$$

где $a(t,s,\tau) \in \mathbf{R_l}(X,X)$, $b(t,s,\sigma) \in \mathbf{R_m}(X,X)$ и $X = U[V]$ или $X = V[U]$.

Отметим, что в условии теоремы 2.21 $l \in I(L)$, $m \in I(M)$.

Теорема 2.22. *Пусть $X = U[V]$ или $X = V[U]$ — БИП, операторы L, M действуют в БИП X и регулярны. Если $l \in I(L)$, $m \in I(M)$, то операторы $I - L$ и $I - M$ обратимы в X. Если дополнительно N действует в X и регулярен, а хотя бы один из операторов $N + LM$ или $N + ML$ компактен, то оператор $I - L - M - N$ фредгольмов.*

Заметим, что в условии теорем 2.21 и 2.22 уравнение (2.31) с $\lambda = 1$ эквивалентно двумерному интегральному уравнению.

Пусть операторы L и M имеют вырожденные ядра

$$l(t,s,\tau) = \sum_{i=1}^{l} l_i(t) \bar{l}_i(\tau) a_i(s), \ m(t,s,\sigma) = \sum_{j=1}^{m} m_j(s) \bar{m}_j(\sigma) b_j(t), \tag{2.40}$$

где $\{l_i\} \subset U, \{l_i'\} \subset U', \{a_i\} \subset L^\infty(S)$, $\{m_j\} \subset V, \{m_j'\} \subset V', \{b_j\} \subset L^\infty(T)$, $(i = 1, \ldots, l, \ j = 1, \ldots, m)$ — системы линейно-независимых функций. Операторы L и M регулярны в $U[V]$ и в $V[U]$, их композиция — компактный оператор, а разрешимость уравнений (2.35) эквивалентна разрешимости следующих систем:

$$z_i(s) - \sum_{p=1}^{l} l_{ip} a_p(s) z_p(s) = f_i(s) \ (i = 1, \ldots, l), \ z_j(t) - \sum_{q=1}^{m} m_{jq} b_q(t) y_q(t) = g_j(t) \ (j = 1, \ldots, m) \tag{2.41}$$

относительно $z_i \in V(S)$, $y_j \in U(T)$, где

$$l_{ip} = \int\limits_T l_p(\tau) \bar{l}_i(\tau) d\mu(\tau), \ f_i(s) = \int\limits_T \bar{l}_i(\tau) f(\tau,s) d\mu(\tau),$$

$$m_{jq} = \int\limits_S m_q(\sigma) \bar{m}_j(\sigma) d\nu(\sigma), \ g_j(t) = \int\limits_S \bar{m}_j(\sigma) f(t,\sigma) d\nu(\sigma).$$

Системы (2.41) линейных алгебраических уравнений с параметрами s и t соответственно однозначно разрешимы, если

$$|\det(\delta_{ip} - a_p(s)l_{ip})| \geqslant \alpha > 0, \ |\det(\delta_{jq} - b_q(t)m_{jq})| \geqslant \beta > 0, \tag{2.42}$$

причем $z_i \in U$, $y_j \in V$ $(i = 1, \ldots, l, j = 1, \ldots, m)$. Поэтому справедлива

Теорема 2.23. *Если вырожденные ядра* (2.40) *операторов L и M удовлетворяют условию* (2.42)*, то операторы $I - L$ и $I - M$ обратимы в $X = U[V]$ и в $X = V[U]$. Если дополнительно N — компактный оператор в X, то оператор $I - L - M - N$ фредгольмов.*

Заметим, что в условии теоремы 2.23 достаточно выполнение неравенств (2.42) почти при всех $s \in S$ и $t \in T$. Если на множестве положительной меры выполнено хотя бы одно из равенств $|\det(\delta_{ip} - a_p(s)l_{ip})| = 0$, $|\det(\delta_{jq} - b_q(t)m_{jq})| = 0$, то оператор $I - L - M - N$ не является нетеровым.

С применением аппроксимаций операторов L и M «близкими» операторами L_B и M_B с вырожденными ядрами для исследования обратимости операторов $I - L$ и $I - M$ можно использовать обратимость операторов $I - L_B$ и $I - M_B$.

Следующее утверждение о нетеровости и фредгольмовости оператора $I - L - M - N$ применимо в случае банаховых пространств.

Теорема 2.24 (см. [35]). *Если операторы L, M и N непрерывны в банаховом пространстве $X = X(T \times S)$, операторы $N + LM$ и $N + ML$ компактны в X, то нетеровость оператора $I - L - M - N$ равносильна нетеровости операторов $I - L$ и $I - M$. Если дополнительно оператор $I - L$* (*оператор $I - M$*) *фредгольмов, то фредгольмовость оператора $I - L - M - N$ равносильна фредгольмовости оператора $I - M$* (*оператора $I - L$ соответственно*).

Теоремы 2.21–2.24 сформулированы для операторов с частными интегралами, действующих в БИП. Аналогичные утверждения для этих операторов в $C(X)$ легко формулируются с применением теорем 2.21–2.24. Действительно, в условии этих теорем операторы L, M, N действуют одновременно из $C(X)$ в $C(Y)$ и из БИП $L^\infty[X]$ в БИП $L^\infty[Y]$, при этом $C(X)$ — замкнутое подпространство в $L^\infty[X]$, инвариантное для L, M, N при $X = Y$. Поэтому теоремы 2.21–2.24 в случае пространства $L^\infty[X]$ естественным образом переформулируются для $C(X)$.

Такая же схема применима и для пространства $C(T \times S)$. Из теоремы 2.19 получаются необходимые и достаточные условия действия операторов L, M, N в $C([a,b] \times [c,d])$. Так как $C([a,b] \times [c,d])$ — замкнутое подпространство в $L^\infty([a,b] \times [c,d])$, инвариантное для L, M, N, то теоремы 2.21–2.24 для пространства $L^\infty([a,b] \times [c,d])$ легко переформулируются на случай $C([a,b] \times [c,d])$.

Пусть $C = C(T)$ — пространство непрерывных на компакте T функций, μ — борелевская мера, $X = X(S)$ — БИП. Через $L^1[L^\infty]$, $X'[X]$, $L^1[X'[X]]$, $X[L^1[X']]$ обозначим пространства со смешанной нормой функций переменных $s, \tau; s, \sigma; \tau, \sigma$ соответственно, причем норма в L^1 вычисляется как норма функции переменной τ, в L^∞ и в X — переменной s, в X' — переменной σ.

Теорема 2.25. *Пусть $l(t,s,\tau) \in C(L^1[L^\infty])$, $m(t,s,\sigma) \in C(X'[X]) \cup C(X[X'])$. Если функция $\varphi(t,s,\tau)$ из* (2.37) *принадлежит $C(L^1[L^\infty])$, а функция $\psi(t,s,\sigma)$ из* (2.37) *принадлежит $C(X'[X])$ или $C(X[X'])$, то операторы $I - L$ и $I - M$ обратимы в $C(X)$. Если дополнительно $n(t,s,\tau,\sigma)$ принадлежит $C(L^1[X'[X]])$ или $C(X[L^1[X']])$, то оператор $I - L - M - N$ фредгольмов.*

Через $\bar{I}(L)$ и $\bar{I}(M)$ обозначим множество ядер $l(t,s,\tau)$ и $m(t,s,\sigma)$, при которых в (2.39) $a(t,s,\tau) \in C(L^1[L^\infty])$, $b(t,s,\sigma) \in C(X'[X]) \cup C(X[X'])$. В условии теоремы 2.25 $l \in \bar{I}(L)$, $l \in \bar{I}(M)$.

Теорема 2.26. *Пусть $l(t,s,\tau) \in C(X'[X]) \cup C(X[X'])$. Если $l(t,s,\tau) \in \bar{I}(L)$, $m(t,s,\sigma) \in \bar{I}(M)$, то операторы $I - L$ и $I - M$ обратимы в $C(X)$. Если дополнительно $n(t,s,\tau,\sigma) \in C(L^1[X'[X]]) \cup C(X[L^1[X']])$, то оператор $I - L - M - N$ фредгольмов.*

Утверждение, аналогичное теореме 2.23 для операторов с частными интегралами и вырожденными ядрами, имеет место и в случае пространства $C(X)$.

Пусть $\sigma(L(s))$ и $\sigma(M(t))$ — спектры операторов (2.25) и $\sigma_L = \bigcup\limits_s \sigma(L(s))$, $\sigma_M = \bigcup\limits_t \sigma(M(t))$.

Рассмотрим условия фредгольмовости операторов с частными интегралами в $C(T \times S)$.

Теорема 2.27. *Если T и S — компактные множества, μ и ν — борелевские меры, ядра $l(t,s,\tau)$ и $m(t,s,\sigma)$ непрерывны на $T\times S\times T$ и $T\times S\times S$ соответственно и N — компактный оператор в $C(T\times S)$, то оператор $I-L-M-N$ фредгольмов в $C(T\times S)$ тогда и только тогда, когда $1\notin\sigma_L\cup\sigma_M$.*

В наиболее важном частном случае $T=[a,b]$ и $S=[c,d]$ предположение о непрерывности ядер $l(t,s,\tau)$ и $m(t,s,\sigma)$ можно ослабить. Следующая теорема установлена в [43, 105].

Теорема 2.28. *Если $l\in C(L^1([a,b]))$, $m\in C(L^1([c,d]))$, $n\in C(L^1([a,b]\times[c,d]))$, то эквивалентны утверждения*:

а) *оператор $I-L-M-N$ фредгольмов в $C([a,b]\times[c,d])$;*
б) *операторы $I-L$ и $I-M$ обратимы в $C([a,b]\times[c,d])$;*
в) *операторы $I-L(s)$ и $I-M(t)$, где $L(s)$ и $M(t)$ — операторы* (2.25) *с $T=[a,b]$ и $S=[c,d]$, обратимы при любых $s\in[c,d]$, $t\in[a,b]$.*

2.3.3. Спектральные свойства операторов с частными интегралами в $L^2(T\times S)$. Важными для приложений линейными операторами с частными интегралами являются операторы с частными интегралами, допускающие реализацию в виде суммы тензорных произведений линейных интегральных операторов и единичных операторов. Для изучения спектральных свойств таких операторов может быть использована спектральная теория тензорных произведений операторов в тензорных произведениях банаховых пространств с квазиравномерными кросснормами [102, 103]. Важнейшим классом таких пространств является пространство $L^2(T\times S)$. Это пространство можно рассматривать как пополнение тензорного произведения $L^2(T)\otimes L^2(S)$ относительно кросснормы σ, совпадающей с нормой в $L^2(T\times S)$, при этом кросснорма σ является квазиравномерной.

Интегральные операторы A и B определим равенствами

$$(Ah)(t)=\int\limits_T l(t,\tau)h(\tau)d\mu(\tau),\ (Bg)(s)=\int\limits_S m(s,\sigma)g(\sigma)d\nu(\sigma). \tag{2.43}$$

Будем предполагать, что эти операторы действуют в $L^2(T)$ и в $L^2(S)$ соответственно. Тогда оператор вида

$$K=A\bar{\otimes}I+I\bar{\otimes}B, \tag{2.44}$$

где $A\bar{\otimes}I$ и $I\bar{\otimes}B$ — замыкания операторов $A\otimes I$ и $I\otimes B$, определенных на линейных комбинациях $(\sum\limits_{i=1}^n u_i\otimes v_i)(t,s)=\sum\limits_{i=1}^n u_i(t)v_i(s)$ равенствами $(A\otimes I)\sum\limits_{i=1}^n u_i\otimes v_i=\sum\limits_{i=1}^n A(u_i)\otimes v_i$, $(I\otimes B)\sum\limits_{i=1}^n u_i\otimes v_i=\sum\limits_{i=1}^n u_i\otimes B(v_i)$, есть частный случай оператора (2.5).

С применением результатов работ [102, 103] доказываются следующие утверждения:

Теорема 2.29.

$$\sigma(K)=\sigma(A)+\sigma(B), \tag{2.45}$$

$$\sigma_{eb}(K)=(\sigma_{eb}(A)+\sigma(B))\cup(\sigma(A)+\sigma_{eb}(B)). \tag{2.46}$$

Если λ не принадлежит множеству (2.46)*, то*

$$t(K,\lambda)=\sum_{(\alpha,\beta):\alpha+\beta=\lambda,\ \alpha\in E,\beta\in E'} t(A,\alpha)t(B\beta), \tag{2.47}$$

где $E=\sigma(A)/\sigma_{eb}(A)$, $E'=\sigma(B)/\sigma_{eb}(B)$,

$$\sigma_{ew}(K)=(\sigma_{ew}(A)+\sigma(B))\cup(\sigma(A)+\sigma_{ew}(B)). \tag{2.48}$$

Если λ не принадлежит множеству (2.48)*, то*

$$ind(K-\lambda I)=\sum_{(\alpha,\beta):\alpha+\beta=\lambda,\ \alpha\in F,\beta\in E'} ind(B-\beta I)\sum_{p=1}^{\infty}(n((A-\alpha I)^p)-n((A-\alpha I)^{p-1})+$$

$$+\sum_{(\alpha,\beta):\alpha+\beta=\lambda,\ \alpha\in E,\beta\in F'} ind(A-\alpha I)\sum_{p=1}^{\infty}(n((B-\beta I)^p)-n((B-\beta I)^{p-1}), \tag{2.49}$$

где $E = \sigma(A)/\sigma_{eb}(A)$, $E' = \sigma(B)/\sigma_{eb}(B)$, $F = \sigma(A)/\sigma_{ew}(A)$, $F' = \sigma(B)/\sigma_{ew}(B)$.

$\sigma_{es}(K)$ *равно объединению множества* (2.48) *и множества всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и не принадлежащих множеству* (2.48), *для которых определяемый по формуле* (2.49) $ind(K - \lambda I)$ *не равен нулю.*

Теорема 2.30.

$$\sigma_\pi(K) = \sigma_\pi(A) + \sigma_\pi(B), \tag{2.50}$$

$$\sigma_+(K) = (\sigma_+(A) + \sigma_\pi(B)) \cup (\sigma_\pi(A) + \sigma_+(B)). \tag{2.51}$$

Если λ *не принадлежит множеству* (2.51), *то*

$$n(K-\lambda I) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\sigma_\pi(A)\times\sigma_\pi(B),\alpha+\beta=\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} (n((A-\alpha I)^p) - n((A-\alpha I)^{p-1}) \times (n((B-\beta I)^p) - n((B-\beta I)^{p-1}). \tag{2.52}$$

Теорема 2.31.

$$\sigma_\delta(K) = \sigma_\delta(A) + \sigma_\delta(B), \tag{2.53}$$

$$\sigma_-(K) = (\sigma_-(A) + \sigma_\delta(B)) \cup (\sigma_\delta(A) + \sigma_-(B)). \tag{2.54}$$

Если λ *не принадлежит множеству* (2.54), *то*

$$d(K-\lambda I) = \sum_{(\alpha,\beta)\in\sigma_\delta(A)\times\sigma_\delta(B),\alpha+\beta=\lambda} \sum_{p=1}^{\infty} (d((A-\alpha I)^p) - d((A-\alpha I)^{p-1}) \times (d((B-\beta I)^p) - d((B-\beta I)^{p-1}). \tag{2.55}$$

$\sigma_{ek}(K)$ *совпадает с пересечением множеств, стоящих в правых частях равенств* (2.51) *и* (2.54).

Пример 2.1 (см. [31]). Пусть A и B — компактные интегральные операторы в $L^2(T)$ и $L^2(S)$ соответственно. Тогда $\sigma(A) = \{0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$, $\sigma(B) = \{0, \beta_1, \beta_2, \ldots\}$. Так как $\sigma(A) = \sigma_\pi(A) = \sigma_\delta(A)$, $\sigma(B) = \sigma_\pi(B) = \sigma_\delta(B)$, $\sigma_a(A) = \sigma_a(B) = \{0\}$, где $a \in \{+, -, ew, es, eb\}$, то применяя теоремы 2.29–2.31, получаем $\sigma_{eb}(K) = \sigma_{ew}(K) = \sigma_{es}(K) = \sigma_+(K) = \sigma_-(K) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$. Поэтому области n-нормальности, d-нормальности, нетеровости и фредгольмовости оператора K совпадают с объединением множества $\{\lambda : \lambda \neq \alpha + \beta,$ где $\alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\}$ и множества изолированных собственных чисел конечной кратности оператора K, которое определяется равенством

$$\sigma(K)/\sigma_{eb}(K) = \{\alpha + \beta \neq 0 : \alpha + \beta \neq \gamma, \eta \text{ для } \alpha, \gamma \in \sigma(A); \beta, \eta \in \sigma(B)\}. \tag{2.56}$$

Пример 2.2 (см. [31]). Пусть A и B — самосопряженные интегральные операторы в $L^2(T)$ и в $L^2(S)$ соответственно. Тогда их существенные спектры в смысле Густавссона—Вайдмана, Като, Вольфа, Шехтера и Браудера совпадают. В этом случае $\sigma(K) = \sigma_\pi(K)$ и в силу теорем 2.29–2.31 $\sigma_a(K) = (\sigma_{eb}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{eb}(B))$ $(a \in \{+, -, ek, ew, es, eb\}$. Поэтому области n-нормальности, d-нормальности, нетеровости и фредгольмовости оператора K совпадают с множеством

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq \alpha + \beta, \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\} \cup ((\sigma(A)/\sigma_{eb}(A) + \sigma(B)/\sigma_{eb}(B))/$$
$$/(\sigma_{eb}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{eb}(B))).$$

Из формулы (2.46)вытекает следующая формула для изолированных собственных чисел конечной кратности оператора (2.44):

$$\sigma(K)/\sigma_{eb}(K) = ((\sigma(A)/\sigma_{eb}(A)) + (\sigma(B)/\sigma_{eb}(B))/((\sigma_{eb}(A) + \sigma(B)) \cup (\sigma(A) + \sigma_{eb}(B)).$$

В частности, если оператор A или B равен нулю, то оператор (2.44) изолированных собственных чисел конечной кратности не имеет.

Очевидно включение $\sigma_p(A) + \sigma_p(B) \subset \sigma_p(K)$. Если теперь $\sigma(A) = \sigma_p(A)$, $\sigma(B) = \sigma_p(B)$, то из (2.44) следует равенство

$$\sigma_p(K) = \sigma_p(A) + \sigma_p(B). \tag{2.57}$$

Пример 2.3 (см. [31]). Если интегральные операторы A и B имеют вырожденные ядра $l(t, \tau)$ и $m(s, \sigma)$ и действуют в пространствах $L^2(T)$ и $L^2(S)$ соответственно, то $\sigma(A) = \sigma_p(A)$, $\sigma(B) = \sigma_p(B)$. Поэтому $\sigma(K) = \sigma_p(K) = \sigma_p(A) + \sigma_p(B)$.

Следующий пример [31, 35, 98, 103] показывает, что формула (2.57) неверна, если даже A и B — компактные операторы.

Пример 2.4. Пусть $T = S = [0,1]$ и $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L^2([0,1])$. Предположим также, что

$$l(t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_{k+1}(t)e_k(\tau)}{k^2(k+1)}, \ m(s,\sigma) = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{e_{k-1}(s)e_k(\sigma)}{(k-1)^2}.$$

Операторы A и B компактны в $L^2([0,1])$. Непосредственно проверяется, что $\sigma(B) = \sigma_p(B) = \{0\} = \sigma(A)$, $\sigma_p(A) = \varnothing$. Для оператора K имеем $\sigma(K) = \sigma(A) + \sigma(B) = \{0\}$. Так как $K\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{e_i \otimes e_i}{i!}\right) = 0$, то $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{e_i \otimes e_i}{i!} \neq 0$ — собственная функция оператора K, соответствующая собственному числу 0. Поэтому $\sigma_p(K) = 0 \neq \sigma_p(A) + \sigma_p(B)$.

В связи с примером 2.4 возникает вопрос об условиях, при которых справедливо равенство (2.57).

Линейный ограниченный оператор R, действующий в гильбертовом пространстве H, назовем оператором *с чисто точечным спектром*, если в H существует безусловный нормированный базис, составленный из собственных функций оператора R.

Теорема 2.32 (см. [31, 35, 98])**.** *Если интегральные операторы A и B действуют в $L^2(T)$ и в $L^2(S)$ соответственно и хотя бы один из них является оператором с чисто точечным спектром, то справедливо равенство* (2.57).

Следующий пример показывает, что спектром оператора (2.44) может быть любое содержащее нуль компактное множество F комплексной плоскости.

Пример 2.5 (см. [35])**.** Пусть $\{\lambda_n\}$ — всюду плотное множество в F, $e_1, e_2, \ldots$ — произвольные попарно непересекающиеся и измеримые по Лебегу подмножества отрезка $[0,1]$ и $l(t,\tau) = \sum\limits_n \lambda_n \chi_{e_n}(t)\chi_{e_n}(\tau)\mu(e_n)$. Тогда линейный интегральный оператор $(Ah)(t) = \int\limits_0^1 l(t,\tau)h(\tau)d\tau$ действует в $L^2([0,1])$ и имеет своим спектром множество F (см. [75]). В силу теоремы 2.29 это множество является спектром оператора $(Kx)(t,s) = \int\limits_0^1 l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_0^s m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$, где $m(s,\sigma) \in L^2([0,1]\times[0,1])$. Следовательно, спектром оператора (2.5) может быть любое содержащее нуль компактное множество комплексной плоскости.

2.3.4. Спектральные свойства операторов с частными интегралами в идеальных пространствах. Естественными для операторов с частными интегралами являются пространства со смешанными нормами. При дополнительных условиях на смешанные нормы эти пространства реализуются в виде тензорных произведений пространств с кросснормами, впервые введенными В. Л. Левиным [78]. Смешанная норма в общем случае не удовлетворяет условиям, используемым в спектральной теории тензорных произведений линейных ограниченных операторов на тензорных произведениях банаховых пространств (не является квазиравномерной кросснормой), уже в общем случае пространств Лебега со смешанными нормами [68]. Поэтому результаты о спектре и частях спектра линейных ограниченных операторов на таких пространствах без дополнительных условий на операторы, вообще говоря, не имеют места. Приводимые далее в этом разделе результаты получены в [31].

Теорема 2.33. *Пусть интегральные операторы A и B из* (2.43) *действуют в правильных БИП $X = X(T)$ и $Y = Y(S)$ соответственно и пусть выполнено одно из условий*: *A — регулярный оператор в X и $\rho(A) = \rho_r(A)$; B — регулярный оператор в Y и $\rho(B) = \rho_r(B)$, где $\rho(A) = \{\lambda \in \rho(A) : (\lambda I - A)^{-1}$— регулярный оператор в $X\}$, $\rho(B) = \{\lambda \in \rho(B) : (\lambda I - B)^{-1}$— регулярный оператор в $Y\}$.*

Тогда справедливы равенства (2.44) *и* (2.46).

Если в условии теоремы 2.33 λ не принадлежит множеству (2.46), то справедливо равенство (2.47).

Теорема 2.34. *Пусть интегральные операторы A и B из* (2.43) *действуют в вполне правильных БИП $X = X(T)$ и $Y = Y(S)$ соответственно и пусть выполнено одно из условий*:

а) $\|l(\cdot,\tau)\|_X \in X',\ \|l(t,\cdot)\|_{X'} \in X$;

б) $\|m(\cdot,\sigma)\|_Y \in Y',\ \|m(s,\cdot)\|_{Y'} \in Y$.

Тогда справедливо равенство (2.48)*, где оператор* (2.44) *рассматривается в $X[Y]$ в случае а) и в $Y[X]$ в случае б).*

В условии теоремы 2.34 при $\lambda \in \sigma(K)/((\sigma_{ew}(A)+\sigma(B)) \cup (\sigma(A)+\sigma_{tw}(B)))$ справедливы равенства (2.52), (2.55) и (2.49), $\sigma_{es}(K) = (\sigma_{ew}(A)+\sigma(B)) \cup (\sigma(A)+\sigma_{ew}(B)) \cup \sigma$, где σ — множество $\lambda \in \sigma(K)/((\sigma_{ew}(A)+\sigma(B)) \cup (\sigma(A)+\sigma_{ew}(B)))$, для которых $ind(K-\lambda I)$, определяемый равенством (2.49), не равен нулю. Отметим, что условие теоремы 2.33 вытекает из условия теоремы 2.34.

Условие на ядра в теореме 2.34 можно ослабить, если одно из пространств $X[Y]$ или $Y[X]$ вложено в другое.

Теорема 2.35. *Пусть интегральные операторы A и B из* (2.43) *действуют в вполне правильных БИП $X = X(T)$ и $Y = Y(S)$ соответственно и пусть выполнено одно из условий*:

а) $Y[X] \subset X[Y],\ \|l(\cdot,\tau)\|_X \in X'$;

б) $Y[X] \subset X[Y],\ \|m(s,\cdot)\|_{Y'} \in Y$;

в) $Y[X] \subset X[Y],\ \|l(t,\cdot)\|_{X'} \in X$;

г) $X[Y] \subset Y[X],\ \|m(\cdot,\sigma)\|_Y \in Y'$.

Тогда справедливы равенства (2.44)*,* (2.46)*,* (2.48)*, где оператор* (2.44) *рассматривается в $X[Y]$ в случаях а), в) и в $Y[X]$ в случаях б), г).*

При дополнительном условии $\lambda \notin \sigma(K)/((\sigma_{ew}(A)+\sigma(B)) \cup (\sigma(A)+\sigma_{ew}(B))$ размерность ядра, дефект и индекс оператора $\lambda I - K$ вычисляются по формулам (2.52), (2.55), (2.49).

Если $X = L^p(T)$, $Y = L^q(S)$ $(1 \leqslant p, q \leqslant \infty)$, то при $p \leqslant q$ $X[Y] \subset Y[X]$, а при $q \leqslant p$ $Y[X] \subset X[Y]$. Поэтому утверждение теоремы 2.35 легко переформулируется для случая пространств $L^p[L^q]$ и $L^q[L^p]$, в частности, для пространств $L^p(T \times S)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ (см. [31, 35, 98]).

2.3.5. Спектральные свойства операторов с частными интегралами в пространствах вектор-функций. Существование и свойства решений различных уравнений механики сплошных сред, интегродифференциальных уравнений Барбашина и других задач существенно зависят от спектральных свойств линейных операторов с частными интегралами, содержащихся в уравнениях. Как показывают примеры, спектр и части спектра линейных операторов с частными интегралами могут изменяться при изменении пространств, в которых они рассматриваются. Поэтому при исследовании таких уравнений в том или ином пространстве требуются спектральные свойства соответствующих операторов. В пункте 2.3.5 приводятся свойства спектра и частей спектра линейных операторов с частными интегралами в случае пространства $C(L^2)$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ вектор-функций со значениями в $L^2 = L^2([c,d])$.

Пусть $\Omega \in \{[a,b],[c,d], D = [a,b] \times [c,d]\}$, $C(L^2(\Omega))$ — пространство непрерывных на D вектор-функций со значениями в $L^2(\Omega)$,

$$(Lx)(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau,\ (Mx)(t,s) = \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma, \tag{2.58}$$

$$(Nx)(t,s) = \int_a^b \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,\ (Cx)(t,s) = c(t,s)x(t,s),\ K = C + L + M + N,$$

где $(t,s) \in D = [a,b] \times [c,d]$, а интегралы понимаются в смысле Лебега.

Теорема 2.36 (см. [42])**.** *Пусть $c \in C(D)$, $l \in C(L^2([a,b]))$, $m \in C(L^2([c,d]))$, $n \in C(L^2(D))$. Тогда существенные спектры оператора K в смысле Густавссона—Вайдмана, Като, Вольфа и Шехтера совпадают и справедливы утверждения*:

1. *Если $\lambda - c(t,s) \neq 0$ на D, то n-нормальность, d-нормальность, фредгольмовость и нетеровость оператора $\lambda I - K$ в $C(L^2)$ равносильны обратимости в $C([a,b])$ и в*

$L^2([c,d])$ *соответственно операторов следующих семейств операторов*: $L(\lambda)(s)x(t) = x(t) - \int\limits_a^b \frac{l(t,s,\tau)}{\lambda - c(t,s)} x(\tau)d\tau$ $(s \in [c,d])$, $M(\lambda)(t)y(s) = y(s) - \int\limits_c^d \frac{m(t,s,\sigma)}{\lambda - c(t,s)} y(\sigma)d\sigma$ $(t \in [a,b])$;

2. *Если* $\lambda - c(t_0, s_0) = 0$, $((t_0,s_0) \in D)$, *то оператор* $\lambda I - K$ *не является ни фредгольмовым, ни нетеровым, ни* n *и ни* d*-нормальным в* $C(L^2)$.

Пусть $l(t,\tau)$ и $m(s,\sigma)$ — ядра операторов L и M в (2.58), интегральные операторы

$$(\tilde{L}h)(t) = \int\limits_a^b l(t,\tau)h(\tau)d\tau, \ (\tilde{M}g)(s) = \int\limits_c^d m(s,\sigma)g(\sigma)d\sigma$$

действуют в пространствах $C([a,b])$ и в $L^2([c,d])$ соответственно, при этом не требуются включения $l \in C(L^2([a,b]))$ и $m \in C(L^2([c,d]))$. Теорема 2.36 в этом случае к оператору K не применима, если $l \notin C(L^2([a,b]))$ или $m \notin C(L^2([c,d]))$, но спектр и части спектра оператора K удается описать с применением спектральной теории тензорных произведений линейных операторов в тензорных произведениях банаховых пространств [35, 98, 102, 103], так как $C(L^2)$ изометрически изоморфно пополнению тензорного произведения пространств $C([a,b])$ и $L^2([c,d])$ относительно квазиравномерной кросснормы.

Теорема 2.37. *Пусть операторы* $\tilde{L}$ *и* $\tilde{M}$ *действуют в пространствах* $C([a,b])$ *и* $L^2([c,d])$ *соответственно. Тогда справедливы утверждения*:

а) $\sigma(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma(\tilde{L}) \times \sigma(\tilde{M})\}$;
б) $\sigma_+(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_+(\tilde{L}) \times \sigma_\pi(\tilde{M}) \cup \sigma_\pi(\tilde{L}) \times \sigma_+(\tilde{M})\}$;
в) $\sigma_\pi(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_\pi(\tilde{L}) \times \sigma_\pi(\tilde{M})\}$;
г) $\sigma_\delta(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_\delta(\tilde{L}) \times \sigma_\delta(\tilde{M})\}$, *где через* $\sigma_\delta(K)$, $\sigma_\delta(\tilde{L})$, $\sigma_\delta\tilde{M})$ *обозначены множества* $\sigma_\pi(K^*)$, $\sigma_\pi(\tilde{L}^*)$, $\sigma_\pi(\tilde{M}^*)$, *в которых* $K^*, \tilde{L}^*, \tilde{M}^*$ — *операторы, сопряженные операторам* $K, \tilde{L}, \tilde{M}$;
д) $\sigma_-(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_-(\tilde{L}) \times \sigma_\delta(\tilde{M}) \cup \sigma_\delta(\tilde{L}) \times \sigma_-(\tilde{M})\}$;
е) $\sigma_{ew}(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_{ew}(\tilde{L}) \times \sigma(\tilde{M}) \cup \sigma(\tilde{L}) \times \sigma_{ew}(\tilde{M})\}$;
ж) $\sigma_{ek}(K)$ *совпадает с пересечением множеств б) и д)*;
з) $\sigma_{es}(K)$ *совпадает с объединением множества из правой части равенства е) теоремы и множества всех* $\lambda \in \mathbb{C}$, *не принадлежащих* $\sigma_{ew}(K)$, *для которых индекс оператора* $\lambda I - K$ *не равен нулю*;
и) $\sigma_p(K) = \{\lambda : \lambda = \alpha + \beta, (\alpha,\beta) \in \sigma_p(\tilde{L}) \times \sigma_p(\tilde{M})\}$, *если* $\sigma(\tilde{L}) = \sigma_p(\tilde{L})$, $\sigma(\tilde{M}) = \sigma_p(\tilde{M})$.

3. Линейные операторы Вольтерра и Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами

3.1. Линейные операторы Вольтерра с частными интегралами. Через K обозначим оператор Вольтерра с частными интегралами

$$(Kx)(t,s) = \int\limits_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int\limits_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \iint\limits_\Delta n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{3.1}$$

где $t \in [a,b]$, $s \in [c,d]$, Δ — одно из множеств $[a,t] \times [c,s]$, $[a,t] \times [c,d]$, $[a,b] \times [c,s]$, заданные функции l, m, n измеримы, интегралы понимаются в смысле Лебега. Оператор (3.1) является частным случаем оператора (2.5). Операторы, определяемые первым, вторым и третьим слагаемыми соответственно правой части равенства (3.1), по-прежнему будем обозначать через L, M, N.

Операторы L и M не являются компактными операторами даже в случае ядер любой гладкости, более того, в силу критерия А. В. Бухвалова [68] об интегральном представлении ограниченного линейного оператора операторы L и M не являются интегральными операторами.

Рассмотрим сначала оператор (3.1) с $\Delta = [a,t] \times [c,s]$.

Пример оператора Харди—Литтльвуда с частными интегралами

$$(Qx)(t,s) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t x(\tau,s)d\tau + \frac{1}{s}\int\limits_0^s x(t,\sigma)d\sigma + \frac{1}{ts}\int\limits_0^t \int\limits_0^s x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

показывает, что он действует в $L^p([0,1]\times)[0,1]$ при $1 < p \leqslant \infty$, причем его спектральный радиус $r(Q) = 3 > 0$. Таким образом, спектральный радиус оператора Вольтерра с частными интегралами, вообще говоря, отличен от нуля. В связи с этим приведем определение свойства Андо, из которого вытекает равенство нулю спектрального радиуса оператора (3.1).

Через P_D обозначим оператор умножения на характеристическую функцию множества D.

Пусть оператор (3.1) действует в БИП U с носителем $[a,b]\times[c,d]$. Тогда в БИП U действует и непрерывен оператор $P_{[f,\tilde f]\times[g,\tilde g]}KP_{[f,\tilde f]\times[g,\tilde g]}$, где $a \leqslant f \leqslant \tilde f \leqslant b$, $c \leqslant g \leqslant \tilde g \leqslant d$. Положим

$$\delta(K) = \overline{\lim_{\tilde f - f, \tilde g - g \to 0}} \|P_{[f,\tilde f]\times[g,\tilde g]}KP_{[f,\tilde f]\times[g,\tilde g]}\|. \tag{3.2}$$

Если оператор (3.1) действует в БИП U, то

$$r(K) \leqslant \delta(K). \tag{3.3}$$

Неравенство (3.3) доказано в [23]. Следующий пример показывает, что равенство $r(K) = \delta(K)$ в общем случае неверно.

Пример 3.1. Пусть $a = c = 0$, $b = d = 1$, $m(t,s,\sigma) \equiv 0$, $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$ и

$$l(t,s,\tau) = l(t,\tau) = \begin{cases} 2^n, 2^{-n} \leqslant \tau \leqslant t < 2^{1-n}, \\ \\ 0, \text{при других } t, \tau. \end{cases}$$

Оператор $(\bar L x)(t) = \int\limits_0^t l(t,\tau)x(\tau)d\tau$ действует в $L^\infty([0,1])$ и $r(\bar L) = 0$. Следовательно, оператор (3.1) действует $L^\infty([0,1]\times[0,1])$ и $r(K) = 0$. Если теперь $x(t,s) = 1$, то функция $P_{[f,\tilde f]\times[g,\tilde g]}KP_{[f,\tilde f]\times[g,\tilde g]}x$ принимает значение 1 на множестве положительной меры. Тогда $\delta(K) = 1 > r(K) = 0$.

Определение 3.1. Будем говорить,что оператор (3.1) обладает *свойством Андо*, если

$$\lim_{mesD_1 + mesD_2 \to 0} \|P_{D_1\times D_2}KP_{D_1\times D_2}\| = 0. \tag{3.4}$$

Свойство Андо выполняется для оператора K, если оно выполняется для операторов L, M, N и проверяется с использованием теорем из пунктов 2.2.5 и 2.2.6 и мажорантных оценок. В силу теоремы 2.2 оператор $]K[$ обладает свойством Андо тогда и только тогда, когда этим свойством обладают операторы $]L[,]M[,]N[$. Свойство Андо для оператора N проверяется по стандартным схемам [19], для операторов L и M в правильных БИП со смешанными нормами оно проверяется с применением теорем 2.12–2.14. Отметим, что приведенное свойство Андо отличается от определения свойства Андо в работах [19, 23].

Теорема 3.1 (см. [35]). *Если оператор* (3.1) *действует в БИП U и обладает свойством Андо, то $r(K) = \delta(K) = 0$.*

Определим следующие семейства интегральных операторов:

$$L(s)x(t) = \int\limits_a^t l(t,s,\tau)x(\tau)d\tau,\ ]L(s)[x(t) = \int\limits_a^t |l(t,s,\tau)|x(\tau)d\tau\ (c \leqslant s \leqslant d), \tag{3.5}$$

$$M(t)y(s) = \int\limits_c^s m(t,s,\sigma)y(\sigma)d\sigma,\ ]M(t)[y(s) = \int\limits_c^s m(t,s,\sigma)|y(\sigma)d\sigma\ (a \leqslant t \leqslant b). \tag{3.6}$$

Теорема 3.2 (см. [35]). *Пусть X и Y — правильные БИП с носителями $[a,b]$ и $[c,d]$, $U = X[Y]$ или $U = Y[X]$, оператор* (3.1) *регулярен в U, а операторы $]L(s)[$ $(c \leqslant s \leqslant d)$, $]M(t)[$ $(t \in [a,b])$ и N компактны в X, Y и U соответственно. Если при каждом $\lambda \neq 0$*

$$\varphi(t,s,\tau) = \sum_{k=1}^\infty \lambda^{-k} l^{(k)}(t,s,\tau) \in \mathbf{R_l}(U,U), \psi(t,s,\sigma) = \sum_{k=1}^\infty \lambda^{-k} m^{(k)}(t,s,\sigma) \in \mathbf{R_m}(U,U), \tag{3.7}$$

где $l^{(k)}(t,s,\tau)$, $m^{(k)}(t,s,\sigma)$ — итерированные ядра, и хотя бы один из операторов LM или ML компактен в U, то спектральный радиус оператора (3.1) *равен нулю.*

Будем говорить, что семейства операторов $L(s)$ $(c \leqslant s \leqslant d)$ и $M(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ обладают свойством Андо, если

$$\lim_{mesD\to 0}\sup_{c\leqslant s\leqslant d}\|P_D L(s) P_D\|_{X\to X} = 0, \lim_{mesD\to 0}\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\|P_D M(t) P_D\|_{Y\to Y} = 0. \tag{3.8}$$

Равенства (3.8) проверяются обычно при помощи мажорантных оценок. При выполнении равенств (3.5) $\delta(L) = r(L) = 0$, $\delta(M) = r(M) = 0$, где оператор L действует в $Y[X]$, а оператор M действует в $X[Y]$.

Теорема 3.3 (см. [35]). *Пусть* $X = L^p([a,b])$, $Y = L^p([c,d])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, *интегральные операторы* $L(s)$ $(c \leqslant s \leqslant d)$ *и* $M(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ *действуют в* X *и* Y *соответственно и их семейства обладают свойством Андо, а линейный интегральный оператор* N *действует в* $U = L^p([a,b] \times [c,d])$ *и обладает свойством Андо. Тогда для оператора* (3.1)*, действующего в* U*, справедливы равенства* $\delta(K) = r(K) = 0$.

Через $\tilde{L}$ и $\tilde{M}$ обозначим операторы

$$\tilde{L}x(t) = \int_a^t \tilde{l}(t,\tau)x(\tau)d\tau, \tilde{M}y(s) = \int_c^s \tilde{m}(s,\sigma)y(\sigma)d\sigma, \tag{3.9}$$

где $\tilde{l}(t,\tau) = \|l(t,\cdot,\tau)\|_{L^\infty}$, $\tilde{m}(t,\tau) = \|m(\cdot,s,\sigma)\|_{L^\infty}$.

Отметим, что $\delta(L) \leqslant \delta(\tilde{L})$, $\delta(M) \leqslant \delta(\tilde{M})$.

Теорема 3.4 (см. [35]). *Если операторы* $\tilde{L}$, $\tilde{M}$ *и* N *действуют в* $X = L^p([a,b])$, $Y = L^p([c,d])$ *и в* $U = L^p([a,b] \times [c,d])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *соответственно и обладают свойством Андо, то для действующего в* U *оператора* (3.1) *справедливы равенства* $\delta(K) = r(K) = 0$.

Пусть при каждом $s \in [c,d]$ оператор $L(s)$ действует в БИП X с носителем $T = [a,b]$, при каждом $t \in [a,b]$ оператор $M(t)$ действует в БИП Y с носителем $S = [c,d]$. Тогда определены и конечны функции $\alpha(s) = \|L(s)\|_{X\to X}$, $\beta(t) = \|M(t)\|_{Y\to Y}$.

Теорема 3.5. *Пусть* $X = X([a,b])$ *и* $Y = Y([c,d])$ *— БИП,* $\alpha(s) \in L^\infty([c,d])$, $\beta(t) \in L^\infty([a,b])$, *семейства операторов* $L(s)$ $(c \leqslant s \leqslant d)$ *и* $M(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ *обладают свойством Андо* (3.8) *и выполнено одно из следующих условий*:

а) *операторы* $\tilde{M}$ *и* N ($\tilde{L}$ *и* N) *действуют в* Y *и в* $Y[X]$ (*в* X *и в* $X[Y]$) *и обладают свойством Андо*;

б) $Y[X] \subset X[Y]$ ($X[Y] \subset Y[X]$)*, оператор* M (L *соответственно*) *действует в* $Y[X]$ (*в* $X[Y]$)*, а оператор* N *обладает свойством Андо в* $Y[X]$ (*в* $X[Y]$).

Тогда оператор (3.1) *действует в* $Y[X]$ (*в* $X[Y]$) *и* $\delta(K) = r(K) = 0$.

Приводимые ниже условия равенства $\delta(K) = r(K) = 0$ для оператора (3.1) с $\Delta = [a,t] \times [c,d]$ предполагают использование понятие t-свойства Андо.

Для оператора

$$(Nx)(t,s) = \int_a^t \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma \tag{3.10}$$

положим $\delta_t(N) = \overline{\lim_{\tilde{f}-f\to 0}}\|P_{[\tilde{f},f]\times[c,d]}NP_{[\tilde{f},f]\times[c,d]}\|$.

Если оператор (3.10) действует в БИП U с носителем $[a,b] \times [c,d]$, то $r(N) \leqslant \delta_t(N)$, причем последнее неравенство может быть строгим.

Будем говорить, что оператор (3.10) обладает *t-свойством Андо* [35, 104], если

$$\lim_{mesD\to 0}\|P_{D\times[c,d]}NP_{D\times[c,d]}\|.$$

t-свойство Андо проверяется с применением мажорантных оценок. В L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ оно, например, выполнено в случае ограниченного ядра n. Оператор N обладает t-свойством Андо, если N — компактный регулярный оператор в правильном БИП.

Если оператор (3.10) обладает t-свойством Андо, то $\delta_t(N) = r(N) = 0$.

Рассмотрим оператор (3.1) с $\Delta = [a,t] \times [c,d]$. Оказывается, что при естественных условиях его спектральный радиус равен нулю и в этом случае. Будем предполагать регулярность оператора (3.1) в БИП U. Предыдущие теоремы содержат условия, при которых $r(L) = r(M) = 0$. В этих условиях уравнение $x = \mu K x + f$ равносильно уравнению

$$x(t,s) = \mu(Rx)(t,s) + g(t,s) \tag{3.11}$$

с оператором

$$(Rx)(t,s) = \int\limits_a^t \int\limits_c^d r(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{3.12}$$

где

$$r(t,s,\tau,\sigma) = \int\limits_\tau^t \varphi(t,s,\tau_1)n_1(\tau_1,s,\tau,\sigma)d\tau_1 + \int\limits_c^s \psi(t,s,\sigma_1)n_1(t,\sigma_1,\tau,\sigma)d\sigma_1 +$$

$$+ \int\limits_\tau^t \int\limits_c^s n_2(t,s,\tau_1,\sigma_1)n_1(\tau_1,\sigma_1,\tau,\sigma)d\tau_1 d\sigma_1 + n_1(t,s,\tau,\sigma),$$

$$g(t,s) = f(t,s) + \int\limits_a^t \varphi(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau + \int\limits_c^d \psi(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_\tau^t \int\limits_c^s n_2(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$

$$n_1(t,s,\tau,\sigma) = n(t,s,\tau,\sigma) + \mu l(t,s,\tau)m(\tau,s,\sigma)\chi_{[0,s]}(\sigma), n_2(t,s,\tau,\sigma) = \psi(t,s,\sigma)\varphi(t,\sigma,\tau).$$

Если теперь оператор (3.12) обладает t-свойством Андо, то уравнение (3.11), следовательно, и уравнение $x - \mu Kx = f$ имеет единственное решение в U при любой функции $f \in U$ и любом комплексном числе μ. Тогда $\lambda = \mu^{-1} \notin \sigma(K)$ и $r(K) = 0$.

Таким образом, для оператора K с $\Delta = [a,t] \times [c,d]$ $r(K) = 0$ в условии теоремы 3.2. $r(K) = 0$, если условия теорем 3.3–3.5 дополнить предположением о выполнении t-свойства Андо для оператора (3.12) и регулярности для оператора (3.10).

Аналогичные утверждения имеют место для оператора (3.1) и с $\Delta = [a,b] \times [c,s]$.

Предположим, что оператор (3.1) действует в $C([a,b] \times [c,d])$. В силу теорем 2.15 и 2.19 он действует и в $L^\infty([a,b] \times [c,d])$ и $\|K\|_C = \|K\|_{L^\infty}$. Отсюда и формулы Гельфанда для спектрального радиуса следует, что его спектральные радиусы в $C([a,b] \times [c,d])$ и в $L^\infty([a,b] \times [c,d])$ одинаковы. Поэтому приведенные выше утверждения о спектральном радиусе операторов (3.1) и (3.8) в $L^\infty([a,b] \times [c,d])$ имеют место для этих операторов и в $C([a,b] \times [c,d])$.

Приведем другие условия равенства нулю спектрального радиуса операторов с частными интегралами в $C([a,b] \times [c,d])$ (см. [57, 65]).

Пусть $\Delta = [a,t] \times [c,s]$, $T_1 \subset [a,b], S_1 \subset [c,d]$ и ядра l, m, n удовлетворяют условиям

$$\int\limits_{T_1} |l(t,s,\tau)|d\tau \to 0, \ \int\limits_{S_1} |m(t,s,\sigma)|d\sigma \to 0, \ \int\limits_{T_1}\int\limits_{S_1} |n(t,s,\tau,\sigma)|d\tau d\sigma \to 0 \tag{3.13}$$

равномерно по (t,s) при $mesT_1 \to 0$, $mesS_1 \to 0$ соответственно, где T_1, S_1 — отрезки.

Теорема 3.6. *Если операторы L, M, N действуют в $C([a,b] \times [c,d])$, а ядра l, m, n удовлетворяют условиям* (3.13)*, то $r(K) = 0$.*

Приведем еще один эффективный способ проверки равенства нулю спектрального радиуса оператора (3.1) с $\Delta = [a,t] \times [c,s]$.

Пусть $|l(t,s,\tau)| \leqslant l(t,\tau)$, $|m(t,s,\sigma)| \leqslant m(s,\sigma)$, $|n(t,s,\tau,\sigma)| \leqslant nl(t,\tau)m(s,\sigma)$. Тогда $r(K) \leqslant r(A) + r(B) + nr(A)r(B)$, где операторы A и B определяются равенствами

$$(Au)(t) = \int\limits_a^t l(t,\tau)u(\tau)d\tau, \ (Bv)(s) = \int\limits_c^s m(s,\sigma)v(\sigma)d\sigma.$$

Если теперь $r(A) = r(B) = 0$, то и $r(K) = 0$. Проверка равенства $r(A) = r(B) = 0$ для интегральных операторов Вольтерра производится по стандартным схемам [19, 22].

При $\Delta = [a,t] \times [c,d]$ спектральный радиус $r(K) = 0$, если операторы L, M, N действуют в $C([a,b] \times [c,d])$, ядра l, m удовлетворяют условиям (3.12), а ядро n условию

$$\int_{T_1} \int_c^d |n(t,s,\tau,\sigma)| d\tau d\sigma \to 0$$

равномерно по (t,s) при $mesT_1 \to 0$, где T_1 — отрезок [65].

Аналогичное утверждение имеет место и при $\Delta = [a,b] \times [c,s]$. Следующее простое условие равенства $r(K) = 0$ применимо при $\Delta = [a,t] \times [c,s]$, при $\Delta = [a,t] \times [c,d]$ и при $\Delta = [a,b] \times [c,s]$.

Теорема 3.7. *Если ядра l, m, n принадлежат $C(L^1([a,b]))$, $C(L^1([c,d]))$, $C(L^1([a,b] \times [c,d]))$, то $r(K) = 0$.*

Отметим, что утверждение теоремы 3.7 справедливо для оператора K с ядрами типа потенциала [65].

Равенство нулю спектрального радиуса оператора (3.1) в пространствах вектор-функций $C(X)$ или $C(Y)$ проверяется как равенство нулю его спектрального равенства в $L^\infty[X]$ или $L^\infty[Y]$. При этом могут быть использованы утверждения, аналогичные приведенным выше.

3.2. Линейные операторы Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами. *Операторами Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами* будем называть операторы следующих видов:

$$(K_1x)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_a^b \int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \quad (3.14)$$

$$(K_2x)(t,s) = \int_a^t l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_T \int_S n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \quad (3.15)$$

$$(K_3x)(t,s) = \int_a^b l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_c^s m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_T \int_S n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \quad (3.16)$$

где $T = [a,b]$ или $T = [a,t]$, $S = [c,d]$ или $S = [c,s]$. Операторы, определяемые первым, вторым и третьим слагаемыми в (3.14), (3.15), (3.16) по-прежнему будем обозначать через L, M, N.

Свойства оператора (3.14) существенно отличаются от свойств операторов (3.15) и (3.16). Будем предполагать, что N — компактный оператор в рассматриваемых пространствах. Тогда существенные спектры операторов (3.14)–(3.16) определяются суммами двух первых слагаемых, стоящих в правых частях равенств (3.14)–(3.16).

Рассмотрим сначала оператор K_1. Если выполнено условие хотя бы одной из теорем 3.1–3.7, то $r(K_1 - N) = 0$, поэтому $\sigma(K_1 - N) = \{0\}$ и существенный спектр Шехтера оператора K_1 совпадает с множеством $\sigma_{es}(K_1) = \{0\}$. Таким образом, если оператор K_1 рассматривается в банаховых идеальных пространствах или в пространстве $C([a,b] \times [c,d])$, то $\sigma_{es}(K_1) = \{0\}$.

Рассмотрим теперь оператор (3.15). Аналогично предыдущему случаю, $\sigma_{es}(K_2) = \sigma_{es}(K_2 - N)$. В условии приводимых ниже теорем 3.8–3.11 $\sigma_{es}(K_2) = \sigma_{es}(M)$.

Теорема 3.8 (см. [35])**.** *Пусть $X = X([a,b])$ и $Y = Y([c,d])$ — правильные БИП, $U = Y[X]$ или $U = X[Y]$, оператор* (3.15) *регулярен в U, а оператор $]L(s)[$ $(c \leqslant s \leqslant d)$, определяемый равенством* (3.5)*, компактен в X. Если при каждом $\lambda \neq 0$ функция φ из* (3.7) *принадлежит $\mathbf{R_1}(U,U)$, а оператор N компактен в U, то $\sigma_{es}(K_2) = \sigma_{es}(M)$.*

Теорема 3.9 (см. [35])**.** *Пусть $X = L^p([a,b])$ и $Y = L^p([c,d])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, семейство действующих в X линейных интегральных операторов $]L(s)[$ $(c \leqslant s \leqslant d)$ обладает свойством Андо* (3.8)*. Если оператор* (3.15) *регулярен в $U = L^p([a,b] \times [c,d])$, а оператор N компактен в U, то $\sigma_{es}(K_2) = \sigma_{es}(M)$.*

Теорема 3.10 (см. [35])**.** *Если оператор $\tilde{L}$ из* (3.9) *действует в $X = L^p([a,b])$ и обладает свойством Андо, оператор* (3.16) *регулярен в $U = L^p([a,b] \times [c,d])$, а оператор N компактен в U, то $\sigma_{es}(K_2) = \sigma_{es}(M)$.*

Теорема 3.11 (см. [35]). *Если* $X = X([a,b])$ *и* $Y = Y([c,d])$ — *БИП, функция* $\alpha(s) = \|L(s)\|_{X\to X}$ *ограничена в существенном и семейство операторов* $L(s)$ $(c \leqslant s \leqslant d)$ *из* (3.5) *обладает свойством Андо* (3.8) (*оператор* $\tilde{L}$ *из* (3.9) *действует в* X *и обладает свойством Андо*), *оператор* (3.16) *регулярен, а оператор* N *компактен в* $Y[X]$ (*в* $X[Y]$), *то* $\sigma_{es}(K_2) = \sigma_{es}(M)$ *в* $Y[X]$ (*в* $X[Y]$).

Изучение существенного спектра Шехтера оператора (3.16) в $C([a,b]\times[c,d])$ производится по схеме, аналогичной описанной выше схеме для оператора (3.15) (см. [57, 65]).

Отметим, что для рассматриваемых в $C([a,b]\times[c,d])$ операторов (3.15) и (3.16) с ядрами $l \in C(L^1([a,b]))$, $m \in C(L^1([c,d]))$, $n \in C(L^1([a,b]\times[c,d]))$ справедливо равенство $\sigma_{es}(K_1) = \sigma_{es}(K_2) = \sigma(M)$.

Изучение существенного спектра Шехтера операторов (3.14)–(3.16) в пространствах $C(X)$ и $C(Y)$ производится по схемам, аналогичным приведенным выше схемам для описания существенного спектра операторов K_1, K_2, K_3 (см. [35]).

4. Линейные уравнения с частными интегралами

4.1. Специальные примеры и условия фредгольмовости. Будем рассматривать уравнение

$$(\lambda I - L - M - N)x = f, \tag{4.1}$$

где L, M, N — операторы (2.2)–(2.4).

Приводимые ниже примеры показывают, что теория уравнения (4.1) существенно отличается не только от теории интегральных уравнений Фредгольма, но и от теории сингулярных интегральных уравнений. В приводимых ниже примерах 4.1–4.3 уравнение (4.1) рассматривается в $L^2(T\times S)$, где $T = S = [0,1]$.

Пример 4.1 (см. [35]). Пусть в (4.1) $\lambda = 1$, $l(t,s,\tau) \equiv 1$, $m(t,s,\sigma) \equiv 0$, $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$. Тогда $n(I-L) = d(I-L) = \infty$. Поэтому уравнение (4.1) с частными интегралами не только не фредгольмово и не нетерово, но даже и не n-нормально, и не d-нормально, тогда как обычное интегральное уравнение $x(t) = \int\limits_0^1 x(\tau)d\tau + f(t)$ с этим же ядром l фредгольмово.

Пример 4.1 показывает, что никакая гладкость ядра не обеспечивает ни фредгольмовости, ни нетеровости, ни n-нормальности, ни d-нормальности уравнения (4.1); напротив, обычные интегральные уравнения второго рода с гладкими ядрами фредгольмовы.

Для уравнения (4.1) с ядрами из примера 4.1 фредгольмовость совпадает с n,d-нормальностью и обратимостью. При этом $\lambda \notin \{0,1\}$. При $\lambda \in \{0,1\}$ уравнение (4.1) нормально разрешимо, так как множество значений оператора $\lambda I - L$ замкнуто.

Пример 4.2 (см. [35]). Пусть в (4.1) $l(t,s,\tau) \equiv 1$, $m(t,s,\sigma) \equiv 1$, $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$. В силу теорем 2.29–2.31 уравнение (4.1) допускает обращение только при $\lambda \notin \{0,1,2\}$ и является фредгольмовым, нетеровым, n,d-нормальным только при $\lambda \notin \{0,1\}$.

Пример 4.3 (см. [35]). Пусть в (4.1) $\lambda = 1$, $m(t,s,\sigma) \equiv 1$, $n(t,s,\tau,\sigma) \equiv 0$, $l(t,s,\tau) = l(t,\tau) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{e_n}(t)\dfrac{\varphi_n(\tau)}{\sqrt{\mu e_n}}$, где $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис в $L^2([0,1])$ и $\{e_n\}$ — последовательность измеримых по Лебегу попарно непересекающихся подмножеств отрезка $[0,1]$ таких, что сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\mu e_n}$. В этом случае уравнение (4.1) не является нетеровым, однако оно n-нормально.

Пример 4.4 (см. [35]). Пусть в (4.1) $T = [0,+\infty)$, $S = [0,1]$. Рассмотрим уравнение

$$2x(t,s) - \int\limits_0^{+\infty} l(t-\tau)x(\tau,s)d\tau - \int\limits_0^1 x(t,\sigma)d\sigma = f(t,s), \tag{4.2}$$

где $l \in L^1(-\infty, +\infty)$ и $f \in L^1(T \times S)$. Через $\tilde{l}(\xi)$ обозначим преобразование Фурье функции l. Пусть ядро l выбрано так, что $\tilde{l}(\xi) \neq 1$, $\tilde{l}(\xi) \neq 2$ при $\xi \in (-\infty, +\infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d_\xi \arg(1 - \tilde{l}(\xi)) \neq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} d_\xi \arg(2 - \tilde{l}(\xi)) = 0.$$

Тогда уравнение (4.2) в $L^1(T \times S)$ нетерово, но не фредгольмово.

Утверждения, содержащиеся в этом пункте, фактически вытекают из приведенных выше утверждений о фредгольмовости линейных операторов с частными интегралами. Следующая теорема содержит альтернативу Фредгольма.

Теорема 4.1 (см. [35]). *Пусть операторы L, M, N действуют в БИП X с носителем $T \times S$, один из операторов $N + LM$ или $N + ML$ компактен в X и $1 \notin \sigma(L) \cup \sigma(M)$. Тогда справедлива альтернатива Фредгольма*:

1. *либо уравнения $(I - K)x = f$ и $(I - K^*)y = g$, где оператор $K = L + M + N$, а K^* — сопряженный к K оператор, разрешимы при любых правых частях $f \in X$, $g \in X^*$ и тогда их решения единственны*;
2. *либо однородные уравнения $(I - K)x = 0$ и $(I - K^*)y = 0$ имеют одинаковое число линейно-независимых решений $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ соответственно. При этом уравнения $(I - K)x = f$, $(I - K^*)y = g$ разрешимы соответственно тогда и только тогда, когда $y_k(f) = 0$, $g(x_k) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, а общее решение каждого из этих уравнений имеет вид $x = x_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k$, $y = y_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} d_k y_k$, где x_0 и y_0 — частные решения уравнений $(I - K)x = f$ и $(I - K^*)y = g$ соответственно, а c_k, d_k — произвольные постоянные.*

В условии теоремы 4.1 уравнение $(I - K)x = f$ приводится к эквивалентному уравнению $x = A_i x + f_i$ $(i = 1, 2)$, где компактные операторы A_1 и A_2 определяются равенствами $A_1 = (I - M)^{-1}(I - L)^{-1}(N + LM)$, $A_2 = (I - L)^{-1}(I - M)^{-1}(N + ML)$, а $f_1 = (I - M)^{-1}(I - L)^{-1} f$, $f_2 = (I - L)^{-1}(I - M)^{-1} f$. Поэтому операторы $(I - M)^{-1}(I - L)^{-1}$ и $(I - L)^{-1}(I - M)^{-1}$ являются эквивалентными левыми регуляризаторами уравнения $(I - K)x = f$.

В условии следующей теоремы эквивалентными регуляризаторами с частными интегралами являются операторы с частными интегралами.

Теорема 4.2 (см. [35]). *Пусть $X = U[V]$ или $X = V[U]$ — БИП, оператор $K = L + M + N$ действует в X и регулярен, один из операторов $N + LM$ или $N + ML$ компактен в X и выполнены включения $l \in I(L)$, $m \in I(M)$, где $I(L)$ и $I(M)$ — множества из теоремы* 2.22. *Тогда справедливо утверждение теоремы* 4.1.

Отметим, что в теореме 4.2 включения $l \in I(L)$, $m \in I(M)$ выполняются, если имеют место включения (2.38).

Примеры, приведенные в этом пункте, показывают, что от требования обратимости операторов $I - L$ и $I - M$ отказаться, вообще говоря, нельзя. Изучение условий обратимости этих операторов связано с изучением обратимости операторов $I - L(s)$ и $I - M(t)$, где $L(s)$ и $M(t)$ — операторы (2.25). В случае вырожденных ядер такие условия приведены в теореме 2.23. Из теоремы 2.23 вытекает

Теорема 4.3 (см. [35]). *Пусть $X = U[V]$ или $X = V[U]$ — БИП, N — компактный оператор в X, а $l(y, s, \tau)$ и $m(t, s, \sigma)$ — вырожденные ядра* (2.40). *Если ядра l и m удовлетворяют условию* (2.42)*, то для уравнения $(I - L - M - N)x = f$ имеет место альтернатива Фредгольма.*

Если на множестве положительной меры хотя бы один из определителей из условий (2.42) равен нулю, то уравнение $(I - L - M - N)x = f$ не нетерово.

С применением описанных в пункте 2.3.2 схем получаются условия фредгольмовости уравнения $(I - K)x = f$ в пространствах $C(X)$ и $C(T \times S)$. В частности, теоремы 2.25–2.27 содержат условия фредгольмовости уравнения $(I - K)x = f$ в $C(X)$, теорема 2.28 содержит критерий фредгольмовости в $C([a, b] \times [c, d])$ этого уравнения с ядрами $l \in C(L^1([a, b]))$, $m \in C(L^1([c, d]))$, $n \in C(L^1([a, b] \times [c, d]))$.

4.2. Частные случаи [35, 98]. Рассмотрим уравнение

$$x(t,s)=g(s)\int_a^b l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau+h(t)\int_c^d m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma+\int_a^b\int_c^d n(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma+f(t,s), \quad (4.3)$$

где $g(s)$ и $h(t)$ — непрерывные функции. В подходящем пространстве это уравнение можно записать в виде

$$(I-\tilde{L})(I-\tilde{M})x=(N+\tilde{L}\tilde{M})x+f, (I-\tilde{M})(I-\tilde{L})x=(N+\tilde{M}\tilde{L})x+f, \quad (4.4)$$

где $\tilde{L}=gL$, $\tilde{M}=hM$, $L=A\bar{\otimes}I$, $M=I\bar{\otimes}B$, а A и B — интегральные операторы

$$(Au)(t)=\int_a^b l(t,\tau)u(\tau)d\tau,\ (Bv)(s)=\int_c^d m(s,\sigma)v(\sigma)d\sigma. \quad (4.5)$$

Теорема 4.4. *Если операторы A, B и N компактны в пространствах $U=L^p([a,b])$, $V=L^p([c,d])$ и $X=L^p([a,b]\times[c,d])$ $(1\leqslant p<\infty)$ соответственно, то альтернатива Фредгольма имеет место для уравнения* (4.3) *в X тогда и только тогда, когда*

$$1\notin g(s)\sigma(A)\cup h(t)\sigma(B)\ (s\in[c,d], t\in[a,b]). \quad (4.6)$$

Отметим, что в условии теоремы 4.4 включение (4.6) необходимо и достаточно для нетеровости, n-нормальности и d-нормальности уравнения (4.4) в $L^p([a,b]\times[c,d])$ $(1\leqslant p<\infty)$.

Условия фредгольмовости уравнения (4.3) в пространствах со смешанными нормами содержит

Теорема 4.5. *Пусть операторы A, B и N компактны в пространствах $U=L^p([a,b])$, $V=L^q([c,d])$ $(1\leqslant p,q<\infty)$ соответственно. Если выполнено одно из условий*:

а) *оператор A регулярен в U и N — компактный оператор в $U[V]$*;

б) *оператор B регулярен в V и N — компактный оператор в $V[U]$*,

то альтернатива Фредгольма имеет место для уравнения (4.3) *в случае а) и в $V[U]$ в случае б) тогда и только тогда, когда выполнено включение* (4.6).

Аналогично формулируются условия фредгольмовости уравнения (4.3) в пространстве непрерывных вектор-функций.

Теорема 4.6. *Если оператор A (оператор B) компактен в пространстве $C=C([a,b])$ (в пространстве $C=C([c,d])$,) оператор B (оператор A) компактен в $V=L^p([c,d])$ (в $U=L^p([a,b])$) и N — компактный оператор в $X=C(V)$ (в $X=C(U)$), то альтернатива Фредгольма для уравнения* (4.3) *в X справедлива в том и только в том случае, когда выполнено условие* (4.6).

Теорема 4.6 справедлива, в частности, если ядра $l\in C(L^1([a,b]))$, $m\in C(L^1([c,d]))$, $n\in C(L^1([a,b]\times[c,d]))$, $U=C([a,b])$, $V=C([c,d])$, $X=C([a,b]\times[c,d])$.

Для уравнения (4.3) с $g(s)\equiv 1$ и $h(t)\equiv 1$ из результатов, приведенных в разделе 2.3, вытекает

Теорема 4.7. *Пусть $g(s)\equiv 1$, $h(t)\equiv 1$, интегральные операторы A и B из* (4.5) *действуют в БИП $U=U(T)$ и $V=V(S)$ соответственно, интегральный оператор N компактен в БИП X, где $X=U[V]$ или $X=V[U]$, и пусть выполнено одно из условий*:

а) $U=L^p(T)$, $V=L^p(S)$ $(1\leqslant p<\infty)$;

б) $U=L^1(T)$ $(1\leqslant p<\infty)$, *V — почти совершенное БИП и $X=U[V]$*;

в) $V=L^1(S)$ $(1\leqslant p<\infty)$, *U — почти совершенное БИП и $X=V[U]$*.

Тогда справедливы утверждения:

1. *альтернатива Фредгольма имеет место для уравнения* (4.3) *в X тогда и только тогда, когда $1\notin\sigma_{es}(K)$, где $\sigma_{es}(K)$ — множество из теоремы* 2.29;
2. *уравнение* (4.3) *нетерово в том и только в том случае, когда $1\notin\sigma_{ew}(K)$, где $\sigma_{ew}(K)$ — множество* (2.48). *При $1\notin\sigma_{es}(K)$ индекс уравнения вычисляется по формуле* (2.49).

Для уравнения (4.3) с $g(s)\equiv 1$ и $h(t)\equiv 1$ в пространствах вектор-функций справедлива

Теорема 4.8. *Пусть $g(s) \equiv 1$, $h(t) \equiv 1$, T (S) — компактное множество, μ (ν) — борелевская мера, оператор A (оператор B) из* (4.5) *действует в $C = C(T)$ (в $C = C(S)$), оператор B (оператор A) непрерывен в банаховом пространстве $V = V(S)$ (в $U = U(T)$) и N — компактный оператор в пространстве $X = C(V)$ (в $X = C(U)$) вектор-функций. Тогда справедливы утверждения теоремы* 4.7.

Отметим, что если в теоремах 4.7, 4.8 некоторые степени операторов A и B являются компактными операторами, то альтернатива Фредгольма для уравнения (4.3) справедлива точно в случае $1 \notin \sigma(A) \cup \sigma(B)$. Более того, в этом случае условие $1 \notin \sigma(A) \cup \sigma(B)$ есть критерий нетеровости, n-нормальности и d-нормальности уравнения (4.3).

Частным случаем уравнения (4.3) является уравнение $(I - L - M)x = f$. В различных функциональных пространствах это уравнение допускает представление $(I\bar{\otimes}I - A\bar{\otimes}I - I\bar{\otimes}B)x = f$. Отметим условие обратимости данного уравнения: $1 \notin \sigma(A) + \sigma(B) = \{\alpha + \beta : \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\}$.

При $1 \notin \sigma(A)+\sigma(B)$ найдутся окрестности G и F спектров $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ такие, что в окрестности $G \times F$ голоморфна функция $g(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)^{-1}$. В силу теории операторного исчисления тензорных произведений ограниченных линейных операторов [101]

$$(I\bar{\otimes}I - A\bar{\otimes}I - I\bar{\otimes}B)^{-1} = (2\pi i)^{-2} \int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{(\xi I - A)^{-1}\bar{\otimes}(\eta I - B)^{-1}}{1 - \xi - \eta} d\xi d\eta,$$

где $\Gamma_1 \subset G$ и $\Gamma_2 \subset F$ — некоторые спрямляемые кривые, лежащие в резольвентных множествах $\rho(A)$ и $\rho(B)$ соответственно, а интеграл понимается в смысле Римана. Поэтому единственное решение уравнения (4.3) имеет вид

$$x = (2\pi i)^{-2} \int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2} \frac{(\xi I - A)^{-1}\bar{\otimes}(\eta I - B)^{-1}}{1 - \xi - \eta} d\xi d\eta f. \tag{4.7}$$

Теорема 4.9. *Пусть $U = U(T)$ и $V = V(S)$ — банаховы функциональные пространства, оператор A непрерывен в U, оператор B непрерывен в V и пусть выполнено одно из условий*:

а) $U = L^p(T)$, $V = L^p(S)$, $X = L^p(T \times S)$ $(1 \leqslant p < \infty)$;
б) $U = L^1(T)$, *V — почти совершенное БИП и* $X = U[V]$;
в) $V = L^1(S)$, *U — почти совершенное БИП и* $X = V[U]$;
г) *U и V — правильные БИП, A — регулярный оператор в U, $X = U[V]$ и $\rho(A) = \rho_r(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : (\lambda I - A)^{-1}$ — регулярный оператор в $U\}$*;
д) *U и V — правильные БИП, B — регулярный оператор в V, $X = V[U]$ и $\rho(B) = \rho_r(B) = \{\lambda \in \sigma(B) : (\lambda I - B)^{-1}$ — регулярный оператор в $V\}$*;
е) *T и S — компактные множества, μ и ν — борелевские меры, $U = C(T), V = C(S)$ и $X = C(T \times S)$*;
ж) *T (S) — компактное множество, μ (ν) — борелевская мера, $U = C(T)$ $(V = C(S))$ и $X = C(V)$ $(X = C(U)$, соответственно$)$.*

Тогда уравнение $(I - L - M)x = f$ имеет единственное решение в пространстве X при любой функции $f \in X$ тогда и только тогда, когда выполнено условие $1 \notin \sigma(A) + \sigma(B)$, при этом решение находится по формуле (4.7).

4.3. Ограниченность и непрерывность решений. Хорошо известно, что каждое суммируемое решение линейного интегрального уравнения $x(t) = \int\limits_0^1 l(t,\tau)x(\tau)d\tau + f(t)$ с непрерывным заданным ядром и непрерывной функцией f непрерывно. Для линейных уравнений с частными интегралами это не так.

Линейное уравнение

$$x(t,s) = \int\limits_0^1 x(\tau, s)d\tau + \int\limits_0^1 x(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma - 2$$

имеет непрерывное решение $x(t,s)=1$, ограниченное разрывное решение $x(t,s)=1+\chi_{[0;0,5]}(s)-\chi_{[0,5;1]}(s)$ и неограниченное решение

$$x(t,s)=\begin{cases} 1-(0,5-s)^{-0,5}, \text{ если } 0\leqslant s<0,5,\\ 1, \text{ если } s=0,5,\\ 1+(s-0,5)^{-0,5}, \text{ если } 0,5<s\leqslant 1.\end{cases}$$

Поэтому изучение свойств решений уравнения (4.1) следует проводить в пространствах функций с требуемыми от решения свойствами.

4.4. Линейные уравнения Вольтерра с частными интегралами. Основные утверждения об однозначной разрешимости уравнения

$$x=Kx+f, \tag{4.8}$$

где K — оператор Вольтерра с частными интегралами (3.1), получаются применением результатов о равенстве нулю спектрального радиуса оператора K из раздела 3.1.

В частности, если выполнено условие одной из теорем 3.2–3.7, то уравнение (4.8) имеет единственное решение в рассматриваемом пространстве U, и для любой функции $f\in U$ оно может быть получено методом последовательных приближений. При этом решение уравнения есть сумма ряда Неймана

$$x=f+\sum_{p=1}^{\infty}K^pf. \tag{4.9}$$

Учитывая равенства (2.21)–(2.24), решение (4.9) можно представить в виде

$$x(t,s)=f(t,s)+\int\limits_a^t\varphi(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau+\int\limits_c^s\psi(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma+\int\limits_\Delta\phi(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma \tag{4.10}$$

с резольвентными ядрами φ,ψ,ϕ, определяемыми равенствами

$$\varphi(t,s,\tau)=\sum_{p=1}^{\infty}l^{(p)}(t,s,\tau),\psi(t,s,\sigma)=\sum_{p=1}^{\infty}m^{(p)}(t,s,\sigma),\phi(t,s,\tau,\sigma)=\sum_{p=1}^{\infty}n^{(p)}(t,s,\tau,\sigma),$$

где

$$l^{(p)}(t,s,\tau)=\int\limits_\tau^t l(t,s,\xi)l^{(p-1)}(\xi,s,\tau)d\xi, l^{(1)}(t,s,\tau)=l(t,s,\tau),$$

$$m^{(p)}(t,s,\sigma)=\int\limits_\sigma^s m(t,s,\eta)m^{(p-1)}(t,\eta,\sigma)d\eta, m^{(1)}(t,s,\sigma)=m(t,s,\sigma),$$

$$n^{(p)}(t,s,\tau,\sigma)=l(t,s,\tau)m^{(p-1)}(\tau,s,\sigma)+m(t,s,\sigma)l^{(p-1)}(t,\sigma,\tau)+\int\limits_\alpha^\beta l(t,s,\xi)n^{(p-1)}(\xi,s,\tau,\sigma)d\xi+$$

$$+\int\limits_\gamma^\delta m(t,s,\eta)n^{(p-1)}(t,\eta,\tau,\sigma)d\eta+\int\limits_\alpha^\beta n(t,s,\xi,\eta)l^{(p-1)}(\xi,\sigma,\tau)d\xi+\int\limits_\gamma^\delta n(t,s,\tau,\eta)m^{(p-1)}(\tau,\eta,\sigma)d\eta+$$

$$+\int\limits_\alpha^\beta\int\limits_\gamma^\delta n(t,s,\xi,\eta)n^{(p-1)}(\xi,\eta,\tau,\sigma)d\xi d\eta, n^{(1)}(t,s,\tau,\sigma)=n(t,s,\tau,\sigma),$$

$\alpha=\tau,\beta=t,\gamma=\sigma,\delta=s$ при $\Delta=[a,t]\times[c,s]$, $\alpha=\tau,\beta=t,\gamma=c,\delta=d$ при $\Delta=[a,t]\times[c,d]$, $\alpha=a,\beta=b,\gamma=\sigma,\delta=s$ при $\Delta=[a,b]\times[c,s]$.

Равенство (4.10) показывает, что резольвентой уравнения (4.8) является оператор с частными интегралами. Аналогично, этот же оператор является резольвентой уравнения (4.8) и в пространстве вектор-функций.

В предположениях раздела 3.1 спектральный радиус операторов L и M равен нулю. Если теперь $\Delta = [a,t] \times [c,s]$,

$$(I-L)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_a^t \varphi(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau, (I-M)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int_c^s \psi(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma,$$

$$n_1(t,s,\tau,\sigma) = n(t,s,\tau,\sigma) + l(t,s,\tau)m(\tau,s,\sigma), n_2(t,s,\tau,\sigma) = n_1(t,s,\tau,\sigma)+$$

$$+\int_\tau^t \varphi(t,s,\xi)n_1(\xi,s,\tau,\sigma)d\xi + \int_\sigma^s \psi(t,s,\eta)n_1(t,\eta,\tau,\sigma)d\eta + \int_\tau^t\int_\sigma^s \psi(t,s,\eta)\varphi(t,\eta,\xi)n_1(\xi,\eta,\tau,\sigma)d\xi d\eta,$$

то уравнение (4.8) есть интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t,s) = \int_a^t\int_c^s n_2(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + g(t,s), \tag{4.11}$$

где $g(t,s) = (I-M)^{-1}(I-L)^{-1}f$. Пусть $r(t,s,\tau,\sigma)$ — резольвентное ядро уравнения (4.11). Тогда

$$x(t,s) = g(t,s) + \int_a^t\int_c^s r(t,s,\tau,\sigma)g(\tau,\sigma)d\tau d\sigma.$$

Подставляя в это равенство $g(t,s) = (I-M)^{-1}(I-L)^{-1}f$, получим

$$x(t,s) = f(t,s) + \int_a^t \varphi(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau + \int_c^s \psi(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma + \int_\tau^t\int_c^s \omega(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{4.12}$$

где

$$\omega(t,s,\tau,\sigma) = \psi(t,s,\sigma)\varphi(t,\sigma,\tau) + r(t,s,\tau,\sigma) + \int_\tau^t r(t,s,\xi,\sigma)\varphi(\xi,s,\tau)d\xi+$$

$$+\int_\sigma^s r(t,s,\tau,\eta)\psi(t,\eta,\sigma)d\eta + \int_\tau^t\int_\sigma^s r(t,s,\xi,\eta)\psi(\xi,\eta,\sigma)\varphi(\xi,\sigma,\tau)d\xi d\eta.$$

Таким образом, резольвента уравнения (4.8) имеет вид (4.12), где резольвентные ядра φ, ψ, ω выражаются через резольвентные ядра уравнений Вольтерра $(I-L)x = f, (I-M)x = f$ и (4.10).

Описанный метод построения резольвенты уравнения (4.8) принадлежит В. Вольтерра и применим также при $\Delta = [a,t] \times [c,d]$ и $\Delta = [a,b] \times [c,s]$.

4.5. Линейные уравнения Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами. Интегральное уравнение

$$x = K_i x + f \ (i = 1,2,3), \tag{4.13}$$

где K_1, K_2, K_3 — операторы (3.14), (3.15), (3.16), будем называть *уравнением Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами*.

Пример уравнения

$$x(t,s) = \frac{1}{2t}\int_0^t x(\tau,s)d\tau + \frac{1}{2t}\int_0^t\int_0^1 x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma$$

показывает, что без дополнительных условий уравнение (4.13), вообще говоря, не только не однозначно разрешимо, но и не нетерово.

Условия фредгольмовости уравнения (4.13) легко получаются из результатов разделов 3.1 и 3.2. В частности, при $i = 1$ справедлива

Теорема 4.10. *Пусть K_1 — регулярный оператор в БИП $U = U([a,b] \times [c,d])$ и выполнено условие одной из теорем* 3.1–3.5 *или K_1 действует в $U = C([a,b] \times [c,d])$ и выполнено условие одной из теорем* 3.6 *или* 3.7. *Тогда для уравнения $x = K_1 x + f$ справедлива альтернатива Фредгольма.*

В условии теоремы 4.10 уравнение $x = K_1x + f$ равносильно интегральному уравнению

$$x(t,s) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d r_1(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + g_1(t,s) \equiv (R_1x)(t,s) + g_1(t,s), \tag{4.14}$$

где

$$r_1(t,s,\tau,\sigma) = \int\limits_a^t \varphi(t,s,\xi)n_1(\xi,s,\tau,\sigma)d\xi + \int\limits_c^s \psi(t,s,\eta)n_1(t,\eta,\tau,\sigma)d\eta +$$

$$+ \int\limits_a^t \int\limits_c^s n_2(t,s,\xi,\eta)n_1(\xi,\eta,\tau,\sigma)d\xi d\eta + n_1(t,s,\tau,\sigma),$$

$$g(t,s) = f(t,s) + \int\limits_a^t \varphi(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau + \int\limits_c^s \psi(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_a^t \int\limits_c^s n_2(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma,$$

$$n_1(t,s,\tau,\sigma) = n(t,s,\tau,\sigma) + l(t,s,\tau)m(\tau,s,\sigma)\chi_{[a,t]}(\tau)\chi_{[c,s]}(\sigma), n_2(t,s,\tau,\sigma) = \psi(t,s,\sigma)\varphi(t,\sigma,\tau).$$

Если $1 \notin \sigma(K_1)$, то уравнение $x = K_1x + f$ допускает обращение, а резольвента имеет вид

$$x(t,s) = f(t,s) + \int\limits_a^t \varphi(t,s,\tau)f(\tau,s)d\tau + \int\limits_c^s \psi(t,s,\sigma)f(t,\sigma)d\sigma + \int\limits_a^b \int\limits_c^d \tilde{n}(t,s,\tau,\sigma)f(\tau,\sigma)d\tau d\sigma, \tag{4.15}$$

где φ и ψ — резольвентные ядра из пункта 4.4, а

$$\tilde{n}(t,s,\tau,\sigma) = r(t,s,\tau,\sigma) + n_2(t,s,\tau,\sigma)\chi_{[a,t]\times[c,s]}(\tau,\sigma) + \int\limits_\tau^b r(t,s,\xi,\sigma)\varphi(\xi,\sigma,\tau)d\xi +$$

$$+ \int\limits_\sigma^d r(t,s,\tau,\eta)\psi(\tau,\eta,\sigma)d\eta + \int\limits_\tau^b \int\limits_\sigma^d r(t,s,\xi,\eta)n_2(\xi,\eta,\tau,\sigma)d\xi d\eta, n_2(t,s,\tau,\sigma) = \psi(t,s,\sigma)\varphi(t,\sigma,\tau).$$

Таким образом, резольвента (4.15) выражается через резольвентные ядра уравнений Вольтерра $x = Lx + f$, $x = Mx + f$ и резольвентное ядро r уравнения Фредгольма (4.14).

Уравнения $x = K_2x + f$ и $x = K_3x + f$ существенно отличаются от уравнения $x = K_1x + f$. Действительно, например, при единичных ядрах уравнение $x = K_1x+f$ является фредгольмовым в $C([0,1]\times[0,1])$, а уравнения $x = K_2x+f$ и $x = K_3x+f$ не являются даже ни n-, ни d-нормальными. Из теорем 3.8–3.11 вытекает

Теорема 4.11. *Если K_2 — регулярный оператор в БИП $U = U([a,b] \times [c,d])$ и выполнено условие одной из теорем* 3.8–3.11, *то альтернатива Фредгольма для уравнения $x = K_2x + f$ справедлива тогда и только тогда, когда она справедлива для уравнения $x(t,s) = \int\limits_c^d m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + f(t,s) \equiv (Mx)(t,s) + f(t,s)$.*

Аналогичная теорема имеет место и для уравнения $x = K_3x + f$.

Если уравнение $x = K_ix + f$ $(i = 2,3)$ с ядрами $l \in C(L^1([a,b]))$, $m \in C(L^1([c,d]))$, $n \in C(L^1([a,b] \times [c,d]))$ рассматривается в $C([a,b] \times [c,d])$, то оно фредгольмово точно тогда, когда обратимо при $i = 2$ уравнение $x = Mx + f$ и обратимо при $i = 3$ уравнение $x = Lx + f$.

Если в условии теоремы 4.5 выполнено $1 \notin \sigma(M)$, $(I-M)^{-1}x(t,s) = x(t,s) + \int\limits_c^d r_m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma$ и $(I - M)^{-1}$ — регулярный оператор в БИП U, то уравнение $x = K_2x + f$ приводится к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма

$$x(t,s) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \bar{n}_1(t,s,\tau,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + \bar{g}_1(t,s), \tag{4.16}$$

где функция $\bar{n}_1(t,s,\tau,\sigma)$ определяется по функциям $r_m(t,s,\sigma)$, $m(t,s,\sigma)$, $n(t,s,\tau,\sigma)$ и функции $\varphi(t,s,\tau)$ из пункта 4.4, а функция $\bar{g}_1(t,s)$ определяется по функциям $f(t,s)$, $r_m(t,s,\sigma)$ и $\varphi(t,s,\tau)$ (см. [35]).

Если теперь уравнение (4.16) допускает обращение и $r(t,s,\tau,\sigma)$ — резольвентное ядро для ядра $\bar{n}_1(t,s,\tau,\sigma)$, то резольвента уравнения $x = K_2x + f$ определяется через резольвентные ядра уравнений $x = Lx + f$, $x = Mx + f$ и $r(t,s,\tau,\sigma)$ и имеет такую же структуру, что и оператор $I + K_2$.

Уравнение $x = K_3x + f$ рассматривается аналогично.

Приведенные схемы исследования уравнения (4.8) применимы и в случае пространств вектор-функций.

5. Некоторые приложения линейных уравнений с частными интегралами

В разделе указываются проблемы, приводящиеся к линейным уравнениям с частными интегралами, выписываются соответствующие уравнения и даются ссылки на работы, в которых изучаются эти уравнения.

Изгиб тонких пластинок, пологие упругие оболочки [10, 35, 98]:

$$\omega(z,\xi) = \int_0^z l(z,\xi,t)\omega(t,\xi)dt + \int_0^\xi m(z,\xi,\tau)\omega(z,\tau)d\tau + \int_0^z\int_0^\xi n(z,\xi,t,\tau)\omega(t,\tau)dtd\tau + g(z,\xi).$$

Функция Римана для уравнения второго порядка эллиптического типа [10]:

$$V(z,\zeta) - \int_t^z B(\xi,\zeta)V(\xi,\zeta)d\xi - \int_\tau^\zeta A(z,\eta)V(z,\eta)d\eta + \int_t^z d\xi\int_\tau^\zeta C(\xi,\zeta)V(\xi,\eta)d\eta = 1.$$

Гиперболическое уравнение Лапласа, задача Гурса [88, 89]:

$$\varphi(x,y) = \int_0^x b(x,y)\varphi(\xi,y)d\xi + \int_0^y a(x,y)\varphi(x,\eta)d\eta + f(x,y).$$

Задача Коши для интегродифференциального уравнения Барбашина [98]:

$$y(t,s) = \int_{t_0}^t c(t,s)y(\tau,s)d\tau + \int_{t_0}^t\int_a^b k(t,s,\sigma)y(\tau,\sigma)d\sigma d\tau + g(t,s).$$

Механика сплошных сред [3, 35, 96, 98]:

$$\lambda x(t,s) + \int_0^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_{-1}^1 m(s-\sigma)x(t,\sigma)d\sigma = g(t,s).$$

Смешанные задачи эволюционного типа [5, 35, 96, 98]:

$$x(t,s) + \int_0^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_{-1}^1 m(s-\sigma)x(t,\sigma)d\sigma + \int_0^t\int_{-1}^1 n(t,\tau)m(s-\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma = g(t,s).$$

Осесимметричные контактные задачи [2, 35, 96, 98]:

$$\lambda x(t,s) + \int_0^t sx(\tau,s)d\tau + \frac{2}{\pi}\int_c^1 m\left(\frac{2\sqrt{s\sigma}}{s+\sigma}\frac{\sigma}{s+\sigma}\right)x(t,\sigma)d\sigma = g(t,s).$$

Контактные задачи теории ползучести неоднородно-стареющих тел [1, 35, 86, 96, 98]:

$$x(t,s) - \int_1^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau - c(t)\int_a^b m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma - \int_1^t\int_a^b c(t)n(t,\tau)m(s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma = g(t,s).$$

Общее уравнение механики сплошных сред и теории ползучести неоднородно-стареющих тел [35, 96, 98]:

$$x(t,s) = a(s)\int_0^t l(t,\tau)x(\tau,s)d\tau + c(t)\int_0^b m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma +$$

$$+d(t,s)\int_0^t\int_0^b n(t,\tau)m(s,\sigma)x(\tau,\sigma)d\tau d\sigma + f(t,s).$$

Аэродинамика [6, 35, 96, 98]:

$$x(t,s) - \frac{1}{\pi b}\left(\frac{a-t}{a+t}\right)^{1/2}\int_{-a}^{a} x(\tau,s)d\tau - \int_{-b}^{b} m(s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma = f(t,s).$$

Расчет плотин методом арок-консолей [35, 87, 96, 98]:

$$\int_0^a l(t,s,\tau)x(\tau,s)d\tau + \int_{-b}^{b} m(t,s,\sigma)x(t,\sigma)d\sigma = f(t,s).$$

Другие приложения: в монографиях [35, 98] приведены многочисленные примеры линейных и нелинейных уравнений с частными интегралами, применявшихся к решению различных задач.

6. Заключение

Библиография работ по теории линейных операторов и уравнений с частными интегралами, доведенная до 2000 г., содержится в монографии [35], в ней же рассмотрены линейные операторы и уравнения с частными интегралами и ядрами различных классов. В связи с этим данная статья не содержит описание свойств операторов и условий разрешимости уравнений с частными интегралами и вырожденными, симметричными, симметризуемыми, жордановыми, разностными, сингулярными ядрами; линейные операторы и уравнения с частными интегралами не рассматриваются в пространствах дифференцируемых и частично, дифференцируемых функций, в пространствах Гельдера, Орлича и некоторых других пространствах. В обзоре не обсуждаются приближенные и численные схемы решения уравнений с частными интегралами, системы линейных уравнений с частными интегралами, линейные операторы и уравнения типа Романовского с частными интегралами [44]. Список литературы в статье не претендует на полноту, в частности, в список работ не включены тезисы докладов по теории линейных операторов и уравнений с частными интегралами.

Основы теории линейных операторов и уравнений с частными интегралами представлены в монографиях [35, 57, 65, 98].

Отметим, что линейные операторы и уравнения частными интегралами изучались в [8, 9, 11, 17, 21, 24–30, 32, 33, 39, 46–49, 51, 52, 54, 56, 60, 62, 66, 73, 74, 80–84, 90–92, 99, 100, 107–110]. В работах [12–14] рассматривались приложения линейных уравнений с частными интегралами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров В. М., Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В.* Контактные задачи теории ползучести неоднородно стареющих тел// В сб.: «Аналитические и численные методы краевых задач пластичности и вязкоупругости». — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986. — С. 3–13.
2. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Осесимметричная контактная задача для линейно-деформируемого основания общего типа при наличии износа// Изв. АН СССР. Сер. Мех. тверд. тела. — 1978. — № 5. — С. 58–66.
3. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Об одном классе интегральных уравнений смешанных задач механики сплошных сред// Докл. АН СССР. — 1980. — *252.* — С. 324–328.
4. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* О контактном взаимодействии тел с покрытиями при наличии износа// Докл. АН СССР. — 1984. — *275*, № 4. — С. 827–830.
5. *Александров В. М., Коваленко Е. В.* Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. — М.: Наука, 1986.

6. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. — М.: Наука, 1985.
7. *Бицадзе А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. — М.: Наука, 1966.
8. *Болтянский В.В.* О разрешимости интегрального уравнения с частными интегралами с ядром, зависящим от трех переменных// В сб.: «Дифференциальные уравнения» — Рязань, 1981. — С. 3–14.
9. *Болтянский В.В., Лихтарников Л.М.* Об одном классе линейных интегральных уравнений с частными интегралами// Дифф. уравн. — 1982. — *18*, № 11. — С. 1939–1950.
10. *Векуа И.Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.—Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.
11. *Витова Л.З.* К теории линейных интегральных уравнений с частными интегралами// Дисс. к.ф.-м.н. — Новгород, 1977.
12. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1982.
13. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи нестационарных внутренних волн. — М.: Наука, 1990.
14. *Галин Л.А., Горячева И.Г.* Осесимметричная контактная задача теории упругости при наличии износа// Прикл. мат. мех. — 1977. — *41*, № 5. — С. 807–812.
15. *Гельфанд И.М., Левитан Б.М.* Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции// Усп. мат. наук. — 1956. — *11*, № 1. — С. 191–198.
16. *Гливенко В.И.* Интеграл Стильтьеса. — М.—Л.: ОНТИ, 1936.
17. *Говорухина А.А., Коваленко Н.В., Парадоксова И.А.* Двумерные интегральные уравнения с частными интегралами на плоскости и полуплоскости// В сб.: «Интегр. и дифференц. уравнения и приближенные решения». — Элиста, 1985. — С. 23–32.
18. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 2. — М.—Л.: ОНТИ, 1934.
19. *Забрейко П.П.* Исследование интегральных операторов в идеальных пространствах// Дисс. д.ф.-м.н. — Воронеж, 1968.
20. *Забрейко П.П.* Идеальные пространства функций. I// Вестн. Ярославск. ун-та. — 1974. — *8*. — С. 12–52.
21. *Забрейко П.П., Калитвин А.С., Фролова Е.В.* Об интегральных уравнениях с частными интегралами в пространстве непрерывных функций// Дифф. уравн. — 2002. — *38*, № 4. — С. 538–546.
22. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
23. *Забрейко П.П., Ломакович А.Н.* Интегральные операторы Вольтерра в пространствах функций двух переменных// Укр. мат. ж. — 1990. — *42*, № 9. — С. 1187–1191.
24. *Иноземцев А.И., Калитвин А.С.* О спектре операторов с многомерными частными интегралами // Вестн. ЛГПУ. Сер. Мат. Информ. техн. Физ. Естествозн. — 2015. — № 2. — С. 8–11.
25. *Иноземцев А.И., Калитвин А.С.* Оператор-функции с многомерными частными интегралами // Науч. ведом. БелГУ. Мат. Физ. — 2015. — *37*, № 25. — С. 19–29.
26. *Какичев В.А., Коваленко Н.В.* К теории двумерных интегральных уравнений с частными интегралами// Укр. мат. ж. — 1973. — *25*, № 3. — С. 302–312.
27. *Калитвин А.С.* О спектре и собственных функциях оператора с частными интегралами и оператора с частными интегралами типа В.И. Романовского// В сб.: «Функциональный анализ». — Ульяновск, 1984. — *22*. — С. 35–45.
28. *Калитвин А.С.* О спектре некоторых классов операторов с частными интегралами// В сб.: «Операторы и их приложения. Приближение функций. Уравнения». — Ленинград, 1985. — С. 27–35.
29. *Калитвин А.С.* О мультиспектре линейных операторов// В сб.: «Операторы и их приложения. Приближение функций. Уравнения». — Ленинград, 1985. — С. 91–99.
30. *Калитвин А.С.* О спектре оператора с частными интегралами в пространствах со смешанной нормой// В сб.: «Дифференциальные уравнения в частных производных». — Ленинград, 1986. — С. 128–131.
31. *Калитвин А.С.* Исследование операторов с частными интегралами// Дисс. к.ф.-м.н. — Ленинград, 1986.
32. *Калитвин А.С.* О спектре линейных операторов с частными интегралами и положительными ядрами// В сб.: «Операторы и их приложения». — Ленинград, 1988. — С. 43–50.
33. *Калитвин А.С.* О разрешимости некоторых классов интегральных уравнений с частными интегралами// В сб.: «Функциональный анализ». — Ульяновск, 1989. — *29*. — С. 68–73.
34. *Калитвин А.С.* Об уравнениях Вольтерра с частными интегралами теории упругости// Тр. конф. «Математическое моделирование систем. Методы, приложения и средства». — Воронеж, 1998. — С. 85–89.
35. *Калитвин А.С.* Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000.

36. *Калитвин А. С.* Уравнения Вольтерра с частными интегралами в функциональных пространствах// Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2000. — *5*. — С. 72–76.
37. *Калитвин А. С.* Об обобщении одного класса уравнений с частными интегралами контактных задач теории ползучести неоднородно-стареющих тел// В сб.: «Современные проблемы механики и прикладной математики». — Воронеж, 2000. — С. 189–193.
38. *Калитвин А. С.* Об обобщении одного уравнения механики сплошных сред// Изв. РАЕН. Сер. ММ-МИУ. — 2000. — *4*, № 3. — С. 81–88.
39. *Калитвин А. С.* Об уравнениях Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами// Дифф. уравн. — 2001. — *37*, № 10. — С. 151–152.
40. *Калитвин А. С.* Нелинейные операторы с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2002.
41. *Калитвин А. С.* Операторы и уравнения с частными интегралами и их приложения// Дисс. д.ф.-м.н. — Липецк, 2003.
42. *Калитвин А. С.* Интегральные уравнения третьего рода с частными интегралами// Соврем. мат. и ее прилож. — 2005. — *36*. — С. 95–99.
43. *Калитвин А. С.* Об одном классе интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций // Дифф. уравн. — 2006. — *42*, № 9. — С. 1194–1200.
44. *Калитвин А. С.* Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
45. *Калитвин А. С.* Линейные уравнения с частными интегралами механики сплошных сред// В сб.: «Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания». — Липецк, 2009. — С. 86–93.
46. *Калитвин А. С.* Об операторах и уравнениях Вольтерра с частными интегралами// ВЗМШ С. Г. Крейна 2012: материалы межд. конф. — Воронеж, 2012. — С. 91–94.
47. *Калитвин А. С.* О нетеровости, фредгольмовости и обратимости линейных уравнений с частными интегралами в двух классах идеальных пространств// Тр. межд. конф. «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений, AMADE-11. Т. 1. Математический анализ». — Минск: Ин-т мат. НАН Беларуси, 2012. — С. 75–79.
48. *Калитвин А. С.* О линейных операторах с частными интегралами в пространствах симметричных и кососимметричных функций // Вестн. ЛГПУ. Сер. Мат. Информ. техн. Физ. Естествозн. — 2012. — № 1. — С. 9–13.
49. *Калитвин А. С.* О спектре линейных операторов с частными интегралами в пространстве вектор-функций $C(L^2)$// Материалы межд. конф. «Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна-2014». — Воронеж, 2014. — С. 157–160.
50. *Калитвин А. С.* О спектре операторов с частными интегралами и переменными пределами интегрирования// Материалы обл. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания». — Липецк, 2014. — С. 91–96.
51. *Калитвин А. С.* О мультиспектре линейных операторов с частными интегралами // Вестн. ЛГПУ. Сер. Мат. Информ. техн. Физ. Естествозн. — 2015. — № 1. — С. 7–11.
52. *Калитвин А. С.* О фредгольмовости одного класса линейных уравнений с частными интегралами в пространстве $L^1(D)$// Материалы межд. конф. «Дифференциальные уравнения и динамические системы». — Суздаль, 2018. — С. 103–104.
53. *Калитвин А. С., Иноземцев А. И.* О нетеровости, фредгольмовости и обратимости линейных операторов и уравнений с многомерными частными интегралами// Науч.-техн. вестн. Поволжья. — 2018. — № 5. — С. 22–25.
54. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Об уравнениях Вольтерра—Фредгольма—Романовского с частными интегралами// Тр. Ин-та мат. НАН Беларуси. — 2004. — *12*, № 1. — С. 71–75.
55. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра с многомерными частными интегралами// Тр. XII Межд. симп. «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2005). — Харьков—Херсон, 2005. — С. 153–156.
56. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
57. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Об интегральных уравнениях Вольтерра с многомерными частными интегралами// Вестн. ЛГПУ. Сер. Мат. Информ. техн. Физ. Естествозн. — 2006. — № 1. — С. 20–23.
58. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* О линейных операторах и уравнениях с частными интегралами и переменными пределами интегрирования// Науч. ведом. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2013. — *32*, № 19. — С. 49–56.
59. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Об одном классе математических моделей с частными интегралами и мультипараметром// Науч. ведом. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2016. — *42*, № 6. — С. 40–44.

60. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* О линейных операторах с несобственными частными интегралами// Науч. ведом. Белгород. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. — 2016. — *43*, № 13. — С. 24–29.
61. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* О матричных интегральных уравнениях Вольтерра с частными интегралами в комплексной области// Науч.-техн. вестн. Поволжья. — 2017. — № 6. — С. 28–30.
62. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Об операторах с частными интегралами в пространствах функций двух переменных// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2017. — № 3. — С. 17–27.
63. *Калитвин А. С., Калитвин В. А.* Линейные уравнения с частными интегралами и переменными пределами интегрирования// Сб. мат. межд. конф. «XXIX Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным эволюционным задачам» (КРОМШ-2018), Секции 1–3. — Симферополь, 2018. — С. 70–72.
64. *Калитвин А. С., Фролова Е. В.* Об уравнениях Вольтерра с частными интегралами в пространстве непрерывных и ограниченных на полуполосе функций// Тр. ин-та мат. НАН Беларуси. — 2001. — *9*. — С. 68–72.
65. *Калитвин А. С., Фролова Е. В.* Линейные уравнения с частными интегралами. C-теория. — Липецк: ЛГПУ, 2004.
66. *Калитвин А. С., Янкелевич Е. В.* Операторы с частными интегралами в пространстве непрерывных функций. I// Вестн. Челябинск. гос. ун-та. Сер. Мат. Мех. — 1994. — № 1. — С. 61–67.
67. *Калитвин В. А.* Операторные методы исследования уравнений Вольтерра—Фредгольма с частными интегралами// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2003.
68. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
69. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
70. *Кац И. С.* Поведение решений линейного дифференциального уравнения второго порядка (по поводу одной работы Э. Хилле)// Мат. сб. — 1963. — *62*, № 4. — С. 476–495.
71. *Кац И. С., Крейн М. Г.* Критерий дискретности спектра сингулярной струны// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1958. — *2*. — С. 136–153.
72. *Коваленко Е. В.* Исследование осесимметричной контактной задачи об изнашивании пары кольцевой штамп — упругое шероховатое полупространство// Прикл. мат. мех. — 1985. — *49*, № 5. — С. 836–843.
73. *Коваленко Н. В.* О решении двумерного интегрального уравнения с частными интегралами в пространстве L_2// В сб.: «Сообщения на 2 конференции Ростовского научного математического общества». — Ростов, 1968. — С. 41–49.
74. *Коваленко Н. В.* Об одном однородном интегральном уравнении с частными интегралами// В сб.: «Физ.-мат. исследования». — Ростов-на-Дону, 1972. — С. 3–7.
75. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. — Новосибирск: Наука, 1983.
76. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
77. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
78. *Левин В. Л.* Тензорные произведения и функторы в категориях банаховых пространств, определяемые КВ-линеалами// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1969. — *20*. — С. 43–82.
79. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988.
80. *Лихтарников Л. М.* Об одном операторном уравнении с двумя параметрами в гильбертовом пространстве// В сб.: «Функц. анализ. Вып. 3». — Ульяновск, 1974. — С. 92–95.
81. *Лихтарников Л. М.* О спектре одного класса линейных интегральных уравнений с двумя параметрами// Дифф. уравн. — 1975. — *11*, № 6. — С. 1108–1117.
82. *Лихтарников Л. М., Витова Л. З.* О спектре интегрального оператора с частными интегралами// Лит. мат. сб. — 1975. — *15*, № 2. — С. 41–47.
83. *Лихтарников Л. М., Витова Л. З.* О разрешимости линейного интегрального уравнения с частными интегралами// Укр. мат. ж. — 1976. — *28*, № 1. — С. 83–87.
84. *Лихтарников Л. М., Морозова Л. М.* Об одном способе исследования интегральных уравнений с частными интегралами// В сб.: «Функц. анализ. Вып. 21». — Ульяновск, 1983. — С. 108–112.
85. *Манжиров А. В.* Осесимметричные контактные задачи для неоднородно стареющих вязкоупругих слоистых оснований// Прикл. мат. мех. — 1983. — *47*, вып. 4. — С. 684–694.
86. *Манжиров А. В.* Об одном методе решения двумерных интегральных уравнений осесимметричных контактных задач для тел со сложной реологией// Прикл. мат. мех. — 1985. — *49*, № 6. — С. 1019–1025.
87. *Морозов В. А.* Применение метода регуляризации к решению одной некорректной задачи// Вестн. МГУ. — 1965. — *1*, № 4. — С. 13–25.
88. *Мюнтц Г.* Интегральные уравнения. Т. 1. — Л.—М.: ГТТИ, 1934.
89. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995.

90. *Околелов О. П.* К теории двумерных интегральных уравнений с частными интегралами// Материалы 6-й межвуз. физ.-мат. науч. конф. Дальнего Востока. Дифф. и интегр. уравн. — Хабаровск, 1967. — *3*. — С. 142–149.
91. *Околелов О. П.* Исследование уравнений с частными интегральными операторами// Дисс. к.ф.-м.н. — Иркутск, 1967.
92. *Пилиди В. С.* Об одном классе линейных операторных уравнений// Мат. анализ и его прилож. — 1975. — *7*. — С. 34–42.
93. *Фролова Е. В.* Об одном операторе механики сплошных сред// Тр. конф. «Математическое моделирование систем. Методы, приложения и средства». — Воронеж, 1998. — С. 183–187.
94. *Фролова Е. В.* Линейные операторы с частными интегралами// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2000.
95. *Appell J., Frolova E. V., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial integral operators on $C([a,b] \times [c,d])$// Integr. Equ. Oper. Theory. — 1997. — *27*. — С. 125–140.
96. *Appell J., Kalitvin A. S., Nashed M. Z.* On some partial integral equations arising in the mechanics of solids// ZAMM Z. Angew. Math. Mech. — 1999. — *79*, № 2. — С. 703–713.
97. *Appell J., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial integral operators in Orlich spaces with mixed norms// Collect. Math. — 1998. — *78*, № 2. — С. 293–306.
98. *Appell J., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Partial integral operators and integro-differential equations. — New York—Basel: Marcel Dekker, 2000.
99. *Fenyö S.* Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Integralgleichungen// Publ. Math. — 1955. — *4*, № 1. — С. 98–103.
100. *Frolova E. V., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* Operator-functions with partial integrals on C and L_p// J. Electrotech. Math. Pristina. — 2001. — *6*. — С. 29–50.
101. *Ichinose T.* Operational calculus for tensor products of linear operators in Banach spaces// Hokkaido Math. J. — 1975. — *4*. — С. 306–334.
102. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators. I// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *235*. — С. 75–113.
103. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *237*. — С. 223–254.
104. *Kalitvin A. S.* Spectral properties of partial integral operators of Volterra and Volterra—Fredholm type// Z. Anal. Anwend. — 1998. — *17*, № 2. — С. 297–309.
105. *Kalitvin A. S.* On a class of integral equations in the space of continuous functions// Differ. Equ. — 2006. — *42*, № 9. — С. 1262–1268.
106. *Kalitvin A. S., Zabrejko P. P.* On the theory of partial integral operators// J. Integral Equ. Appl. — 1991. — *3*, № 3. — С. 351–382.
107. *Kantorovitz S.* A note on partial linear integral equations// Bull. Res. Council Israel. — 1957. — *7*, № 4. — С. 181–186.
108. *Kantorovitz S.* On the integral equation $\varphi(x,y) - \lambda a(x,y) \int \varphi(x,y)dx - \mu b(x,y) \int \varphi(x,y)dy = c(x,y)$// Riveon le Matematika. — 1958. — *12*. — С. 24–26.
109. *Mauro P.* Su un'equazione integrale lineare di tipo non ancora considerato// Rend. Accad. Naz. Sci. XL. — 1976. — *5*, № 1. — С. 55–59.
110. *Salam A.* Fredholm solution of partial integral equations// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1953. — *49*. — С. 213–217.
111. *Volterra V.* Lecons sur les equations integrales et les equations integro-differentielles. — Paris: Gauthier-Villars, 1913.

А. С. Калитвин
Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского,
г. Липецк, ул. Ленина, д. 42
E-mail: kalitvinas@mail.ru

В. А. Калитвин
Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского,
г. Липецк, ул. Ленина, д. 42
E-mail: kalitvin@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-390-433 UDC 517.968

Linear Operators and Equations with Partial Integrals

© 2019 **A. S. Kalitvin, V. A. Kalitvin**

Abstract. We consider linear operators and equations with partial integrals in Banach ideal spaces, spaces of vector functions, and spaces of continuous functions. We study the action, regularity, duality, algebras, Fredholm properties, invertibility, and spectral properties of such operators. We describe principal properties of linear equations with partial integrals. We show that such equations are essentially different compared to usual integral equations. We obtain conditions for the Fredholm alternative, conditions for zero spectral radius of the Volterra operator with partial integrals, and construct resolvents of invertible equations. We discuss Volterra–Fredholm equations with partial integrals and consider problems leading to linear equations with partial integrals.

REFERENCES

1. V. M. Aleksandrov, N. Kh. Arutyunyan, and A. V. Manzhirov, “Kontaktnye zadachi teorii polzuchesti neodnorodno stareyushchikh tel” [Contact problems of the creepage of nonhomogeneously aging bodies], In: *Analiticheskie i chislennye metody kraevykh zadach plastichnosti i vyazkouprugosti* [Analytic and Numeric Methods of Boundary-Value Problems of Plasticity and Viscoelasticity], UNTS AN SSSR, Sverdlovsk, 1986, pp. 3–13 (in Russian).
2. V. M. Aleksandrov and E. V. Kovalenko, “Osesimmetrichnaya kontaktnaya zadacha dlya lineyno-deformiruemogo osnovaniya obshchego tipa pri nalichii iznosa” [Axisymmetric contact problem for linearly deformable groundwork of general kind with abrasion], *Izv. AN SSSR. Ser. Mekh. tverd. tela* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Contin. Mech.], 1978, No. 5, 58–66 (in Russian).
3. V. M. Aleksandrov and E. V. Kovalenko, “Ob odnom klasse integral’nykh uravneniy smeshannykh zadach mekhaniki sploshnykh sred” [One one class of integral equations in mixed problems of continuum mechanics], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1980, **252**, 324–328 (in Russian).
4. V. M. Aleksandrov and E. V. Kovalenko, “O kontaktnom vzaimodeystvii tel s pokrytiyami pri nalichii iznosa” [On the contact interaction of covered bodies with abrasion], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1984, **275**, No. 4, 827–830 (in Russian).
5. V. M. Aleksandrov and E. V. Kovalenko, *Zadachi mekhaniki sploshnykh sred so smeshannymi granichnymi usloviyami* [Problems of Continuum Mechanics with Mixed Boundary-Value Conditions], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
6. S. M. Belotserkovskiy and I. K. Lifanov, *Chislennye metody v singulyarnykh integral’nykh uravneniyakh* [Numerical Methods in Singular Integral Equations], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
7. A. V. Bitsadze, *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka* [Boundary-Value Problems for Second-Order Elliptic Equations], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
8. V. V. Boltyanskiy, “O razreshimosti integral’nogo uravneniya s chastnymi integralami s yadrom, zavisyashchim ot trekh peremennykh” [On solvability of integral equation with partial integrals and a kernel depending on three variables], In: *Differentsial’nye uravneniya* [Differential Equations], Ryazan’, 1981, pp. 3–14 (in Russian).
9. V. V. Boltyanskiy and L. M. Likhtarnikov, “Ob odnom klasse lineynykh integral’nykh uravneniy s chastnymi integralami” [On one class of integral equation with partial integrals], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1982, **18**, No. 11, 1939–1950 (in Russian).
10. I. N. Vekua, *Novye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* [New Methods of Solution of Elliptic Equations], OGIZ Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1948 (in Russian).
11. L. Z. Vitova, “K teorii lineynykh integral’nykh uravneniy s chastnymi integralami” [To the theory of linear integral equations with partial integrals] *PhD Thesis*, Novgorod, 1977.
12. V. Vol’terra, *Teoriya funktsionalov, integral’nykh i integrodifferentsial’nykh uravneniy* [Theory of Functionals, Integral and Integrodifferential Equations], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
13. S. A. Gabov and A. G. Sveshnikov, *Lineynye zadachi nestatsionarnykh vnutrennikh voln* [Linear Problems of Nonstationary Inner Waves], Nauka, Moscow, 1990 (in Russian).

14. L. A. Galin and I. G. Goryacheva, “Osesimmetrichnaya kontaktnaya zadacha teorii uprugosti pri nalichii iznosa” [Axisymmetric contact problem of elasticity theory with abrasion], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1977, **41**, No. 5, 807–812 (in Russian).
15. I. M. Gel’fand and B. M. Levitan, “Ob opredelenii differentsial’nogo uravneniya po ego spektral’noy funktsii” [On determining of differential equation by its spectral function], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1956, **11**, No. 1, 191–198 (in Russian).
16. V. I. Glivenko, *Integral Stil’t’esa* [Stieltjes Integral], ONTI, Moscow–Leningrad, 1936 (in Russian).
17. A. A. Govorukhina, N. V. Kovalenko, and I. A. Paradoksova, “Dvumernye integral’nye uravneniya s chastnymi integralami na ploskosti i poluploskosti” [Two-dimensional integral equations with partial integrals on a plane and a half-plane], In: *Integr. i differents. uravneniya i priblizhennye resheniya* [Integral and Differential Equations and Approximate Solutions], Elista, 1985, pp. 23–32 (in Russian).
18. É. Goursat, *Kurs matematicheskogo analiza. T. 3. Ch. 2* [Cours d’Analyse Mathématique. Vol. 3. Part 2], ONTI, Moscow–Leningrad, 1934 (Russian translation).
19. P. P. Zabreyko, “Issledovanie integral’nykh operatorov v ideal’nykh prostranstvakh” [Investigation of integral operators in ideal spaces], *PhD Thesis*, Voronezh, 1968.
20. P. P. Zabreyko, “Ideal’nye prostranstva funktsiy. I” [Ideal spaces of functions. I], *Vestn. Yaroslavsk. un-ta* [Bull Yaroslavl Univ.], 1974, **8**, 12–52 (in Russian).
21. P. P. Zabreyko, A. S. Kalitvin, and E. V. Frolova, “Ob integral’nykh uravneniyakh s chastnymi integralami v prostranstve nepreryvnykh funktsiy” [On integral equations with partial integrals in the space of continuous functions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2002, **38**, No. 4, 538–546 (in Russian).
22. P. P. Zabreyko, A. I. Koshelev, M. A. Krasnosel’skiy, S. G. Mikhlin, L. S. Rakovshchik, and V. Ya. Stetsenko, *Integral’nye uravneniya* [Integral Equations], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
23. P. P. Zabreyko and A. N. Lomakovich, “Integral’nye operatory Vol’terra v prostranstvakh funktsiy dvukh peremennykh” [Volterra integral operators in spaces of functions of two variables], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1990, **42**, No. 9, 1187–1191 (in Russian).
24. A. I. Inozemtsev and A. S. Kalitvin, “O spektre operatorov s mnogomernymi chastnymi integralami” [On spectrum of operators with multidimensional partial integrals], *Vestn. LGPU. Ser. Mat. Inform. tekhn. Fiz. Estestvozn.* [Bull. LGPU. Ser. Math. Inform. Phys. Nat. Sci.], 2015, No. 2, 8–11 (in Russian).
25. A. I. Inozemtsev and A. S. Kalitvin, “Operator-funktsii s mnogomernymi chastnymi integralami” [Operator functions with multidimensional partial integrals], *Nauch. vedom. BelGU. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Math. Phys.], 2015, **37**, No. 25, 19–29 (in Russian).
26. V. A. Kakichev and N. V. Kovalenko, “K teorii dvumernykh integral’nykh uravneniy s chastnymi integralami” [To the theory of two-dimensional integral equations with partial integrals], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1973, **25**, No. 3, 302–312 (in Russian).
27. A. S. Kalitvin, “O spektre i sobstvennykh funktsiyakh operatora s chastnymi integralami i operatora s chastnymi integralami tipa V. I. Romanovskogo” [On spectrum and eigenfunctions of an operator with partial integrals and the Romanovskiy operator with partial integrals], In: *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Ul’yanovsk, 1984, **22**, 35–45 (in Russian).
28. A. S. Kalitvin, “O spektre nekotorykh klassov operatorov s chastnymi integralami” [On spectrum of some classes of operators with partial integrals], In: *Operatory i ikh prilozheniya. Priblizhenie funktsiy. Uravneniya* [Operators and Their Applications. Approximation of Functions. Equations], Leningrad, 1985, pp. 27–35 (in Russian).
29. A. S. Kalitvin, “O mul’tispektre lineynykh operatorov” [On multispectrum of linear operators], In: *Operatory i ikh prilozheniya. Priblizhenie funktsiy. Uravneniya* [Operators and Their Applications. Approximation of Functions. Equations], Leningrad, 1985, pp. 91–99 (in Russian).
30. A. S. Kalitvin, “O spektre operatora s chastnymi integralami v prostranstvakh so smeshannoy normoy” [On spectrum of an operator with partial integrals in spaces with mixed norm], In: *Differentsial’nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Leningrad, 1986, pp. 128–131 (in Russian).
31. A. S. Kalitvin, “Issledovanie operatorov s chastnymi integralami” [Study of operators with partial integrals], *PhD Thesis*, Leningrad, 1986.
32. A. S. Kalitvin, “O spektre lineynykh operatorov s chastnymi integralami i polozhitel’nymi yadrami” [On spectrum of linear operators with partial integrals and positive kernels], In: *Operatory i ikh prilozheniya* [Operators and Their Applications], Leningrad, 1988, pp. 43–50 (in Russian).
33. A. S. Kalitvin, “O razreshimosti nekotorykh klassov integral’nykh uravneniy s chastnymi integralami” [On solvability of some classes of integral equations with partial integrals], In: *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Ul’yanovsk, 1989, **29**, 68–73 (in Russian).

34. A. S. Kalitvin, “Ob uravneniyakh Vol’terra s chastnymi integralami teorii uprugosti” [On Volterra equations with partial integrals from the elasticity theory], Proc. Conf. *Math. model. of systems. Methods, applications, and means*, Voronezh, 1998, pp. 85–89.
35. A. S. Kalitvin, *Lineynye operatory s chastnymi integralami* [Linear Operators with Partial Integrals], TsChKI, Voronezh, 2000 (in Russian).
36. A. S. Kalitvin, “Uravneniya Vol’terra s chastnymi integralami v funktsional’nykh prostranstvakh” [Volterra equations with partial integrals in functional spaces], *Tr. In-ta mat. NAN Belarusi* [Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Belarus], 2000, **5**, 72–76 (in Russian).
37. A. S. Kalitvin, “Ob obobshchenii odnogo klassa uravneniy s chastnymi integralami kontaktnykh zadach teorii polzuchesti neodnorodno-stareyushchikh tel” [On generalization of one class of equations with partial integrals of contact problems from the theory of creepage of nonhomogeneously aging bodies], In: *Sovremennye problemy mekhaniki i prikladnoy matematiki* [Contemporary Problems of Mechanics and Applied Mathematics], Voronezh, 2000, pp. 189–193 (in Russian).
38. A. S. Kalitvin, “Ob obobshchenii odnogo uravneniya mekhaniki sploshnykh sred” [On generalization of one equation of continuum mechanics], *Izv. RAEN. Ser. MMMIU* [Bull. Russ. Acad. Nat. Sci. Ser. MMIU], 2000, **4**, No. 3, 81–88 (in Russian).
39. A. S. Kalitvin, “Ob uravneniyakh Vol’terra—Fredgol’ma s chastnymi integralami” [On Volterra–Fredholm equations with partial integrals], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, No. 10, 151–152 (in Russian).
40. A. S. Kalitvin, *Nelineynye operatory s chastnymi integralami* [Nonlinear Operators with Partial Integrals], LGPU, Lipetsk, 2002 (in Russian).
41. A. S. Kalitvin, “Operatory i uravneniya s chastnymi integralami i ikh prilozheniya” [Operators and equations with partial integrals and their applications], *Doctoral Thesis*, Lipetsk, 2003.
42. A. S. Kalitvin, “Integral’nye uravneniya tret’ego roda s chastnymi integralami” [Integral equations of the third kind with partial integrals], *Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2005, **36**, 95–99 (in Russian).
43. A. S. Kalitvin, “Ob odnom klasse integral’nykh uravneniy v prostranstve nepreryvnykh funktsiy” [On one class of integral equations in the space of continuous functions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2006, **42**, No. 9, 1194–1200 (in Russian).
44. A. S. Kalitvin, *Integral’nye uravneniya tipa Romanovskogo s chastnymi integralami* [Romanovskiy-type Integral Equations with Partial Integrals], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
45. A. S. Kalitvin, “Lineynye uravneniya s chastnymi integralami mekhaniki sploshnykh sred” [Linear equation with partial integrals of the continuum mechanics], In: *Aktual’nye problemy estestvennykh nauk i ikh prepodavaniya* [Actual Problems of Natural Sciences and Their Teaching], Lipetsk, 2009, pp. 86–93 (in Russian).
46. A. S. Kalitvin, “Ob operatorakh i uravneniyakh Vol’terra s chastnymi integralami” [On Volterra operators and equations with partial integrals], Materials of Int. Conf. *S. G. Krein’s Voronezh Wintry Math. School-2012*, Voronezh, 2012, pp. 91–94.
47. A. S. Kalitvin, “O neterovosti, fredgol’movosti i obratimosti lineynykh uravneniy s chastnymi integralami v dvukh klassakh ideal’nykh prostranstv” [On Noether and Fredholm properties and invertibility of linear equations with partial integrals in two classes of ideal spaces], Proc. Int. Conf. *Analytical Methods of Analysis and Differential Equations, AMADE-11*, Vol. 1. *Mathematical Analysis*, Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Belarus, Minsk, 2012, pp. 75–79 (in Russian).
48. A. S. Kalitvin, “O lineynykh operatorakh s chastnymi integralami v prostranstvakh simmetrichnykh i kososimmetrichnykh funktsiy” [On linear operators with partial equations in spaces of symmetric and skew-symmetric functions], *Vestn. LGPU. Ser. Mat. Inform. tekhn. Fiz. Estestvozn.* [Bull. LGPU. Ser. Math. Inform. Phys. Nat. Sci.], 2012, No. 1, 9–13 (in Russian).
49. A. S. Kalitvin, “O spektre lineynykh operatorov s chastnymi integralami v prostranstve vektor-funktsiy $C(L^2)$” [On spectrum of linear operators with partial integrals in the space of vector functions $C(L^2)$], Materials Int. Conf. *S. G. Krein Voronezh Wintry Math. School-2014*, Voronezh, 2014, pp. 157–160 (in Russian).
50. A. S. Kalitvin, “O spektre operatorov s chastnymi integralami i peremennymi predelami integrirovaniya” [On spectrum of operators with partial integrals and variable limits of integration], Materials Regional Sci.-Practic Conf. *Actual Problems of Natural Sciences and Their Teaching*, Lipetsk, 2014, pp. 91–96 (in Russian).
51. A. S. Kalitvin, “O mul’tispektre lineynykh operatorov s chastnymi integralami” [On multispectrum of linear operators with partial integrals], *Vestn. LGPU. Ser. Mat. Inform. tekhn. Fiz. Estestvozn.* [Bull. LGPU. Ser. Math. Inform. Phys. Nat. Sci.], 2015, No. 1, 7–11 (in Russian).

52. A. S. Kalitvin, “O fredgol’movosti odnogo klassa lineynykh uravneniy s chastnymi integralami v prostranstve $L^1(D)$” [On Fredholm property of one class of linear equations with partial integrals in the space $L^1(D)$], Materials Int. Conf. *Differential Equations and Dynamical Systems*, Suzdal’, 2018, pp. 103–104 (in Russian).
53. A. S. Kalitvin and A. I. Inozemtsev, “O neterovosti, fredgol’movosti i obratimosti lineynykh operatorov i uravneniy s mnogomernymi chastnymi integralami” [On Noether and Fredholm properties and invertibility of linear operators and equations with multidimensional partial integrals], *Nauch.-tekhn. vestn. Povolzh’ya* [Sci.-Tech. Bull. Volga Reg.], 2018, No. 5, 22–25 (in Russian).
54. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, “Ob uravneniyakh Vol’terra—Fredgol’ma—Romanovskogo s chastnymi integralami” [Ob uravneniyakh Vol’terra—Fredgol’ma—Romanovskogo s chastnymi integralami], *Tr. In-ta mat. NAN Belarusi* [Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Belarus], 2004, **12**, No. 1, 71–75 (in Russian).
55. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, “Integral’nye uravneniya Vol’terra s mnogomernymi chastnymi integralami” [Volterra integral equations with multidimensional partial integrals], Proc. XII Int. Symp. *Methods of Discrete Singularities in Problems of Mathematical Physics*, Khar’kov–Kherson, 2005, pp. 153–156 (in Russian).
56. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, *Integral’nye uravneniya Vol’terra i Vol’terra—Fredgol’ma s chastnymi integralami* [Volterra and Volterra–Fredholm Integral Equations with Partial Integrals], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
57. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, “Ob integral’nykh uravneniyakh Vol’terra s mnogomernymi chastnymi integralami” [On Volterra integral equations with multidimensional partial integrals], *Vestn. LGPU. Ser. Mat. Inform. tekhn. Fiz. Estestvozn.* [Bull. LGPU. Ser. Math. Inform. Phys. Nat. Sci.], 2006, No. 1, 20–23 (in Russian).
58. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, “O lineynykh operatorakh i uravneniyakh s chastnymi integralami i peremennymi predelami integrirovaniya” [On linear operators and equations with partial integrals and variable limits of integration], *Nauch. vedom. Belgorod. gos. un-ta. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2013, **32**, No. 19, 49–56 (in Russian).
59. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, “Ob odnom klasse matematicheskikh modeley s chastnymi integralami i mul’tiparametrom” [On one class of mathematical models with partial integrals and multiparameter], *Nauch. vedom. Belgorod. gos. un-ta. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2016, **42**, No. 6, 40–44 (in Russian).
60. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, “O lineynykh operatorakh s nesobstvennymi chastnymi integralami” [On linear operators with improper partial integrals], *Nauch. vedom. Belgorod. gos. un-ta. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2016, **43**, No. 13, 24–29 (in Russian).
61. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, “O matrichnykh integral’nykh uravneniyakh Vol’terra s chastnymi integralami v kompleksnoy oblasti” [On matrix Volterra integral equations with partial integrals in complex domain], *Nauch.-tekhn. vestn. Povolzh’ya* [Sci.-Tech. Bull. Volga Reg.], 2017, No. 6, 28–30 (in Russian).
62. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, “Ob operatorakh s chastnymi integralami v prostranstvakh funktsiy dvukh peremennykh” [On operators with partial integrals in spaces of functions of two variables], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2017, No. 3, 17–27 (in Russian).
63. A. S. Kalitvin and V. A. Kalitvin, “Lineynye uravneniya s chastnymi integralami i peremennymi predelami integrirovaniya” [Linear equations with partial integrals and variable limits of integration], Abstracts Int. Conf. *XXIX Crimean Autumnal Math. School on Spectral and Evolution Problems*, Sec. 1–3, Simferopol’, 2018, pp. 70–72 (in Russian).
64. A. S. Kalitvin and E. V. Frolova, “Ob uravneniyakh Vol’terra s chastnymi integralami v prostranstve nepreryvnykh i ogranichennykh na polupolose funktsiy” [On Volterra equations with partial integrals in the space of continuous and bounded functions on a half-strip], *Tr. in-ta mat. NAN Belarusi* [Proc. Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Belarus], 2001, **9**, 68–72 (in Russian).
65. A. S. Kalitvin and E. V. Frolova, *Lineynye uravneniya s chastnymi integralami. C-teoriya* [Linear Equations with Partial Integrals. C-Theory], LGPU, Lipetsk, 2004 (in Russian).
66. A. S. Kalitvin and E. V. Yankelevich, “Operatory s chastnymi integralami v prostranstve nepreryvnykh funktsiy. I” [Operators with partial integrals in the space of continuous functions. I], *Vestn. Chelyabinsk. gos. un-ta. Ser. Mat. Mekh.* [Bull. Chelyabinsk State Univ. Ser. Math. Mech.], 1994, No. 1, 61–67 (in Russian).
67. V. A. Kalitvin, “Operatornye metody issledovaniya uravneniy Vol’terra—Fredgol’ma s chastnymi integralami” [Operator methods of study of Volterra–Fredholm equations with partial integrals], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2003.

68. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
69. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
70. I. S. Kats, "Povedenie resheniy lineynogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka (po povodu odnoy raboty E. Khille)" [Behavior of solutions of a second-order linear differential equation (concerning one paper by E. Hille)], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1963, **62**, No. 4, 476–495 (in Russian).
71. I. S. Kats and M. G. Kreyn, "Kriteriy diskretnosti spektra singulyarnoy struny" [Criterion for discreteness of spectrum of a singular string], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1958, **2**, 136–153 (in Russian).
72. E. V. Kovalenko, "Issledovanie osesimmetrichnoy kontaktnoy zadachi ob iznashivanii pary kol'tsevoy shtamp — uprugoe sherokhovatoe poluprostranstvo" [Study of axisymmetric contact problem on wearing of a pair circular stamp — elastic rugged half-space], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1985, **49**, No. 5, 836–843 (in Russian).
73. N. V. Kovalenko, "O reshenii dvumernogo integral'nogo uravneniya s chastnymi integralami v prostranstve L_2" [On solution of two-dimensional integral equation with partial integrals in the space L_2], In: *Soobshcheniya na 2 konferentsii Rostovskogo nauchnogo matematicheskogo obshchestva* [Talks at 2 Conf. Rostov Sci. Math. Soc.], Rostov, 1968, pp. 41–49 (in Russian).
74. N. V. Kovalenko, "Ob odnom odnorodnom integral'nom uravnenii s chastnymi integralami" [On one homogeneous integral equation with partial integrals], In: *Fiz.-mat. issledovaniya* [Phys.-Math. Investigations], Rostov-na-Donu, 1972, pp. 3–7 (in Russian).
75. V. B. Korotkov, *Integral'nye operatory* [Integral Operators], Nauka, Novosibirsk, 1983 (in Russian).
76. M. A. Krasnosel'skiy, P. P. Zabreyko, E. I. Pustyl'nik, and P. E. Sobolevskiy, *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
77. S. G. Kreyn, *Lineynye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
78. V. L. Levin, "Tenzornye proizvedeniya i funktory v kategoriyakh banakhovykh prostranstv, opredelyaemye KV-linealami" [Tensor products and functors in categories of Banach spaces defined by KV-lineals], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1969, **20**, 43–82 (in Russian).
79. B. M. Levitan and I. S. Sargsyan, *Operatory Shturma—Liuvillya i Diraka* [Sturm–Liouville and Dirac Operators], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
80. L. M. Likhtarnikov, "Ob odnom operatornom uravnenii s dvumya parametrami v gil'bertovom prostranstve" [On one operator equations with two parameters in Hilbert space], In: *Funkts. analiz. Vyp. 3* [Functional Anal. Vol. 3], Ul'yanovsk, 1974, pp. 92–95 (in Russian).
81. L. M. Likhtarnikov, "O spektre odnogo klassa lineynykh integral'nykh uravneniy s dvumya parametrami" [On spectrum of one class of linear integral equations with two parameters], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1975, **11**, No. 6, 1108–1117 (in Russian).
82. L. M. Likhtarnikov and L. Z. Vitova, "O spektre integral'nogo operatora s chastnymi integralami" [On spectrum of integral operator with partial integrals], *Lit. mat. sb.* [Lit. Math. Digest], 1975, **15**, No. 2, 41–47 (in Russian).
83. L. M. Likhtarnikov and L. Z. Vitova, "O razreshimosti lineynogo integral'nogo uravneniya s chastnymi integralami" [On solvability of a linear integral equation with partial integrals], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1976, **28**, No. 1, 83–87 (in Russian).
84. L. M. Likhtarnikov and L. M. Morozova, "Ob odnom sposobe issledovaniya integral'nykh uravneniy s chastnymi integralami" [On one method of study of integral equations with partial integrals], In: *Funkts. analiz. Vyp. 21* [Functional Anal. Vol. 21], Ul'yanovsk, 1983, pp. 108–112 (in Russian).
85. A. V. Manzhirov, "Osesimmetrichnye kontaktnye zadachi dlya neodnorodno stareyushchikh vyazkouprugikh sloistykh osnovaniy" [Axisymmetric contact problems for nonhomogenously aging viscoelastic foliated bases], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, vyp. 4, 684–694 (in Russian).
86. A. V. Manzhirov, "Ob odnom metode resheniya dvumernykh integral'nykh uravneniy osesimmetrichnykh kontaktnykh zadach dlya tel so slozhnoy reologiey" [On one method of solution for two-dimensional integral equations of axisymmetric contact problems for bodies with complex rheology], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1985, **49**, No. 6, 1019–1025 (in Russian).
87. V. A. Morozov, "Primenenie metoda regulyarizatsii k resheniyu odnoy nekorrektnoy zadachi" [Application of regularization method to solution of one ill-posed problem], *Vestn. MGU* [Bull. MSU], 1965, **1**, No. 4, 13–25 (in Russian).

88. G. Myuntts, *Integral'nye uravneniya. T. 1* [Integral Equations. Vol. 1], GTTI, Leningrad–Moscow, 1934 (in Russian).
89. A. M. Nakhushev, *Uravneniya matematicheskoy biologii* [Equations of Mathematical Biology], Vysshaya shkola, Moscow, 1995 (in Russian).
90. O. P. Okolelov, "K teorii dvumernykh integral'nykh uravneniy s chastnymi integralami" [To the theory of two-dimensional integral equations with partial integrals], Materials *6th Inter-Univ. Sci. Conf. Far East. Differ. and Integral Equ.*, Khabarovsk, 1967, **3**, 142–149 (in Russian).
91. O. P. Okolelov, "Issledovanie uravneniy s chastnymi integral'nymi operatorami" [Investigation of equations with partial integral operators], *PhD Thesis*, Irkutsk, 1967.
92. V. S. Pilidi, "Ob odnom klasse lineynykh operatornykh uravneniy" [On one class of linear operator equations], *Mat. analiz i ego prilozh.* [Math. Anal. Appl.], 1975, **7**, 34–42 (in Russian).
93. E. V. Frolova, "Ob odnom operatore mekhaniki sploshnykh sred" [On one operator of continuum mechanics], Proc. Conf. *Math. Modelling of Systems. Methods, Applications, and Means*, Voronezh, 1998, pp. 183–187 (in Russian).
94. E. V. Frolova, "Lineynye operatory s chastnymi integralami" [Linear operators with partial integrals], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2000.
95. J. Appell, E. V. Frolova, A. S. Kalitvin, and P. P. Zabrejko, "Partial integral operators on $C([a,b]\times[c,d])$," *Integr. Equ. Oper. Theory*, 1997, **27**, 125–140.
96. J. Appell, A. S. Kalitvin, and M. Z. Nashed, "On some partial integral equations arising in the mechanics of solids," *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 1999, **79**, No. 2, 703–713.
97. J. Appell, A. S. Kalitvin, and P. P. Zabrejko, "Partial integral operators in Orlich spaces with mixed norms," *Collect. Math.*, 1998, **78**, No. 2, 293–306.
98. J. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko, *Partial integral operators and integro-differential equations*, Marcel Dekker, New York—Basel, 2000.
99. S. Fenyö, "Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Integralgleichungen," *Publ. Math.*, 1955, **4**, No. 1, 98–103.
100. E. V. Frolova, A. S. Kalitvin, and P. P. Zabrejko, "Operator-functions with partial integrals on C and L_p," *J. Electrotech. Math. Pristina*, 2001, **6**, 29–50.
101. T. Ichinose, "Operational calculus for tensor products of linear operators in Banach spaces," *Hokkaido Math. J.*, 1975, **4**, 306–334.
102. T. Ichinose, "Spectral properties of tensor products of linear operators. I," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, **235**, 75–113.
103. T. Ichinose, "Spectral properties of tensor products of linear operators. II," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, **237**, 223–254.
104. A. S. Kalitvin, "Spectral properties of partial integral operators of Volterra and Volterra—Fredholm type," *Z. Anal. Anwend.*, 1998, **17**, No. 2, 297–309.
105. A. S. Kalitvin, "On a class of integral equations in the space of continuous functions," *Differ. Equ.*, 2006, **42**, No. 9, 1262–1268.
106. A. S. Kalitvin and P. P. Zabrejko, "On the theory of partial integral operators," *J. Integral Equ. Appl.*, 1991, **3**, No. 3, 351–382.
107. S. Kantorovitz, "A note on partial linear integral equations," *Bull. Res. Council Israel*, 1957, **7**, No. 4, 181–186.
108. S. Kantorovitz, "On the integral equation $\varphi(x,y)-\lambda a(x,y)\int\varphi(x,y)dx-\mu b(x,y)\int\varphi(x,y)dy=c(x,y)$," *Riveon le Matematika*, 1958, **12**, 24–26.
109. P. Mauro, "Su un'equazione integrale lineare di tipo non ancora considerato," *Rend. Accad. Naz. Sci. XL*, 1976, **5**, No. 1, 55–59.
110. A. Salam, "Fredholm solution of partial integral equations," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1953, **49**, 213–217.
111. V. Volterra, *Lecons sur les equations integrales et les equations integro-differentielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

A. S. Kalitvin
Lipetsk State Pedagogical University, Lipetsk, Russia
E-mail: `kalitvinas@mail.ru`

V. A. Kalitvin
Lipetsk State Pedagogical University, Lipetsk, Russia
E-mail: `kalitvin@mail.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 3 (2019). С. 434–512

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-434-512 УДК 517.98, 517.955, 532.5

О КОЛЕБАНИЯХ СОЧЛЕНЕННЫХ МАЯТНИКОВ С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ОДНОРОДНЫМИ ЖИДКОСТЯМИ

© 2019 г. **Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, В. И. ВОЙТИЦКИЙ**

Аннотация. Рассматривается задача о малых движениях и нормальных (собственных) колебаниях системы из трех сочлененных (прицепленных один к другому) маятников, имеющих полости, заполненные одной или несколькими несмешивающимися однородными жидкостями. Изучен случай частично диссипативной системы, когда полость первого маятника целиком заполнена двумя идеальными жидкостями, второго — тремя вязкими жидкостями, для третьего — одной идеальной жидкостью. Исследование проводится методами функционального анализа. Доказана теорема о корректной разрешимости начально-краевой задачи на произвольном отрезке времени, изучен вариант собственных колебаний консервативной системы, когда все жидкости в полостях маятников идеальные и трение в шарнирах (точках подвеса) не учитывается. Подробно рассмотрены три вспомогательные задачи о малых колебаниях одиночных маятников с тремя указанными выше вариантами заполнения полостей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1.1. История вопроса. В данной работе изучается проблема малых колебаний сочлененных тел (маятников) с полостями, заполненными полностью или частично одной либо несколькими однородными несжимаемыми жидкостями или системой таких жидкостей. Предполагается, что эта гидромеханическая система находится в поле сил тяжести (т. е. жидкости являются тяжелыми) и, таким образом, поверхностные силы не учитываются.

Под системой сочлененных тел подразумевают систему маятников, последовательно присоединенных с помощью сферических шарниров один к другому: первый маятник закреплен в неподвижной точке, второй закреплен в некоторой точке первого маятника и т. д.

Первой работой, посвященной задаче о малых колебаниях твердого тела с полостью, заполненной идеальной жидкостью, является работа Н. Е. Жуковского [14]. В ней впервые были введены вспомогательные функции, зависящие только от формы полости, которые сейчас называют потенциалами Жуковского. С их помощью удается задачу динамики тела с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, заменить на конечномерную задачу о движении эквивалентного твердого тела с видоизмененным тензором инерции.

Если жидкость заполняет полость лишь частично, т. е. имеется ее движущаяся свободная поверхность, то такая гидромеханическая система имеет уже бесконечное число степеней свободы. Эта проблема исследовалась (в связи с развитием космической техники: жидкое топливо в баке

Данная работа выполнена при финансовой поддержке первого из соавторов грантом Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

космической ракеты) весьма интенсивно в пятидесятые-шестидесятые годы прошлого века многими авторами. Среди первых отметим работы Н. Н. Моисеева (1952 г.), затем Г. С. Нариманова, Д. Е. Охоцимского, Б. И. Рабиновича и Л. Н. Сретенского (1956 г.).

Начиная с работ Н. Н. Моисеева и совместной работы С. Г. Крейна и Н. Н. Моисеева [22] (1957 г.), при исследовании этих проблем применяются методы функционального анализа и теории линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Это позволяет в простой и весьма прозрачной форме представить и изучить задачу и установить общие свойства ее решений.

В шестидесятые годы и позже появилось достаточно много монографий, посвященных задаче динамики тела с полостью, содержащей жидкость: Н. Н. Моисеев, В. В. Румянцев [28], Н. Н. Моисеев, А. А. Петров [27], И. М. Рапопорт [32], Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович [25], Ф. Л. Черноусько [35], С. Ф. Фещенко, И. А. Луковский, Б. И. Рабинович, Л. В. Докучаев [33], Г. С. Нариманов, Л. В. Докучаев, И. А. Луковский [30], И. А. Луковский, М. Я. Барняк, А. И. Комаренко [24] и др. Операторные методы исследования задач подобного рода описаны в монографии Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна и Нго Зуй Кана [20], в двухтомной монографии Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна [37, 38], см. также монографии А. Д. Мышкиса, Н. Д. Копачевского и др. [4, 29, 39].

Далее, в работах П. В. Харламова [34] изучались проблемы совместных движений сочлененных твердых тел (маятников), соединенных сферическими шарнирами. Затем Ю. Н. Кононов [15] исследовал вопросы устойчивости и стабилизации движения систем связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость. Наконец, в последние годы Э. И. Батыр и Н. Д. Копачевский [5] изучали проблему малых движений системы сочлененных твердых тел (гиростатов), соединенных сферическими шарнирами и имеющих полости, целиком заполненные идеальной либо вязкой жидкостью.

Отметим еще работу Н. Д. Копачевского [16], где операторными методами изучалась начально-краевая задача о малых движениях маятника с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью, статью Н. Д. Копачевского, В. И. Войтицкого и З. З. Ситшаевой [19], где исследованы проблемы малых колебаний сочлененных маятников, частично заполненных идеальной либо вязкой жидкостью, а также последние публикации авторов [7–10], предшествовавшие данной работе.

1.2. О применении операторного подхода. Цель данной работы — реализовать в значительной мере программу исследований (по гранту министерства образования и науки РФ, проект 14.Z50.31.0037, см. [8]) проблемы малых движений и нормальных колебаний сочлененных маятников с полостями, полностью или частично заполненными однородной несжимаемой жидкостью или системой таких несмешивающихся жидкостей.

Желательно изучить широкий класс гидромеханических задач подобного рода и при этом предложить универсальную схему исследования, основанную на использовании операторного подхода, разработанного для близких задач в [20, 37, 38] (см. также [4, 5, 16, 19, 29, 39]). Универсальность схемы исследования, по мнению авторов, состоит в том, что изучение задачи о малых движениях каждой такой гидромеханической системы можно привести к рассмотрению задачи Коши для системы операторных обыкновенных дифференциальных уравнений в ортогональной сумме $H = H_1 \oplus H_2$ гильбертовых пространств:

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & gC_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$$z_1(0) = z_1^0, \quad z_2(0) = z_2^0.$$

Здесь H_1 — гильбертово пространство, связанное с кинетической энергией системы, а H_2 — с потенциальной энергией. Далее, z_1 — набор динамических переменных, z_2 — набор кинематических переменных, описывающих движение системы, а $g > 0$ — ускорение силы тяжести. Операторные коэффициенты в (1.1) имеют отчетливый энергетический смысл. Так, C_1 — оператор кинетической энергии системы, gC_2 — оператор потенциальной энергии, A_1 — оператор диссипации энергии, а

$$B := g \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

— оператор обмена между кинетической и потенциальной энергиями.

В предлагаемую схему попадают следующие классы исследуемых задач:

1°. Консервативные системы: жидкости в полостях маятников идеальные, а трение в шарнирах не учитывается.
2°. Диссипативные системы: жидкости в полостях маятников вязкие, трение в шарнирах учитывается.
3°. Частично диссипативные системы: некоторые жидкости идеальные, некоторые вязкие, трение в одних шарнирах учитывается, а в других нет.

Преимущества рассмотрения этих классов задач в форме (1.1) состоят в следующем.

1°. Оператор кинетической энергии C_1 ограничен и положительно определен в H_1, причем он может быть составлен в виде операторной матрицы блочного типа, где блоки отвечают каждому маятнику и каждой жидкости в полости маятника, и эта структура не зависит от того, являются жидкости идеальными либо вязкими.
2°. Оператор потенциальной энергии gC_2 самосопряжен и ограничен в H_2, причем в состоянии статической устойчивости системы он положительно определен.
3°. Для консервативной системы оператор $A_1 = 0$, а для диссипативной он положительно определен и неограничен в H_1; для частично диссипативной системы $A_1 \geqslant 0$, $\operatorname{Ker} A_1 \neq \{0\}$.
4°. Оператор обмена энергиями B (см. (1.2)) неограничен в H, кососамосопряжен и также не зависит от того, являются жидкости в полостях маятников идеальными либо вязкими.

Эти общие свойства операторов уже доказаны на примере задачи о колебаниях двух сочлененных маятников с полостями, частично заполненными одной идеальной либо вязкой жидкостью (см. [19]). Поэтому далее рассмотрим такой типичный и наиболее сложный вариант, когда гидромеханическая система состоит из трех подсистем (маятников), одна из которых является консервативной, вторая диссипативной, а третья — частично диссипативной. Именно, считаем, что система состоит из трех сочлененных маятников, полости которых заполнены: для первого — системой из двух идеальных жидкостей, причем трение в первом шарнире учитывается; для второго — системой из трех вязких жидкостей, трение во втором шарнире учитывается; для третьего — одной идеальной жидкостью, целиком заполняющей полость, трение в третьем шарнире не учитывается.

Такая гидромеханическая система требует трех разных подходов к ее исследованию. В частности, для третьего маятника (консервативная подсистема) — использование потенциалов и известной теоремы Н. Е. Жуковского; для первого маятника (частично диссипативная подсистема) — разбиение поля скорости в каждой подобласти, занятой одной из идеальных жидкостей, на три взаимно ортогональных поля (в метрике кинетической энергии) и использование метода ортогонального проектирования уравнений движения каждой жидкости на соответствующие подпространства (см. [20,37,38]); для второго маятника (диссипативная подсистема) — также использование метода ортогонального проектирования на два подпространства, связанные как с кинетической энергией, так и с конечной скоростью диссипации энергии в каждой вязкой жидкости (см. также [20,37,38]).

Предварительно в работе эти три разных подхода реализованы на примере задачи о колебаниях одного маятника с указанными выше вариантами заполнения полостей жидкостями (см. пункты 3.1, 3.2, 3.3). Это позволяет далее исследовать общую начально-краевую задачу о колебаниях трех сочлененных маятников, и становится ясно, как проводить рассмотрение проблемы в случае любого количества сочлененных маятников при любых вариантах заполнения их полостей жидкостями.

2. Классическая постановка задачи

2.1. Физическая постановка задачи. Итак, будем считать, что имеется система из трех физических маятников G_k, $k = 1, 2, 3$, которые сочленены друг с другом: маятник G_1 имеет неподвижную точку O_1, а маятники G_2 и G_3 — соответственно точки O_k, соединяющие G_k с $G_{k-1}, k = 2, 3$.

Полагаем, что внутри каждого тела G_k имеется одна полость, заполненная одной либо несколькими несмешивающимися жидкостями. При этом в теле G_1 полость Ω_1 целиком заполнена системой из двух однородных идеальных жидкостей с плотностями $\rho_{11} > \rho_{12}$, занимающих в состоянии равновесия (когда система покоится) области Ω_{11} и Ω_{12} соответственно, разделенных равновесной поверхностью Γ_{11}. В теле G_2 полость Ω_2 целиком заполнена системой из трех однородных вязких несжимаемых жидкостей с плотностями $\rho_{21} > \rho_{22} > \rho_{23}$, занимающих в состоянии равновесия области Ω_{21}, Ω_{22} и Ω_{23} соответственно и разделенных равновесными границами раздела Γ_{21} и

Γ_{22}. Наконец тело G_3 имеет полость Ω_{31}, целиком заполненную однородной идеальной несжимаемой жидкостью с плотностью $\rho_{31} > 0$. Обозначим твердые границы областей Ω_{kj} через S_{kj}, а их подвижные границы раздела — соответственно через $\Gamma_{kj}(t)$ (см. рис. 1).

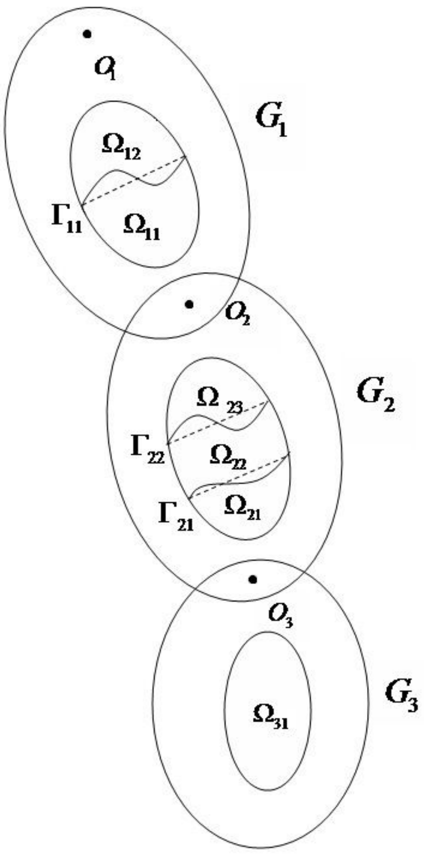

Рис. 1

Будем считать также, что в точках O_k соединения тел имеются сферические шарниры и потому тела могут совершать малые колебания друг относительно друга, причем в каждом шарнире момент силы трения пропорционален разности угловых скоростей примыкающих тел G_k и G_{k-1} с коэффициентом пропорциональности $\alpha_k \geqslant 0$. В данной задаче, как было указано выше, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 = 0$. Однако сначала будем считать, что $\alpha_3 > 0$.

Для описания малых движений данной гидромеханической системы около состояния равновесия введем неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^{\,j}$, $j = 1, 2, 3$, так, чтобы ускорение силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$. Выберем также в каждой точке O_k подвижные системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ с ортами $\vec{e}_k^{\,j}$, $j = 1, 2, 3$, жестко связанные с телами G_k так, чтобы в состоянии покоя $\vec{e}^{\,j} = \vec{e}_1^{\,j} = \vec{e}_2^{\,j} = \vec{e}_3^{\,j}$, $j = 1, 2, 3$. При этом предполагаем, что в указанном состоянии равновесия центры масс C_k тел G_k, а также точки подвеса маятников O_k находятся на одной оси O_1x^3, а равновесные границы Γ_{kj} раздела жидкостей горизонтальны.

Положение подвижной системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ относительно неподвижной системы $O_1x^1x^2x^3$ в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения

$$\vec{\delta}_k(t) = \sum_{j=1}^{3} \delta_k^j(t)\vec{e}_k^{\,j}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.1}$$

Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_k будет равна $d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение — величине $d^2\vec{\delta}_k/dt^2 = d\vec{\omega}_k/dt$. Малые отклонения искомых границ раздела $\Gamma_{kj}(t)$ от равновесных плоскостей

Γ_{kj} вдоль направленных вверх нормалей $\vec{n}_{kj}$ к Γ_{kj} будем задавать функциями $\zeta_{kj}(t,x)$, $x \in \Gamma_{kj}$. Кроме того, через $\vec{u}_{kj}(t,x)$, $p_{kj}(t,x)$, $x \in \Omega_{kj}$, обозначим поля малых относительных скоростей жидкостей в областях Ω_{kj} и отклонения полей давлений в этих областях от равновесных давлений.

Для удобства дальнейших записей введем также следующие краткие обозначения:

$$\int\limits_{G_1} (..)\, dm_1 := \int\limits_{\Omega_{10}} (..)\rho_{10}\, d\Omega_{01} + \int\limits_{\Omega_{11}} (..)\rho_{11}\, d\Omega_{11} + \int\limits_{\Omega_{12}} (..)\rho_{12}\, d\Omega_{12},$$

$$\int\limits_{G_2} (..)\, dm_2 := \int\limits_{\Omega_{20}} (..)\rho_{20}\, d\Omega_{02} + \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\Omega_{2j}} (..)\rho_{2j}\, d\Omega_{2j}, \quad \int\limits_{G_3} (..)\, dm_3 := \int\limits_{\Omega_{30}} (..)\rho_{30}\, d\Omega_{30} + \int\limits_{\Omega_{31}} (..)\rho_{31}\, d\Omega_{31}, \tag{2.2}$$

где Ω_{k0} — область, занятая твердой частью тела G_k и имеющая плотность $\rho_{k0} > 0$, $k = 1, 2, 3$.

В процессе малых движений будем считать, что на данную систему маятников действует возмущенное силовое поле $\vec{F} := \vec{g} + \vec{f}(t,x)$, где $\vec{f}(t,x)$ — малая динамическая добавка к однородному гравитационному полю $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$. Тогда через $\vec{f}_k$ и $\vec{f}_{kj}$ далее будем обозначать поля, действующие в областях G_k и Ω_{kj} соответственно: $\vec{f}_k = \vec{f}\big|_{G_k}$, $\vec{f}_{kj} = \vec{f}\big|_{\Omega_{kj}}$.

2.2. Математическая постановка начально-краевой задачи. Сформулируем полную постановку линеаризованной задачи математической физики о малых движениях системы из трех сочлененных маятников. Она состоит из нескольких групп уравнений, а также кинематических, динамических и начальных условий.

Прежде всего, это уравнения изменения кинетических моментов системы тел относительно точек O_k подвеса маятников, $k = 1, 2, 3$. Эти уравнения, как хорошо известно из механики, обладают следующими свойствами (см., например [5, с. 10, 76–83]): левые и правые части последующего уравнения (при переходе от уравнения относительно O_1 к уравнению относительно O_2, а также для соответствующих уравнений относительно O_2 и O_3) целиком входят в левые и правые части предыдущего уравнения. Тогда, беря соответствующие разности левых и правых частей, а также последнее уравнение (т. е. относительно O_3), получаем следующее преобразованные уравнения моментов количества движения сочлененных маятников (см. вывод в [7]).

Первое уравнение (с учетом обозначений (2.2)):

$$\int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) dm_1 + \rho_{11} \int\limits_{\Omega_{11}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{11}}{\partial t}\, d\Omega_{11} + \rho_{12} \int\limits_{\Omega_{12}} \vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{12}}{\partial t}\, d\Omega_{12} +$$
$$+ \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) dm_2 + \int\limits_{G_3} \vec{h}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) dm_3 +$$
$$+ \sum_{j=1}^{3} \rho_{2j} \int\limits_{\Omega_{2j}} \vec{h}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_{2j}}{\partial t}\, d\Omega_{2j} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_{31}} \vec{h}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\, d\Omega_{31} +$$
$$+ \alpha_1 \vec{\omega}_1 - \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + g(m_1 l_1 + h_1 m_2 + h_1 m_3) P_2 \vec{\delta}_1 - g(\rho_{11} - \rho_{12}) \int\limits_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\zeta_{11}\, d\Gamma_{11} =$$
$$= \int\limits_{G_1} \vec{r}_1 \times \vec{f}_1\, dm_1 + \sum_{k=2}^{3} \int\limits_{G_k} \vec{h}_1 \times \vec{f}_k\, dm_k =: \vec{M}_1(t). \tag{2.3}$$

Второе уравнение:

$$\int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) dm_2 + \sum_{j=1}^{3} \rho_{2j} \int\limits_{\Omega_{2j}} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_{2j}}{\partial t}\, d\Omega_{2j} +$$
$$+ \int\limits_{G_3} \vec{h}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) dm_3 + \rho_{31} \int\limits_{\Omega_{31}} \vec{h}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_3}{\partial t}\, d\Omega_{31} +$$

$$+\alpha_2(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1)-\alpha_3(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2)+g(m_2l_2+h_2m_3)P_2\vec{\delta}_2-g\sum_{j=1}^{2}(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\zeta_{2j}\,d\Gamma_{2j}=$$

$$=\int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times\vec{f}_2\,dm_2+\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\vec{f}_3\,dm_3=:\vec{M}_2(t),\quad(2.4)$$

Третье уравнение:

$$\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)dm_3+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\vec{r}_3\times\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\,d\Omega_{31}+$$

$$+\alpha_3(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2)+gm_3l_3P_2\vec{\delta}_3=\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\vec{f}_3\,dm_3=:\vec{M}_3(t).\quad(2.5)$$

В уравнениях (2.3)–(2.5) введены следующие обозначения. Через $m_k>0$ обозначены массы маятников, через $\vec{r}_k$ — радиус-вектор произвольной точки тела G_k, исходящий из точки O_k, $\vec{h}_k:=\overrightarrow{O_kO_{k+1}}$, $h_k:=|\vec{h}_k|$, $P_2\vec{\delta}_k=\sum\limits_{j=1}^{2}\delta_k^j\vec{e}_k^{\,j}$ — проектор на плоскость $O_kx_k^1x_k^2$, $l_k=|\overrightarrow{O_kC_k}|$ — расстояние от точки подвеса маятника G_k до его центра масс C_k (в состоянии покоя).

Вторая группа уравнений в формулируемой задаче — это линеаризованные уравнения движения и уравнения неразрывности каждой жидкости в полостях маятников, записанные в подвижной системе координат, жестко связанной с соответствующим маятником (см. [5, с. 12]).

Для первого маятника имеем уравнения Эйлера (идеальные жидкости) в областях Ω_{11} и Ω_{12}:

$$\frac{\partial\vec{u}_{1j}}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1=-\rho_{1j}^{-1}\nabla p_{1j}+\vec{f}_{1j},\quad\operatorname{div}\vec{u}_{1j}=0\quad(\text{в }\Omega_{1j}),\quad j=1,2.\quad(2.6)$$

Для второго маятника имеем линеаризованные уравнения Навье—Стокса (вязкие жидкости) в областях Ω_{21}, Ω_{22} и Ω_{23} (см., например, [20, с. 124]):

$$\frac{\partial\vec{u}_{2j}}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2=-\rho_{2j}^{-1}\nabla p_{2j}+\nu_{2j}\Delta\vec{u}_{2j}+\vec{f}_{2j},\ \operatorname{div}\vec{u}_{2j}=0\quad(\text{в }\Omega_{2j}),\quad j=1,2,3,\quad(2.7)$$

где $\nu_{2j}:=\mu_{2j}/\rho_{2j}>0$ — кинематические вязкости жидкостей.

Для третьего маятника имеем одно линеаризованное уравнение Эйлера:

$$\frac{\partial\vec{u}_{31}}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3=-\rho_{31}^{-1}\nabla p_{31}+\vec{f}_{31},\ \operatorname{div}\vec{u}_{31}=0\quad(\text{в }\Omega_{31}).\quad(2.8)$$

Выпишем теперь граничные условия на твердых стенках полостей, занятых жидкостями. Для идеальных жидкостей это условия непротекания, а для вязких — условия прилипания. Имеем

$$\vec{u}_{11}\cdot\vec{n}=0\quad(\text{на }S_{11}),\qquad\vec{u}_{12}\cdot\vec{n}=0\quad(\text{на }S_{12});\quad(2.9)$$

$$\vec{u}_{2j}=\vec{0}\quad(\text{на }S_{2j}),\quad j=1,2,3;\quad(2.10)$$

$$\vec{u}_{31}\cdot\vec{n}_{31}=0\quad(\text{на }S_{31}),\quad(2.11)$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к твердой стенке.

Следующая группа условий — это кинематические и динамические связи на границах раздела жидкостей в полостях маятников. Кинематические условия имеют вид:

$$\frac{\partial\zeta_{j1}}{\partial t}=\vec{u}_{j1}\cdot\vec{n}_{j1}=\vec{u}_{12}\cdot\vec{n}_{j1}\quad(\text{на }\Gamma_{j1}),\quad j=1,2,\quad(2.12)$$

$$\frac{\partial\zeta_{22}}{\partial t}=\vec{u}_{22}\cdot\vec{n}_{22}=\vec{u}_{23}\cdot\vec{n}_{22}\quad(\text{на }\Gamma_{22}).\quad(2.13)$$

Динамические условия на равновесных границах раздела выражают тот факт, что разность напряжений для соприкасающихся жидкостей равна гравитационному скачку давлений. Имеем

$$-p_{11}+p_{12}=-(\rho_{11}-\rho_{12})g(\zeta_{11}+(P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})\quad(\text{на }\Gamma_{11});\quad(2.14)$$

$$\mu_{21}\tau_{j3}(\vec{u}_{21})=\mu_{22}\tau_{j3}(\vec{u}_{22})\ (\text{на }\Gamma_{21}),\quad\mu_{22}\tau_{j3}(\vec{u}_{22})=\mu_{23}\tau_{j3}(\vec{u}_{23})\ (\text{на }\Gamma_{22}),\quad j=1,2;\quad(2.15)$$

$$\left[-p_{21}+2\mu_{21}\frac{\partial u_{21}^3}{\partial x_1^3}\right]-\left[-p_{22}+2\mu_{22}\frac{\partial u_{22}^3}{\partial x_1^3}\right]=-(\rho_{21}-\rho_{22})g(\zeta_{21}+(P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})\quad (\text{на } \Gamma_{21}),$$
$$\left[-p_{22}+2\mu_{22}\frac{\partial u_{22}^3}{\partial x_2^3}\right]-\left[-p_{23}+2\mu_{23}\frac{\partial u_{23}^3}{\partial x_2^3}\right]=-(\rho_{22}-\rho_{23})g(\zeta_{22}+(P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})\quad (\text{на } \Gamma_{22}). \tag{2.16}$$

Здесь
$$\tau_{jk}(\vec{u}_{2l}):=\frac{\partial u_{2l}^k}{\partial x_2^j}+\frac{\partial u_{2l}^j}{\partial x_2^k},\quad l=1,2,\ j,k=1,2,3, \tag{2.17}$$
— тензор деформаций, отвечающий полю $\vec{u}_{2l}(t,x)$.

В процессе колебаний однородных жидкостей объем каждой жидкости сохраняется. Этот факт в рассматриваемой линейной задаче приводит к соотношениям
$$\int\limits_{\Gamma_1}\zeta_{11}\,d\Gamma_{11}=0,\quad \int\limits_{\Gamma_{2j}}\zeta_{2j}\,d\Gamma_{2j}=0,\quad j=1,2. \tag{2.18}$$

Для полной постановки формулируемой начально-краевой задачи необходимо задать еще механические условия связи
$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_k=P_2\vec{\omega}_k,\quad \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^{\,3}=\vec{\omega}_k^{\,3},\quad k=1,2,3, \tag{2.19}$$
а также начальные условия для искомых функций:
$$\vec{u}_{kj}(0,x)=\vec{u}_{kj}^{\,0}(x),\ x\in\Omega_{kj},\quad \zeta_{kj}(0,x)=\zeta_{kj}^0(x),\ x\in\Gamma_{kj},\quad \vec{\omega}_k(0)=\vec{\omega}_k^{\,0},\quad \vec{\delta}_k(0)=\vec{\delta}_k^{\,0}. \tag{2.20}$$

Таким образом, задача о малых движениях трех сочлененных маятников с выбранным вариантом заполнения полостей жидкостями состоит в нахождении искомых функций, удовлетворяющих уравнениям движения (2.3)–(2.5) системы маятников, уравнениям (2.6)–(2.8) движения каждой жидкости в полостях маятников, уравнениям (2.9)–(2.11) непротекания и прилипания жидкостей на твердых стенках, кинематическим условиям (2.12)–(2.13) на границах раздела жидких сред, а также динамическим условиям (2.14)–(2.16) на этих границах. Наконец, должны выполняться условия (2.18) сохранения объемов жидкостей, механические условия связи (2.19) для угловых скоростей и угловых перемещений маятников, а также начальные условия (2.20).

Закон баланса полной энергии данной гидромеханической системы получен в работе [7]. Приведем здесь лишь его формулировку и физический смысл:
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg\{\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2\,d\Omega_{10}+\sum_{j=1}^{2}\rho_{1j}\int\limits_{\Omega_{1j}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_{1j}|^2\,d\Omega_{1j}+$$
$$+\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{j=1}^{3}\rho_{1j}\int\limits_{\Omega_{2j}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_{2j}|^2\,d\Omega_{2j}+$$
$$+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_{31}|^2\,d\Omega_{31}\Bigg\}+$$
$$+\frac{g}{2}\frac{d}{dt}\Bigg\{(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}\Big[|\zeta_{11}+\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2-|\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\Big]\,d\Gamma_{11}+$$
$$+\sum_{j=1}^{2}(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}\Big[|\zeta_{2j}+\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2-|\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\Big]\,d\Gamma_{2j}+$$
$$+(m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2+m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2\Bigg\}=$$

$$= -\left\{\sum_{j=1}^{3} \mu_{2j} E_{2j}(\vec{u}_{2j}, \vec{u}_{2j}) + \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2 |\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2 + \alpha_3 |\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2|^2\right\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \rho_{1j} \int\limits_{\Omega_{1j}} \vec{f}_{1j} \cdot \vec{u}_{1j}\, d\Omega_{1j} + \sum_{j=1}^{2} \rho_{2j} \int\limits_{\Omega_{2j}} \vec{f}_{2j} \cdot \vec{u}_{2j}\, d\Omega_{2j} + \rho_{31} \int\limits_{\Omega_{31}} \vec{f}_{31} \cdot \vec{u}_{31}\, d\Omega_{31} + \sum_{j=1}^{3} \vec{M}_j \cdot \vec{\omega}_j. \quad (2.21)$$

Первое выражение, стоящее слева в фигурных скобках, есть удвоенная кинетическая энергия гидромеханической системы. Соответственно второе выражение в фигурных скобках — удвоенная потенциальная энергия, отвечающая перемещениям системы на углы $\vec{\delta}_1, \vec{\delta}_2, \vec{\delta}_3$ и одновременном смещении границ раздела жидкостей, отвечающих отклонениям ζ_{11}, ζ_{21} и ζ_{22}. При этом выражение $\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$ — абсолютная скорость частиц твердой части Ω_{10} первого маятника, $\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_{1j}$ — абсолютные скорости жидкости в областях Ω_{1j}, $j = 1, 2$ (первый маятник), а выражения $\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2$ и $\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_{2j}$, а также $\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3$ и $\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{u}_{31}$ — аналогичные выражения для абсолютной скорости частиц из различных слоев жидкости во втором и третьем маятниках.

Далее, выражение для потенциальной энергии системы (вторая фигурная скобка) состоит из двух групп слагаемых. Первая группа, содержащая интегралы, отвечает изменению потенциальной энергии при изменении границ раздела между жидкостями при фиксированных углах поворота, а вторая группа — изменению потенциальной энергии при наличии углов поворота $\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$ и $\vec{\delta}_3$ и отсутствии возмущений границ раздела. Через θ_{kj} здесь и далее обозначен ортопроектор из $L_2(\Gamma_{kj})$ на $L_{2,\Gamma_{kj}} := L_2(\Gamma_{kj}) \ominus \{1_{\Gamma_{kj}}\}$.

Наконец, справа в (2.21) стоит мощность внутренних и внешних сил, состоящая из мощности сил вязкости (второй маятник) и сил трения в шарнирах, а также мощности малых внешних сил, наложенных на гравитационное поле. Проинтегрировав тождество (2.21) по t в пределах от 0 до T и воспользовавшись начальными условиями (2.20), получим закон баланса полной энергии в интегральной форме, который означает, что изменение полной энергии системы за время T равно работе внутренних и внешних сил, проведенных над системой за этот промежуток.

3. О трех вспомогательных начально-краевых задачах гидромеханики

Как уже упоминалось в пункте 1.2, исследование задачи (2.3)–(2.20) требует использования трех разных операторных подходов к каждому маятнику системы. Поэтому целесообразно предварительно рассмотреть три задачи о колебаниях одного маятника с различными вариантами заполнения полостей.

3.1. Колебания маятника с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью. Эта задача известна как проблема Н. Е. Жуковского (см. [14]). Здесь она будет рассмотрена на базе того операторного подхода, который будет использован далее в работе применительно к другим вспомогательным задачам и общей исследуемой проблеме (2.3)–(2.20).

Итак, рассмотрим пространственный маятник G_1, закрепленный в точке O_1 с помощью сферического шарнира. Маятник имеет полость Ω_1, целиком заполненную идеальной несжимаемой жидкостью плотности $\rho_1 > 0$ с границей $S_1 = \partial\Omega_1$. Считаем также, что твердое тело маятника Ω_0 имеет плотность $\rho_0 > 0$.

Введем, как и выше, неподвижную декартову систему координат $O_1x^1x^2x^3$, а также подвижную систему $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$, жестко связанную с телом G_1. При этом считаем, что в состоянии покоя на систему действует сила тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$, а $\vec{e}^{\,k} = \vec{e}_1^{\,k}$, $k = 1, 2, 3$.

Задача о малых движениях маятника с полостью, содержащей жидкость, отвечающая внешнему полю $\vec{F} = -g\vec{e}^{\,3} + \vec{f}$ с малой добавкой $\vec{f}$, формулируется следующим образом.

Уравнение моментов количества движения маятника:

$$\rho_0 \int\limits_{\Omega_0} \vec{r}_0 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_0\right) d\Omega_0 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 + \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}\right) d\Omega_1 + \alpha\vec{\omega}_1 + g m_1 l_1 P_2 \vec{\delta} =$$

$$= \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} \left(\vec{r}_0 \times \vec{f}_0\right) d\Omega_0 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \left(\vec{r}_1 \times \vec{f}_1\right) d\Omega_1 =: \vec{M}_1(t), \quad \vec{f}_k := \vec{f}\big|_{\Omega_k},\ k = 0, 1. \tag{3.1}$$

Уравнение движения жидкости в полости:

$$\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 + \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\rho_1^{-1} \nabla p_1 + \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1). \tag{3.2}$$

Кинематическое условие непротекания:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad (\text{на } \Omega_1). \tag{3.3}$$

Также имеем очевидную связь $\dfrac{d\vec{\delta}_1}{dt} = \vec{\omega}_1$, эквивалентную тому, что

$$\frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_1 = P_2 \vec{\omega}_1, \quad \frac{d}{dt} \vec{\delta}_1^{\,3} = \vec{\omega}_1^{\,3}, \tag{3.4}$$

и начальные условия

$$\vec{u}_1(0, x) = \vec{u}_1^{\,0}(x), \quad x \in \Omega_1, \qquad \vec{\omega}_1(0) = \vec{\omega}_1^{\,0}, \quad \vec{\delta}_1(0) = \vec{\delta}_1^{\,0}. \tag{3.5}$$

Здесь, как и выше, $\alpha_1 > 0$ — коэффициент трения в шарнире O_1, $\vec{u}_1$ — поле относительной скорости в Ω_1, p_1 — отклонение давления от равновесного, $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\delta}_1$ — угловая скорость и угловое перемещение маятника, m_1 — масса маятника с жидкостью, l_1 — расстояние от O_1 до центра масс маятника. Отметим, что в процессе движения центр масс маятника в системе $O_1 x_1^1 x_1^2 x_1^3$ неподвижен и потому такую систему называют *гиростатом*. Заметим также, что при $\alpha_1 > 0$ данная гидромеханическая система частично диссипативна, а при $\alpha_1 = 0$ — консервативна.

Для классических решений задачи (3.1)–(3.5) легко вывести закон баланса полной энергии:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left[\rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2 \, d\Omega_0 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1|^2 \, d\Omega_1 \right] + g m_1 l_1 |P_2 \vec{\delta}_1|^2 \right\} =$$
$$= -\alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{f}_1 \cdot \vec{u}_1 \, d\Omega_1 + \vec{M}_1(t) \cdot \vec{\omega}_1. \tag{3.6}$$

Опираясь на это тождество, будем при исследовании задачи (3.1)–(3.5) методами функционального анализа считать, что поле скоростей идеальной жидкости в полости Ω_1 является при любом $t \geqslant 0$ элементом комплексного гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} := \int\limits_{\Omega} \vec{u}_1 \cdot \overline{\vec{v}_1} \, d\Omega_1 \tag{3.7}$$

и соответствующей нормой. Более того, учитывая свойство соленоидальности и условие непротекания (см. (3.2), (3.3)), следует считать поле $\vec{u}_1$ элементом подпространства

$$\vec{J}_0(\Omega_1) := \Big\{ \vec{u}_1 \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \ (\text{на } S_1) \Big\} \tag{3.8}$$

(операции $\operatorname{div} \vec{u}_1$ и $\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1$ понимаются в виде обобщенных функций, см., например, [20, с. 100–102]). Как известно, ортогональным дополнением к $\vec{J}_0(\Omega_1)$ в $\vec{L}_2(\Omega_1)$ является подпространство потенциальных полей:

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}(\Omega_1), \tag{3.9}$$

$$\vec{G}(\Omega_1) := \big\{ \vec{v}_1 = \nabla p_1 \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \int\limits_{S_1} p_1 \, dS_1 = 0 \big\}. \tag{3.10}$$

Опираясь на разложение (3.9), введем ортопроекторы

$$P_0 : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{J}_0(\Omega_1), \quad P_G : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}(\Omega_1), \tag{3.11}$$

и подействуем ими на обе части уравнения движения жидкости (3.2). Будем иметь соотношения

$$\frac{d\vec{u}_1}{dt} + P_0\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = P_0\vec{f}_1, \tag{3.12}$$

$$P_G\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = -\rho_1^{-1}\nabla p_1 + P_G\vec{f}_1, \tag{3.13}$$

где $\vec{u}_1(t)$ и $\nabla p_1(t)$ считаются функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_1)$ и потому производные $\partial/\partial t$ заменены на d/dt.

Соотношение (3.13) определяет поле ∇p_1 по заданной функции $\vec{f}_1(t)$ и найденной $\vec{\omega}_1(t)$, причем это потенциальное поле не входит в уравнения (3.1) и (3.4), где искомыми являются функции $\vec{\omega}_1(t)$ и $\vec{\delta}_1(t)$, а $d\vec{u}_1/dt$ через них выражается посредством соотношения (3.12).

В итоге исходная задача (3.1)–(3.5) заменяется на задачу Коши в пространстве $\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}^5$ относительно $\vec{\omega}_1(t)$ и $P_2\vec{\delta}_1(t)$:

$$\begin{aligned} &\left(\vec{J}_1 + \vec{J}_{\text{пр}}\right)\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + \alpha_1\vec{\omega}_1 + gm_1l_1P_2\vec{\delta}_1 = \vec{M}_{1,\text{пр}}(t), \qquad \vec{\omega}_1(0) = \vec{\omega}_1^0, \\ &gm_1l_1\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1 - gm_1l_1P_2\vec{\omega}_1 = \vec{0}, \qquad P_2\vec{\delta}_1(0) = P_2\vec{\delta}_1^0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

а также тривиальную связь (см. (3.5))

$$\frac{d}{dt}\vec{\delta}_1^3 = \vec{\omega}_1^3, \quad \vec{\delta}_1(0) = \vec{\delta}_1^0. \tag{3.15}$$

В уравнениях (3.14) введены обозначения

$$\vec{J}_1\vec{\omega}_1 := \rho_0\int\limits_{\Omega_0}\vec{r}_0 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0)\, d\Omega_0, \quad \vec{J}_{\text{пр}}\vec{\omega}_1 := \rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1 \times P_G\,(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)\, d\Omega_1, \tag{3.16}$$

где $\vec{J}_1$ — момент инерции твердой части маятника, $\vec{J}_{\text{пр}}$ — приведенный момент инерции, учитывающий движение жидкости в полости, а

$$\vec{M}_{1,\text{пр}}(t) := \rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1 \times P_G\vec{f}_1\, d\Omega_1 + \rho_0\int\limits_{\Omega_0}\vec{r}_0 \times \vec{f}_0\, d\Omega_0 \tag{3.17}$$

— приведенный момент малых внешних сил, действующих на систему. В частности, если силы $\vec{f}_1$ потенциальны, то $\vec{M}_{1,\text{пр}}(t) \equiv \vec{M}_1(t)$ (см. (3.1)).

Таким образом, исходная задача о движении маятника с полостью, целиком заполненной однородной идеальной жидкостью, равносильна конечномерной задаче (3.14), (3.16), (3.17) в пространстве $\mathbb{C}^5$, а также тривиальной проблеме (3.15). Этот общий вывод получил Н. Е. Жуковский (см. [14]).

Продолжим далее рассмотрение задачи (3.1)–(3.5). Прежде всего, система уравнений (3.14) имеет вид (1.1) и отвечает случаю, когда $H_1 = \mathbb{C}^3, H_2 = \mathbb{C}^2$,

$$C_1 := \vec{J}_{\text{т}} + \vec{J}_{\text{пр}}, \quad C_2 := m_1l_1, \quad A_1 := \alpha_1, \quad B_{12} = -B_{21}^* = m_1l_1P_2. \tag{3.18}$$

При этом C_1 — ограниченный и положительно определенный оператор кинетической энергии системы, C_2 (оператор потенциальной энергии) также ограничен и положительно определен, A_1 (оператор диссипации) ограничен и положительно определен, B_{12} и B_{21} — ограниченные кососамосопряженные операторы.

Далее для всех исследуемых проблем о колебаниях маятников либо системы маятников наряду с соответствующими начально-краевыми задачами будем исследовать также задачи о нормальных (собственных) колебаниях. Для задачи (3.14), (3.15) — это решения однородной проблемы, зависящие от времени по закону $\exp(-\lambda t)$, где λ — комплексный декремент затухания колебаний:

$$\vec{\omega}_1(t) = \vec{\omega}_1\exp(-\lambda t), \quad \vec{\delta}_1(t) = \vec{\delta}_1\exp(-\lambda t), \quad \vec{\omega}_1,\ \vec{\delta}_1 \in \mathbb{C}^3. \tag{3.19}$$

Для амплитудных элементов $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\delta}_1$ возникает спектральная задача

$$\begin{gathered}-\lambda\left(\vec{J}_{\text{т}}+\vec{J}_{\text{пр}}\right)\vec{\omega}_1+\alpha_1\vec{\omega}_1+gm_1l_1P_2\vec{\delta}_1=\vec{0},\\ -\lambda P_2\vec{\delta}_1+P_2\vec{\omega}_1=\vec{0},\quad -\lambda\delta_1^3=\omega_1^3.\end{gathered}\tag{3.20}$$

Отсюда следует, что при $\lambda=0$ будет $\omega_1=0$, $P_2\vec{\delta}_1=0$, $\forall\delta_1^3\in\mathbb{C}$, что соответствует произвольному повороту маятника вокруг вертикальной оси и новому состоянию покоя системы. Далее, при $\lambda\neq 0$ приходим к соотношению

$$-\lambda\left((\vec{J}_{\text{т}}+\vec{J}_{\text{пр}})\vec{\omega}_1\right)\cdot\vec{\omega}_1+\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+gm_1l_2\lambda^{-1}|P_2\vec{\omega}_1|^2=0,\quad \alpha_1>0,\tag{3.21}$$

откуда получаем, что $\operatorname{Re}\lambda>0$, т. е. все собственные значения λ расположены в правой полуплоскости и нормальные режимы движений системы — апериодически затухающие. При отсутствии трения в шарнире собственные значения расположены на мнимой оси, т. е. собственные режимы колебаний периодические.

Рассмотрим несколько подробнее случай консервативной системы, когда трение в шарнире отсутствует, т. е. $\alpha_1=0$. В этом варианте получаем, что числа $-\lambda^2=:\mu$ составляют спектр вариационного отношения

$$\mu\ \mapsto\ gm_1l_1|P_2\vec{\omega}_1|^2/\left((\vec{J}_{\text{т}}+\vec{J}_{\text{пр}})\vec{\omega}_1\right)\cdot\vec{\omega}_1>0,\quad P_2\vec{\omega}_1\neq 0,\tag{3.22}$$

т. е. собственные значения λ задачи (3.20) чисто мнимые и образуют три пары комплексно сопряженных чисел.

Для вычисления знаменателя в (3.22) можно использовать так называемые потенциалы Н. Е. Жуковского (см. [14]), зависящие лишь от формы полости Ω_1. Именно, так как $\operatorname{div}\,(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)=0$, то поле $\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1$ принадлежит подпространству

$$\vec{J}(\Omega_1):=\left\{\vec{v}_1\in\vec{L}_2(\Omega_1):\ \operatorname{div}\,\vec{v}_1=0\right\}\supset\vec{J}_0(\Omega_1),\tag{3.23}$$

причем имеет место следующее ортогональное разложение Г. Вейля (см., например, [20, с. 103]):

$$\vec{L}_2(\Omega_1)=\vec{G}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_h(\Omega_1)\oplus\vec{J}_0(\Omega_1)=\vec{G}_0(\Omega_1)\oplus\vec{J}(\Omega_1),\tag{3.24}$$

где

$$\vec{G}_h(\Omega_1):=\{\vec{w}_1=\nabla\psi:\ \Delta\psi=0\ (\text{в }\Omega_1)\}\tag{3.25}$$

— подпространство потенциально-гармонических полей, а

$$\vec{G}_0(\Omega_1):=\{\vec{v}_1=\nabla\varphi:\ \varphi=0\ (\text{на }S_1)\}\subset\vec{G}(\Omega_1).\tag{3.26}$$

В силу определения приведенного тензора инерции $\vec{J}_{\text{пр}}$ (см. (3.16)) имеем

$$(I-P_0)(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)=P_G\,(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)=\nabla\psi\in\vec{G}_h(\Omega_1),\tag{3.27}$$

$$\Delta\psi=0\ (\text{в }\Omega_1),\quad \frac{\partial\psi}{\partial n_1}=(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{n}_1\ (\text{на }S_1),\quad \int\limits_{S_1}\psi\,dS_1=0,\tag{3.28}$$

так как в подпространстве $\vec{J}_0(\Omega_1)$, куда действует ортопроектор P_0, нормальные компоненты поля равны нулю на границе S_1.

Нетрудно видеть, что решение задачи (3.28) можно представить в виде

$$\psi=\sum_{k=1}^{3}\omega_1^3\psi_k,\tag{3.29}$$

где функции ψ_k (потенциалы Н. Е. Жуковского) являются решениями задач

$$\Delta\psi_k=0\quad(\text{в }\Omega_1),\quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n}=(\vec{e}_1^{\,k}\times\vec{r}_1)\cdot\vec{n}_1\ (\text{на }S_1),\quad \int\limits_{S_1}\psi_j\,dS_1=0,\quad k=\overline{1,3},\tag{3.30}$$

и зависят лишь от формы полости Ω_1.

Тогда квадратичную форму $(\vec{J}_{\text{пр}}\vec{\omega}_1)\cdot\vec{\omega}_1$ в (3.22) можно выразить через потенциалы Жуковского, и возникает вариационное отношение

$$\mu \quad \mapsto \quad gm_1 l_1 |P_2\vec{\omega}_1|^2 / \{\rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2 \, d\Omega_0 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\sum_{k=1}^{3} \omega_1^k \nabla\psi_k|^2 \, d\Omega_1\}, \tag{3.31}$$

из которого можно вычислить собственные значения $\mu_j = -\lambda_j^2, j = 1, 2, 3$.

Приведенные рассмотрения показывают, что маятник с полостью, полностью заполненной однородной идеальной жидкостью, движется в произвольном малом поле внешних сил, наложенных на гравитационное поле $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$, так же, как маятник в виде твердого тела с видоизмененными характеристиками и в видоизмененном поле малых внешних сил. В частности, если малое поле внешних сил потенциально, то изменяются лишь характеристики тела посредством введения потенциалов Жуковского.

3.2. О колебаниях маятника с полостью, заполненной двумя несмешивающимися идеальными жидкостями. Эта вспомогательная задача имеет и самостоятельный интерес и является неисследованной до настоящего времени. Случай одной жидкости, частично заполняющей полость маятника, изучены в ряде работ (см. в частности [16], [3, п. 1.3]).

3.2.1. К постановке задачи. Рассмотрим, как и в пункте 3.1, маятник G_1, закрепленный в точке O_1 и имеющий полость Ω_1, которая теперь заполнена не одной, а двумя несжимаемыми однородными жидкостями. Считаем, что в состоянии покоя граница раздела Γ_1 между областью Ω_{11} с плотностью жидкости ρ_1 и областью Ω_{12} с плотностью ρ_2 горизонтальна и $\rho_1 > \rho_2$.

Приведем постановку задачи о малых движениях такой гидромеханической системы. Уравнение движения маятника с полостью, заполненной двумя жидкостями, имеет вид

$$\rho_0 \int\limits_{\Omega_0} \vec{r}_0 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_0\right) d\Omega_0 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} \vec{r}_{11} \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{11} + \frac{\partial \vec{u}_{11}}{\partial t}\right) d\Omega_{11} +$$
$$+ \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} \vec{r}_{12} \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{12} + \frac{\partial \vec{u}_{12}}{\partial t}\right) d\Omega_{12} + \alpha_1\vec{\omega}_1 + gm_1l_1P_2\vec{\delta}_1 - g\,(\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\zeta_1 \, d\Gamma_1 =$$
$$= \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} (\vec{r}_0 \times \vec{f}_0) \, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} (\vec{r}_{1k} \times \vec{f}_{1k}) \, d\Omega_{1k} =: \vec{M}_1(t), \tag{3.32}$$

Здесь приняты те же обозначения, что и в пункте 3.1, $m_1l_1 = m_0l_0 + m_{11}l_{11} + m_{12}l_{12}$, $\vec{f}_0 := \vec{f}|_{\Omega_0}$, $\vec{f}_{1k} := \vec{f}|_{\Omega_{1k}}$. Кроме того, неизвестной функцией является отклонение ζ_1 вдоль нормали $\vec{n}_1 = \vec{e}_1^{\,3}$ подвижной границы раздела $\Gamma_1(t)$ от равновесной поверхности Γ_1.

Уравнения движения жидкостей в областях Ω_{1k}, $k = 1, 2$, а также условия непротекания на твердых стенках S_{1k} имеют вид

$$\frac{\partial \vec{u}_{1k}}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k} = -\rho_k{}^{-1}\nabla p_{1k} + \vec{f}_{1k}, \quad \operatorname{div} \vec{u}_{1k} = 0 \quad (\text{в } \Omega_k)\,, \tag{3.33}$$

$$\vec{u}_{1k} \cdot \vec{n}_{1k} = 0 \quad (\text{на } S_{1k})\,, \quad k = 1, 2. \tag{3.34}$$

Кинематические условия на границе разделе таковы:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \vec{u}_{11} \cdot \vec{n}_{11} = \vec{u}_{12} \cdot \vec{n}_{11} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1)\,, \quad \vec{n}_{11} = \vec{e}_1^{\,3}, \tag{3.35}$$

а условие сохранения объема каждой из жидкостей и механическое кинематическое условие имеет вид

$$\int\limits_{\Gamma_1} \zeta_1 \, d\Gamma_1 = 0, \qquad \frac{d\vec{\delta}_1}{dt} = \vec{\omega}_1. \tag{3.36}$$

Далее, динамическое условие на равновесной поверхности выглядит следующим образом:

$$-p_{11} + p_{12} = -g(\rho_1 - \rho_2)(\zeta_1 + \theta_1(P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_1)\,, \tag{3.37}$$

где $\theta_1 : L_2(\Gamma_1) \to L_{2,\Gamma_1}$ — ортопроектор на подпространство функций из $L_2(\Gamma_1)$, ортогональных к функции, тождественно равной единице на Γ_1 (см. первое условие (3.36)).

Наконец, для формулируемой начально-краевой задачи должны выполняться также начальные условия:

$$\begin{aligned} &\vec{u}_{1k}(0,x) = \vec{u}_{1k}^0(x), \quad x \in \Omega_{1k}, \quad k = 1,2; \\ &\zeta_1(0,x) = \zeta_1^0(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad \vec{\omega}_1(0) = \vec{\omega}_1^0, \quad \vec{\delta}_1(0) = \vec{\delta}_1^0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

3.2.2. Закон баланса полной энергии. Будем считать, что задача (3.32)–(3.38) имеет классическое решение, и выведем закон баланса полной энергии для этой проблемы, используя обычные методы векторного анализа и классические формулы Грина для смешанных краевых задач. В дифференциальной форме этот закон баланса имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2 \, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k} + \vec{u}_{1k}|^2 \, d\Omega_{1k}\Big\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} g \frac{d}{dt}\Big\{(\rho_1 - \rho_2)\Big[\int\limits_{\Gamma_1} |\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 \, d\Gamma_1 - \int\limits_{\Gamma_1} |\theta_1(P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3}|^2 \, d\Gamma_1\Big] + \\ &\quad + m_1 l_1 |P_2\vec{\delta}_1|^2\Big\} = -\alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \vec{M}_1(t) \cdot \vec{\omega}_1 + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{f}_{1k} \cdot \vec{u}_{1k} \, d\Omega_{1k}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Здесь, как и выше в формулах (2.21) и (3.6), слева в первых фигурных скобках стоит удвоенная кинетическая энергия системы, во вторых скобках — потенциальная энергия, состоящая из отклонения потенциальной энергии за счет возмущения границы раздела жидкостей и за счет поворота системы на некоторый угол. Справа в (3.39) стоит мощность сил диссипации (трение в шарнирах) и мощность малых внешних сил, действующих на гидромеханическую систему.

3.2.3. Выбор функциональных подпространств. Будем считать, что область Ω_1, заполненная двумя жидкостями, имеет липшицеву границу, в частности, ее составляющие подобласти Ω_{11} и Ω_{12} имеет липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски S_{11} и Γ_1, а также S_{12} и Γ_1 соответственно (см. рис. 1). Для такого класса областей справедливы так называемые обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа, которые далее будут использоваться (см. [9]).

Формула (3.39) показывает, что поля скоростей $\vec{u}_{11}$ и $\vec{u}_{12}$ должны иметь конечную кинетическую энергию. Поэтому набор таких полей $\vec{u}_1 = \{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2$ следует считать элементом гильбертова пространства

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{L}_2(\Omega_{11}) \oplus \vec{L}_2(\Omega_{12}), \tag{3.40}$$

в котором скалярное произведение введено по закону

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} := \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{u}_{1k} \cdot \overline{\vec{v}_{1k}} \, d\Omega_{1k}. \tag{3.41}$$

Из разложения (3.9) и из (3.8), (3.10) следует, что $\vec{L}_2(\Omega_1)$ допускает ортогональное разложение в виде

$$\begin{aligned} &\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}(\Omega_1), \\ &\vec{J}_0(\Omega_1) := \vec{J}_0(\Omega_{11}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_{12}), \quad \vec{G}(\Omega_1) := \vec{G}(\Omega_{11}) \oplus \vec{G}(\Omega_{12}). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Элементы из $\vec{J}_0(\Omega_1)$ имеют нормальные компоненты поля, равные нулю на всей границе, т. е. на $\partial\Omega_{11}$ и $\partial\Omega_{12}$, в частности, на Γ_1. Однако кинематическое условие (3.35) на границе раздела Γ_1 показывает, что для набора полей $\vec{u}_1 = \{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2$ эти нормальные компоненты должны лишь совпадать. В связи с этим введем пространство потенциальных элементов

$$\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) := \Big\{ \big\{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\big\}_{k=1}^2 : \Delta\Phi_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \frac{\partial\Phi_k}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_{1k}), \ k = 1,2,$$

$$\rho_1^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}=\rho_2^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_1}\,(\text{на }\Gamma_1)\,,\ \vec{n}_1:=\vec{e}_1^{\,3}\Big\},\tag{3.43}$$

которое следует добавить для полного описания полей скоростей в исследуемой проблеме.

Предварительно отметим, что между потенциальными полями $\vec{u}_{1k}=\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\in\vec{G}_{h,S_{1k}}(\Omega_{1k})$ и гармоническими потенциалами Φ_{1k} из подпространства

$$H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega_{1k}):=\Big\{\Phi_{1k}\in H^1(\Omega_{1k}):\Delta\Phi_{1k}=0\ \ (\text{в }\Omega_k)\,,\ \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n}=0\ \ (\text{на }S_{1k})\,,\ \int\limits_{\Gamma_1}\Phi_{1k}\,d\Gamma_1=0\Big\}\tag{3.44}$$

имеет место взаимно однозначное соответствие и даже изометрия, если

$$\|\Phi_{1k}\|^2_{H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega_{1k})}:=\int\limits_{\Omega_{1k}}\rho_k^{-2}|\nabla\Phi_{1k}|^2\,d\Omega_{1k}.\tag{3.45}$$

Отметим еще, что следы функций из $H^1_{\Gamma_{1k}}(\Omega_{1k})$ на границе $\partial\Omega_{1k}$ принадлежат пространству $H^{1/2}(\partial\Omega_{1k})$, а производные по нормали сопряженному пространству $H^{-1/2}(\partial\Omega_{1k})$ (см. [1,17,18,23, 36]).

Что касается следов таких функций и их производных по нормали на липшицевом куске Γ_1, то здесь положение следующее (см. [17, 18]). Будем говорить, что функция $\varphi(x)$ $(x\in\Gamma_1)$ принадлежит классу $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)$, если она продолжима нулем на всю границу (в данном случае на всю $\partial\Omega_{1k}$) в классе $H^{1/2}_{\partial\Omega_{1k}}$. При этом $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1))^*=H^{-1/2}(\Gamma_1)$. Аналогично будем говорить, что $(\partial\varphi/\partial n)_{\Gamma_1}$ принадлежит классу $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$, если она продолжима нулем на всю $\partial\Omega_{1k}$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_{1k})$. Здесь также $(H^{1/2}(\Gamma_1))^*=\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_1)$. Подробно эти факты и соответствующие обобщенные формулы Грина изложены в [18].

В частности, для функций из $H^1_{\Gamma_1}(\Omega_{1k})$ с нормой Дирихле (см. (3.45)) имеют место следующие формулы Грина:

$$\int\limits_{\Omega_{1k}}\nabla\Psi_{1k}\cdot\overline{\nabla\Phi_{1k}}\,d\Omega_{1k}=\langle\Psi_{1k},-\Delta\Phi_{1k}\rangle_{L_2(\Omega_{1k})}+\langle\gamma_{S_{1k}}\Psi_{1k},\frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n}\rangle_{L_2(S_{1k})}-$$

$$-(-1)^k\langle\gamma_{\Gamma_1}\Psi_{1k},\frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n_1}\rangle_{L_2(\Gamma_1)},\quad k=1,2,\tag{3.46}$$

где $\gamma_{S_{1k}}\Psi_{1k}$ — след функции Ψ_{1k} на S_{1k}, $\gamma_{\Gamma_1}\Psi_{1k}$ — след Ψ_{1k} на Γ_1, а $\vec{n}$ — внешняя нормаль. При этом косыми скобками обозначены значения функционалов, стоящих на втором месте в соответствующих полуторалинейных формах, на элементах, стоящих на первом месте. В частности, для гармонических функций Φ_{1k} с однородным условием Неймана на S_{1k} имеется два варианта: либо $\gamma_{\Gamma_1}\Psi_{1k}\in\widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_1}=\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1)\cap L_2(\Gamma_1)$, и тогда $\frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n_1}\big|_{\Gamma_1}\in H^{-1/2}_{\Gamma_1}=(\widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_1})^*$, либо $\gamma_{\Gamma_1}\Psi_{1k}\in H^{1/2}_{\Gamma_1}=H^{1/2}(\Gamma_1)\cap L_2(\Gamma_1)$, и тогда $\frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n_1}\big|_{\Gamma_1}\in\widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1}=(H^{1/2}_{\Gamma_1})^*$.

Лемма 3.1. *Ортогональным дополнением к подпространству $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ в подпространстве $\vec{G}(\Omega_1)$* (*см.* (3.42)) *является подпространство*

$$\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1):=\Big\{\,\big\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\big\}_{k=1}^2\in\vec{L}_2(\Omega_1):\psi_1-\psi_2=0\ \ (\textit{на }\Gamma_1)\,\Big\}.\tag{3.47}$$

Доказательство. Заметим сначала, что $\vec{G}(\Omega_1)$ состоит из наборов $\big\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\big\}_{k=1}^2$ потенциальных полей из пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$.

Пусть теперь $\big\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\big\}_{k=1}^2$ — произвольный элемент из $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, а $\big\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\big\}_{k=1}^2$ — элемент из $\vec{G}(\Omega_1)$, ортогональный к $\big\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\big\}_{k=1}^2$. Тогда

$$\Big(\big\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\big\}_{k=1}^2,\big\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\big\}_{k=1}^2\Big)_{\vec{L}_2(\Omega_1)}=\rho_1\int\limits_{\Omega_{11}}\rho_1^{-1}\nabla\psi_1\cdot\rho_1^{-1}\nabla\varphi_1\,d\Omega_{11}+\rho_2\int\limits_{\Omega_{12}}\rho_2^{-1}\nabla\psi_2\cdot\rho_2^{-1}\nabla\varphi_2\,d\Omega_{12}=0.$$

Отсюда, пользуясь формулами Грина (3.46) для областей Ω_{11} и Ω_{12} и вспоминая определение (3.43) элементов из $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, приходим к выводу, что

$$\langle \psi_1 - \psi_2, \rho_1^{-1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma_1)} = 0, \quad \forall \rho_1^{-1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\big|_{\Gamma_1} \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2},$$

отсюда следует, что $\psi_1 - \psi_2 = \mathrm{const} = 0$ (на Γ_1), причем последнее свойство — в силу двух последних условий нормировки из (3.44). □

3.2.4. Проектирование уравнений движения жидкостей на взаимно ортогональные подпространства. Итак, пространство $\vec{L}_2(\Omega_1)$ пар векторных полей $\vec{u}_1 = \{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2$, как следует из леммы 3.1 и из (3.42), (3.43), допускает ортогональное расположение

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \tag{3.48}$$

аналогично такому же разложению в случае, когда полость Ω_1 частично заполнена лишь одной жидкостью (см. [20, с. 106]). При этом набор полей скоростей принадлежит ортогональной сумме подпространств $\vec{J}_0(\Omega_1)$ и $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, а набор пар потенциальных полей — ортогональной сумме подпространств $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$.

Опираясь на эти факты, перепишем уравнения движения жидкостей (3.33) в виде пары соотношений

$$\left\{\frac{\partial \vec{u}_{1k}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k}\right\}_{k=1}^2 = -\left\{\rho_k^{-1}\nabla p_{1k}\right\}_{k=1}^2 + \left\{\vec{f}_{1k}\right\}_{k=1}^2 \tag{3.49}$$

и будем разыскивать наборы $\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2$ и $\left\{\rho_k^{-1}\nabla p_{1k}\right\}_{k=1}^2$ неизвестных функций в виде, отвечающем разложению (3.48):

$$\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^2 = \{\vec{w}_{1k} + \rho_k^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2, \quad \vec{w}_1 := \{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 \in \vec{J}_0(\Omega_1), \quad \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \tag{3.50}$$

$$\begin{gathered}\left\{\rho_k^{-1}\nabla p_{1k}\right\}_{k=1}^2 = \left\{\rho_k^{-1}\nabla \varphi_k\right\}_{k=1}^2 + \left\{\rho_k^{-1}\nabla \psi_k\right\}_{k=1}^2, \\ \left\{\rho_k^{-1}\nabla \varphi_k\right\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad \left\{\rho_k^{-1}\nabla \psi_k\right\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1).\end{gathered} \tag{3.51}$$

Введем теперь ортопроекторы

$$P_0 : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{J}_0(\Omega_1), \quad P_{h,S_1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad P_{0,\Gamma_1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1) \tag{3.52}$$

на подпространстве (3.48), подставим представления (3.50), (3.51) для наборов полей скоростей и градиентов давлений в уравнения (3.49) и спроектируем обе части этого уравнения на подпространства (3.48). При этом, как и ранее (см. пункт 3.1), будем считать искомые наборы векторных полей функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_1)$. В итоге получим соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 + \frac{\partial}{\partial t}P_0\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2 = P_0\{\vec{f}_{1k}\}^2 \quad (\text{в } \vec{J}_0(\Omega_1)); \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2 + \frac{\partial}{\partial t}P_{h,S_1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2 = -\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^2 + P_{h,S_1}\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2 \quad (\text{в } \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)); \tag{3.54}$$

$$\vec{0} + \frac{\partial}{\partial t}P_{0,\Gamma_1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2 = -\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2 + P_{0,\Gamma_1}\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2 \quad (\text{в } \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)). \tag{3.55}$$

Заметим теперь, что с учетом разложения (3.51) и определения (3.47) подпространства $\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$ динамическое граничное условие (3.37) переписывается в виде

$$-p_{11} + p_{12} = (-\varphi_1 + \varphi_2) + (-\psi_1 + \psi_2) = -\varphi_1 + \varphi_2 = -g(\rho_1 - \rho_2)(\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})) \quad (\text{на } \Gamma_1) \tag{3.56}$$

Отсюда и из (3.55) следует, что набор полей $\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2$ непосредственно вычисляется по известному решению $\vec{\omega}_1(t)$ и набору $\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2$, и поэтому далее следует рассматривать лишь уравнение движения маятника (3.32), уравнения движения жидкостей (3.53) и (3.54), а также граничные условия, где в силу (3.56) функции φ_k не входят.

Наша ближайшая цель сейчас — преобразовать указанную группу динамических уравнений в первое уравнение вида (1.1), ввести соответствующие операторы и изучить их свойства. Для этого в исследуемой задаче введем следующие динамические и кинематические переменные (как функции t со значениями в соответствующих пространствах).

$$\begin{gathered} z_1 := \left(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2;\ \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2;\ \vec{\omega}_1\right)^\tau, \quad z_2 := (\zeta_1; P_2\vec{\delta}_1)^\tau, \\ \{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 \in \vec{J}_0(\Omega_1), \quad \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad \vec{\omega}_1 \in \mathbb{C}^3, \quad \zeta_1 \in L_{2,\Gamma_1}, \quad P_2\vec{\delta}_1 \in \mathbb{C}^2. \end{gathered} \tag{3.57}$$

С этой целью сначала представим слагаемые $\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^2$ из (3.54) в виде действия вспомогательного оператора на кинематические переменные ζ_1 и $P_2\vec{\delta}_1$. Именно, рассмотрим следующую вспомогательную краевую задачу сопряжения:

$$\begin{gathered} \Delta\varphi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \rho_k^{-1}\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{1k}), \quad \int\limits_{\Gamma_1}\varphi_k\,d\Gamma_1 = 0, \quad k = 1,2, \\ \rho_1^{-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \rho_2^{-1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \quad \vec{n} = \vec{e}_1^{\,3} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \varphi_1 - \varphi_2 = (\rho_1 - \rho_2)\zeta_1 \quad (\text{на } \Gamma_1). \end{gathered} \tag{3.58}$$

(Согласно классификации смешанных краевых задач сопряжения (см. [18, п. 5.2]), это задача Стеклова, отвечающая конфигурации, названной в [18] «разрезанный банан».)

Лемма 3.2. *При любой* $\zeta_1 \in H_{\Gamma_1}^{1/2}$ *существует единственное решение вспомогательной задачи* (3.57):

$$Q\zeta_1 := \{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad Q \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_1}^{1/2}; \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)). \tag{3.59}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение слабые решения двух вспомогательных краевых задач из (3.58), отвечающих заданным функциям $\rho_k^{-1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \xi_1 \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$ на Γ_1. Например для области Ω_{11} имеем задачу

$$\begin{gathered} \Delta\varphi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_{11}), \quad \rho_1^{-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{11}), \\ \rho_1^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \xi_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \int\limits_{\Gamma_1}\varphi_1\,d\Gamma_1 = 0. \end{gathered} \tag{3.60}$$

Слабые решения этой задачи (в области Ω_{11} с липшицевой границей $\partial\Omega_{11}$, разбитой на липшицевы куски S_{11} и Γ_1) определяется из тождества, следующего из формулы Грина (3.15):

$$\int\limits_{\Omega_{11}} \nabla\psi_1 \cdot \overline{\nabla\varphi_1}\,d\Omega_{11} = \langle\gamma_1\psi_1, \rho_1\xi_1\rangle_{L_{2,\Gamma_1}}, \quad \forall\psi \in H_{\Gamma_1}^1(\Omega_1),\ \gamma_1\varphi_1 := \psi_1|_{\Gamma_1}. \tag{3.61}$$

Так как здесь по предположению $\xi_1 \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$, то правая часть в тождестве (3.61) является линейным ограниченным функционалом в пространстве $H_{\Gamma_1}^1(\Omega_{11})$ поскольку по теореме Гальярдо (см. [36])

$$\|\gamma_1\varphi_1\|_{H_{\Gamma_1}^{1/2}} \leqslant c_1\|\varphi_1\|_{H_{\Gamma_1}^1(\Omega_{11})}. \tag{3.62}$$

Отсюда следует, что существует единственное слабое решение

$$\varphi_1 = \rho V_1\xi_1 \in H_{h,\Gamma_1}^1(\Omega_{11}), \quad V_1 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}; H_{h,\Gamma_1}^1(\Omega_{11})). \tag{3.63}$$

Аналогично устанавливается, что существует единственное слабое решение второй задачи в области Ω_{12} с той же заданной функцией $\xi_1 \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$:

$$\varphi_2 = -\rho_2 V_2\xi_1 \in H_{h,\Gamma_1}^1(\Omega_{12}), \quad V_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}; H_{h,\Gamma_1}^1(\Omega_{12})). \tag{3.64}$$

Подставляя теперь представления (3.63) и (3.64) в выражение для разности следов на Γ_1 (см. (3.58)), приходим к соотношению

$$\gamma_1\varphi_1 - \gamma_2\varphi_2 = (\rho_1\gamma_1 V_1 + \rho_2\gamma_2 V_2)\xi_1 =: (\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)\xi_1 = (\rho_1 - \rho_2)\zeta_1, \tag{3.65}$$

из которого можно найти ξ_1. В самом деле, можно доказать, опираясь на тождество (3.61) и аналогичное тождество в Ω_{12}, что оператор

$$\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}; H_{\Gamma_1}^{1/2}) \tag{3.66}$$

является положительным и имеет обратный оператор

$$(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_1}; \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1}). \tag{3.67}$$

Поэтому из (3.64) имеем $\xi_1 \in (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta_1 \in \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1}$, и тогда решение вспомогательной задачи (3.58) таково:

$$\begin{aligned} \varphi_1|_{\Omega_{11}} &= \rho_1(\rho_1 - \rho_2)V_1(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta_1 \in H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega_{11}), \\ \varphi_2|_{\Omega_{12}} &= -\rho_2(\rho_1 - \rho_2)V_2(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta_1 \in H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega_{12}). \end{aligned} \tag{3.68}$$

Введем теперь по решениям (3.68) оператор Q согласно формуле (см. (3.64))

$$Q\zeta_1 := (\rho_1 - \rho_2)\big\{\nabla\left(V_1(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta_1\right); -\nabla\left(V_2(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)^{-1}\zeta_1\right)\big\}. \tag{3.69}$$

Из проведенных построений ясно, что $Q \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_1}; \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1))$, и лемма доказана. □

Введем еще оператор нормальной компоненты поля скоростей для элементов из $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ по закону

$$\widehat{\gamma}_n\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\} = \widehat{\gamma}_n\{\vec{u}_k\}_{k=1}^2 := \vec{u}_1\cdot\vec{n}_1 = \vec{u}_2\cdot\vec{n}_1 = \widehat{\gamma}_n\vec{u}, \quad \widehat{\gamma}_n \in \mathcal{L}\left(\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1); \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1}\right). \tag{3.70}$$

Лемма 3.3. *Имеет место соотношение*

$$Q^* = (\rho_1 - \rho_2)\widehat{\gamma}_n, \tag{3.71}$$

где Q — оператор вспомогательной задачи (3.58).

Доказательство. Оно основано на использовании обобщенных формул Грина (3.46) для областей Ω_{1k}, $k = 1, 2$. При любых $\zeta_1 \in H^{1/2}_{\Gamma_1}$, $\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ имеем (см. (3.69), (3.58), (3.70), (3.61)):

$$\begin{aligned} (Q\zeta_1, \{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2)_{\vec{L}_2(\Omega)} &= \sum_{k=1}^2 \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\cdot\rho_k^{-1}\overline{\nabla\psi_k}\,d\Omega_{1k} = \ldots = \\ &= \langle\gamma_{11}\varphi_1, \rho_1^{-1}\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma_1)} - \langle\gamma_{12}\varphi_2, \rho_2^{-1}\frac{\partial\psi_2}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma_1)} = \\ = \langle\gamma_{11}\varphi_1 - \gamma_{12}\varphi_2, \rho_1^{-1}\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma_1)} &= \langle(\rho_1 - \rho_2)\zeta_1, \widehat{\gamma}_n\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}\rangle = \langle\zeta_1, (\rho_1 - \rho_2)\widehat{\gamma}_n\{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2\rangle, \end{aligned} \tag{3.72}$$

откуда и следует свойство (3.71). □

С помощью введенного оператора Q уравнение (3.54) теперь можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2 + \frac{d}{dt}P_{h,S_1}\{(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^2 + gQ(\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{1k})\cdot\vec{e}_1^{\,3})) = P_{h,S_1}\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2. \tag{3.73}$$

3.2.5. Переход к первой (*динамической*) *группе дифференциально-операторных уравнений.* Полученные уравнения (3.53), (3.73) и (3.31), т. е. уравнения движения наборов жидкостей в двух подпространствах и уравнение движения маятника с жидким заполнителем, перепишем в виде одного векторно-матричного соотношения для искомых динамических и кинематических переменных (см. (3.57)). Будем иметь связь (см. (1.1)):

$$C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \tag{3.74}$$

$$C_1 z_1 := \begin{pmatrix} \{\vec{w}_k\}_{k=1}^2 + P_0\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2 \\ \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2 + P_{h,S_1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{k=1}\}_{k=1}^2 \\ \vec{J}\vec{\omega}_1 + \sum\limits_{k=1}^2 \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} (\vec{r}_{1k} \times (\vec{w}_k + \rho_k^{-1}\nabla\Phi_k))\,d\Omega_{1k} \end{pmatrix}, \tag{3.75}$$

$$A_1 z_1 := (0;\ 0;\ \alpha_1\vec{\omega}_1)^\tau, \tag{3.76}$$

$$B_{12}z_2 := \begin{pmatrix} \vec{0} \\ Q(\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})) \\ -(\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\zeta_1 \, d\Gamma_1 + m_1 l_1 P_2 \vec{\delta}_1 \end{pmatrix}, \tag{3.77}$$

$$f_1(t) := (P_0\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2;\ P_{h,S_1}\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2;\ \vec{M}_1(t))^{\tau}, \tag{3.78}$$

$$\vec{J}\vec{\omega}_1 := \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} (\vec{r}_0 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0))\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} (\vec{r}_{1k} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}))\, d\Omega_{1k}. \tag{3.79}$$

Здесь $\vec{J}$ — тензор инерции тела-маятника с затвердевшей жидкостью.

Напомним (см. (3.57)), что динамическими переменными считаются в данной задаче наборы полей скоростей из соответствующих подпространств, а также угловая скорость маятника, а кинематическими переменными — отклонение границы раздела между жидкостями в полости маятника и проекция углового перемещения на равновесную границу раздела.

Изучим свойства операторных коэффициентов, т. е. соответствующих операторных матриц (3.75)–(3.77), входящих в уравнение (3.74). Заметим прежде всего, что матрица A_1 является ограниченным неотрицательным оператором, действующим в пространстве

$$\mathcal{H}_1 := \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3.$$

Дальнейшие свойства операторных матриц из (3.74) представим в виде отдельных лемм.

Лемма 3.4. *Операторная матрица C_1 является ограниченным положительно определенным оператором, действующим в пространстве $\mathcal{H}_1$. Ее квадратичная форма равна удвоенной кинетической энергии малых движений гидромеханической системы, т. е. $C_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ есть оператор кинетической энергии.*

Доказательство. Вычислим квадратичную форму оператора C_1 в пространстве $\mathcal{H}_1$, используя представление ортопроектора P_{h,S_1} в виде $\{(P_{h,S_1})_k\}_{k=1}^2$. Будем иметь, расписывая выражение для $\vec{J}\vec{\omega}_1$ в виде трех слагаемых:

$$\begin{aligned} (C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}} &= \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (\vec{w}_1 + P_{0,1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})) \cdot \overline{\vec{w}_1}\, d\Omega_{11} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (\vec{w}_2 + P_{0,2}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12})) \cdot \overline{\vec{w}_2}\, d\Omega_{12} + \\ &+ \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1 + (P_{h,S_1})_1(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})) \cdot \rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_{11} + \\ &+ \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2 + (P_{h,S_1})_2(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12})) \cdot \rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2}\, d\Omega_{12} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (\vec{r}_{11} \times (\vec{w}_1 + \rho_1^{-1}\nabla\Phi_2))\, d\Omega_{11} \cdot \overline{\vec{\omega}_1} + \\ &+ \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (\vec{r}_{12} \times (\vec{w}_2 + \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2))\, d\Omega_{12} \cdot \overline{\vec{\omega}_2} + \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} (\vec{r}_0 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0))\, d\Omega_0 \cdot \overline{\vec{\omega}_1} + \\ &+ \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (\vec{r}_{11} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}))\, d\Omega_{11} \cdot \overline{\vec{\omega}_1} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (\vec{r}_{12} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}))\, d\Omega_{12} \cdot \overline{\vec{\omega}_1}. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Здесь, в силу ортогонального разложения (3.48), первые два слагаемых преобразуются к виду

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (|\vec{w}_1|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \overline{\vec{w}_1})\, d\Omega_{11} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{22}} (|\vec{w}_2|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \overline{\vec{w}_2})\, d\Omega_{12}. \tag{3.81}$$

Аналогично преобразуются третье и четвертое слагаемые, в частности,

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (P_{h,S_1})_1(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_{11} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (P_{h,S_1})_2(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2}\, d\Omega_{12} =$$

$$= \Big(\{(P_{h,S_1})_k(\vec\omega_1 \times \vec r_{1k})\}_{k=1}^2 , \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2 \Big)_{\vec L_2(\Omega_1)} = \Big(P_{h,S_1}\{\vec\omega_1 \times \vec r_{1k}\}_{k=1}^2, \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2 \Big)_{\vec L_2(\Omega_1)} =$$
$$= \Big(\{\vec\omega_1 \times \vec r_{1k}\}_{k=1}^2, \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2 \Big) = \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (\vec\omega_2 \times \vec r_{11})\cdot \rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_{11} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (\vec\omega_1 \times \vec r_{12})\cdot \rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2}\, d\Omega_{12}. \tag{3.82}$$

Поэтому упомянутая сумма третьего и четверного слагаемых из (3.82) равна

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} (|\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1|^2 + (\vec\omega_1 \times \vec r_{11})\cdot\rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1})\, d\Omega_{11} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} (|\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2|^2 + (\vec\omega_1 \times \vec r_{12})\cdot\rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2})\, d\Omega_{12}. \tag{3.83}$$

Учитывая соотношения (3.82), (3.83), преобразуя аналогичным образом другие группы слагаемых в (3.80), а также учитывая тот факт, что $\vec w_k \perp \rho_k^{-1}\nabla\Phi_k$ в $\vec L_2(\Omega_{1k})$, $k = 1,2$, получим после сворачивания слагаемых при ρ_0, ρ_1 и ρ_2, формулу

$$\begin{aligned}
(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal H_1} &= \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec\omega_1 \times \vec r_0|^2\, d\Omega + \\
&+ \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} \Big\{ |\vec w_1|^2 + |\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1|^2 + |\vec\omega_1\times\vec r_{11}|^2 + 2\mathrm{Re}\,\big[(P_{h,S_1})_1(\vec\omega_1\times\vec r_{11})\cdot\rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1}\big] + \\
&+ 2\mathrm{Re}\,\big[(\vec\omega_1\times\vec r_{11})\cdot\overline{\vec w_1}\big]\Big\}\, d\Omega_{11} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} \Big\{ |\vec w_2|^2 + |\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2|^2 + |\vec\omega_1\times\vec r_{12}|^2 + \\
&+ 2\mathrm{Re}\,\big[(P_{h,S_1})_2(\vec\omega_1\times\vec r_{12})\cdot\rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2}\big] + 2\mathrm{Re}\,\big[(\vec\omega_1\times\vec r_{12})\cdot\overline{\vec w_2}\big]\Big\}\, d\Omega_{12} = \\
&= \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec\omega_1\times\vec r_0|^2\, d\Omega_0 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_{11}} |\vec\omega_1\times\vec r_{11} + \vec w_1 + \rho_1^{-1}\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega_{11} + \\
&+ \rho_2 \int\limits_{\Omega_{12}} |\vec\omega_1\times\vec r_{12} + \vec w_2 + \rho_2^{-1}\nabla\Phi_2|^2\, d\Omega_{12}.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Из этой формулы получаем следующие выводы. Оператор C_1 неотрицателен в $\mathcal H_1$. Кроме того, он ограничен (см. (3.75)). Если $(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal H_1} = 0$, то $\vec\omega_1 = \vec 0$, а потому и $\vec w_k$, $\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k$ — нулевые поля в Ω_{1k}, $k = 1,2$. Значит C_1 — положительный оператор, действующий в $\mathcal H$. Далее, так как C_1 допускает представление

$$C_1 = C_{10} + C_{11}, \quad C_{10} := \mathrm{diag}\,(\{I_k\}_{k=1}^2;\ \{I_k\}_{k=1}^2;\ \vec J) \gg 0 \tag{3.85}$$

(оператор $\vec J$ положительно определен в $\mathbb C^3$), а C_{11} — конечномерный ограниченный оператор, действующий в $\mathcal H_1$, то $C_1 \gg 0$, что и доказывает утверждение леммы. □

Свойство оператора B_{12} из (3.74) выясним позднее.

3.2.6. Переход ко второй (кинематической) группе дифференциально-операторных уравнений. Перепишем кинематические условия (3.35), (3.36) (без тривиальных связей) в виде

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \gamma_{n,1}\vec u_1 = \gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1) = \gamma_{n,1}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) = \gamma_{n,1}\vec u_2 =: \widehat\gamma_n \vec u, \quad \frac{d}{dt}P_2\vec\delta_1 - P_2\vec\omega_1 = \vec 0, \tag{3.86}$$

где $\gamma_{n,1}$ — оператор взятия нормальной компоненты поля на границе Γ_1,

$$\gamma_{n,1}\vec u_1 := (\vec u_1 \cdot \vec n_1)_{\Gamma_1}, \quad \vec n_1 = \vec e_1^{\,3}. \tag{3.87}$$

Эти кинематические условия при некоторых дополнительных ограничениях (см. ниже) можно переписать в эквивалентной форме, позволяющей ввести в рассмотрение оператор потенциальной энергии системы и получить вторую (кинематическую) группу дифференциальных уравнений (см. (1.1)), отвечающую эволюции системы. Проведем эти построения. Если выполнены условия (3.86), то выполнены также следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&(\rho_1-\rho_2)\left[\frac{d}{dt}(\zeta_1+\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}))-(\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1)+\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}))\right]=0,\\
&-(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\left(\frac{d\zeta_1}{dt}-\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1)\right)d\Gamma_1+m_1l_1\left(\frac{d}{dt}(P_2\vec{\delta}_1)-P_2\vec{\omega}_1\right)=\vec{0}.
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

Коротко эту систему можно записать в виде

$$
gC_2\frac{dz_2}{dt}+gB_{21}z_1=0,\quad z_1:=\left(\{\vec{w}_k\}_{k=1}^2;\ \{\rho^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2;\ \vec{\omega}_1\right)^\tau,\quad z_2=(\zeta_1;P_2\vec{\delta}_1)^\tau. \tag{3.89}
$$

$$
C_2z_2:=\begin{pmatrix}(\rho_1-\rho_2)\left[\zeta_1+\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\\ -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1+m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\end{pmatrix}, \tag{3.90}
$$

$$
B_{12}z_2:=\begin{pmatrix}-(\rho_1-\rho_2)\left[\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1)+\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\\ (\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1)\,d\Gamma_1-m_1l_1P_2\vec{\omega}_1\end{pmatrix}. \tag{3.91}
$$

Лемма 3.5. *Введем коэффициенты*

$$
\beta_{jl}:=\int\limits_{\Gamma_1}x_1^j(\theta_1x_1^l)\,d\Gamma_1=\beta_{lj},\quad j,l=1,2, \tag{3.92}
$$

имеющие смысл осевых моментов инерции поверхности Γ_1 *для исследуемой гидромеханической системы. Введем также определитель*

$$
\Delta_2:=det\begin{pmatrix}m_1l_1-(\rho_1-\rho_2)\beta_{22} & (\rho_1-\rho_2)\beta_{21}\\ (\rho_1-\rho_2)\beta_{12} & m_1l_1-(\rho_1-\rho_2)\beta_{11}\end{pmatrix}. \tag{3.93}
$$

Если выполнено условие общего положения

$$
\Delta_2\neq 0, \tag{3.94}
$$

то соотношения (3.86) *и* (3.88) *эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что из условий (3.88) при выполнении (3.94) следуют условия (3.86). Перепишем (3.88) в виде

$$
\varphi+\theta_1((\vec{\psi}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})=0,\quad -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\varphi\,d\Gamma_1+m_1l_1\vec{\psi}=\vec{0}, \tag{3.95}
$$

$$
\varphi:=\frac{d\zeta_1}{dt}-\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1),\quad \vec{\psi}:=\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1-P_2\vec{\omega}_1, \tag{3.96}
$$

и докажем, что из условия $\Delta_2\neq 0$ следует, что задача (3.95) имеет лишь тривиальное решение.

Подставляя выражение для φ из первого уравнения (3.95) во второе, приходим к векторному уравнению в $\mathbb{C}^2$:

$$
m_1l_1\vec{\psi}+(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\left[\theta_1((\vec{\psi}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]d\Gamma_1=\vec{0}. \tag{3.97}
$$

Разложим $\vec{\psi}$ по ортам: $\vec{\psi}=\sum\limits_{k=1}^{2}\psi_j\vec{e}_1^{\,j}$. Тогда

$$
\theta_1((\vec{\psi}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})=\psi_1(\theta_1x_1^2)-\psi_2(\theta_1x_1^1),\quad \vec{r}_{11}=\sum_{j=1}^{2}x_1^j\vec{e}_1^{\,j}, \tag{3.98}
$$

и из (3.97) приходим к системе двух скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} &m_1 l_1 \psi_1 - (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} x_1^2 (\psi_1(\theta_1 x_1^2) - \psi_2(\theta_1 x_1^1))\, d\Gamma_1 = 0, \\ &m_1 l_1 \psi_2 - (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} x_1^1 (\psi_1(\theta_1 x_1^2) - \psi_2(\theta_1 x_1^1))\, d\Gamma_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Нетрудно видеть, что определитель этой однородной системы уравнений относительно ψ_1 и ψ_2 равен Δ_2 и потому в силу условия (3.94) он ненулевой. Отсюда следует, что $\vec{\psi} = \sum\limits_{j=1}^{2} \psi_j \vec{e}_1^{\,j} = \vec{0}$, а потому и $\varphi = 0$. □

Опираясь на эту лемму, изучим свойства оператора C_2 из (3.90).

Лемма 3.6. *Оператор $C_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ является оператором потенциальной энергии гидромеханической системы. Он ограничен и при условии* (3.94) *имеет ограниченный обратный.*

Доказательство. Как следует из определения (3.90) оператор $C_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ ограничен и самосопряжен в $\mathcal{H}_2 = L_{2.\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2$. Его квадратичная форма равна

$$(C_2 z_2, z_2) = (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} [\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})] \overline{\zeta_1}\, d\Gamma_1 - (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11}) \zeta_1 \, d\Gamma_1 \cdot \overline{P_2 \vec{\delta}_1} + m_1 l_1 |P_2 \vec{\delta}_1|^2 =$$

$$= (\rho_1 - \rho_2) \left\{ \int\limits_{\Gamma_1} \left[|\zeta_1|^2 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \vec{\zeta_1} + \overline{((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})} \cdot \zeta_1 \right] d\Gamma_1 \right\} + m_1 l_1 |P_2 \vec{\delta}_1|^2 =$$

$$= (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} \left[|\zeta_1|^2 + 2\mathrm{Re}\,((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \overline{\zeta_1} \right] d\Gamma_1 + m_1 l_1 |P_2 \vec{\delta}_1|^2 =$$

$$= (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} \left[|\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 - |\theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 \right] d\Gamma_1 + m_1 l_1 |P_2 \vec{\delta}_1|^2. \tag{3.100}$$

Отсюда следует, что C_2 самосопряжен в $\mathcal{H}_2$, причем его квадратичная форма совпадает с удвоенной потенциальной энергией гидромеханической системы (см. (3.39)).

Далее, условие $C_2 z_2 = 0$ приводит к задаче (3.95) при $\varphi = \zeta_1$, $\vec{\psi} = P_2 \vec{\delta}_1$, и потому по лемме 3.5 получаем, что $(\zeta_1;\, P_2\vec{\delta}_1)^\tau = z_2 = 0$, т. е. оператор C_2 обратим. Наконец из соответствующей неоднородной задачи, отвечающей системе (3.95), следует, что $C_2^{-1} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — ограниченный оператор, и лемма доказана. □

Отметим еще другие свойства оператора C_2.

Лемма 3.7. *Разложим пространство $\mathcal{H}_2$ на два подпространства*:

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{21} \oplus \mathcal{H}_{22}, \quad \mathcal{H}_{21} := \{(\zeta_1; 0)^\tau := \int\limits_{\Gamma_1} \zeta_1 x_1^j \, d\Gamma_1 = 0,\ j = 1, 2\}, \\ &\mathcal{H}_{22} := \mathrm{Lin}\,\{(0, \vec{e}_1^{\,1})^\tau,\ (0; \vec{e}_1^{\,2})^\tau,\ (\theta_1 x_1^1; 0)^\tau,\ (\theta_1 x_1^2; 0)^\tau\}, \end{aligned} \tag{3.101}$$

где Lin — *обозначение линейной оболочки. Тогда имеют место следующие свойства*:

1°. *На подпространстве $\mathcal{H}_{21}$ оператор C_2, как легко видеть, действует по закону $C_2 z_{21} = (\rho_1 - \rho_2) z_{21}$ и потому положительно определен.*

2°. *На подпространстве $\mathcal{H}_{22}$ оператор C_2 неотрицателен тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta_1 := m_1 l_1 - (\rho_1 - \rho_2) \beta_{11}^{(1)} \geqslant 0, \quad \Delta_2 \geqslant 0, \tag{3.102}$$

и положительно определен, если и только если

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0. \tag{3.103}$$

Доказательство. Отметим сначала, что C_2 самосопряжен и $\mathcal{H}_{21}$ инвариантно относительно него, поэтому $\mathcal{H}_{22}$ — также инвариантное подпространство для C_2.

На четырехмерном подпространстве $\mathcal{H}_{22}$ оператор C_2, очевидно, ограничен снизу. Выясним, когда он будет неотрицательным на $\mathcal{H}_{22}$.

Представим произвольный элемент $z_2 = (\zeta_1;\ P_2\vec{\delta}_1)^\tau$ из $\mathcal{H}_2$ в виде

$$\begin{gathered} z_2 = z_{21} + z_{22}, \quad z_{21} = (\zeta_{11}; 0)^\tau, \quad \zeta_{11} := \zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3}), \\ z_{22} = (-\theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3});\ P_2\vec{\delta}_1)^\tau. \end{gathered} \tag{3.104}$$

Тогда (см. (3.90))

$$C_2 z_{21} = (\rho_1 - \rho_2)(\zeta_{11}; -(\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\zeta_{11}\, d\Gamma_1)^\tau,$$

$$C_2 z_{22} = \Big(0;\ m_1 l_1 P_2\vec{\delta}_1 + (\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1} \theta_1(\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\overline{((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})}\, d\Gamma_1\Big)^\tau.$$

Отсюда получаем, что

$$(z_{21}, C_2 z_{22})_{\mathcal{H}_2} = (C_2 z_{21}, z_{22})_{\mathcal{H}_2} = 0,$$

так как пространства $\mathcal{H}_{21}$ и $\mathcal{H}_{22}$ инвариантны для C_2, а также свойство

$$(C_2 z_2, z_2)_{\mathcal{H}_{21}} = (C_2 z_{21}, z_{21})_{\mathcal{H}_{21}} + (C_2 z_{22}, z_{22})_{\mathcal{H}_{22}} = (\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1} |\zeta_{11}|^2\, d\Gamma_1 + (C_2 z_{22}, z_{22})_{\mathcal{H}_{22}}.$$

Значит, C_2 будет неотрицательным на $\mathcal{H}_2$ тогда и только тогда, когда при некотором $c \geqslant 0$ будет выполнено неравенство

$$(C_2 z_{22}, z_{22})_{\mathcal{H}_{22}} \geqslant c\|z_{22}\|^2_{\mathcal{H}_{22}} \quad \forall z_{22} \in \mathcal{H}_{22}. \tag{3.105}$$

Из (3.90), (3.104), (3.105) имеем, используя представление (3.92),

$$\begin{aligned} (C_2 z_{22}, z_{22})_{\mathcal{H}_{22}} &= (m_1 l_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 - (\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1} |\theta_1(\delta_{1,2}x_1^1 - \delta_{1,1}x_1^2)|^2\, d\Gamma_1 = \\ &= (m_1 l_1 - (\rho_1 - \rho_2)\beta_{22}^{(1)})|\delta_{1,1}|^2 + 2(\rho_1 - \rho_2)\beta_{21}^{(1)}\mathrm{Re}\,(\delta_{1,1}\overline{\delta_{1,2}}) + (m_1 l_1 - (\rho_1 - \rho_2)\beta_{11}^{(1)})|\delta_{1,2}|^2, \end{aligned} \tag{3.106}$$

где $P_2\vec{\delta}_1 = \sum\limits_{j=1}^{2} \delta_{1,j}\vec{e}_1^{\,j}$. Отсюда, используя критерий Сильвестра, получаем, что для неотрицательности оператора C_2 на подпространстве $\mathcal{H}_{22}$, а значит и на всем пространстве $\mathcal{H}_2$, необходимо и достаточно выполнения условий (3.102). Соответственно для положительной определенности C_2 на $\mathcal{H}_{22}$ требуется выполнение условий (3.103). □

Из доказательства леммы 3.7 следует, что ранг индефинитности квадратичной формы $(C_2 z_2, z_2)_{\mathcal{H}_2}$, т. е. количество ее отрицательных квадратов, не может превышать $\kappa = 4$, следовательно в $\mathcal{H}_2$ может быть не более чем четырехмерное подпространство элементов, на котором эта форма принимает отрицательные значения.

Определение 3.1. Будем говорить, что изучаемая гидромеханическая система *статически устойчива по линейному приближению*, если оператор C_2 потенциальной энергии системы положительно определен, и тогда выполнены условия (3.103).

Формулы (3.92), (3.93), (3.102), определяющие Δ_1 и Δ_2, показывают, что условия статической устойчивости системы выполнены для тела достаточно большой массы с расположенным достаточно далеко от точки подвеса центром масс этого тела-маятника.

3.2.7. О свойствах оператора обмена энергий. Перейдем теперь к изучению свойств операторных матриц B_{12} из (3.76) и B_{22} из (3.89), а также составленной из них операторной матрицы

$$B := \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.107}$$

Прежде всего, из определения B_{12} следует, что областью значений должно быть множество таких элементов, для которых $Q\zeta_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ (см. (3.59)). Поэтому по лемме 3.2 получаем, что оператор $B_{12} : \mathcal{H}_2 = L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2 \to \mathcal{H}_1 = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3$ должен быть задан на области определения

$$\mathcal{D}(B_{12}) = H^{1/2}_{\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2, \tag{3.108}$$

плотной в $\mathcal{H}_2$.

Что касается оператора B_{21}, то он также неограничен, и для элементов из области его значений должно выполняться условие $\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1) = \gamma_{n,1}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2) \in L_{2,\Gamma_1}$. Поэтому

$$\mathcal{D}(B_{21}) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathcal{D}(\gamma_{n,1}) \oplus \mathbb{C}^3, \tag{3.109}$$

$$\mathcal{D}(\gamma_{n,1}) = \big\{\{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2 : \gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1) \in L_{2,\Gamma_1}\big\}. \tag{3.110}$$

Здесь $\mathcal{D}(\gamma_{n,1})$ — это суждение оператора $\widehat{\gamma}_n$ (см. (3.70)) на плотное множество $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ тех элементов, для которых область значений оператора $\gamma_{n,1} = \widehat{\gamma}_n|_{\mathcal{D}(\gamma_{n,1})}$ совпадает со всем L_{2,Γ_1}.

Лемма 3.8. *Операторы B_{12} и B_{21}, заданные на своих областях определения* (3.108) *и* (3.109), (3.110)*, являются кососамосопряженными, т. е.*

$$B_{21}^* = -B_{12} \quad \Leftrightarrow \quad (B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = -(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}),\ \forall z_2 \in \mathcal{D}(B_{12}). \tag{3.111}$$

Доказательство. Достаточно проверить свойства (3.111) на соответствующих элементах операторных матриц B_{21} и B_{12}.

1°. Пусть $z_1 = \Big(\{\vec{w}_k\}_{k=1}^2; \{\rho^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2; \vec{0}\Big)^\tau \in \mathcal{D}(B_{21}) \subset \mathcal{H}_1$, $z_2 = (\zeta_1; \vec{0})^\tau \in \mathcal{D}(B_{12}) \subset \mathcal{H}_2$. Тогда (см. (3.77) и (3.91))

$$B_{21}z_1 = \begin{pmatrix} -(\rho_1-\rho_2)\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1) \\ (\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1)\,d\Gamma_1 \end{pmatrix}, \quad B_{12}z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ Q\zeta_1 \\ -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Имеем в силу определения Q (см. (3.58), (3.59), (3.69)):

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \big(\{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^2, \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2\big)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \sum_{k=1}^2 \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} (\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k)\cdot(\rho_k^{-1}\overline{\nabla\Phi_k})\,d\Omega_{1k}.$$

Далее,

$$(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2} = -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\zeta_1\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1})\,d\Gamma_1 = -\int\limits_{\Gamma_1}(\varphi_1-\varphi_2)\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1})\,d\Gamma_1 =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma_1}\varphi_1\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1})\,d\Gamma_1 + \int\limits_{\Gamma_2}\varphi_2\gamma_{n,1}(\rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2})\,d\Gamma_2 = \ldots =$$

$$= -\big\{\rho_1\int\limits_{\Omega_{11}}(\rho_1^{-1}\nabla\varphi_1)\cdot(\rho_1^{-1}\overline{\nabla\Phi_1})\,d\Omega_{11} + \rho_2\int\limits_{\Omega_{12}}(\rho_2^{-1}\nabla\varphi_2)\cdot(\rho_2^{-1}\overline{\nabla\Phi_2})\,d\Omega_{12}\big\} = -(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1}. \tag{3.112}$$

2°. Если $z_2 = (0; P_2\vec{\delta}_1)^\tau$, а z_1 тот же, что и в 1°, то аналогично получаем связь вида (3.112), если провести формальную замену $\zeta_1 \mapsto \theta_1\big((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\big)$ и использовать связь

$$Q\theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}) = \{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^2,$$

а также соотношения (3.58) для функций ψ_k, $k = 1, 2$.

3°. Пусть теперь $z_2 = (\zeta_1; \vec{0})^\tau$, $z_1 = (0; 0; \vec{\omega}_1)^\tau$. Тогда

$$B_{21}z_1 = \big(-(\rho_1-\rho_2)\theta_1\left((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right); -m_1 l_1 P_2\vec{\omega}_1\big)^\tau,$$

$$B_{12}z_2 = (\vec{0};\ Q\zeta_1; -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1)^\tau.$$

Имеем

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1\cdot\overline{\vec{\omega}_1} = |\zeta_1=\theta_1\zeta_1| =$$

$$= (\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\theta_1\left((\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right)\zeta_1\,d\Gamma_1 = (\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\zeta_1\theta_1\left((\overline{P_2\vec{\omega}_1}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right)\,d\Gamma_1,$$

$$(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2} = \int\limits_{\Gamma_1}\zeta_1\left[-(\rho_1-\rho_2)\theta_1\left((\overline{P_2\vec{\omega}_1}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right)\right]\,d\Gamma_1 =$$

$$= -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\zeta_1\theta_1\left((\overline{P_2\vec{\omega}_1}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right)\,d\Gamma_1 = -(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1}.$$

4°. Последний вариант тривиально проверяется: $z_2 = (0; P_2\vec{\delta}_1)^\tau$, $z_1 = (0;0;\vec{\omega}_1)$,

$$B_{12}z_2 = \left(\vec{0};\ \theta_1\left((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right);\ m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\right)^\tau,$$

$$B_{21}z_1 = \left(-(\rho_1-\rho_2)\theta_1\left((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}\right); -m_1l_1P_2\vec{\omega}_1\right)^\tau,$$

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\cdot\overline{\vec{\omega}_1} = m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\cdot\overline{P_2\vec{\omega}_1},$$

$$(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2} = P_2\vec{\delta}_1\cdot\left(-m_1l_1\overline{P_2\vec{\omega}_1}\right) = -m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\cdot\overline{P_2\vec{\omega}_1}.$$

□

Проведенные рассмотрения приводят к следующему итоговому заключению.

Теорема 3.1. *Исходная начально-краевая задача* (3.32)–(3.38) *о малых движениях маятника с полостью, заполненной двумя несмешивающимися идеальными жидкостями, равносильна совокупности тривиального соотношения* (3.55), *соотношения* (*см.* (3.36))

$$\frac{d}{dt}\delta_1^3 = \omega_1^3, \tag{3.113}$$

а также задаче Коши

$$\begin{aligned} C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \\ gC_2\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{aligned} \tag{3.114}$$

рассматриваемой в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2 = \left(\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\mathbb{C}^3\right)\oplus\left(L_{2,\Gamma_1}\oplus\mathbb{C}^2\right).$$

Свойства операторных коэффициентов описаны в леммах 3.4–3.8.

Теорема о разрешимости задачи Коши (3.114), а также других изученных на базе операторного подхода задач, будет приведен ниже.

3.2.8. Проблема собственных колебаний (*случай консервативной системы*). Будем считать, что трение в шарнире подвеса маятника отсутствует ($\alpha_1 = 0$), и рассмотрим решения однородной задачи (3.113), (3.114), зависящие от t по закону $\exp(i\lambda t)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ — частота собственных колебаний гидромеханической системы. Тогда для амплитудных элементов из (3.114) приходим к спектральной проблеме

$$i\lambda C_1 z_1 + gB_{12}z_2 = 0, \quad i\lambda C_2 z_2 + B_{21}z_1 = 0, \quad i\lambda\delta_1^3 = \omega_1^3. \tag{3.115}$$

Изучим свойства спектра и собственных элементов этой задачи.

Лемма 3.9. *Число* $\lambda = \lambda_0 = 0$ *является бесконечнократным собственным значением задачи* (3.115). *Ему отвечают собственные элементы*

$$z_1^0 = \left(\{\vec{w}_k^0\}_{k=1}^2;\ \vec{0};\ \vec{0}\right)^\tau, \quad \forall \vec{w}_k^0 \in \vec{J}_0(\Omega_k), \quad k = 1, 2, \qquad z_2^0 = (0; \vec{0})^\tau, \quad \forall (\delta_1^3)^0 \in \mathbb{C}. \tag{3.116}$$

Этим решениям соответствует поворот системы вокруг вертикальной оси на произвольный угол $(\delta_1^3)^0$, *а также произвольные движения жидкостей в областях* $\Omega_{1k},\ k = 1, 2$, *с произвольными полями скоростей* $\vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k)$, *т. е. без отклонения границы раздела* Γ_1.

Доказательство. Заметим сначала, что в силу леммы 3.5 (см. (3.94)) второе уравнение в (3.115) равносильно условиям

$$i\lambda\zeta_1 = \gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_2) = \gamma_{n,1}(\rho_2^{-1}\nabla\Phi_2), \quad i\lambda P_2\vec{\delta_1} = P_2\vec{\omega}_1. \tag{3.117}$$

Отсюда и из последнего условия (3.115) при $\lambda = \lambda_0 = 0$ получаем, что $\vec{\omega}_1 = \vec{0}$, а также условие $\gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1) = \gamma_{n,1}(\rho_1^{-1}\nabla\Phi_2) = 0$. Поэтому, рассматривая вспомогательную задачу (3.58) при $\varphi_k = \Phi_k,\ k = 1, 2$, приходим к следующим выводам. Во-первых, $\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k = \vec{0},\ k = 1, 2$, а во-вторых, $\zeta_1 = 0$. Далее, из первого уравнения (3.115) и определения (3.77) оператора B_{12}, получаем, что $P_2\vec{\delta_1} = \vec{0}$. Остальных ограничений при $\lambda = \lambda_0 = 0$ не оказывается, и поэтому нетривиальные решения задачи (3.115) имеют вид (3.116). □

Рассмотрим теперь свойства решений задачи (3.115), отвечающие ненулевым частотам колебаний системы. Здесь, как и в пункте 3.1, понадобится ввести потенциалы Жуковского для каждой из областей $\Omega_{1k},\ k = 1, 2$.

Прежде всего, из определений операторов C_{11} и B_{12} (см. (3.75), (3.77)) получаем связь

$$i\lambda\left(\{\vec{w}_k\}_{k=1}^2 + P_0\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2\right) = \vec{0},$$

где $P_0 = \operatorname{diag}(P_{0,1}; P_{0,2})$ — оператор проектирования на $\vec{J}_0(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_{11}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_{12})$. Отсюда следует, что

$$\vec{w}_k + P_{0,k}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}) = \vec{0}, \quad k = 1, 2. \tag{3.118}$$

Далее, из первого уравнения (3.115) имеем, с учетом леммы 3.8, соотношение

$$i\lambda(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} + g(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = i\lambda(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} - g(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_1} = 0. \tag{3.119}$$

Вычислим отдельное слагаемое из правой части этого выражения с учетом связей (3.118), а также (3.117), т. е. на элементах

$$\begin{aligned} z_1 = \widetilde{z}_1 &:= \left(-\{P_{0,k}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^2;\ \{\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\}_{k=1}^2;\ P_2\vec{\omega}_1\right)^\tau, \\ z_2 = \widetilde{z}_2 &:= (\gamma_{n,1}\rho_1^{-1}\nabla\Phi_1;\ P_2\vec{\omega}_1)^\tau. \end{aligned} \tag{3.120}$$

Для квадратичного функционала $(C_1\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}$ по формуле (3.84) имеем

$$\begin{aligned} (C_1\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} &= \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^2 \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \left|(I_k - P_{0,k})(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}) + \rho_k^{-1}\nabla\Phi_k\right|^2\, d\Omega_{1k} = \\ &= \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^2 \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \left|\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k + P_{G,k}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\right|^2\, d\Omega_{1k}, \\ &\{P_{G,k}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^2 := P_G\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2. \end{aligned} \tag{3.121}$$

Введем теперь, как и в пункте 3.1, потенциалы Жуковского для областей Ω_{1k}:

$$\begin{aligned}
&\{(I_k - P_{0,k})(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^2 = \{(P_{G,k})(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^2 = \{\nabla\psi_k\}_{k=1}^2 \in \vec{G}_h(\Omega_1),\\
&\Delta\psi_k = 0 \ (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}) \cdot \vec{n}_{1k} \ (\text{на } \partial\Omega_{1k}),\\
&\int\limits_{\partial\Omega_{1k}} \psi_k \, d(\partial\Omega_{1k}) = 0, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.122}$$

Представляя ψ_k в виде $\psi_k = \sum\limits_{j=1}^{3} \omega_1^j \psi_{kj}$, где

$$\begin{aligned}
\Delta\psi_{kj} = 0 \ (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial\psi_{kj}}{\partial n} = (\vec{e}_1^{\,k} \times \vec{r}_{1j}) \cdot \vec{n}_{1,k} \ (\text{на } \partial\Omega_{1k}),\\
\int\limits_{\partial\Omega_{1k}} \psi_{kj} d(\partial\Omega_{1k}) = 0, \quad k = 1, 2, \ j = 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{3.123}$$

и подставляя введенные функции ψ_k (потенциалы Жуковского) в (3.121), получим окончательно выражение

$$(C_1\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1} = \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2 \, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} |\rho_k^{-1}\nabla\Phi_k + \sum_{j=1}^{3} \omega_1^j \psi_{kj}|^2 \, d\Omega_{1k}. \tag{3.124}$$

Вычислим теперь второй функционал в (3.119), учитывая, в силу (3.117), что

$$z_2 = (i\lambda)^{-1}\widetilde{z}_2. \tag{3.125}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&(z_2, B_{21}\widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} = (i\lambda)^{-1}(\widetilde{z}_2, B_{21}\widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} =\\
&= (i\lambda)^{-1} g\Big(m_1 l_1 |P_2\vec{\omega}_1|^2 + (\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} \Big[|\rho_1^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} + \theta_1((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 - |\theta_1((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2\Big] \, d\Gamma_1\Big) =\\
&= (i\lambda)^{-1} g (C_2\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2}
\end{aligned} \tag{3.126}$$

(последняя связь проверяется непосредственно).

Из (3.124)–(3.126) и (3.119) получаем, что

$$-\lambda^2/g = \frac{(C_2\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2}}{(C_1\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}}. \tag{3.127}$$

При этом для потенциалов скоростей выполнены связи (3.58):

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \rho_k^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{1k}), \qquad \int\limits_{\Gamma_1} \Phi_k d\Gamma_1 = 0, \quad k = 1, 2,\\
&\rho_1^{-1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \rho_2^{-1}\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} =: \xi_1 \in L_{2,\gamma_1}, \quad \vec{n} = \vec{e}_1^{\,3}.
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Из (3.128), в частности, следует, что ненулевые квадраты частот собственных колебаний при условии статистической устойчивости по линейному приближению положительны.

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие статической устойчивости по линейному приближению, т. е. оператор* $C_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ *положительно определен. Тогда спектральная задача* (3.115) *имеет бесконечнократное нулевое собственное значение, которому отвечает собственные элементы вида* (3.116)*, а остальной спектр задачи дискретен, расположен на мнимой оси симметрично относительно вещественной оси и имеет в качестве предельной бесконечно удаленную точку. При этом собственные элементы вида* (3.120) *и квадраты частот колебаний системы находятся из вариационного отношения* (3.127) (*см. также* (3.124), (3.126)) *при вычислении его последовательных минимумов в классе функций* (3.120) *с условиями* (3.128).

Доказательство. Свойства решений спектральной задачи при $\lambda = \lambda_0 = 0$ уже описано в лемме 3.9.

При $\lambda \neq 0$, как уже установлено выше, решения $z_1 = \widetilde{z}_1$ имеют вид (3.120) (первая формула), а элементы $z_2 = (i\lambda)^{-1}\widetilde{z}_2$ (см. (3.124)), где $\widetilde{z}_2$ выражается второй формулой (3.120). При этом для квадратов частот колебаний возникает вариационное отношение, выражаемое правой частью (3.127).

Покажем, что этому отношению отвечает дискретный положительный спектр. состоящий из конечнократных собственных значений с предельной точкой $+\infty$.

В самом деле, квадратичные функционалы в (3.127) лишь конечномерными добавками отличаются от функционалов в пространстве $L_{2,\Gamma}$ и $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ соответственно, задающих вариационное отношение

$$(\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1} \left|\rho_1^{-1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\right|^2 d\Gamma_1 \;/\; \sum_{k=1}^{2}\rho_k^{-1}\int\limits_{\Omega_{1k}} |\nabla \Phi_k|^2\, d\Omega_{1k}, \tag{3.129}$$

если его рассматривать в классе функций (3.128). Однако, как следует из доказательства леммы 3.2, при условиях (3.128) справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{2}\rho_k^{-1}\int\limits_{\Omega_{1k}} |\nabla \Phi_k|^2\, d\Omega_{1k} = \big((\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)\xi_1, \xi_1\big)_{L_{2,\Gamma_1}} =: (C_\rho \xi_1, \xi_1)_{L_{2,\Gamma_1}}, \tag{3.130}$$

$$\xi_1 = \rho_1^{-1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \rho_2^{-1}\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \in L_{2,\Gamma_1},$$

где оператор C_ρ является компактным и положительным в L_{2,Γ_1}, так как область значений $\mathcal{R}(C_\rho) = H^{1/2}_{\Gamma_1}$ компактно вложена в L_{2,Γ_1} (теорема Гальярдо).

Отсюда следует, что вариационное отношение (3.129) при условиях (3.128) соответствует спектральной задаче

$$\mu C_\rho \xi_1 = \xi_1, \quad 0 < C_\rho \in \mathfrak{S}_\infty(L_{2,\Gamma_1}), \tag{3.131}$$

которая, очевидно, имеет дискретный положительный спектр с предельной точкой $+\infty$. Из этих свойств по теореме М. Ш. Бирмана (см. [6, 12]) получаем, что и исходная задача о нахождении спектра вариационного отношения (3.127), (3.128) также имеет дискретный положительный спектр с предельной точкой $+\infty$, причем асимптотика при $j \to \infty$ совпадает с асимптотикой собственных значений μ_j^2/g второй задачи, т. е. задачи (3.129), (3.128). □

3.3. О малых движениях маятника с полостью, заполненной системой из трех однородных несмешивающихся вязких жидкостей. Рассмотрим третью вспомогательную задачу о малых движениях маятника с полостью, заполненной системой из трех вязких жидкостей. Отметим, что данная задача изучалась ранее в работе авторов [10].

3.3.1. Постановка начально-краевой задачи. Закон баланса полной энергии. Будем считать, что маятник G_1 закреплен в точке подвеса O_1 и совершает малые движения в поле сил тяжести. Маятник имеет полость Ω_1, целиком заполненную тремя вязкими однородными несмешивающимися жидкостями (см. рис 2).

Считаем, что плотности жидкостей удовлетворяют условиям $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$, где ρ_k — плотность, отвечающая области Ω_{1k}, $k = 1, 2, 3$. В состоянии покоя границы раздела жидкостей Γ_j, $j = 1, 2$, горизонтальны, причем границы областей Ω_{1k} состоят соответственно из частей: $\partial\Omega_{11} = S_{11} \cup \Gamma_1$ (Γ_1 — граница между Ω_{11} и Ω_{12}), $\partial\Omega_{12} = S_{12} \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (Γ_2 — граница между Ω_{12} и Ω_{13}), $\partial\Omega_{13} = S_{13} \cup \Gamma_2$, где S_{1k} — соответствующие твердые стенки. Как и ранее, будем считать, что в процессе малых движений на данную гидромеханическую систему действует внешнее поле сил $\vec{F} = \vec{g} + \vec{f}(t, x)$, где $\vec{f}$ — малая динамическая добавка к гравитационному полю.

Далее для описания малых движений системы введем неподвижную систему декартовых координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^{\,j}$, $j = 1, 2, 3$, так, чтобы $\vec{g} = -g\vec{e}^{\,3}$, а также подвижную систему $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$, жестко связанную с телом, с ортами $\vec{e}_1^{\,j}$, $j = 1, 2, 3$, причем в состоянии покоя полагаем, что $\vec{e}_1^{\,j} = \vec{e}^{\,j}$, а центр масс системы находится на оси $O_1x_1^3 = O_1x^3$ в точке C_1.

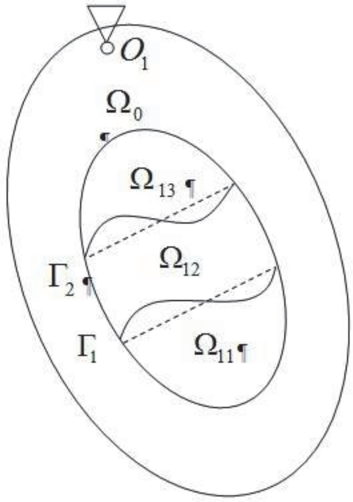

Рис. 2

Введем также малый вектор углового перемещения системы $\vec{\delta}_1(t) = \sum\limits_{j=1}^{3} \delta_1^j(t)\vec{e}_1^{\,j}$ и будем использовать обозначение

$$\int\limits_{G_1} (\ldots)\, dG_1 := \int\limits_{\Omega_0} (\ldots)\rho_0\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \int\limits_{\Omega_{1k}} (\ldots)\rho_{1k}\, d\Omega_{1k},$$

где Ω_0 — область, занятая твердым телом плотности $\rho_0 > 0$.

Будем считать, что момент силы трения в сферическом шарнире пропорционален угловой скорости $\vec{\omega}_1 = d\vec{\delta}_1/dt$ с коэффициентом $\alpha_1 > 0$. Тогда, вычисляя кинетический момент гидромеханической системы относительно O_1 и сумму моментов всех сил, приложенных к телу, после линеаризации в подвижной системе координат приходит к уравнению изменения кинетического момента системы:

$$\left[\rho_0 \int\limits_{\Omega_0} \vec{r}_0 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_0\right) d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{r}_k \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k} + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t}\right) d\Omega_{1k}\right] +$$
$$+ \alpha\vec{\omega}_1 + g m_1 l_1 P_2 \vec{\delta}_1 - g(\rho_1 - \rho_2) \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\zeta_1\, d\Gamma_1 - g(\rho_2 - \rho_3) \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{12})\zeta_2\, d\Gamma_2 =$$
$$= \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} \vec{r}_0 \times \vec{f}_0\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{r}_{1k} \times \vec{f}_k\, d\Omega_{1k} =: \vec{M}_1(t). \quad (3.132)$$

Здесь первое слагаемое, т. е. выражение в квадратных скобках, равно $\vec{J}_1\vec{\omega}_1$, где $\vec{J}_1$ — тензор инерции твердого тела и жидкостей относительно O_1. Далее, через $\zeta_j(t,x)$, $x \in \Gamma_j$, обозначены функции, описывающие малые отклонения границ раздела между жидкостями вдоль нормалей к Γ_j, направленных вверх. Из условия сохранения объемов жидкостей получаем, что

$$\int\limits_{\Gamma_j} \zeta_j\, d\Gamma_j = 0, \quad j = 1,2. \quad (3.133)$$

Как и ранее, здесь использованы также обозначения: $l_1 := |\overrightarrow{O_1C_1}|$, $P_2\vec{\delta}_1 := \sum\limits_{j=1}^{2} \delta_1^j \vec{e}_1^{\,j}$, $\vec{f}_k := \vec{f}|_{\Omega_k}$, $k = 1,2,3$, $\vec{f}_0 := \vec{f}|_{\Omega_0}$.

Приведем теперь линеаризованные уравнения движения вязких жидкостей в подвижной системе координат, а также соответствующие краевые и начальные условия. Имеем линеаризованные уравнения Навье—Стокса

$$\rho_k \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k} + \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} \right) = -\nabla p_k + \mu_k \Delta \vec{u}_k + \rho_k \vec{f}_k, \quad \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_{1k}), \quad k = 1,2,3, \tag{3.134}$$

где p_k — поля динамических давлений, $\mu_k > 0$ — динамические вязкости жидкостей.

Что касается граничных условий, то для вязких жидкостей на твердых стенках S_{1k} должно выполняться условие прилипания:

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_{1k}), \tag{3.135}$$

а на границах раздела Γ_j $(j = 1,2)$ — кинематические и динамические условия. Кинематические условия имеют вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_1, \ \vec{n}_1 = \vec{e}_1^{\,3}, \quad \gamma_{11}\vec{u}_1 = \gamma_{12}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ &\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = \vec{u}_3 \cdot \vec{n}_2, \ \vec{n}_2 = \vec{e}_1^{\,3}, \quad \gamma_{22}\vec{u}_2 = \gamma_{23}\vec{u}_3 \quad (\text{на } \Gamma_2). \end{aligned} \tag{3.136}$$

Здесь и далее через $\gamma_{jk}\vec{u}_k$ $(k = 1,2,3, \ j = 1,2)$ обозначен след поля скорости $\vec{u}_k$ на поверхности Γ_j. Кроме того, должны выполняться кинематические условия связи

$$\frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_1 = P_2 \vec{\omega}_1, \quad \frac{d}{dt} \delta_1^3 = \omega_1^3. \tag{3.137}$$

На границах раздела Γ_j должны выполняться динамические условия: равенство касательных напряжений при переходе из одной жидкой среды в другую, т. е.

$$\begin{aligned} &\mu_1 \tau_{j3}(\vec{u}_1) - \mu_2 \tau_{j3}(\vec{u}_2) = 0, \quad j = 1,2 \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ &\mu_2 \tau_{j3}(\vec{u}_2) - \mu_3 \tau_{j3}(\vec{u}_3) = 0, \quad j = 1,2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \end{aligned} \tag{3.138}$$

$$\tau_{jk}(\vec{u}_l) := \partial u_l^k / \partial x_l^j + \partial u_l^j / \partial x_l^k,$$

а также тот факт, что разность нормальных напряжений на границах раздела равна гравитационному скачку давлений:

$$\begin{aligned} &[-p_1 + \mu_1 \tau_{33}(\vec{u}_1)] - [-p_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{u}_2)] = -g(\rho_1 - \rho_2) \left[\zeta_1 + \theta_1 \left((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3} \right) \right] \quad (\text{на } \Gamma_1), \\ &[-p_2 + \mu_2 \tau_{33}(\vec{u}_2)] - [-p_3 + \mu_3 \tau_{33}(\vec{u}_3)] = -g(\rho_2 - \rho_3) \left[\zeta_2 + \theta_2 \left((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \vec{e}_1^{\,3} \right) \right] \quad (\text{на } \Gamma_2), \end{aligned} \tag{3.139}$$

где $\theta_j : L_2(\Gamma_j) \to L_{2,\Gamma_j}$ — ортопроектор на $L_{2,\Gamma_j} := L_2(\Gamma_j) \ominus \{1|_{\Gamma_j}\}$. Для полной постановки задачи необходимо также задать начальные условия:

$$\begin{aligned} \vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^{\,0}(x), \ x \in \Omega_{1k}, \ k = 1,2,3, \quad &\zeta_j(0,x) = \zeta_j^0(x), \ x \in \Gamma_j, \ j = 1,2, \\ \vec{\omega}_1(0) = \vec{\omega}_1^{\,0}, \quad &\vec{\delta}_2(0) = \vec{\delta}_1^{\,0}. \end{aligned} \tag{3.140}$$

Перед исследованием поставленной задачи (3.132)–(3.140) запишем закон баланса полной энергии для ее классического решения. Аналогично выводу формулы (2.21) (см. также [10]) для исследуемой сейчас задачи получаем тождество, являющееся законом баланса полной энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \left\{ \rho_0 \int_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2 \, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int_{\Omega_k} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k} + \vec{u}_k|^2 \, d\Omega_{1k} \right\} +$$

$$+\frac{1}{2} g \frac{d}{dt} \left\{ (\rho_1 - \rho_2) \int_{\Gamma_1} \left[\left| \zeta_1 + \theta_1 \left((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3} \right) \right|^2 - \left| \theta_1 \left((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3} \right) \right|^2 \right] d\Gamma_1 + \right.$$

$$\left. +(\rho_2 - \rho_3) \int_{\Gamma_2} \left[\left| \zeta_2 + \theta_2 \left((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \vec{e}_1^{\,3} \right) \right|^2 - \left| \theta_2 \left((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \vec{e}_1^{\,3} \right) \right|^2 \right] d\Gamma_2 \right\} +$$

$$+m_1 l_1 \left|P_2\vec{\delta}_1\right|^2 = -\left\{\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \sum_{k=1}^{3}\mu_k E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k)\right\} + \sum_{k=1}^{3}\rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{f}_k\cdot\vec{u}_k\,d\Omega_{1k} + \vec{M}_1(t)\cdot\vec{\omega}_1, \tag{3.141}$$

$$E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{1k}}\sum_{j,l=1}^{3}|\tau_{jl}(\vec{u}_k)|^2\,d\Omega_{1k}.$$

3.3.2. Выбор функциональных пространств. Будем описывать, как и в пункте 3.2, движение системы жидкостей в полости в виде набора полей скоростей и градиентов давлений, заданных в областях Ω_{1k}: $\vec{u} := \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3$, $\{\nabla p_k\}_{k=1}^3$.

Тогда в силу (3.141) получаем, что эти наборы следует считать элементами гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$ со скалярным произведением

$$(\vec{u},\vec{v})_{\vec{L}_2\Omega_1} := \sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_{1k}}\vec{u}_k\cdot\overline{\vec{v}_k}\,d\Omega_k, \quad \Omega_1 := \bigcup_{k=1}^{3}\Omega_{1k},$$

определяющим конечную кинетическую энергию для системы несмешивающихся жидкостей. Из условий (3.135), (3.136), а также условия соленоидальности полей $\vec{u}_k(t,x)$, см. (3.134), следует, что эти поля должны быть функциями переменной t со значениями в

$$\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}) := \big\{\vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_{1k}) : \quad \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \gamma_{n,k}\vec{u}_{1k} := \vec{u}_{1k}\cdot\vec{n}_{1k} = 0 \ (\text{на } S_{1k})\big\}, \tag{3.142}$$

где $\vec{n}_{1k}$ — внешняя нормаль к S_{1k}.

Как это было уже использовано выше (см. пункт 3.2.3), имеет место следующее ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_{1k}) = \vec{J}_{0,S_{1k}} \oplus \vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}_k}(\Omega_{1k}), \quad (\vec{u}_k,\vec{v}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_{1k})} = \int\limits_{\Omega_{1k}}\vec{u}_k\cdot\overline{\vec{v}_k}\,d\Omega_{1k}, \tag{3.143}$$

$$\vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}_k}(\Omega_{1k}) := \left\{\nabla\psi_k \in \vec{L}_2(\Omega_{1k}) : \psi_k = 0 \quad (\text{на } \widetilde{\Gamma}_k)\right\}, \ k=1,2,3, \tag{3.144}$$

$$\widetilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1, \quad \widetilde{\Gamma}_2 = \Gamma_1\cup\Gamma_2, \quad \widetilde{\Gamma}_3 = \Gamma_2.$$

Отсюда приходим к выводу, что имеет место ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}}(\Omega_1), \tag{3.145}$$

$$\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \left\{\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 : \vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})\right\}, \tag{3.146}$$

$$\vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}}(\Omega_1) := \bigoplus_{k=1}^{3}\vec{G}_{0,\widetilde{\Gamma}_k}(\Omega_{1k}). \tag{3.147}$$

Введем теперь гильбертово пространство, связанное с диссипацией энергии в исследуемой проблеме. Как следует из (3.141), для решений задачи наряду со свойством конечности кинетической энергии гидромеханической системы в любой момент времени должны выполняться свойства конечности скорости диссипации энергии каждой из жидкостей, заполняющей полость маятника:

$$E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{1k}}\sum_{j,l=1}^{3}|\tau_{jl}(\vec{u}_k)|^2\ d\Omega_{1k} < \infty.$$

Опираясь на этот факт, введем в пространстве $\vec{H}^1(\Omega_{1k})$ подпространство соленоидальных полей, удовлетворяющих условию на твердой стенке:

$$\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}) := \left\{\vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_{1k}) : \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_{1k}), \ \vec{u}_k = \vec{0} \ (\text{на } S_{1k})\right\}, \quad k=1,2,3. \tag{3.148}$$

Скалярное произведение в $\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$ определим по закону

$$(\vec{u}_k,\vec{v}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})} := E_k(\vec{u}_k,\vec{v}_k) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{1k}}\sum_{j,l=1}^{3}\tau_{jl}(\vec{u}_k)\overline{\tau_{jl}(\vec{v}_k)}\,d\Omega_{1k}. \tag{3.149}$$

В силу неравенства Корна (см. [20, с. 111])

$$\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})} = E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k) \geqslant \widetilde{c}_k \|\vec{u}_k\|^2_{\vec{H}^1(\Omega_{1k})}, \quad \widetilde{c}_k > 0, \tag{3.150}$$

норма, порожденная скалярным произведением (3.149), эквивалентна норме пространства $\vec{H}^1(\Omega_{1k}) := \oplus_{j=1}^3 H^1_j(\Omega_{1k})$, $H^1_j(\Omega_{1k}) = H^1(\Omega_{1k})$ (неравенство противоположного смысла очевидно).

Отсюда и из теоремы вложения С. Л. Соболева (см. [20, с. 113]) следует компактное вложение

$$\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}) \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}), \quad k=1,2,3. \tag{3.151}$$

Введем теперь по аналогии с (3.145)–(3.147) пространство

$$\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) = \bigoplus_{k=1}^3 \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_{1k}), \quad (\vec{u},\vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_{1k})} := \sum_{k=1}^3 \mu_k E_k(\vec{u}_k,\vec{v}_k), \tag{3.152}$$

$$\vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3, \quad \vec{v} = \{\vec{v}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1),$$

отвечающее набору полей скоростей вязких жидкостей в трех областях. Из (3.151) следует, что $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ компактно вложено в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$:

$$\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1). \tag{3.153}$$

Поэтому они образуют гильбертову пару пространств, как и пространства $\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$ и $\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$. При этом оператор A_k гильбертовой пары $(\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}), \vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}))$ определяется из тождества

$$(\vec{u}_k,\vec{v}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})} = \left(A_k^{1/2}\vec{u}_k, A_k^{1/2}\vec{v}_k\right)_{\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})} = \langle \vec{u}_k, A_k\vec{v}_k\rangle_{\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})}, \quad \forall \vec{u}_k,\vec{v}_k \in \vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}), \tag{3.154}$$

где косыми скобками обозначено значение функционала $A_k\vec{v}_k \in \left(\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})\right)^*$ на элементе $\vec{u}_k \in \vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$. Таким образом, возникает оснащенное гильбертово пространство $\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$, т. е.

$$\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}) \hookrightarrow\hookrightarrow \vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}) \hookrightarrow\hookrightarrow \left(\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})\right)^*, \tag{3.155}$$

причем

$$A_k^{1/2} \in \mathcal{L}\left(\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}); \vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})\right), \quad A_k^{1/2} \in \mathcal{L}\left(\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}); (\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k}))^*\right). \tag{3.156}$$

Аналогичными свойствами обладает и оператор A гильбертовой пары $\left(\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1); \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)\right)$, для него выполнено тождество

$$(\vec{u}_k,\vec{v}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)} = \left(A_k^{1/2}\vec{u}_k, A_k^{1/2}\right)_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} = \sum_{k=1}^3 \mu_k E_k(\vec{u}_k,\vec{v}_k) = \sum_{k=1}^3 \mu_k\rho_k^{-1}(A_k^{1/2}\vec{u}_k, A_k^{1/2})_{\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})} =$$

$$= \langle \vec{u}, A\vec{v}\rangle_{\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)} = \sum_{k=1}^3 \left\langle \vec{u}_k, \mu_k\rho_k^{-1}A_k^{1/2}\vec{v}_k\right\rangle_{\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})}, \quad \forall \vec{u},\vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1). \tag{3.157}$$

Отсюда, в частности, следует, что $A = \operatorname{diag}(\mu_k\rho_k^{-1}A_k)_{k=1}^3$.

Введем, наконец, те функциональные гильбертовы пространства, которые непосредственно связаны с исследуемой задачей (3.132)–(3.140). Это, во-первых, тот же набор полей скоростей $\vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3$ из $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$, для которых выполнены первые условия связи полей на Γ_1 и Γ_2, т. е. первые условия (3.136). Совокупность таких наборов представляет собой подпространство

$$\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) := \Big\{\vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) : \gamma_{n,1}\vec{u}_1 := \vec{u}_1\cdot\vec{n}_1 = \vec{u}_2\cdot\vec{n}_1 =: \gamma_{n,1}\vec{u}_2 \text{ (на } \Gamma_1),$$

$$\gamma_{n,2}\vec{u}_2 := \vec{u}_2\cdot\vec{n}_2 = \vec{u}_3\cdot\vec{n}_2 =: \gamma_{n,2}\vec{u}_3 \text{ (на } \Gamma_2),\ \vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{e}_1^{\,3}\Big\} \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1). \tag{3.158}$$

Во-вторых, это набор полей скоростей из $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$, для которого выполнены условия связи полей на Γ_1 и Γ_2 не только для нормальных компонент, но и для полей целиком, см. также (3.136):

$$\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) := \{\vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) : \gamma_{11}\vec{u}_1 = \gamma_{12}\vec{u}_2 \text{ (на } \Gamma_1),$$
$$\gamma_{22}\vec{u}_2 = \gamma_{23}\vec{u}_3 \text{ (на } \Gamma_2)\} \subset \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1). \tag{3.159}$$

Эти два пространства далее играют основную роль в исследуемой проблеме. В частности, они образуют гильбертову пару пространств $(\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1); \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1))$; порождающий оператор $\widetilde{A}$ этой пары является сужением оператора A (см. (3.158)) гильбертовой пары $(\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1); \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1))$ на такие наборы полей, для которых выполнены кинетические условия прилипания из (3.158), (3.159). Для оператора $\widetilde{A}$, как и выше (см. (3.154), (3.155)), выполнены тождества

$$(\vec{u},\vec{v})_{\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)} = (\widetilde{A}^{1/2}\vec{u}, \widetilde{A}^{1/2}\vec{v})_{\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)} = \sum_{k=1}^3 \mu_k E_k(\vec{u},\vec{v}) = \left\langle \vec{u}, \widetilde{A}\vec{v}\right\rangle_{\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)} \quad \forall \vec{u},\, \vec{v} \in \vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1). \tag{3.160}$$

3.3.3. Формулы действия ортопроекторов. В этом пункте приведем формулы действия ортопроектора

$$P_0 := P_{0,S_1,\Gamma} : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \to \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \tag{3.161}$$

(см. (3.146), (3.158)), а также соответствующего ортопроектора

$$P_1 := P^1_{0,S_1,\Gamma} : \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \to \vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \tag{3.162}$$

(см. (3.148), (3.159)).

Для получения закона действия ортопроектора P_0 выясним сначала, каково ортогональное дополнение в $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ к подпространству $\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$. Учтем структуру пространства $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$:

$$\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) = \bigoplus_{k=1}^3 (\vec{J}_0(\Omega_{1k}) \bigoplus \vec{G}_{h,S_{1k}}(\Omega_{1k})). \tag{3.163}$$

Напомним, что для элементов из $\vec{J}_0(\Omega_{1k})$ нормальные компоненты полей равны нулю на $\partial\Omega_{1k},\ k = 1,2,3$. Отсюда получаем, что $\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ имеет структуру

$$\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) = \left(\bigoplus_{k=1}^3 \vec{J}_0(\Omega_{1k})\right) \bigoplus \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \tag{3.164}$$

$$\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1) := \{\vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 : \vec{u}_k = \rho_k^{-1}\nabla\varphi_k, \quad \Delta\varphi_k = 0 \text{ (в } \Omega_k),$$
$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{1k}), \quad \rho_1^{-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \rho_2^{-1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \text{ (на } \Gamma_1), \quad \rho_2^{-1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \rho_3^{-1}\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} \text{ (на } \Gamma_2)\}. \tag{3.165}$$

Лемма 3.10. *Элементы из* $(\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1))^\perp$, *т. е. подпространства из пространства* $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) = \oplus_{k=1}^3 \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_{1k})$, *ортогонального к* $\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$, *образуют множество*

$$(\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1))^\perp = \big\{\{\nabla\psi_k\}_{k=1}^3 : \Delta\psi_k = 0 \ (\textit{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = 0 \ (\textit{на } S_{1k})$$
$$\rho_1\psi_1 - \rho_2\psi_2 = 0 \ (\textit{на } \Gamma_1), \quad \rho_2\psi_2 - \rho_3\psi_3 = 0 \ (\textit{на } \Gamma_3), \quad \vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{e}_1^{\,3}\big\}. \tag{3.166}$$

(Это простое утверждение доказывается с использованием обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа применительно к областям $\Omega_k,\ k = 1,2,3$.)

Опираясь на представление (3.166), получим закон действия P_0 из (3.161). Для любого $\vec{u} = \{\vec{u}_k\} \in \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1)$ должно быть

$$P_0\vec{u} = P_0\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 - \{\nabla\psi_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1). \tag{3.167}$$

Для отыскания $\{\nabla\psi_k\}_{k=1}^3$ рассмотрим следующую вспомогательную задачу сопряжения для элементов из $(\vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1))^\perp$:

$$\Delta\psi_k = 0 \text{ (в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_{1k}),$$

$$
\begin{gathered}
\rho_1\gamma_{11}\psi_1 = \rho_2\gamma_{12}\psi_2 =: \widetilde{\chi}_1 \ (\text{на } \Gamma_1), \\
\rho_2\gamma_{22}\psi_2 = \rho_3\gamma_{23}\psi_3 =: \widetilde{\chi}_2 \ (\text{на } \Gamma_2), \quad \gamma_{jk}\psi_k := \psi_k|_{\Gamma_j},
\end{gathered} \tag{3.168}
$$

где $\widetilde{\chi}_k$ считаем заданными функциями.

Будет рассматривать проблему (3.168) как задачу Зарембы для каждой из областей Ω_{1k}. Тогда задача

$$
\Delta\psi_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_{11}), \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_{11}), \quad \gamma_{11}\psi_1 = \rho_1^{-1}\widetilde{\chi}_1 \ (\text{на } \Gamma_1), \quad \int\limits_{\Gamma_1} \widetilde{\chi}_1 \, d\Gamma_1 = 0 \tag{3.169}
$$

при условии $\widetilde{\chi}_1 \in H^{1/2}_{\Gamma_1}$ имеет единственное слабое решение

$$
\nabla\psi_1 := Q_{11}(\rho_1^{-1}\widetilde{\chi}_1), \quad Q_{11} \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_1}; \vec{G}_{h,S_{11}}(\Omega_{11})). \tag{3.170}
$$

Аналогично для задачи

$$
\begin{gathered}
\Delta\psi_3 = 0 \ (\text{в } \Omega_{13}), \quad \frac{\partial\psi_3}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_{13}) \\
\gamma_{33}\psi_3 = \rho_3^{-1}\widetilde{\chi}_2 \ (\text{на } \Gamma_2), \quad \int\limits_{\Gamma_2} \widetilde{\chi}_2 \, d\Gamma_2 = 0, \quad \vec{n} = \vec{e}_1^{\,3},
\end{gathered} \tag{3.171}
$$

при условии $\widetilde{\chi}_2 \in H^{1/2}_{\Gamma_2}$ имеем единственное слабое решение

$$
\nabla\psi_3 := -Q_{33}(\rho_3^{-1}\widetilde{\chi}_2), \quad Q_{33} \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_2}; \vec{G}_{h,S_{33}}(\Omega_{13})). \tag{3.172}
$$

В области Ω_{12} решение будем разыскивать в виде суммы:

$$
\psi_2 = \psi_{21} + \psi_{22},
$$

где ψ_{21} и ψ_{22} — слабые решения следующих задач:

$$
\Delta\psi_{21} = 0 \ (\text{в } \Omega_{12}), \quad \frac{\partial\psi_{21}}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_{12}), \quad \gamma_{21}\psi_{21} = \rho_2^{-1}\widetilde{\chi}_1 \ (\text{на } \Gamma_1), \quad \gamma_{22}\psi_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_2); \tag{3.173}
$$

$$
\Delta\psi_{22} = 0 \ (\text{в } \Omega_{12}), \quad \frac{\partial\psi_{22}}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_{12}), \quad \gamma_{12}\psi_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \quad \gamma_{22}\psi_{22} = \rho_2^{-1}\widetilde{\chi}_2 \ (\text{на } \Gamma_2). \tag{3.174}
$$

Тогда аналогично предыдущему получаем

$$
\nabla\psi_{21} = -Q_{21}(\rho_2^{-1}\widetilde{\chi}_1), \quad \nabla\psi_{22} = Q_{22}(\rho_2^{-1}\widetilde{\chi}_2), \tag{3.175}
$$

$$
Q_{21} \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_1}; \vec{G}_{h,S_{12}}(\Omega_{12})), \quad Q_{22} \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_2}; \vec{G}_{h,S_{12}}(\Omega_{12})). \tag{3.176}
$$

Из (3.167) и (3.158) приходим к условиям

$$
\gamma_{n,1}(P_0\vec{u})_1 = \gamma_{n,1}(P_0\vec{u})_2 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \gamma_{n,2}(P_0\vec{u})_2 = \gamma_{n,2}(P_0\vec{u})_3 \quad (\text{на } \Gamma_2),
$$

из которых следует, что

$$
\begin{gathered}
\gamma_{n,1}\nabla\psi_1 - \gamma_{n,1}\nabla\psi_2 = \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,2}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma_1) \\
\gamma_{n,2}\nabla\psi_2 - \gamma_{n,2}\nabla\psi_3 = \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,2}\vec{u}_3 \quad (\text{на } \Gamma_2).
\end{gathered} \tag{3.177}
$$

Подставляя решения (3.170), (3.171) и (3.175) в эти условия и считая функции $\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,1}\vec{u}_2$ и $\gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,2}\vec{u}_3$ заданными, получим систему уравнений относительно $\widetilde{\chi}_1$ и $\widetilde{\chi}_2$:

$$
\begin{gathered}
(\rho_1^{-1}\gamma_{n,1}Q_{11} + \rho_2^{-1}\gamma_{n,1}Q_{21})\widetilde{\chi}_1 - \rho_2^{-1}\gamma_{n,1}Q_{22}\widetilde{\chi}_2 = \gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,1}\vec{u}_2, \\
-\rho_2^{-1}\gamma_{n,2}Q_{21}\widetilde{\chi}_1 + (\rho_2^{-1}\gamma_{n,2}Q_{22} + \rho_3^{-1}\gamma_{n,2}Q_{33})\widetilde{\chi}_2 = \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,3}\vec{u}_3.
\end{gathered} \tag{3.178}
$$

Здесь операторная матрица

$$
Q := \begin{pmatrix} (\rho_1^{-1}\gamma_{n,1}Q_{11} + \rho_2^{-1}\gamma_{n,1}Q_{21}) & \rho_2^{-1}\gamma_{n,1}Q_{22} \\ -\rho_2^{-1}\gamma_{n,2}Q_{21} & (\rho_2^{-1}\gamma_{n,2}Q_{22} + \rho_3^{-1}\gamma_{n,2}Q_{33}) \end{pmatrix} \tag{3.179}
$$

— линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $H^{1/2}_{\Gamma_1} \times H^{1/2}_{\Gamma_2}$ в пространство $\widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1} \times \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_2}$. Более того, можно доказать, что Q является положительным оператором, т. е.

$$
\langle (\widetilde{\chi}_1; \widetilde{\chi}_2)^\tau, Q(\widetilde{\chi}_1; \widetilde{\chi}_2)^\tau \rangle_{L_{2,\Gamma_1} \oplus L_{2,\Gamma_2}} > 0, \quad 0 \neq (\widetilde{\chi}_1; \widetilde{\chi}_2)^\tau \in H^{1/2}_{\Gamma_1} \times H^{1/2}_{\Gamma_2}, \tag{3.180}
$$

и отображает $H^{1/2}_{\Gamma_1} \times H^{1/2}_{\Gamma_2}$ на все $\widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1} \times \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_2}$. Отсюда по теореме Банаха получаем, что существует обратный оператор

$$Q^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1} \times \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_2}; H^{1/2}_{\Gamma_1} \times H^{1/2}_{\Gamma_2}). \tag{3.181}$$

Следствием проведенного рассмотрения вспомогательной задачи является такое утверждение.

Лемма 3.11. *Ортопроектор* $P_0 := P_{0,S_1,\Gamma} : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \to \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$ *действует по закону*

$$\begin{aligned} P_0\vec{u} = \vec{u} - \big\{&\rho_1^{-1}Q_{11}p_1Q^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,1}\vec{u}_2; \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,2}\vec{u}_3)^\tau; \\ &-\rho_2^{-1}Q_{21}p_1Q^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,1}\vec{u}_2; \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,2}\vec{u}_3)^\tau \\ &\rho_2^{-1}Q_{22}p_2Q^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,1}\vec{u}_2; \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,2}\vec{u}_3)^\tau; \\ &\rho_3^{-1}Q_{33}p_2Q^{-1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \gamma_{n,1}\vec{u}_2; \gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \gamma_{n,2}\vec{u}_3)^\tau\big\}, \end{aligned} \tag{3.182}$$

где Q_{kj} — *операторы вспомогательных задач Зарембы* (*см.* (3.170), (3.172), (3.175)–(3.176)), Q — *операторная матрица* (3.179) *со свойствами* (3.181), *а* $p_k(\psi_1;\psi_2)^\tau := \psi_k$, $k = 1,2,$ — *операторы взятия* k*-той компоненты.*

Получим теперь формулу действия другого ортопроектора

$$P_1 := P^1_{0,S_1,\Gamma} : \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \to \vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1).$$

При этом будем действовать по тому же плану, что и в начале этого пункта, но теперь применительно к пространству $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$.

Используя определение скалярного произведения в пространстве $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ и соответствующие обобщенные формулы Грина для пространств $\vec{J}^1_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$, приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.12. *Ортогональное дополнение* $(\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_2))^\perp$ *к подпространству* $(\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1))$ *в пространстве* $\vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ *состоит из слабых решений* $\vec{v} = \{\vec{v}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1)$ *краевых задач*

$$\begin{gathered} P_{0,S_{1k}}(-\mu_k\Delta\vec{v}_k) + \nabla\widetilde{p}_k = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_k = 0 \ (\textit{в } \Omega_1), \quad \vec{v}_k = \vec{0} \ (\textit{на } S_{1k}), \quad k = 1,2,3; \\ -\widetilde{p}_1\delta_{j3} + \mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1) = -\widetilde{p}_2\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2), \quad j = 1,2,3 \quad (\textit{на } \Gamma_1), \\ -\widetilde{p}_2\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2) = -\widetilde{p}_3\delta_{j3} + \mu_3\tau_{j3}(\vec{v}_2), \quad j = 1,2,3 \quad (\textit{на } \Gamma_2), \end{gathered} \tag{3.183}$$

где $P_{0,S_{1k}}$ — *ортогональные проекторы на* $\vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$, *а* $\nabla\widetilde{p}_k := P_{0,S_{1k}}\nabla p_k \in \vec{G}_{h,S_{1k}}(\Omega_{1k})$.

Опираясь на последние уравнения, приходим к выводу, что

$$P_1\vec{u} = P_1\{\vec{u}\}_{k=1}^3 = \{\vec{u}\}_{k=1}^3 - \{\vec{v}\}_{k=1}^3 \in \vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \tag{3.184}$$

где $\{\vec{v}\}_{k=1}^3$ — некоторое решение задачи (3.183).

Для нахождения соответствующего набора $\{\vec{v}_k\}_{k=1}^3$ сформулируем с учетом (3.183) следующие вспомогательные краевые задачи (их называют вспомогательными задачами С. Г. Крейна) для каждой из областей Ω_{1k}, $k = 1,2,3$:

$$\begin{gathered} P_{0,S_{11}}(-\mu_1\Delta\vec{v}_1) + \nabla\widetilde{p}_1 = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_{11}), \quad \vec{v}_1 = \vec{0} \quad (\text{на } S_{11}), \\ -\widetilde{p}_1\delta_{j3} + \mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1) = \chi_{1j} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad j = 1,2,3; \end{gathered} \tag{3.185}$$

$$\begin{gathered} P_{0,S_{13}}(-\mu_3\Delta\vec{v}_3) + \nabla\widetilde{p}_3 = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_3 = 0 \quad (\text{в } \Omega_{13}), \quad \vec{v}_3 = \vec{0} \quad (\text{в } S_{13}), \\ -\widetilde{p}_3\delta_{j3} + \mu_3\tau_{j3}(\vec{v}_3) = \chi_{2j} \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad j = 1,2,3; \end{gathered} \tag{3.186}$$

$$\begin{gathered} P_{0,S_{12}}(-\mu_2\Delta\vec{v}_2) + \nabla\widetilde{p}_2 = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_{12}), \quad \vec{u}_2 = \vec{0} \quad (\text{в } S_{12}), \\ -\widetilde{p}_2\delta_{j2} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2) = \chi_{1j} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad -\widetilde{p}_2\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2) = \chi_{2j} \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad j = 1,2,3. \end{gathered} \tag{3.187}$$

Здесь χ_{1j} и χ_{2j} — соответствующие компоненты заданных векторов $\vec{\chi}_1$ и $\vec{\chi}_2$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \vec{\chi}_1|_{\Gamma_1} &:= \{-\widetilde{p}_1\delta_{j3} + \mu_1\tau_{j3}(\vec{v}_1)\}_{j=1}^3 = \{-\widetilde{p}_2\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2)\}_{j=1}^3 \in \\ &\in H^{-1/2}_{\Gamma_1} \times H^{-1/2}_{\Gamma_1} \times H^{-1/2}_{\Gamma_1} = (\widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_1} \times \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_1} \times \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_1})^*; \\ \vec{\chi}_2|_{\Gamma_1} &:= \{-\widetilde{p}_2\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_2)\}_{j=1}^3 = \{-\widetilde{p}_3\delta_{j3} + \mu_3\tau_{j3}(\vec{v}_3)\}_{j=1}^3 \in \\ &\in H^{-1/2}_{\Gamma_2} \times H^{-1/2}_{\Gamma_2} \times H^{-1/2}_{\Gamma_2} = (\widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_2} \times \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_2} \times \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_2})^*. \end{aligned} \tag{3.188}$$

Замечание 3.1. Здесь и далее символом “$\sim$” обозначен класс функций, продолжимых нулем на всю границу $\partial\Omega_{1k}$ до элементов класса $H^{1/2}(\partial\Omega_{1k})$, при этом $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_1) = (H^{-1/2}(\Gamma_1))^*$, $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_2) = (H^{-1/2}(\Gamma_2))^*$, см. [17, 18].

Опираясь на обобщенные формулы Грина для соленоидальных векторных полей применительно к областям Ω_{1k}, можно установить, что задача (3.185) имеет слабое решение

$$\begin{gathered}\vec{v}_1 = \mu_1^{-1} V_{11}\vec{\chi}_1, \quad V_{11} \in \mathcal{L}(\vec{H}^{-1/2}(\Gamma_1);\ \vec{J}^1_{0,S_{11}}(\Omega_{11})),\\ \vec{H}^{-1/2}(\Gamma_1) := H^{-1/2}(\Gamma_1)\times H^{-1/2}(\Gamma_1)\times H^{-1/2}(\Gamma_1) =: (\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1))^*.\end{gathered} \tag{3.189}$$

Аналогично задача (3.186) имеет слабое решение

$$\begin{gathered}\vec{v}_3 = -\mu_3^{-1} V_{32}\vec{\chi}_2, \quad V_{32} \in \mathcal{L}(\vec{H}^{-1/2}(\Gamma_2);\ \vec{J}^1_{0,S_{13}}(\Omega_{13})),\\ \vec{H}^{-1/2}(\Gamma_2) := H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{-1/2}(\Gamma_2)\times H^{-1/2}(\Gamma_2) =: (\vec{H}^{1/2}(\Gamma_2))^*.\end{gathered} \tag{3.190}$$

Для задачи (3.187) будем искать решение в виде суммы:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_{21} + \vec{v}_{22}, \quad \nabla\widetilde{p}_2 = \nabla\widetilde{p}_{21} + \nabla\widetilde{p}_{22}, \tag{3.191}$$

где $\vec{v}_{21}$ и $\nabla\widetilde{p}_{21}$ — искомые функции краевой задачи

$$\begin{gathered}P_{0,S_{12}}(-\mu_2\Delta\vec{v}_{21}) + \nabla\widetilde{p}_{21} = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{12}), \quad \vec{v}_{21} = \vec{0} \quad (\text{на } S_{12}),\\ -\widetilde{p}_{21}\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_{21}) = \chi_{1j} \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad -\widetilde{p}_{21}\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_{21}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad j = 1,2,3,\end{gathered} \tag{3.192}$$

а $\vec{v}_{22}$ и $\nabla\widetilde{p}_{22}$ — искомые функции задачи

$$\begin{gathered}P_{0,S_{12}}(-\mu_2\Delta\vec{v}_{22}) + \nabla\widetilde{p}_{22} = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{12}), \quad \vec{v}_{22} = \vec{0} \quad (\text{на } S_{12})\\ -\widetilde{p}_{22}\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_{22}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1),\\ -\widetilde{p}_{22}\delta_{j3} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{v}_{22}) = \chi_{2j} \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad j = 1,2,3.\end{gathered} \tag{3.193}$$

Тогда аналогично предыдущему имеем слабое решение

$$\begin{gathered}\vec{v}_2 = \vec{v}_{21} + \vec{v}_{22} = \mu_2^{-1}(-V_{21}\vec{\chi}_1 + V_{22}\vec{\chi}_2),\\ V_{21} \in \mathcal{L}\left((\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1))^*;\ \vec{J}^1_{0,S_{12},\Gamma_1}(\Omega_{12})\right), \quad V_{22} \in \mathcal{L}\left((\vec{H}^{1/2}(\Gamma_2))^*;\ \vec{J}^1_{0,S_{12},\Gamma_2}(\Omega_{12})\right).\end{gathered} \tag{3.194}$$

Из представления (3.184) и определения (3.159) пространства $\vec{J}^1_{0,S,\Gamma}(\Omega_1)$ получаем условия

$$\begin{gathered}\gamma_{11}\vec{v}_1 - \gamma_{12}\vec{v}_2 = \gamma_{11}\vec{u}_1 - \gamma_{12}\vec{u}_2 \quad (\text{на } \Gamma_1),\\ \gamma_{22}\vec{v}_2 - \gamma_{23}\vec{v}_3 = \gamma_{22}\vec{u}_2 - \gamma_{23}\vec{u}_3 \quad (\text{на } \Gamma_2).\end{gathered} \tag{3.195}$$

Считая здесь правые части заданными и используя представления решений в виде (3.189), (3.190), (3.194), приходим к системе линейных уравнений относительно $\vec{\chi}_1$ и $\vec{\chi}_2$:

$$\begin{gathered}(\mu_1^{-1}\gamma_{11}V_{11} + \mu_2^{-1}\gamma_{12}V_{21})\vec{\chi}_1 - \mu_2^{-1}\gamma_{12}V_{12}\vec{\chi}_2 = \gamma_{11}\vec{u}_1 - \gamma_{12}\vec{u}_2,\\ -\mu_2^{-1}\gamma_{22}V_{21}\vec{\chi}_1 + (\mu_2^{-1}\gamma_{22}V_{22} + \mu_3^{-1}\gamma_{23}V_{32})\vec{\chi}_2 = \gamma_{22}\vec{u}_2 - \gamma_{23}\vec{u}_3.\end{gathered} \tag{3.196}$$

Опираясь на свойства взаимной сопряженности операторов γ_{jk} и V_{kj}, которое имеет место для слабых решений вспомогательных краевых задач, можно проверить, что операторная матрица системы (3.196), т. е.

$$C := \begin{pmatrix}(\mu_1^{-1}\gamma_{11}V_{11} + \mu_2^{-1}\gamma_{12}V_{21}) & -\mu_2^{-1}\gamma_{12}V_{12}\\ -\mu_2^{-1}\gamma_{22}V_{21} & (\mu_2^{-1}\gamma_{22}V_{22} + \mu_3^{-1}\gamma_{23}V_{32})\end{pmatrix} \tag{3.197}$$

принадлежит пространству $\mathcal{L}\left((\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1)\times\vec{H}^{1/2}(\Gamma_2))^*; \vec{H}^{1/2}(\Gamma_1)\times\vec{H}^{1/2}(\Gamma_2)\right)$, является положительной и отображает первое пространство на второе. Отсюда по теореме Банаха получаем, что существует

$$C^{-1} \in \mathcal{L}\left(\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1)\times\vec{H}^{1/2}(\Gamma_2); (\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1)\times\vec{H}^{1/2}(\Gamma_2))^*\right), \tag{3.198}$$

и поэтому система уравнений имеет единственное решение $\{\vec{\chi}_1;\vec{\chi}_2\}$, принадлежащее пространству $\vec{H}^{1/2}(\Gamma_1)\times\vec{H}^{1/2}(\Gamma_2)$.

Лемма 3.13. *Оператор* $P_1 = P^1_{0,S_1,\Gamma} : \vec{J}^1_{0,S_1}(\Omega_1) \to \vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$ *действует по закону*

$$P_1\vec{u} = \vec{u} - \Big(\mu_1^{-1}V_{11}p_1C^{-1}(\gamma_{11}\vec{u}_1 - \gamma_{12}\vec{u}_2; \gamma_{22}\vec{u}_2 - \gamma_{23}\vec{u}_3)^\tau;$$

$$-\mu_2^{-1}V_{21}p_1C^{-1}(\gamma_{11}\vec{u}_1 - \gamma_{12}\vec{u}_2; \gamma_{22}\vec{u}_2 - \gamma_{23}\vec{u}_3)^\tau + \mu_2^{-1}V_{22}p_2C^{-1}(\gamma_{11}\vec{u}_1 - \gamma_{12}\vec{u}_2; \gamma_{22}\vec{u}_2 - \gamma_{23}\vec{u}_3)^\tau; \quad (3.199)$$

$$-\mu_3^{-1}V_{32}p_2C^{-1}(\gamma_{11}\vec{u}_1 - \gamma_{12}\vec{u}_2; \gamma_{22}\vec{u}_2 - \gamma_{23}\vec{u}_3)^\tau\Big),$$

где $C > 0$ — *операторная матрица* (3.197), V_{jk} — *операторы сформулированных выше вспомогательных краевых задач, а* $p_k(\vec{\psi}_1; \vec{\psi}_2)^\tau =: \vec{\psi}_k$, $k = 1, 2,$ — *операторы взятия* k*-той компоненты столбца.*

3.3.4. Применение операторного подхода. Преобразование уравнения движения жидкостей. Преобразуем уравнение движения жидкостей в полости маятника (см. (3.134)) с учетом граничных условий к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве. Будем считать, что все функции, зависящие от времени, суть функции переменной t со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве.

Будем считать, что каждое слагаемое в k-том уравнении движения является элементом пространства $\vec{L}_2(\Omega_{1k})$. Действуя ортопроектором $P_{0,S_{1k}} : \vec{L}_2(\Omega_{1k}) \to \vec{J}_{0,S_{1k}}(\Omega_{1k})$ и объединяя эти уравнения в виде одного набора, будем иметь

$$\left\{\frac{d\vec{u}_k}{dt}\right\}_{k=1}^3 + \left\{P_{0,S_{1k}}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k})\right\}_{k=1}^3 + \{P_{0,S_{1k}}(\rho_k^{-1}\nabla p_k)\}_{k=1}^3 - \{\mu_k\rho_k^{-1}P_{0,S_{1k}}\Delta\vec{u}_k\}_{k=1}^3 = \{P_{0,S_{2k}}\vec{f}\}_{k=1}^3. \quad (3.200)$$

Действуя еще ортопроектором $P_0 : \vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \ \to \ \vec{J}_{0,S_1\Gamma}(\Omega_2)$, придем к уравнению

$$\begin{aligned} &\frac{d\vec{u}}{dt} + P_0\{P_{0,S_{1k}}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k})\}_{k=1}^3 + P_0\{\rho_k^{-1}\nabla\widetilde{p}_k\}_{k=1}^3 - \\ &- P_0\{\mu_k\rho_k^{-1}P_{0,S_{1k}}(\Delta\vec{u}_k)\}_{k=1}^3 = P_0\{P_{0,S_{1k}}\vec{f}_k\} = P_0\{\vec{f}_k\}_{k=1}^3, \end{aligned} \quad (3.201)$$

$$\rho_k^{-1}\nabla\widetilde{p}_k := P_{0,S_{1k}}(\rho_k^{-1}\nabla p_k).$$

(Проектирование с помощью оператора $I_0 - P_0$ дает лишь тривиальные связи и не учитывается в дальнейшем.)

Все слагаемые в (3.134) теперь являются элементами из $\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$. Преобразуем это уравнение с учетом граничных условий, введя оператор $\widetilde{A}$ гильбертовой пары $(\vec{J}^1_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1);\ \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1))$. С этой целью представим набор $P_0\{\rho_k^{-1}\nabla\widetilde{p}_k\}_{k=1}^3$ в виде

$$P_0\{\rho_k^{-1}\nabla\widetilde{p}_k\}_{k=1}^3 = \{\rho_k^{-1}\nabla p_{1k}\}_{k=1}^3 + P_0\{\rho_k^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3$$

и будем считать, что наборы

$$\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3, \quad \{\rho_k^{-1}\nabla p_{1k}\}_{k=1}^3$$

являются решениями *первой вспомогательной задачи*

$$\begin{gathered} -P_0\big\{\mu_k\rho_k^{-1}P_{0,S_{1k}}(\Delta\vec{u}_k)\big\}_{k=1}^3 + \{\rho_k^{-1}\nabla p_{1k}\}_{k=1}^3 = \\ = -\frac{d\vec{u}}{dt} - P_0\big\{P_{0,S_{1k}}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k})\big\}_{k=1}^3 - \{\rho_k^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3 + P_0\{\vec{f}_k\}_{k=1}^3, \\ \vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_{1k}), \quad k = 1, 2, 3, \end{gathered} \quad (3.202)$$

$$\mu_1\tau_{j3}(\vec{u}_1) - \mu_2\tau_{j3}(\vec{u}_2) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \mu_2\tau_{j3}(\vec{u}_2) - \mu_3\tau_{j3}(\vec{u}_3) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad j = 1, 2,$$

$$[-p_{11} + \mu_1\tau_{33}(\vec{u}_1)] - [-p_{12} + \mu_2\tau_{33}(\vec{u}_2)] = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1),$$

$$[-p_{12} + \mu_2\tau_{j3}(\vec{u}_2)] - [-p_{13} + \mu_3\tau_{j3}(\vec{u}_2)] = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2).$$

При этом второй набор $\{\rho_k^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3$ является решением *второй вспомогательной задачи* для потенциалов (задачи Стеклова):

$$\begin{aligned}\Delta p_{2k} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial p_{2k}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{1k}), \quad k = 1,2,3,\\ \rho_1^{-1}\frac{\partial p_{21}}{\partial n} = \rho_2^{-1}\frac{\partial p_{22}}{\partial n} =: \xi_1 \quad (\text{на } \Gamma_1), \quad \vec{n} = \vec{e}_1^{\,3};\\ \rho_2^{-1}\frac{\partial p_{22}}{\partial n} = \rho_3^{-1}\frac{\partial p_{23}}{\partial n} =: \xi_2 \quad (\text{на } \Gamma_2), \quad \vec{n} = \vec{e}_1^{\,3};\\ p_{21} - p_{22} = (\rho_1 - \rho_2)\widehat{\zeta}_1 := g(\rho_1 - \rho_2)[\zeta_1 + \theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})] \quad (\text{на } \Gamma_1),\\ p_{22} - p_{23} = (\rho_2 - \rho_3)\widehat{\zeta}_2 := g(\rho_2 - \rho_3)[\zeta_2 + \theta_2((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})] \quad (\text{на } \Gamma_2).\end{aligned} \tag{3.203}$$

(Нетрудно проверить, что сумма решений первой и второй вспомогательных задач дает решение исходной задачи.)

Рассмотрим сначала вторую вспомогательную задачу. Пусть элементы ξ_j известны. Тогда для слабых решений из пространства $H^1(\Omega_{1k})$ и из граничных условий на S_{1k} получаем, что ξ_j должны принадлежать классам

$$\widetilde{H}_{\Gamma_j}^{-1/2} = (H_{\Gamma_j}^{1/2})^* = (H_{\Gamma_j}^{1/2} \cap L_{2,\Gamma_j})^*, \quad j = 1,2. \tag{3.204}$$

Здесь для нахождения функции p_{2k} возникают три вспомогательные задачи Неймана. Для их слабых решений, аналогично ходу доказательства леммы 3.2, будем иметь

$$\begin{aligned}p_{12}|_{\Omega_{11}} = \rho_1 V_{11}\xi_1 + c_1, \quad p_{23}|_{\Omega_{13}} = -\rho_3 V_{32}\xi_2 + c_2, \quad \int_{\Gamma_1} p_{21}\,d\Gamma_1 = 0, \quad \int_{\Gamma_2} p_{23}\,d\Gamma_2 = 0,\\ p_{22}|_{\Omega_{12}} = \rho_2 V_{22}\xi_2 - \rho_2 V_{21}\xi_1, \quad \int_{\Gamma_2}(V_{22}\xi_2)\,d\Gamma_2 = 0, \quad \int_{\Gamma_1}(V_{21}\xi_1)\,d\Gamma_1 = 0,\end{aligned} \tag{3.205}$$

где c_j — константы. Из того представления получаем, что последние граничные условия из (3.203) можно переписать в виде матричного соотношения

$$\begin{pmatrix}\rho_1\gamma_{11}V_{11} + \rho_2\gamma_{12}V_{21} & -\rho_2\theta_1(\gamma_{12}V_{22})\\ -\rho_2\theta_2(\gamma_{22}V_{21}) & \rho_2\gamma_{22}V_{22} + \rho_3\gamma_{23}V_{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_2\\ \xi_2\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}(\rho_1-\rho_2)\widehat{\zeta}_1\\ (\rho_2-\rho_3)\widehat{\zeta}_2\end{pmatrix}. \tag{3.206}$$

Здесь, как и выше (см. (3.197)), операторная матрица

$$C = \begin{pmatrix}\rho_1\gamma_{11}V_{11} + \rho_2\gamma_{12}V_{21} & -\rho_2\theta_1(\gamma_{12}V_{22})\\ -\rho_2\theta_2(\gamma_{22}V_{21}) & \rho_2\gamma_{22}V_{22} + \rho_3\gamma_{23}V_{32}\end{pmatrix} \tag{3.207}$$

является положительной, действующей из $\widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2} \times \widetilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}$ на сопряженное пространство $H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2}$. Отсюда получаем, что существует обратная операторная матрица

$$C^{-1} \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2};\ \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2} \times \widetilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}). \tag{3.208}$$

Поэтому слабое решение второй вспомогательной задачи (3.203) находится однозначно и имеет вид

$$\begin{aligned}\{\rho_k^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3 = gQ\{\widehat{\zeta}_j\}_{j=1}^2 = gQ\{\zeta_j + \theta_j((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\}_{j=1}^2,\\ Q \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2};\ \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1)), \quad \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \subset \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1).\end{aligned} \tag{3.209}$$

Введем теперь оператор нормального следа на границах раздела жидкостей:

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}_n\vec{u} := \{\gamma_{n,1}\vec{u}_1; \gamma_{n,2}\vec{u}_2\} = \{(\vec{u}_j\cdot\vec{e}_j^{\,3})|_{\Gamma_j}\}_{j=1}^2, \quad \vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1),\\ \widehat{\gamma}_n \in \mathcal{L}(\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1);\ \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2} \times \widetilde{H}_{\Gamma_2}^{-1/2}).\end{aligned} \tag{3.210}$$

Лемма 3.14. *Имеет место соотношение*

$$Q^* = \{(\rho_j - \rho_{j+1})\}_{j=1}^2\widehat{\gamma}_n. \tag{3.211}$$

Доказательство. Пусть $\zeta := \{\zeta_j\}_{j=1}^2 \in H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2}$, $Q\zeta = \{\rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$, $\vec{\eta} = \{\vec{\eta}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$. Тогда с учетом обобщенной формулы Грина для негладких полей (см., например, [18])

$$(\nabla\varphi_k, \vec{\eta}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_{1k})} + \langle\varphi_k, \operatorname{div}\vec{\eta}_k\rangle_{\vec{L}_2(\Omega_{1k})} = \langle\gamma\varphi_k, \vec{\eta}_k\cdot\vec{n}\rangle_{\vec{L}_2(\partial\Omega_{1k})}, \quad \forall\vec{\eta}_k \in \vec{L}_2(\Omega_{1k}),\ \varphi_k \in H^1(\Omega_{1k}), \tag{3.212}$$

где оператор γ — оператор следа на $\partial\Omega_{1k}$ получаем, что для выбранных выше элементов выполнено равенство

$$(Q\zeta, \vec{\eta})_{\vec{L}_2(\Omega_{1k})} = \sum_{k=1}^3 \rho_k \int_{\Omega_{1k}} \rho_k^{-1}\nabla\varphi_k\cdot\overline{\vec{\eta}_k}\,d\Omega_{1k} =$$

$$= [\langle\gamma_{11}\varphi_1, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_1\rangle_{L_2(\Gamma_1)} - \langle\gamma_{12}\varphi_2, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_2\rangle_{L_2(\Gamma_1)}] + [\langle\gamma_{22}\varphi_2, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2\rangle_{L_2(\Gamma_2)} - \langle\gamma_{23}\varphi_3, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_3\rangle_{L_2(\Gamma_2)}] =$$

$$= \langle\gamma_{11}\varphi_1 - \gamma_{12}\varphi_2, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_1\rangle_{L_2(\Gamma_1)} + \langle\gamma_{22}\varphi_2 - \gamma_{23}\varphi_3, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2\rangle_{L_2(\Gamma_2)} =$$

$$= (\rho_1-\rho_2)\langle\zeta_1, \gamma_{n,1}\vec{\eta}_1\rangle_{L_2(\Gamma_1)} + (\rho_2-\rho_3)\langle\zeta_2, \gamma_{n,2}\vec{\eta}_2\rangle_{L_2(\Gamma_2)} =: \langle\zeta, Q^*\vec{\eta}\rangle_{L_2(\Gamma)}. \tag{3.213}$$

□

Вопрос о разрешимости первой вспомогательной задачи (3.202) рассмотрим позже.

3.3.5. Преобразование кинематических граничных условий. Здесь рассуждения подобны тем, которые были проделаны в пункте 3.2.6 для случая двух несмешивающихся жидкостей.

Если выполнены кинематические условия (3.136), (3.137), т. е.

$$\begin{gathered}\frac{d\zeta_1}{dt} - \gamma_{n,1}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_1), \qquad \frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\vec{u}_2 = 0 \quad (\text{на } \Gamma_2),\\ \frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1 - P_2\vec{\omega}_1 = 0,\end{gathered} \tag{3.214}$$

то выполнены также условия

$$\begin{aligned}&[\rho_1-\rho_2]\left\{\left[\frac{d\zeta_1}{dt} - \gamma_{n,1}\vec{u}_1\right] + \left[\frac{d}{dt}\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}) - \theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\right\} = 0,\\ &[\rho_2-\rho_3]\left\{\left[\frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\vec{u}_2\right] + \left[\frac{d}{dt}\theta_2((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3}) - \theta_2((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\right\} = 0,\\ &-(\rho_1-\rho_2)\int_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\left[\frac{d\zeta_1}{dt} - \gamma_{n,1}\vec{u}_2\right]d\Gamma_1 -\\ &-(\rho_2-\rho_3)\int_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{12})\left[\frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\vec{u}_2\right]d\Gamma_2 + m_1l_1\left[\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1 - P_2\vec{\omega}_1\right] = \vec{0}.\end{aligned} \tag{3.215}$$

Введем, как и в пункте 3.2.6, осевые моменты инерции границ раздела Γ_1 и Γ_2:

$$\beta_{jl}^{(k)} = \beta_{lj}^{(k)} := \int_{\Gamma_k} x_k^j\theta_k(x_k^l)\,d\Gamma_k, \quad j,l = 1,2, \quad k = 1,2.$$

Лемма 3.15. *Если выполнено условие*

$$\Delta_2 := \det\begin{pmatrix} m_1l_1 - [(\rho_1-\rho_2)\beta_{22}^{(1)} + (\rho_2-\rho_3)\beta_{22}^{(2)}] & (\rho_1-\rho_2)\beta_{21}^{(1)} + (\rho_2-\rho_3)\beta_{21}^{(2)} \\ (\rho_1-\rho_2)\beta_{12}^{(1)} + (\rho_2-\rho_3)\beta_{12}^{(2)} & m_1l_1 - [(\rho_1-\rho_2)\beta_{11}^{(1)} + (\rho_2-\rho_3)\beta_{11}^{(2)}]\end{pmatrix} \neq 0, \tag{3.216}$$

то условия (3.214) *и* (3.215) *равносильны.*

Доказательство. В правую сторону импликация (3.214) ⇒(3.215) уже проведена. Проверим ее в левую сторону. Для этого обозначим

$$\varphi_1 := \frac{d\zeta_1}{dt} - \gamma_{n,1}\vec{u}_1, \quad \varphi_2 := \frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\vec{u}_2, \quad \vec{\psi}_1 := \frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1 - P_2\vec{\omega}_1. \tag{3.217}$$

Тогда из (3.215) получаем однородную систему уравнений

$$\begin{aligned}&\varphi_1+\theta_1((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})=0,\quad \varphi_2+\theta_2((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})=0,\\ &-(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\varphi_1\,d\Gamma_1-(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{12})\varphi_2\,d\Gamma_2+m_1l_1\vec{\psi}_1=\vec{0}.\end{aligned}\tag{3.218}$$

Отсюда приходим к уравнению для $\vec{\psi}_1$:

$$\begin{aligned}&m_1l_1\vec{\psi}_1+(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\left[\theta_1((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]d\Gamma_1+\\ &+(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{12})\left[\theta_2((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]d\Gamma_2=\vec{0}.\end{aligned}\tag{3.219}$$

Представим $\vec{\psi}_1$ в виде $\vec{\psi}_1=\sum\limits_{j=1}^{2}\psi_{1j}\vec{e}_1^{\,j}$ и учтем, что

$$\begin{aligned}&\vec{r}_{1j}\times\vec{e}_1^{\,3}=x_j^2\vec{e}_1^{\,1}-x_j^1\vec{e}_1^{\,2},\quad \theta_1((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})=\psi_{11}(\theta_1x_1^2)-\psi_{12}(\theta_1x_1^1),\\ &\theta_2((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})=\psi_{11}(\theta_2x_2^2)-\psi_{12}(\theta_2x_2^1).\end{aligned}\tag{3.220}$$

Тогда проекции векторного соотношения (3.219) дают однородную систему уравнений относительно ψ_{11} и ψ_{12} с определителем $\Delta_2\neq0$. Отсюда получаем, что $\vec{\psi}_1=\vec{0}$, $\varphi_1=\varphi_2=0$. □

Введем теперь, опираясь на новые кинематические соотношения (3.215), оператор потенциальной энергии системы, который на кинематических переменных

$$z_2:=(\{\zeta_j\}_{j=1}^2;\ P_2\vec{\omega}_1)^\tau\in\mathcal{H}_2=(L_{2,\Gamma_1}\oplus L_{2,\Gamma_2})\oplus\mathbb{C}^2\tag{3.221}$$

действует по закону

$$C_2z_2:=\begin{pmatrix}\left\{(\rho_j-\rho_{j+1})[\zeta_j+\theta_j((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})]\right\}_{j=1}^2\\ -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1-(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{12})\zeta_2\,d\Gamma_2+m_1l_1P_2\vec{\delta}_1\end{pmatrix}.\tag{3.222}$$

Лемма 3.16. *Оператор потенциальной энергии* (3.222) *ограничен и самосопряжен в* $\mathcal{H}_2$; *при условии* (3.216) *он имеет ограниченный обратный.*

Доказательство. Ограниченность C_2 следует из его определения, а ограниченная обратимость — из условия (3.216). Проверим свойство его самосопряженности:

$$\begin{aligned}(C_2z_2,z_2)_{\mathcal{H}_2}&=(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\left[\zeta_1+\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\overline{\zeta_1}\,d\Gamma_1+\\ &+(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}\left[\zeta_2+\theta_2((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right]\overline{\zeta_2}\,d\Gamma_2-\\ -(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}&(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_1\,d\Gamma_1\cdot\overline{P_2\vec{\delta}_1}-(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{12})\zeta_2\,d\Gamma_2\cdot\overline{P_2\vec{\delta}_1}+m_1l_1|P_2\vec{\delta}_1|^2=\\ &=(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\left[|\zeta_1|^2+2\mathrm{Re}\,(\overline{\zeta_1}\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3}))\right]d\Gamma_1+\\ &+(\rho_2-\rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}\left[|\zeta_2|^2+2\mathrm{Re}\,(\overline{\zeta_2}\theta_2((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3}))\right]d\Gamma_2+m_1l_1|P_2\vec{\delta}_1|^2=\\ &=(\rho_1-\rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\left[|\zeta_1+\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})|^2-|\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\vec{e}_1^{\,3})|^2\right]d\Gamma_1+\end{aligned}$$

$$+ (\rho_2 - \rho_3) \int\limits_{\Gamma_2} \Big[|\zeta_2 + \theta_2((P_2\vec{\delta}_1 \vec{r}_{12}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 - |\theta_2((P_2\vec{\delta}_1 \vec{r}_{12}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 \Big] \, d\Gamma_2 + m_1 l_1 |P_2 \vec{\delta}_1|^2 \in \mathbb{R}. \quad (3.223)$$

□

Лемма 3.17. *Для того, чтобы оператор потенциальной энергии C_2 был неотрицателен, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\Delta_1 := m_1 l_1 - [(\rho_1 - \rho_2)\beta_{11}^1 + (\rho_2 - \rho_3)\beta_{11}^2] \geqslant 0, \quad \Delta_2 \geqslant 0. \quad (3.224)$$

Для положительной определенности оператора C_2 необходимо и достаточно выполнение условий

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0. \quad (3.225)$$

Доказательство. Оно проводится по тому же плану, что и в лемме 3.7, с некоторыми заменами обозначений. □

Возвращаясь к эквивалентным кинематическим условиям (3.215), приходим к выводу, что эти условия дают операторное уравнение

$$gC_2 \frac{dz_2}{dt} + gB_{21} z_1 = 0 \quad (3.226)$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_2$. При этом

$$z_1 := \big(\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3;\ \vec{\omega}_1\big)^\tau \in \mathcal{H}_1 = \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3 \quad (3.227)$$

— динамические переменные системы, а

$$B_{21} z_1 := \begin{pmatrix} \Big\{ -(\rho_j - \rho_{j+1})[\gamma_{n,j}\vec{u}_j + \theta_j((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1j}) \cdot \vec{e}_j^{\,3})] \Big\}_{j=1}^2 \\ \sum\limits_{j=1}^2 (\rho_j - \rho_{j+1}) \int\limits_{\Gamma_j} \big(\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{1j}\big)\, \gamma_{n,j}\vec{u}_j \, d\Gamma_j - m_1 l_1 P_2 \vec{\omega}_1 \end{pmatrix}, \quad (3.228)$$

$$\mathcal{D}(B_{21}) := \Big\{ z_1 = \{\vec{u}; \vec{\omega}_1\}^\tau \in \mathcal{H}_1 : \vec{u} = \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \quad \gamma_{n,j}\vec{u}_j \in L_{2,\Gamma_j},\ j = 1, 2 \Big\}. \quad (3.229)$$

Оператор $B_{21} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ является элементом оператора обмена энергией изучаемой гидромеханической системы; вместе с оператором $B_{12} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ он составит в дальнейшем весь оператор обмена между кинетической и потенциальной энергиями (см. ниже, а также пункт 3.2.7).

3.3.6. Переход к задаче Коши для системы дифференциально-операторных уравнений первого порядка. Вернемся теперь к рассмотрению первой вспомогательной задачи, т. е. задачи (3.202), считая, что первая часть $\vec{h}$ в уравнении является элементом пространства $\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$. Покажем, что эту задачу можно кратко переписать в виде

$$\widetilde{A}\vec{u} = \vec{h}, \quad \vec{u} \in \mathcal{D}(\widetilde{A}), \quad \vec{h} \in \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \quad (3.230)$$

где $\widetilde{A}$ — оператор гильбертовой пары $(\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1);\ \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1))$, (см. (3.157), (3.158)).

С этой целью воспользуемся формулами Грина (см. [18, с. 81]) для векторного оператора Лапласа применительно к областям Ω_{1k} (с липшицевыми границами, разбитыми на липшицевые куски).

Имеем для соленоидальных полей:

$$\mu_1 E_1(\vec{\eta}_1, \vec{u}_1) = \langle \vec{\eta}_1, -\mu_1 P_{0,S_{11}}(\Delta \vec{u}_1) + \nabla \widetilde{p}_{11} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega_{11})} +$$
$$+ \sum_{j=1}^3 \langle \gamma_{S_{11}} \eta_{1j},\ \sum_{k=1}^3 (\mu_1 \tau_{jk}(\vec{u}_1) - \widetilde{p}_{11}\delta_{jk}) \cos(\vec{n}, \hat{\ } \vec{e}_1^{\,k}) \rangle_{L_2(S_{11})} +$$
$$+ \sum_{j=1}^3 \langle \gamma_{\Gamma_1} \eta_{1j},\ \sum_{k=1}^3 (\mu_1 \tau_{jk}(\vec{u}_1) - \widetilde{p}_{11}\delta_{jk}) \cos(\vec{n}, \hat{\ } \vec{e}_1^{\,k}) \rangle_{L_2(\Gamma_1)}; \quad (3.231)$$

$$\mu_2 E_2(\vec{\eta}_2, \vec{u}_2) = \langle \vec{\eta}_2, -\mu_2 P_{0,S_{12}}(\Delta \vec{u}_2) + \nabla \widetilde{p}_{12} \rangle_{\vec{L}_2(\Omega_{12})} +$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{S_{12}}\eta_{2j},\ \sum_{k=1}^{3}(\mu_2\tau_{jk}(\vec{u}_2)-\widetilde{p}_{12}\delta_{jk})\cos(\vec{n},^\wedge \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(S_{12})}+$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{\Gamma_2}\eta_{2j},\ \sum_{k=1}^{3}(\mu_2\tau_{jk}(\vec{u}_2)-\widetilde{p}_{12}\delta_{jk})\cos(\vec{n},^\wedge \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(\Gamma_2)}-$$
$$-\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{\Gamma_1}\eta_{2j},\ \sum_{k=1}^{3}(\mu_2\tau_{jk}(\vec{u}_2)-\widetilde{p}_{12}\delta_{jk})\cos(\vec{n},^\wedge \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(\Gamma_1)};\quad (3.232)$$

$$\mu_3E_3(\vec{\eta}_3,\vec{u}_3)=\langle\vec{\eta}_3,-\mu_3P_{0,S_{13}}(\Delta\vec{u}_3)+\nabla\widetilde{p}_{13}\rangle_{\vec{L}_2(\Omega_{13})}+$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{S_{13}}\eta_{3j},\ \sum_{k=1}^{3}(\mu_3\tau_{jk}(\vec{u}_3)-\widetilde{p}_{13}\delta_{jk})\cos(\vec{n},^\wedge \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(S_{13})}-$$
$$-\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{\Gamma_2}\eta_{3j},\ \sum_{k=1}^{3}(\mu_3\tau_{jk}(\vec{u}_3)-\widetilde{p}_{13}\delta_{jk})\cos(\vec{n},^\wedge \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(\Gamma_2)}.\quad (3.233)$$

Из этих формул следует, что для полей $\vec{u}=\{\vec{u}_k\}_{k=1}^{3}\in\vec{J}^{1}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)$ справедлива формула Грина

$$\sum_{k=1}^{3}\mu_kE_k(\vec{\eta}_k,\vec{u}_k)=\sum_{k=1}^{3}\langle\vec{\eta}_k,-\mu_kP_{0,S_{1k}}(\Delta\vec{u}_k)+\nabla\widetilde{p}_{1k}\rangle_{\vec{L}_2(\Omega_{1k})}+$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{\Gamma_1}\eta_{1j},\ \sum_{k=1}^{3}\{(\mu_1\tau_{jk}(\vec{u}_1)-\widetilde{p}_{11}\delta_{jk})-(\mu_2\tau_{jk}(\vec{u}_2)-\widetilde{p}_{12}\delta_{jk})\}\cos(\vec{n},^\wedge \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(\Gamma_1)}+\quad (3.234)$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\langle\gamma_{\Gamma_2}\eta_{2j},\ \sum_{k=1}^{3}\{(\mu_2\tau_{jk}(\vec{u}_2)-\widetilde{p}_{12}\delta_{jk})-(\mu_3\tau_{jk}(\vec{u}_3)-\widetilde{p}_{13}\delta_{jk})\}\cos(\vec{n},^\wedge \vec{e}_1^{\,k})\rangle_{L_2(\Gamma_2)}.$$

Отсюда, а также из формулировки задачи (3.202) и определения обобщенного решения краевых задач на основе гильбертовой пары пространств получаем, что для задачи (3.202) обобщенное решение при

$$\vec{h}:=-\frac{d\vec{u}}{dt}-P_0\left\{P_{0,S_{1k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{1k}\right)\right\}_{k=1}^{3}-\left\{p_k^{-1}\nabla p_{2k}\right\}_{k=1}^{3}+P_0\left\{\vec{f}_k\right\}_{k=1}^{3}\in\vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)\quad (3.235)$$

определяется из тождества

$$\sum_{k=1}^{3}\mu_kE_k(\vec{\eta}_k,\vec{u}_k)=\sum_{k=1}^{3}\rho_k(\vec{\eta}_k,\vec{h}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_{1k})}=(\vec{\eta},\vec{h})_{\vec{L}_2(\Omega_1)},\quad\forall\vec{\eta}\in\vec{J}^{1}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1).\quad (3.236)$$

В силу (3.160) здесь левая часть для $\vec{u}\in\mathcal{D}(\widetilde{A})$ равна

$$(\vec{\eta},\vec{u})_{\vec{J}^{1}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)}=(\widetilde{A}^{1/2}\vec{\eta},\widetilde{A}^{1/2}\vec{u})_{\vec{J}^{1}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)}=(\vec{\eta},\widetilde{A}\vec{u})_{\vec{J}^{1}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1)}.\quad (3.237)$$

Таким образом, первая вспомогательная задача (3.202) равносильна соотношению (3.230) при $\vec{h}$ из (3.235). Вспоминая еще представление (3.209) для решения второй вспомогательной задачи (3.203), приходим к выводу, что уравнения движения системы из трех вязких жидкостей в полости маятника приводятся к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\vec{u}}{dt}+\widetilde{A}\vec{u}+P_0\left\{P_{0,S_{1k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{1k}\right)\right\}_{k=1}^{3}+gQ\left\{\zeta_j+\theta_j((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\right\}_{j=1}^{2}=P_0\left\{\vec{f}_k\right\}_{k=1}^{3}.\quad (3.238)$$

Вместе с уравнением движения маятника (см. (3.132)), т. е. соотношением

$$\begin{gathered}\vec{J}_1 \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \left(\vec{r}_{1k} \times \frac{d\vec{u}_k}{dt}\right) d\Omega_{1k} + \alpha_1 \vec{\omega}_1 + g m_1 l_1 P_2 \vec{\delta}_1 - \\ - \sum_{j=1}^{2} (\rho_j - \rho_{j+1}) \int\limits_{\Gamma_j} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{1j}) \zeta_j d\Gamma_j = \vec{M}_1(t),\end{gathered} \tag{3.239}$$

можно эти оба соотношения кратко записать в виде операторного уравнения

$$C_1 \frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + g B_{12} z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0. \tag{3.240}$$

Здесь $z_1 := (\vec{u};\ \vec{\omega}_1)^\tau \in \mathcal{H}_1 = \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3$ — динамическая переменная изучаемой системы, $z_2 := \left(\{\zeta_j\}_{j=1}^2;\ P_2 \vec{\delta}_1\right)^\tau \in \mathcal{H}_2 = (\oplus_{j=1}^2 L_{2,\Gamma_j}) \oplus \mathbb{C}^2$ — кинематическая переменная, а

$$f_1(t) := \left(P_0 \left\{\vec{f}_k\right\}_{k=1}^3;\ \vec{M}_1(t)\right)^\tau \tag{3.241}$$

— заданная функция времени со значениями в $\mathcal{H}_1$. Далее, операторные коэффициенты из (3.240) задаются формулами (см. также (3.209))

$$C_1 z_1 := \begin{pmatrix} \{\vec{u}_k\}_{k=1}^3 + P_0 \left\{P_{0,S_{1k}} \left(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\right)\right\}_{k=1}^3 \\ \vec{J}_1 \vec{\omega}_1 + \sum\limits_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \left(\vec{r}_{1k} \times \vec{u}_k\right) d\Omega_{1k} \end{pmatrix}, \tag{3.242}$$

$$A_1 := \operatorname{diag}(\widetilde{A}; \alpha_1), \quad \mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(\widetilde{A}) \oplus \mathbb{C}^3, \tag{3.243}$$

$$B_{12} z_2 := \begin{pmatrix} Q \left\{\zeta_j + \theta_j((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{1j}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})\right\}_{j=1}^2 \\ -\sum\limits_{j=1}^{2} (\rho_j - \rho_{j+1}) \int\limits_{\Gamma_j} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{1j}) \zeta_j \, d\Gamma_j + m_1 l_1 P_2 \vec{\delta}_1 \end{pmatrix}, \tag{3.244}$$

$$\mathcal{D}(B_{12}) = \mathcal{D}(Q) \oplus \mathbb{C}^2 = (H_{\Gamma_1}^{1/2} \times H_{\Gamma_2}^{1/2}) \oplus \mathbb{C}^2. \tag{3.245}$$

Напомним, что символом $\vec{J}_1$ в (3.239) обозначен тензор инерции (относительно точки подвеса O_1) тела с жидкостями в состоянии равновесия, см. (3.132).

3.3.7. Итоговая формулировка задачи Коши. Свойства операторных коэффициентов. Изучим сначала свойства операторных коэффициентов в уравнении (3.240).

Лемма 3.18. *Оператор C_1 из* (3.242) *является оператором кинетической энергии гидромеханической системы. Он ограничен, самосопряжен и положительно определен в $\mathcal{H}_1 = \vec{J}_{0,S_1,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3$.*

Доказательство. Ограниченность C_1 в $\mathcal{H}_1$ следует из его определения. Проверим другие сформулированные свойства.

Используя равенство (см. (3.132))

$$\left(\vec{J}_1 \vec{\omega}_1\right) \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2 \, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}|^2 \, d\Omega_{1k}, \tag{3.246}$$

вычислим квадратичную форму оператора C_1. Имеем

$$\begin{aligned}(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} &= \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_{1k} + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \left(P_{0,S_{1k}}\left(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\right)\right) \cdot \overline{\vec{u}_k}\, d\Omega_{1k} + \\ &+ \left(\vec{J}_1 \vec{\omega}_1\right) \cdot \overline{\vec{\omega}_1} + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \left(\vec{r}_{1k} \times \vec{u}_k\right) d\Omega_{1k} \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \ldots = \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2\, d\Omega_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \left\{|\vec{u}_k|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}) \cdot \overline{\vec{u}_k} + (\vec{r}_{1k} \times \vec{u}_k) \cdot \overline{\vec{\omega}_1} + |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}|^2\right\} d\Omega_{1k} = \\ &= \rho_0 \int\limits_{\Omega_0} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_0|^2\, d\Omega_0 + \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} |\vec{u}_k + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}|^2\, d\Omega_{1k} \geqslant 0.\end{aligned} \tag{3.247}$$

Отсюда при условии $(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = 0$ получаем, что $\vec{\omega}_1 = \vec{0}$, $\vec{u}_k \equiv \vec{0}$ $(k = 1, 2, 3)$, т. е. $z_1 = 0$. Значит, C_1 — положительный оператор. Так как он имеет структуру $C_1 = C_{10} + C_{11}$, $C_{10} = \operatorname{diag}\left(\{I_k\}_{k=1}^{3}; \vec{J}_1\right) \gg 0$ (поскольку $\vec{J}_1 \gg 0$ в $\mathbb{C}^3$), а C_{11} — конечномерный оператор, то $C_1 \gg 0$ в $\mathcal{H}_1$.

Отметим, наконец, что квадратичная форма (3.247) равна удвоенной кинетической энергии системы, т. е. C_1 действительно является оператором кинетической энергии. □

Лемма 3.19. *Оператор* A_1 *из* (3.243) *является оператором диссипации энергии системы. Он неограничен, самосопряжен и положительно определен в* $\mathcal{H}_1$, *а его обратный оператор положителен и компактен в* $\mathcal{H}_1$.

Доказательство. Свойства оператора A_1 следуют из свойств оператора $\widetilde{A}$ (см. пункт 3.3.2) и того, что $\alpha_1 > 0$.

Его квадратичная форма

$$(A_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \sum_{k=1}^{3} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 \tag{3.248}$$

равна скорости диссипации энергии в системе. □

Лемма 3.20. *Операторы* $B_{12} : \mathcal{D}(B_{12}) \subset \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ *и* $B_{21} : \mathcal{D}(B_{21}) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, *заданные формулами* (3.244), (3.245) *и* (3.228), (3.229) *соответственно, являются кососамосопряженными*:

$$(z_1, B_{12} z_2)_{\mathcal{H}_1} = -(B_{21} z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2}, \quad \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}), \quad \forall z_2 \in \mathcal{D}(B_{12}). \tag{3.249}$$

Доказательство. Проверим это свойство поэлементно.

1°. Пусть $z_1 = \left(\{\vec{u}_k\}_{k=1}^{3}; \vec{0}\right)^{\tau} \in \mathcal{D}(B_{21})$, $z_2 = \left(\left\{\vec{\zeta}_j\right\}_{j=1}^{2}; \vec{0}\right)^{\tau} \in \mathcal{D}(B_{12})$, тогда $Q\{\zeta_j\}_{j=1}^{2} = \left\{\rho_k^{-1} \nabla \varphi_k\right\}_{k=1}^{3}$ — решение вспомогательной задачи (3.203) (см. (3.209)). Имеем

$$\begin{aligned}(z_1, B_{12} z_2)_{\mathcal{H}_1} &= \left(\{\vec{u}_k\}_{k=1}^{3}; Q\{\zeta_j\}_{j=1}^{2}\right)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \sum_{k=1}^{3} \rho_k \int\limits_{\Omega_{1k}} \vec{u}_k \cdot (\rho_k^{-1} \overline{\nabla \varphi_k})\, d\Omega_{1k} = \ldots = \\ &= \left[(\gamma_{n,1} \vec{u}_1, \gamma_{11} \varphi_1)_{L_2(\Gamma_1)} - (\gamma_{n,1} \vec{u}_2, \gamma_{12} \varphi_2)_{L_2(\Gamma_1)}\right] + \left[(\gamma_{n,2} \vec{u}_2, \gamma_{22} \varphi_2)_{L_2(\Gamma_2)} - (\gamma_{n,2} \vec{u}_3, \gamma_{23} \varphi_3)_{L_2(\Gamma_2)}\right] = \\ &= (\gamma_{n,1} \vec{u}_1, (\rho_1 - \rho_2) \zeta_1)_{L_2(\Gamma_1)} + (\gamma_{n,2} \vec{u}_2, (\rho_2 - \rho_3) \zeta_2)_{L_2(\Gamma_2)} = \sum_{j=1}^{2} (\rho_j - \rho_{j+1}) \left(\gamma_{n,j} \vec{u}_j, \zeta_j\right)_{L_2(\Gamma_j)}.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(B_{21}z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2} = \Big(-\big\{(\rho_j - \rho_{j+1})\gamma_{n,j}\vec{u}_k\big\}_{j=1}^2, \{\zeta_j\}_{j=1}^2\Big)_{L_2(\Gamma_1)\oplus L_2(\Gamma_2)} =$$
$$= -(\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\gamma_{n,1}\vec{u}_1)\overline{\zeta_1}\,d\Gamma_1 - (\rho_2 - \rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\gamma_{n,2}\vec{u}_2)\overline{\zeta_2}\,d\Gamma_2 =$$
$$= -\sum_{j=1}^2(\rho_j - \rho_{j+1})\,(\gamma_{n,j}\vec{u}_j, \zeta_j)_{L_2(\Gamma_j)} = -(z_1, B_{12}z_2)_{\mathcal{H}_1}.$$

2°. Пусть теперь $z_1 = \Big(\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3; \vec{0}\Big)^\tau$, $z_2 = \Big(0;\ P_2\vec{\delta}_1\Big)^\tau$. Тогда с учетом соотношения $Q\{\theta_j((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\}_{j=1}^2 = \{\rho_k^{-1}\nabla\psi_k\}_{k=1}^3$, где $\Delta\psi_k = 0$ (в Ω_k), $\rho_k^{-1}\dfrac{\partial\psi_k}{\partial n} = 0$ (на S_{1k}), $\rho_1^{-1}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial n} = \rho_2^{-1}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial n}$ (на Γ_1), $\rho_2^{-1}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial n} = \rho_3^{-1}\dfrac{\partial\psi_3}{\partial n}$ (на Γ_2), $\vec{n} = \vec{e}_1^{\,3}$, $\psi_1 - \psi_2 = (\rho_1 - \rho_2)\theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})$ (на Γ_1), $\psi_2 - \psi_3 = (\rho_2 - \rho_3)\theta_2((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})$ (на Γ_2), имеем

$$(z_1, B_{12}z_2)_{\mathcal{H}_1} = \Big(\{\vec{u}_k\}_{k=1}^3; Q\{\theta_j((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\}_{j=1}^2\Big)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} =$$
$$= \sum_{j=1}^2(\rho_j - \rho_{j+1})\Big(\gamma_{n,j}\vec{u}_j, \theta_j(P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\Big)_{L_2(\Gamma_j)}.$$

Далее,

$$(B_{21}z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2} = (\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\gamma_{n,1}\vec{u}_1 d\Gamma_1 \cdot \overline{P_2\vec{\delta}_1} + (\rho_2 - \rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{12})\gamma_{n,2}\vec{u}_2 d\Gamma_2 \cdot \overline{P_2\vec{\delta}_2} = \ldots =$$
$$= -\sum_{j=1}^2(\rho_j - \rho_{j+1})\Big(\gamma_{n,j}\vec{u}_j, \theta_j(P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\Big)_{L_2(\Gamma_j)} = -(z_1, B_{12}z_2)_{\mathcal{H}_1}.$$

3°. Рассмотрим вариант $z_1 = (\vec{0}, \vec{\omega}_1)^\tau$, $z_2 = (\{\zeta_j\}_{j=1}^2; \vec{0})^\tau$. Тогда

$$(z_1, B_{12}z_2)_{\mathcal{H}_1} = \vec{\omega}_1 \cdot \big[-(\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\overline{\zeta_1}\,d\Gamma_1 - (\rho_2 - \rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{12})\overline{\zeta_2}\,d\Gamma_2\big] =$$
$$= (\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\theta_1((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\overline{\zeta_1}\,d\Gamma_1 + (\rho_2 - \rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}\theta_2((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\overline{\zeta_2}\,d\Gamma_2 =$$
$$= \sum_{j=1}^2(\rho_j - \rho_{j+1})\,\big(\theta_j((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3}), \zeta_j\big)_{L_2(\Gamma_j)};$$

$$(B_{21}z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2} = -\Big(\big\{(\rho_j - \rho_{j+1})\theta_j((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3}), \zeta_j\big)_{L_2(\Gamma_j)}, \{\zeta_j\}_{j=1}^2\Big)_{L_2(\Gamma_1)\oplus L_2(\Gamma_2)} =$$
$$= -(\rho_1 - \rho_2)\int\limits_{\Gamma_1}\theta_1((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\overline{\zeta_1}\,d\Gamma_1 - (\rho_2 - \rho_3)\int\limits_{\Gamma_2}\theta_2((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\overline{\zeta_1}\,d\Gamma_2 =$$
$$= -\sum_{j=1}^2(\rho_j - \rho_{j+1})\,\big(\theta_j((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1j})\cdot\vec{e}_1^{\,3}), \zeta_j\big)_{L_2(\Gamma_j)} = -(z_1, B_{12}z_2)_{\mathcal{H}_1}.$$

4°. Последний вариант: $z_1 = (\vec{0}; \vec{\omega}_1)^\tau$, $z_2 = (\vec{0}, P_2\vec{\delta}_1)^\tau$. Имеем

$$(z_1, B_{12}z_2)_{\mathcal{H}_1} = \vec{\omega}_1 \cdot m_1 l_1\overline{P_2\vec{\delta}_1} = m_1 l_1 P_2\vec{\omega}_1 \cdot \overline{P_2\vec{\delta}_1}, \quad (B_{21}z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2} = -m_1 l_1 P_2\vec{\omega}_1 \cdot \overline{P_2\vec{\delta}_1}.$$

$\square$

Опираясь на доказанные утверждения в виде предыдущих лемм, сформулируем итоговый вывод рассмотрения начально-краевой задачи о малых движениях маятника с полостью, заполненной тремя несмешивающимися вязкими жидкостями.

Теорема 3.3. *Задача* (3.132)–(3.140) *равносильна задаче Коши для системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} &C_1\frac{dz_1}{dt}+A_1z_1+gB_{12}z_2=f_1(t), \quad z_1(0)=z_1^0, \\ &gC_2\frac{dz_2}{dt}+gB_{21}z_1=0, \quad z_2(0)=z_2^0, \end{aligned} \tag{3.250}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}:=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$, *а также тривиальной связи*

$$\frac{d}{dt}\delta_1^3(t)=\omega_1^3(t), \quad \delta_1^3(0)=(\delta_1^3)^0. \tag{3.251}$$

Операторные коэффициенты в (3.250) *имеют отчетливый физический смысл*: C_1 — *оператор кинетической энергии,* C_2 — *оператор потенциальной энергии,* A_1 — *оператор диссипации энергии.*

Коротко задачу (3.250) можно переписать в виде

$$C\frac{dz}{dt}+Az+gBz=f(t), \quad z(0)=z^0, \tag{3.252}$$

$$z=(z_1;z_2)^\tau\in H=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2, \quad f(t)=(f_1(t);0)^\tau, \tag{3.253}$$

$$C:=\operatorname{diag}(C_1;gC_2), \quad A:=\operatorname{diag}(A_1;0), \quad B=-B^*=\begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & 0\end{pmatrix}. \tag{3.254}$$

При этом C — оператор полной энергии системы, A — оператор диссипации энергии, а оператор

$$B:\mathcal{D}(B_{21})\oplus\mathcal{D}(B_{12})\subset\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2=\mathcal{H}\to\mathcal{H} \tag{3.255}$$

можно назвать оператором обмена между кинетической и потенциальной энергиями.

Подводя итоги рассмотрения трех вспомогательных начально-краевых задач этого пункта, приходим к следующему выводу. Каждая из этих задач приводится к исследованию задачи Коши вида (3.250) в соответственно подобранном гильбертовом пространстве: задача (3.1)–(3.5) о малых движениях маятника с полостью, целиком заполненной однородной идеальной жидкостью — к задаче Коши (3.14), задача (3.32)–(3.38) о малых движениях маятника с полостью, заполненной двумя несмешивающимися идеальными жидкостями — к задаче Коши (3.114), а задача (3.132)–(3.140) о малых движениях маятника с полостью, заполненной тремя несмешивающимися вязкими жидкостями — к задаче Коши (3.250). Кроме того, в каждой из этих задач дополнительно рассматривается кинематическая связь вида (3.251).

Далее будет показано, что и общая исходная задача (2.3)–(2.20) о малых движениях трех сочлененных маятников с полостями, заполненными одной или несколькими идеальными либо вязкими жидкостями, также приводится к задаче Коши вида (3.250) с аналогичными свойствами операторных коэффициентов.

4. Исследование общей начально-краевой задачи о колебаниях системы из трех сочлененных маятников

Перейдем теперь к изучению исходной начально-краевой задачи (2.3)–(2.20), опираясь на построения, проведенные выше для соответствующих вспомогательных задач для одиночных маятников.

4.1. Применение метода ортогонального проектирования. Рассмотрим сначала наиболее простую проблему: уравнение движения идеальной жидкости в полости третьего маятника и уравнение движения этого маятника (см. (2.8), (2.5)). Имеем

$$\frac{d\vec{u}_{31}}{dt}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{31}+\rho_{31}^{-1}\nabla p_{31}=\vec{f}_{31} \quad (\text{в } \Omega_{31}), \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
&\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\vec r_{30}\times\left(\frac{d\vec\omega_1}{dt}\times\vec h_1+\frac{d\vec\omega_2}{dt}\times\vec h_2+\frac{d\vec\omega_3}{dt}\times\vec r_{30}\right)d\Omega_{30}+\\
&+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\vec r_{31}\times\left(\frac{d\vec\omega_1}{dt}\times\vec h_1+\frac{d\vec\omega_2}{dt}\times\vec h_2+\frac{d\vec\omega_3}{dt}\times\vec r_{31}\right)d\Omega_{31}+\\
&+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\vec r_{31}\times\frac{d\vec u_{31}}{dt}\,d\Omega_{31}+\alpha(\vec\omega_3-\vec\omega_2)+gm_3l_3P_2\vec\delta_3=\\
&+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec r_{30}\times\vec f_{30})\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec r_{31}\times\vec f_{31})\,d\Omega_{31}=:\vec M_3(t).
\end{aligned}\tag{4.2}$$

Введем, опираясь на ортогональное разложение

$$\vec L_2(\Omega_{31})=\vec J_0(\Omega_{31})\oplus\vec G(\Omega_{31}),\tag{4.3}$$

$$\vec J_0(\Omega_{31})=\left\{\vec u_{31}\in\vec L_2(\Omega_{31}):\operatorname{div}\vec u_{31}=0\ (\text{в }\Omega_{31}),\quad \vec u_{31}\cdot\vec n_{31}=0\ (\text{на }S_{31}=\partial\Omega_{31})\right\},\tag{4.4}$$

$$\vec G(\Omega_{31})=\left\{\nabla p_{31}\in\vec L_2(\Omega_{31}):\int\limits_{S_{31}}p_{31}\,dS_{31}=0\right\},\tag{4.5}$$

(см. (3.9), (3.10)), ортопроекторы

$$P_{0,3}:\vec L_2(\Omega_{31})\to\vec J_0(\Omega_{31}),\quad P_{G,3}:\vec L_2(\Omega_{31})\to\vec G(\Omega_{31}),\tag{4.6}$$

и напомним, что по постановке задачи (см. (2.8), (2.11)) $\vec u_{31}$ является функцией переменной t со значениями в $\vec J_0(\Omega_{31})$, а ∇p_{31} — функция t со значениями в $\vec G(\Omega_{31})$.

Применяя операторы $P_{0,3}$ и $P_{G,3}$ к обеим частям уравнения (4.1), получим соотношения

$$\frac{d\vec u_{31}}{dt}+P_{0,3}\left(\frac{d\vec\omega_1}{dt}\times\vec h_1+\frac{d\vec\omega_2}{dt}\times\vec h_2+\frac{d\vec\omega_3}{dt}\times\vec r_{31}\right)=P_{0,3}\vec f_{31},\tag{4.7}$$

$$P_{G,3}\left(\frac{d\vec\omega_1}{dt}\times\vec h_1+\frac{d\vec\omega_2}{dt}\times\vec h_2+\frac{d\vec\omega_3}{dt}\times\vec r_{31}\right)+\rho_{31}^{-1}\nabla p_{31}=P_{G,3}\vec f_{31}.\tag{4.8}$$

Из (4.7) получаем поле скоростей в области Ω_{31}:

$$\frac{d\vec u_{31}}{dt}=-P_{0,3}\left(\frac{d\vec\omega_1}{dt}\times\vec h_1+\frac{d\vec\omega_2}{dt}\times\vec h_2+\frac{d\vec\omega_3}{dt}\times\vec r_{31}\right)+P_{0,3}\vec f_{31},\tag{4.9}$$

а из (4.8) — поле давлений, если известны угловые скорости в каждом маятнике. Подставляя (4.9) в (4.2), приходим к уравнению движения третьего маятника в следующем виде (см. (3.14)):

$$\begin{aligned}
&\left(\vec J_{\text{т},3}+\vec J_{\text{пр},3}\right)\frac{d\vec\omega_3}{dt}+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\left(\vec r_{30}\left(\frac{d\vec\omega_1}{dt}\times\vec h_1+\frac{d\vec\omega_2}{dt}\times\vec h_2\right)\right)d\Omega_{30}+\\
&+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\left(\vec r_{31}\times P_{G,3}\left(\frac{d\vec\omega_1}{dt}\times\vec h_1+\frac{d\vec\omega_2}{dt}\times\vec h_2\right)\right)d\Omega_{31}+\alpha_3(\vec\omega_3-\vec\omega_2)+gm_3l_3P_2\vec\delta_3=\\
&=\vec M_{3,\text{пр}}(t):=\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec r_{30}\times\vec f_{30})\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec r_{31}\times P_{G,3}\vec f_{31})\,d\Omega_{31},
\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$\vec J_{\text{т},3}\vec\omega_3:=\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\left(\vec r_{30}\times(\vec\omega_3\times\vec r_{30})\right)d\Omega_{30},\quad \vec J_{\text{пр},3}\vec\omega_3:=\rho_{31}\int\limits_{\Omega_3}\left(\vec r_{31}\times P_{G,3}(\vec\omega_3-\vec\omega_2)\right)d\Omega_{31},\tag{4.11}$$

где $\vec J_{\text{т},3}$ — момент инерции третьего маятника, отвечающий его твердой части Ω_{30}, а $\vec J_{\text{пр},3}$ — приведенный момент инерции, отвечающий его жидкой части Ω_{31}.

Таким образом, движение третьего маятника с жидкостью при полном заполнении области Ω_{31} приводится к его движению как твердого тела с видоизмененными характеристиками: приведенному моменту инерции $\vec J_{\text{пр},3}$ и приведенному внешнему полю $\vec M_{3,\text{пр}}(t)$.

Перейдем теперь к рассмотрению уравнений движения жидкостей в первом маятнике и уравнению движения этого маятника (см. (2.6), (2.3)). Имеем:

$$\frac{d}{dt}\left\{\vec{u}_{1k}\right\}_{k=1}^{2}+\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{1k}\right\}_{k=1}^{2}+\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla p_{1k}\right\}_{k=1}^{2}=\left\{\vec{f}_{1k}\right\}_{k=1}^{2}, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
&\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}\left(\vec{r}_{10}\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{10}\right)\right)d\Omega_{10}+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}\left(\vec{r}_{1k}\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_{1k}\right)\right)d\Omega_{1k}+\\
&+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}\left(\vec{r}_{1k}\times\frac{d\vec{u}_{1k}}{dt}\right)d\Omega_{1k}+\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}\left(\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2\right)\right)d\Omega_{20}+\\
&+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}\left(\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\right)\right)d\Omega_{2k}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}\left(\vec{h}_1\times\frac{d\vec{u}_{2k}}{dt}\right)d\Omega_{2k}+\\
&+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\left(\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{30}\right)\right)d\Omega_{30}+\\
&+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\left(\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_{31}\right)\right)d\Omega_{31}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\left(\vec{h}_1\times\frac{d\vec{u}_{31}}{dt}\right)d\Omega_{31}+\\
&+\alpha_1\vec{\omega}_1-\alpha_2(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1)+g(m_1l_1+h_1(m_2+m_3))P_2\vec{\delta}_1-g(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_{11}\,d\Gamma_{11}=\\
&=\int\limits_{G_1}(\vec{r}_1\times\vec{f}_1)\,dm_1+\int\limits_{G_2}(\vec{h}_1\times\vec{f}_2)\,dm_2+\int\limits_{G_3}(\vec{h}_1\times\vec{f}_3)\,dm_3=:\vec{M}_1(t).
\end{aligned}\tag{4.13}$$

Здесь $\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^{2}$ — наборы полей скоростей жидкости в областях Ω_{1k}, $k=1,2$, $\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla p_{1k}\right\}_{k=1}^{2}$ — соответствующие наборы для давлений. Напомним (см. пункт 3.2.3), что в пространстве $\vec{L}_2(\Omega_1)=\vec{L}_2(\Omega_{11})\oplus\vec{L}_2(\Omega_{12})$ со скалярным произведением (3.41), т. е.

$$(\vec{u}_1,\vec{v}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)}:=\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}\vec{u}_{1k}\cdot\overline{\vec{v}_{1k}}\,d\Omega_{1k},\quad \vec{u}_1=\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^{2},\ \vec{v}_1=\{\vec{v}_{1k}\}_{k=1}^{2}, \tag{4.14}$$

имеет место ортогональное разложение (3.42), (3.48):

$$\vec{L}_2(\Omega_1)=\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma_{11}}, \tag{4.15}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_1)=\vec{J}_0(\Omega_{11})\oplus\vec{J}_0(\Omega_{12}), \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned}
\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1):=\Big\{&\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^{2}:\quad \Delta\Phi_{1k}=0\ (\text{в }\Omega_{1k}),\quad \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n}=0\ (\text{на }S_{1k}),\\
&\rho_{11}^{-1}\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial n_{11}}=\rho_{12}^{-1}\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial n_{11}},\quad \vec{n}_{11}=\vec{e}_1^{\,3}\ (\text{на }\Gamma_{11}),\quad \int\limits_{\Gamma_{11}}\Phi_{1k}d\Gamma_{11}=0,\quad k=1,2\Big\},
\end{aligned}\tag{4.17}$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1):=\Big\{\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\psi_{1k}\}_{k=1}^{2}\in\vec{L}_2(\Omega_1):\psi_{11}-\psi_{12}=0\quad(\text{на }\Gamma_{11})\Big\}. \tag{4.18}$$

По постановке задачи набор полей скоростей в первом маятнике, т. е. $\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^{2}$, является функцией t со значениями в $\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, а набор полей давлений — функцией t со значениями в $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1)$. Поэтому, как в пункте 3.2.4, будем искать эти поля в виде (3.50), (3.51), т. е.

$$\{\vec{u}_{1k}\}_{k=1}^{2}=\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^{2}+\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^{2},\quad \{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^{2}\in\vec{J}_0(\Omega_1),\quad \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^{2}\in\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla p_{1k}\right\}_{k=1}^{2}=\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\varphi_{1k}\right\}_{k=1}^{2}+\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\psi_{1k}\right\}_{k=1}^{2},\\
&\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\varphi_{1k}\right\}_{k=1}^{2}\in\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1),\quad \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\psi_{1k}\right\}_{k=1}^{2}\in\vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1).
\end{aligned}\tag{4.20}$$

Введем теперь, как в пункте 3.2.4, ортопроекторы

$$P_{0,1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{J}_0(\Omega_1), \quad P_{h,S_1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad P_{0,\Gamma_{11}} : \vec{L}_2(\Omega_1) \to \vec{G}_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1), \tag{4.21}$$

отвечающие разложению (4.15)–(4.18), и подействуем ими на обе части уравнения (4.12). Будем иметь соотношения

$$\frac{d}{dt}\left\{\vec{w}_{1k}\right\}_{k=1}^2 + P_{0,1}\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k}\right\}_{k=1}^2 = P_{0,1}\left\{\vec{f}_{1k}\right\}_{k=1}^2, \tag{4.22}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^2 + P_{h,S_1}\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k}\right\}_{k=1}^2 + \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\varphi_{1k}\right\}_{k=1}^2 = P_{h,S_1}\left\{\vec{f}_{1k}\right\}_{k=1}^2, \tag{4.23}$$

$$P_{0,\Gamma_{11}}\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_{1k}\right\}_{k=1}^2 + \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\psi_{1k}\right\}_{k=1}^2 = P_{0,\Gamma_{11}}\left\{\vec{f}_{1k}\right\}_{k=1}^2. \tag{4.24}$$

Снова видим, что поле $\left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\psi_{1k}\right\}_{k=1}^2$ находится из (4.24) по известному полю скорости $\vec{\omega}_1$ и полю внешних сил $\vec{f}_1$. Поэтому далее рассматриваем лишь соотношения (4.22)-(4.23).

Подставляя еще выражение для $d\vec{u}_3/dt$ из (4.9) в (4.13) и используя определение момента инерции для первого маятника, т. е. выражение

$$\vec{J}_1\vec{\omega}_1 := \rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}(\vec{r}_{10} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{10}))\,d\Omega_{10} + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}(\vec{r}_{1k} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}))\,d\Omega_{1k}, \tag{4.25}$$

получим преобразованное уравнение движения первого маятника:

$$\begin{gathered}
\vec{J}_1\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}(\vec{r}_{1k} \times \frac{d}{dt}(\vec{w}_{1k} + \rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}))\,d\Omega_{1k} + \int\limits_{G_2}(\vec{h}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2))\,dm_2 + \\
+ \sum_{k=1}^3 \rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{h}_1 \times \frac{d\vec{\omega}_{2k}}{dt})\,d\Omega_{2k} + \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{30}))\,d\Omega_{30} + \\
+ \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{31}))d\Omega_{31} + \alpha_1\vec{\omega}_1 - \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) + \\
+ g(m_1l_1 + (m_2 + m_3)h_1)P_2\vec{\delta}_1 - g(\rho_{11} - \rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}(\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\zeta_{11}\,d\Gamma_{11} = \int\limits_{G_1}(\vec{r}_1 \times \vec{f}_1)\,dm_1 + \\
+ \int\limits_{G_2}(\vec{h}_1 \times \vec{f}_2)\,dm_2 + \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_1 \times \vec{f}_{30})\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_1 \times P_{G,3}\vec{f}_{31})\,d\Omega_{31} =: \vec{M}_{1,\text{пр}}(t).
\end{gathered} \tag{4.26}$$

Таким образом, преобразованные уравнения движения жидкостей в полости первого маятника и уравнение движения этого маятника — это уравнения (4.22), (4.23) и (4.26).

Перейдем теперь к соответствующим преобразованиям уравнений движения жидкостей во втором маятнике и его уравнения движения (см. (2.7), (2.4)). Уравнения движения жидкостей из (2.7), как и в пункте 3.3.4, перепишем в виде одного соотношения для набора полей скоростей и давлений:

$$\left\{\frac{d\vec{u}_{2k}}{dt}\right\}_{k=1}^3 + \{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1\}_{k=1}^3 + \{\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_{2k}\}_{k=1}^3 + \{\rho_{2k}^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3 - \{\mu_{2k}\rho_{2k}^{-1}\Delta\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3 = \{\vec{f}_{2k}\}_{k=1}^3. \tag{4.27}$$

Далее, считая, что поля $\vec{u}_{2k} \in \vec{J}_{0,S_{2k}}(\Omega_{2k})$,

$$\vec{J}_{0,S_{2k}}(\Omega_{2k}) := \left\{\vec{u}_{2k} \in \vec{L}_2(\Omega_{2k}) : \operatorname{div}\vec{u}_{2k} = 0 \ (\text{в } \Omega_{2k}),\ \gamma_{n,2k}\vec{u}_{2k} := \vec{u}_{2k}\cdot\vec{n}_{2k} = 0 \ (\text{на } S_{2k})\right\}, \tag{4.28}$$

где $\vec{n}_{2k}$ — внешняя нормаль к S_{2k}, введем ортопроекторы

$$P_{0,S_{2k}} : \vec{L}_2(\Omega_{2k}) \to \vec{J}_{0,S_{2k}}(\Omega_{2k}). \tag{4.29}$$

Затем подействуем ими на каждую компоненту в (4.27) и получим уравнение в пространстве

$$\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) := \bigoplus_{k=1}^{3} \vec{J}_{0,S_{2k}}(\Omega_{2k}) \subset \vec{L}_2(\Omega_2); \tag{4.30}$$

это уравнение таково:

$$\begin{gathered}\left\{\frac{d\vec{u}_{2k}}{dt}\right\}_{k=1}^{3} + \left\{P_{0,S_{2k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right)\right\}_{k=1}^{3} + \left\{P_{0,S_{2k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\right)\right\}_{k=1}^{3} + \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\widetilde{p}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} - \\ - \left\{\mu_{2k}\rho_{2k}^{-1}P_{0,S_{2k}}\Delta\vec{u}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} = \left\{P_{0,S_{2k}}\vec{f}_{2k}\right\}_{k=1}^{3}, \quad \rho_{2k}^{-1}\nabla\widetilde{p}_{2k} := \rho_{2k}^{-1}P_{0,S_{2k}}\nabla\widetilde{p}_{2k}, \quad k=1,2,3.\end{gathered} \tag{4.31}$$

Однако, как показано в пункте 3.3.2, набор полей скоростей $\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3}$ должен принадлежать подпространству (см. (3.158))

$$\begin{gathered}\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2) := \Big\{\vec{u}_2 = \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3} \in \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2): \quad \vec{u}_{21}\cdot\vec{n}_{21} = \vec{u}_{22}\cdot\vec{n}_{21} =: \gamma_{n,2}\vec{u}_{22} \ (\text{на } \Gamma_{21}), \\ \vec{u}_{22}\cdot\vec{n}_{22} = \vec{u}_{23}\cdot\vec{n}_{22} =: \gamma_{n,22}\vec{u}_{23} \ (\text{на } \Gamma_{23}),\ \vec{n}_{21} = \vec{n}_{22} = \vec{e}_1^{\,3}\Big\} \subset \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2).\end{gathered} \tag{4.32}$$

При этом действие ортопроектора

$$P_0 := \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \to \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \tag{4.33}$$

описано в пункте 3.3.3 (см. леммы 3.10, 3.11). Действуя теперь оператором P_0 на обе части (4.31), приходим к следующему уравнению в пространстве $\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left\{\vec{u}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} + P_0\left\{P_{0,S_{2k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right)\right\}_{k=1}^{3} + P_0\left\{P_{0,S_{2k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\right)\right\}_{k=1}^{3} + \\ + P_0\left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\widetilde{p}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} - P_0\left\{\mu_{2k}\rho_{2k}^{-1}P_{0,S_{2k}}(\Delta\vec{u}_{2k})\right\}_{k=1}^{3} = P_0\left\{P_{0,S_{2k}}\vec{f}_{2k}\right\}_{k=1}^{3}.\end{gathered} \tag{4.34}$$

Далее осуществим те же преобразования, которые в пункте 3.3.4 были проделаны для случая колебаний одного маятника с полостью, заполненной тремя вязкими жидкостями. Именно, вводим пространство $\vec{J}^1_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$ наборов полей скоростей с конечной скоростью диссипации энергии (см. (3.159)):

$$\vec{J}^1_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2) := \Big\{\vec{u}_2 = \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3} \in \vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2): \gamma_{11}\vec{u}_{21} := \gamma_{12}\vec{u}_{22} \ (\text{на } \Gamma_{11}),\ \gamma_{22}\vec{u}_{22} := \gamma_{23}\vec{u}_{23} \ (\text{на } \Gamma_{22})\Big\}, \tag{4.35}$$

$$\vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2) := \bigoplus_{k=1}^{3} \vec{J}^1_{0,S_{2k}}(\Omega_{2k}), \quad (\vec{u}_2,\vec{v}_2)_{\vec{J}^1_{0,S_2}(\Omega_2)} := \sum_{k=1}^{3}\mu_k E_k(\vec{u}_{2k},\vec{v}_{2k}), \tag{4.36}$$

$$\vec{J}^1_{0,S_{2k}}(\Omega_{2k}) := \Big\{\vec{u}_{2k} \in \vec{H}^1(\Omega_{2k}) : \operatorname{div}\vec{u}_{2k} = 0 \ (\text{в } \Omega_{2k}),\ \vec{u}_{2k} = \vec{0} \ (\text{на } S_{2k})\Big\}, \quad k=1,2,3, \tag{4.37}$$

гильбертову пару пространств

$$\Big(\vec{J}^1_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2);\ \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)\Big) \tag{4.38}$$

и оператор $\widetilde{A}_2$ этой пары (см. (3.160)):

$$\begin{gathered}(\vec{u}_2,\vec{v}_2)_{\vec{J}^1_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)} = \left(\widetilde{A}_2^{1/2}\vec{u}_2, \widetilde{A}_2^{1/2}\vec{v}_2\right)_{\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)} = \sum_{k=1}^{3}\mu_k E_k(\vec{u}_{2k},\vec{v}_{2k}) = \\ = \langle\vec{u}_2, \widetilde{A}_2\vec{u}_2\rangle_{\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)}, \quad \forall\, \vec{u}_2 = \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3},\ \vec{v}_2 = \{\vec{v}_{2k}\}_{k=1}^{3} \in \vec{J}^1_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2).\end{gathered} \tag{4.39}$$

Тогда так же, как в пунктах 3.3.4 и 3.3.6, можно установить, что уравнение (4.31) приводится к дифференциальному уравнению (см. (3.238))

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left\{\vec{u}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} + \widetilde{A_2}\left\{\vec{u}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} + P_0\left\{P_{0,S_{2k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right)\right\}_{k=1}^{3} + P_0\left\{P_{0,S_{2k}}\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_{2k}\right)\right\}_{k=1}^{3} + \\ + gQ_2\left\{\zeta_j + \theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})\right\}_{j=1}^{2} = P_0\left\{P_{0,S_{2k}}\vec{f}_{2k}\right\}_{k=1}^{3},\end{gathered} \tag{4.40}$$

где Q_2 — оператор вспомогательной задачи (3.203) применительно к области $\Omega_2 = \cup_{k=1}^3 \Omega_{2k}$:

$$\begin{aligned}
&\Delta p_{2k} = 0 \ (\text{в } \Omega_{2k}), \quad \frac{\partial p_{2k}}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_{2k}), \quad k = 1,2,3,\\
&\rho_{21}^{-1}\frac{\partial p_{21}}{\partial n} = \rho_{22}^{-1}\frac{\partial p_{22}}{\partial n} \ (\text{на } \Gamma_{21}), \quad \vec{n} = \vec{e}_2^{\,3}, \quad \rho_{22}^{-1}\frac{\partial p_{22}}{\partial n} = \rho_{23}^{-1}\frac{\partial p_{23}}{\partial n} \ (\text{на } \Gamma_{22}), \quad \vec{n} = \vec{e}_1^{\,3},\\
&p_{21} - p_{22} = (\rho_{21} - \rho_{22})\hat{\zeta}_{21} := g(\rho_{21} - \rho_{22})\left[\zeta_{21} + \theta_{21}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{21}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})\right] \ (\text{на } \Gamma_{21}),\\
&p_{22} - p_{23} = (\rho_{22} - \rho_{23})\hat{\zeta}_{22} := g(\rho_{22} - \rho_{23})\left[\zeta_{22} + \theta_{22}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{22}) \cdot \vec{e}_2^{\,3})\right] \ (\text{на } \Gamma_{22}),
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$Q_2 \in \mathcal{L}(H_{\Gamma_{21}}^{1/2} \times H_{\Gamma_{22}}^{1/2};\ \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2)),$$

$$\begin{aligned}
&\vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) := \Big\{\vec{u}_2 = \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3 : \quad \vec{u}_{2k} = \rho_{2k}^{-1}\nabla\varphi_{2k}, \quad \Delta\varphi_{2k} = 0 \ (\text{в } \Omega_{2k}),\\
&\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_{2k}),\ \rho_{21}^{-1}\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial n} = \rho_{22}^{-1}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial n} \ (\text{на } \Gamma_{21}),\ \rho_{22}^{-1}\frac{\partial\varphi_{22}}{\partial n} = \rho_{23}^{-1}\frac{\partial\varphi_{23}}{\partial n} \ (\text{на } \Gamma_{22}),\ \vec{n} = \vec{e}_2^{\,3}\Big\},
\end{aligned} \tag{4.42}$$

$$\{\rho_{2k}^{-1}\nabla p_{2k}\}_{k=1}^3 := gQ_2\left\{\hat{\zeta}_{2j}\right\}_{j=1}^2. \tag{4.43}$$

Преобразуем теперь уравнение движения второго маятника (см. (2.4)), раскрывая смысл обозначений $\int\limits_{G_k} (\dots)\, dm_k$ и используя формулу (4.9). Это приводит к соотношению

$$\begin{aligned}
&\vec{J}_2\frac{d\omega_2}{dt} + \int\limits_{G_2}(\vec{r}_2 \times (\frac{d\omega_1}{dt} \times \vec{h}_1))\, dm_2 + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{r}_{2k} \times \frac{d\vec{u}_{2k}}{dt})\, d\Omega_{2k} +\\
&+ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{30}))\, d\Omega_{30} +\\
&+ \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_2 \times P_{G,3}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{31}))\, d\Omega_{31} + \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) -\\
&- \alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g(m_2 l_2 + m_3 h_2)P_2\vec{\delta}_2 - g\sum_{j=1}^2(\rho_{2,j} - \rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_{2j})\zeta_{2j}\, d\Gamma_{2j} =\\
&= \int\limits_{G_2}(\vec{r}_2 \times \vec{f}_2)\, dm_2 + \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{r}_{30} \times \vec{f}_{30})\, d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_2 \times P_{G,3}\vec{f}_{31})\, d\Omega_{31} =: \vec{M}_{2,\text{пр}}(t).
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Таким образом, поле проектирования уравнений движения жидкостей в полостях маятников и преобразования уравнений движения маятников приходим к системе обыкновенных дифференциально-операторных уравнений первого порядка (4.12), (4.23), (4.26) (первый маятник), (4.34), (4.44) (второй маятник), (4.7), (4.10) (третий маятник), к которым следует еще добавить соответствующие начальные условия.

4.2. Об операторе кинетической энергии системы и его свойствах. Наша цель сейчас — представить выведенную систему уравнений в виде первого дифференциального уравнения вида (1.1) в некотором гильбертовом пространстве с операторными коэффициентами, имеющими отчетливый физический смысл для изучаемой гидромеханической системы из трех сочлененных маятников с жидким наполнением.

Введем сначала совокупность динамических и кинематических переменных таких систем, отвечающих каждому маятнику и всей системы в целом. Именно, будем считать, что искомыми динамическими переменными являются вектор-столбцы

$$\begin{aligned}
&z_1 := (z_{11}; z_{12}; z_{13})^\tau \in \mathcal{H}_1 := \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{13},\\
&z_{11} := \left(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 ; \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^2 ; \vec{\omega}_1\right) \in \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3 = \mathcal{H}_{11},\\
&z_{12} := \left(\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^2 ;\ \vec{\omega}_2\right) \in \vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3 =: \mathcal{H}_{12}, \quad z_{13} := \vec{\omega}_3 \in \mathbb{C}^3 =: \mathcal{H}_{13}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Соответственно кинематическими переменными будем считать

$$\begin{aligned} &z_2 := (z_{21}; z_{22}; z_{23})^\tau \in \mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_{21} \oplus \mathcal{H}_{22} \oplus \mathcal{H}_{23}, \\ &z_{21} := \left(\zeta_{11}; P_2\vec{\delta}_1\right) \in L_{2,\Gamma_{11}} \oplus \mathbb{C}^2 =: \mathcal{H}_{21}, \\ &z_{22} := \left(\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2; P_2\vec{\delta}_2\right) \in \left(\oplus_{j=1}^2 L_{2,\Gamma_{2j}}\right) \oplus \mathbb{C}^2 =: \mathcal{H}_{22}, \quad z_{23} := P_2\vec{\delta}_3 \in \mathbb{C}^2 =: \mathcal{H}_{23}. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Далее, представим совокупность слагаемых в (4.12), (4.29), (4.26), (4.34), (4.44), (4.7), (4.10), содержащих производные по t от динамических переменных, в векторно-матричной форме с помощью операторной матрицы $C^{(1)}$ структурой 3×3, отвечающей ортогональному разложению $\mathcal{H}_1 = \bigoplus_{k=1}^{3} \mathcal{H}_{1k}$. Тогда эти слагаемые будут иметь вид $C^{(1)}dz_1/dt$, причем

$$C^{(1)}z_1 = \begin{pmatrix} C_{11}z_{11} + C_{12}z_{12} + C_{13}z_{13} \\ C_{21}z_{11} + C_{22}z_{12} + C_{23}z_{13} \\ C_{31}z_{11} + C_{32}z_{12} + C_{33}z_{13} \end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

Указанная процедура приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} C_{11}z_{11} = \Big(&\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 + P_{0,1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2;\ \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^2 + P_{h,S_1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2; \\ &\vec{J}_1\vec{\omega}_1 + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k} \int_{\Omega_{1k}} \left((\vec{r}_{1k} + \rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k})\right) d\Omega_{1k} + \int_{G_2} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_2))\, dm_2 + \\ &+ \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\, d\Omega_{31}\Big); \end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned} C_{12}z_{12} = \Big(\vec{0};\ \vec{0};\ &\int_{G_2} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2))\, dm_2 + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} (\vec{h}_1 \times \vec{u}_{2k}) d\Omega_{2k} + \\ &+ \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2))\, d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2))\, d\Omega_{31}\Big); \end{aligned} \tag{4.49}$$

$$C_{13}z_{13} = \Big(\vec{0};\ \vec{0};\ \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30}))\, d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31}))\, d\Omega_{31}\Big); \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned} C_{21}z_{11} = \Big(P_0 &\left\{P_{0,S_{2k}}\left(\omega_1 \times \vec{h}_1\right)\right\}_{k=1}^3;\ \int_{G_2} \left(\vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)\right) dm_2 + \\ &+ \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\, d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_2 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\, d\Omega_{31}\Big); \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned} C_{22}z_{12} = \Big(&\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3 + P_0\{P_{0,S_{2k}}(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k})\}_{k=1}^3;\quad \vec{J}_2\vec{\omega}_2 + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k} \int_{\Omega_{2k}} (\vec{r}_{2k} \times \vec{u}_{2k})\, d\Omega_{2k} + \\ &+ \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2)) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_2 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2))\, d\Omega_{31}\Big); \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$C_{23}z_{13} = \Big(\vec{0};\ \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{h}_2 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30})) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{h}_2 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31}))\, d\Omega_{31}\Big); \tag{4.53}$$

$$C_{31}z_{11} = \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\, d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31} \times P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{h}_1))\, d\Omega_{31}; \tag{4.54}$$

$$C_{32}z_{12} = \rho_{30} \int_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2)) d\Omega_{30} + \rho_{31} \int_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31} \times P_{G,3}(\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2))\, d\Omega_{31}; \tag{4.55}$$

$$C_{33}z_{13} = \left(\vec{J}_{\text{т},3} + \vec{J}_{\text{пр},3}\right)\vec{\omega}_3. \tag{4.56}$$

Опираясь на связи (4.48)–(4.56), установим один из центральных фактов в исследуемой проблеме.

Теорема 4.1. *Оператор* $C^{(1)} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$, *построенный по схеме* (4.47)–(4.56), *является оператором кинетической энергии исследуемой гидромеханической системы. Он ограничен, самосопряжен и положительно определен в пространстве* $\mathcal{H}_1$.

Доказательство. Оно основано на прямом вычислении выражения

$$\begin{aligned}(C^{(1)}z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} &= (C_{11}z_{11}, z_{11})_{\mathcal{H}_{11}} + (C_{12}z_{12}, z_{11})_{\mathcal{H}_{11}} + (C_{13}z_{13}, z_{11})_{\mathcal{H}_{11}} + \\ &+ (C_{21}z_{11}, z_{12})_{\mathcal{H}_{12}} + (C_{22}z_{12}, z_{12})_{\mathcal{H}_{12}} + (C_{23}z_{13}, z_{12})_{\mathcal{H}_{12}} + \\ &+ (C_{31}z_{11}, z_{13})_{\mathcal{H}_{13}} + (C_{32}z_{12}, z_{13})_{\mathcal{H}_{13}} + (C_{33}z_{13}, z_{13})_{\mathcal{H}_{13}}.\end{aligned} \tag{4.57}$$

Перебрасывая ортопроекторы с одного множителя на другой и убирая эти ортопроекторы там, где они совпадают с тождественным оператором в подпространстве, получаем следующие соотношения.

1) $$\begin{aligned}&(C_{11}z_1, z_1)_{\mathcal{H}_{11}} = \left(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 + P_{0,1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1\}_{k=1}^2,\ \{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2\right)_{\vec{J}_0(\Omega_1)} + \\ &+ \left(\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2 + P_{h,S_1}\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^2,\ \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2\right)_{\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)} + \\ &+ \Bigg(\vec{J}_1\vec{\omega}_1 + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}} (\vec{r}_{1k} \times (\vec{w}_{1k} + \rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}))\,d\Omega_{1k} + \int\limits_{G_2} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\,dm_2 + \\ &+ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\,d\Omega_{31}\Bigg) \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \\ &= \left[\rho_{11}\int\limits_{\Omega_{11}} (|\vec{w}_1|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \overline{\vec{w}_1})\,d\Omega_{11} + \rho_{12}\int\limits_{\Omega_{12}} (|\vec{w}_{12}|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \overline{\vec{w}_{12}})\,d\Omega_{12}\right] + \\ &+ \Bigg[\rho_{11}\int\limits_{\Omega_{11}} (|\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \overline{(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})})\,d\Omega_{11} + \\ &+ \rho_{12}\int\limits_{\Omega_{12}} (|\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12}|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12}) \cdot \overline{(\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12})})\,d\Omega_{12}\Bigg] + \\ &+ \rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}} (\vec{r}_{10} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{10})) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\,d\Omega_{10} + \rho_{11}\int\limits_{\Omega_{11}} (\vec{r}_{11} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\,d\Omega_{11} + \\ &+ \rho_{12}\int\limits_{\Omega_{12}} (\vec{r}_{12} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{12})) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\,d\Omega_{12} + \sum_{k=1}^2 \rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}} (\vec{r}_{1k} \times (\vec{w}_{1k} + \rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k})) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\,d\Omega_{1k} + \\ &+ \rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\,d\Omega_{20} + \sum_{k=1}^3 \rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\,d\Omega_{2k} + \\ &+ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\,d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{h}_1 \times P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\,d\Omega_{31} = \\ &= \rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{10}|^2\,d\Omega_{10} + \rho_{11}\int\limits_{\Omega_{11}} \Big[|\vec{w}_{11}|^2 + (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \overline{\vec{w}_{11}} + |\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}|^2 + \\ &+ (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \overline{(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})} + |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}|^2 + \overline{(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})} \cdot (\vec{w}_{11} + \rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})\Big]\,d\Omega_{11} +\end{aligned}$$

$$+\rho_{12}\int\limits_{\Omega_{12}}\Big[|\vec{w}_{12}|^2+(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\overline{\vec{w}_{12}}+|\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12}|^2+(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{12})\cdot\overline{(\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12})}+|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{12}|^2+$$

$$+\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{12})}\cdot(\vec{w}_{12}+\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12})\Big]\,d\Omega_{12}+\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{2k}+$$

$$+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{31}=$$

$$=\left[\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{10}|^2\,d\Omega_{10}+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11}+\vec{u}_{11}|^2\,d\Omega_{1k}\right]+$$

$$+\left[\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{2k}\right]+$$

$$+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}|P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)|^2\,d\Omega_{31}=\int\limits_{G_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_{11}|^2\,dm_1+$$

$$+\int\limits_{G_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,dm_2+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}|P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)|^2\,d\Omega_{31};$$

2) $$(C_{12}z_{12},z_{11})_{\mathcal{H}_1}=\Bigg(\int\limits_{G_2}(\vec{h}_1\times(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2))dm_2+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{h}_1\times\vec{u}_{2k})\,d\Omega_{2k}+$$

$$+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_1\times(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_1\times P_{G,3}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{31}\Bigg)\cdot\overline{\vec{\omega}_1}=$$

$$=\Bigg[\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k})\,d\Omega_{2k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot\vec{u}_{2k}\,d\Omega_{2k}\Bigg]+\Bigg[\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)\,d\Omega_{30}+$$

$$+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot P_{G,3}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)\,d\Omega_{31}\Bigg];$$

3) $$(C_{13}z_{13},z_{11})_{\mathcal{H}_1}=\Bigg(\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_1\times(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30}))\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_1\times P_{G,3}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31}))\,d\Omega_{31}\Bigg)\cdot\overline{\vec{\omega}_1}=$$

$$=\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30})\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\overline{(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)}\cdot P_{G,3}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31})\,d\Omega_{31};$$

4) $$(C_{21}z_{11},z_{12})_{\mathcal{H}_{12}}=\Big(P_0\Big\{P_{0,S_{2k}}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\Big\}_{k=1}^{3},\ \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3}\Big)_{\vec{J}_{0,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2)}+\Big(\int\limits_{G_2}(\vec{r}_2\times(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,dm_2+$$

$$+\,\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_2\times(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_2\times P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,d\Omega_{31}\Big)\cdot\overline{\vec{\omega}_2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(P_{0,S_{2k}}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\cdot\vec{u}_{2k}\,d\Omega_{2k}+\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20})}\cdot(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{20}+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k})}\cdot(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{2k}+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)}\cdot(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{30}+$$

$$+\,\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)}\cdot(P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,d\Omega_{31}=$$

$$=\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20})}\cdot(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\cdot\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}+\vec{u}_{2k})}\,d\Omega_{2k}+$$

$$+\,\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)}\cdot(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1)\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)}\cdot(P_{G,3}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1))\,d\Omega_{31};$$

5) $$(C_{22}z_{12},z_{12})_{\mathcal{H}_{12}}=\Big(\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3}+P_0\,\{P_{0,S_{2k}}(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k})\}_{k=1}^{3},\ \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3}\Big)_{\vec{J}_{0,S_2,\Gamma_2}(\Omega_2)}+$$

$$+\left(\vec{J}_2\vec{\omega}_2+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{r}_{2k}\times\vec{u}_{2k})\,d\Omega_{2k}+\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_2\times(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{30}+\right.$$

$$\left.+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_2\times P_{G,3}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{31}\right)\cdot\overline{\vec{\omega}_2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{u}_{2k}+(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}))\cdot\overline{\vec{u}_{2k}}\,d\Omega_{2k}+\left[\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}(\vec{r}_{20}\times(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20}))\,d\Omega_{20}\cdot\overline{\vec{\omega}_2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}(\vec{r}_{2k}\times(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}))\,d\Omega_{2k}\cdot\overline{\vec{\omega}_2}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k})}\cdot\vec{u}_{2k}\,d\Omega_{2k}\right]+$$

$$+\left[\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_2\times(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{30}\cdot\overline{\vec{\omega}_2}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_2\times P_{G,3}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2))\,d\Omega_{31}\cdot\overline{\vec{\omega}_2}\right]=$$

$$=\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}|\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20}|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}|\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}+\vec{u}_{2k}|^2\,d\Omega_{2k}+$$

$$+\,\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}|P_{G,3}(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)|\,d\Omega_{31};$$

6) $$(C_{23}z_{13},z_{12})_{\mathcal{H}_{12}}=\left(\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}(\vec{h}_2\times(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30}))\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}(\vec{h}_2\times P_{G,3}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31}))\,d\Omega_{31}\right)\cdot\overline{\vec{\omega}_2}=$$

$$=\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)}\cdot(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30})\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\overline{(\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2)}\cdot P_{G,3}(\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{31})\,d\Omega_{31};$$

7) $$(C_{31}z_{11}, z_{13})_{\mathcal{H}_{13}} = \left(\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30} \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\, d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31} \times P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\, d\Omega_{31}\right) \cdot \overline{\vec{\omega}_3} =$$
$$= \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} \overline{(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30})} \cdot (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)\, d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} \overline{(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31})} \cdot P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)\, d\Omega_{31};$$

8) $$(C_{32}z_{12}, z_{13})_{\mathcal{H}_{13}} = \left(\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30} \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2))\, d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31} \times P_{G,3}(\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2))\, d\Omega_{31}\right) \cdot \overline{\vec{\omega}_3} =$$
$$= \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} \overline{(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30})} \cdot (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2)\, d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} \overline{(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31})} \cdot P_{G,3}(\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2)\, d\Omega_{31};$$

9) $$(C_{33}z_{13}, z_{13})_{\mathcal{H}_{13}} = (\vec{J}_{\text{т},3} + \vec{J}_{\text{пр},3})\vec{\omega}_3 \cdot \overline{\vec{\omega}_3} = \left(\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} (\vec{r}_{30} \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30}))\, d\Omega_{30} + \right.$$
$$\left. +\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} (\vec{r}_{31} \times P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31}))\, d\Omega_{31}\right) \cdot \overline{\vec{\omega}_3} =$$
$$= \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} |\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30}|^2\, d\Omega_{30} + \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} |P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31})|^2\, d\Omega_{31}.$$

Складывая теперь левые и правые части соотношений 1)–9) и пользуясь формулой (4.57), получаем, что

$$(C^{(1)}z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \left\{\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{10}|^2\, d\Omega_{10} + \sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k} + \vec{u}_{1k}|^2\, d\Omega_{1k}\right\} +$$
$$+ \left\{\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{20}|^2\, d\Omega_{20} + \sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k} + \vec{u}_{2k}|^2\, d\Omega_{2k}\right\} +$$
$$+ \left\{\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30}|^2\, d\Omega_{30} + \right.$$
$$\left. +\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} |P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31})|^2\, d\Omega_{31}\right\}. \qquad (4.58)$$

Отсюда приходим к выводу, что оператор $C^{(1)} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ ограничен и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$. Далее, равенство $(C^{(1)}z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = 0$ имеет место лишь при $z_1 = 0$, и поэтому $C^{(1)}$ — положительный оператор. Наконец, поскольку он равен сумме положительно определенного и конечномерного операторов, то $C^{(1)} \gg 0$, что доказывает утверждение теоремы. □

Замечание 4.1. Так как векторы $\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1$ и $\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2$ потенциальные, т. е.

$$(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) = \nabla((\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) \cdot \vec{r}_{31}), \quad (\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2) = \nabla((\vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2) \cdot \vec{r}_{31}),$$

то подынтегральное выражение в последнем слагаемом из (4.58) можно переписать в виде

$$|\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31})|^2.$$

Замечание 4.2. Квадратичный функционал (4.58) равен удвоенной кинетической энергии приведенной гидромеханической системы, когда движение жидкости в третьем маятнике с полостью Ω_{31}, целиком заполненной идеальной жидкостью, описывается лишь угловой скоростью $\vec{\omega}_3$, а поле скорости в Ω_{31} выражается через потенциалы Жуковского.

4.2.1. Эквивалентные кинематические условия. Введение оператора потенциальной энергии. Напомним сначала, что исходные кинематические условия в исследуемой проблеме имеют вид (см. (2.12)–(2.13), (2.19)): для первого маятника

$$\begin{aligned}&\frac{d\zeta_{11}}{dt} = \gamma_{n,11}\vec{u}_{11} := \vec{u}_{11}\cdot\vec{n}_{11} = \vec{u}_{12}\cdot\vec{n}_{11} =: \gamma_{n,11}\vec{u}_{12} \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1 = P_2\vec{\omega}_1, \quad \vec{n}_{11} = \vec{e}_1^{\,3};\end{aligned} \tag{4.59}$$

для второго маятника

$$\begin{aligned}&\frac{d\zeta_{21}}{dt} = \gamma_{n,21}\vec{u}_{21} := \vec{u}_{21}\cdot\vec{n}_{21} = \vec{u}_{22}\cdot\vec{n}_{21} =: \gamma_{n,21}\vec{u}_{22} \quad (\text{на } \Gamma_{12}),\\ &\frac{d\zeta_{22}}{dt} = \gamma_{n,22}\vec{u}_{22} := \vec{u}_{22}\cdot\vec{n}_{22} = \vec{u}_{23}\cdot\vec{n}_{22} =: \gamma_{n,22}\vec{u}_{23} \quad (\text{на } \Gamma_{21}),\\ &\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_2 = P_2\vec{\omega}_2, \quad \vec{n}_{21} = \vec{n}_{22} = \vec{e}_2^{\,3};\end{aligned} \tag{4.60}$$

для третьего маятника

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_3 = P_2\vec{\omega}_3. \tag{4.61}$$

Перепишем теперь, как это уже встречалось выше в пунктах 3.2.6 и 3.3.5, кинематические условия (4.59)–(4.61) в эквивалентной форме, введя оператор потенциальной энергии системы.

Если выполнены условия (4.59)–(4.61), то выполнены также следующие соотношения: для первого маятника

$$\begin{aligned}&(\rho_{11}-\rho_{12})\left[\frac{d}{dt}\big(\zeta_{11}+\theta_{11}(P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\big) - \gamma_{n,11}\big(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11} + \theta_{11}((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\big)\right] = 0,\\ &-(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\Big(\frac{d\zeta_{11}}{dt} - \gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})\Big)\,d\Gamma_{11} +\\ &+(m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)\Big(\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1 - P_2\vec{\omega}_1\Big) = 0;\end{aligned} \tag{4.62}$$

для второго маятника

$$\begin{aligned}&\Big\{(\rho_{2,j}-\rho_{2,j+1})\left[\Big(\frac{d\zeta_{2j}}{dt} - \gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1}\nabla\Phi_{2j})\Big) + \frac{d}{dt}\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3}) -\right.\\ &\left.-\theta_{2j}((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})\right]\Big\}_{j=1}^{2} = 0,\\ &-\sum_{j=1}^{2}(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_{2j})\Big(\frac{d\zeta_{2j}}{dt} - \gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1}\nabla\Phi_{2j})\Big)\,d\Gamma_{2j} +\\ &+(m_2l_2+m_3h_2)\Big(\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_2 - P_2\vec{\omega}_2\Big) = \vec{0};\end{aligned} \tag{4.63}$$

для третьего маятника

$$m_3l_3\left(\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_3 - P_2\vec{\omega}_3\right) = \vec{0}. \tag{4.64}$$

(Здесь учтено, что $\gamma_{n,11}\vec{u}_{11} = \gamma_{n,11}\vec{w}_{11} + \gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}) = \gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})$, а также аналогичные соотношения в (4.60).)

Введем, как и в пунктах 3.2.6 и 3.3.5, осевые моменты инерции, отвечающие границам раздела жидкостей в полостях первого и второго маятников:

$$\begin{aligned} \beta_{jl}^{(11)} &:= \int\limits_{\Gamma_{11}} x_1^j(\theta_{11}x_1^l)\,d\Gamma_{11}, \quad j,l=1,2; \\ \beta_{jl}^{(2k)} &:= \int\limits_{\Gamma_{2k}} x_2^j(\theta_{2k}x_2^l)\,d\Gamma_{2k}, \quad j,l=1,2, \quad k=1,2. \end{aligned} \tag{4.65}$$

Лемма 4.1. *Введем матрицы*

$$U_1 := \begin{pmatrix} (m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)-(\rho_{11}-\rho_{22})\beta_{22}^{(11)} & (\rho_{11}-\rho_{12})\beta_{21}^{(11)} \\ (\rho_{11}-\rho_{12})\beta_{12}^{(11)} & (m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)-(\rho_{11}-\rho_{22})\beta_{11}^{(11)} \end{pmatrix},$$

$$U_2 := \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix},$$

где $u_{11} = (m_2l_2+m_3h_2)-\Big[(\rho_{21}-\rho_{22})\beta_{22}^{(21)}+(\rho_{22}-\rho_{23})\beta_{22}^{(22)}\Big]$, $u_{12} = (\rho_{21}-\rho_{22})\beta_{21}^{(21)}+(\rho_{22}-\rho_{23})\beta_{21}^{(22)}$, $u_{21} = (\rho_{21}-\rho_{22})\beta_{12}^{(21)}+(\rho_{22}-\rho_{23})\beta_{12}^{(22)}$, $u_{22} = (m_2l_2+m_3h_2)-\Big[(\rho_{21}-\rho_{22})\beta_{11}^{(21)}+(\rho_{22}-\rho_{23})\beta_{11}^{(22)}\Big]$. *Если выполнены свойства*

$$\Delta_2^{(11)} := \det U_1 \neq 0, \qquad \Delta_2^{(22)} := \det U_2 \neq 0, \tag{4.66}$$

то условия (4.59) *эквивалентны условиям* (4.62), *а условия* (4.60) *эквивалентны условиям* (4.63).

Доказательство. Для выполнения эквивалентности условий (4.59) и (4.62) следует повторить доказательство леммы 3.5 с заменой m_1l_1 на $m_1l_1+(m_2+m_3)h_2$ и некоторых обозначений. Для установления эквивалентности условий (4.60) и условий (4.63) следует повторить доказательства леммы 3.17 с заменой m_1l_1 на $m_2l_2+m_3h_2$ и некоторых других обозначений. □

Замечание 4.3. Эквивалентность условий (4.61) и (4.64) очевидна.

Введем теперь, опираясь на соотношения (4.62)–(4.64), операторную матрицу

$$C^{(2)} := \operatorname{diag}\Big(C_{11}^{(2)};\ C_{22}^{(2)};\ C_{33}^{(2)}\Big), \tag{4.67}$$

действующую на кинематические переменные

$$z_2 = (z_{21}, z_{22}, z_{23})^\tau, \quad z_{21} = (\zeta_{11}; P_2\vec{\delta}_1), \quad z_{22} = (\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2; P_2\vec{\delta}_2), \quad z_{23} = P_2\vec{\delta}_3,$$

согласно следующим формулам:

$$\begin{aligned} C_{11}^{(2)}z_{21} := \Big((\rho_{11}-\rho_{12})\Big[\zeta_{11}+\theta_{11}((P_1\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\Big]; \\ -(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{11})\zeta_{11}\,d\Gamma_{11}+(m_1l_1+(m_2+m_3)h_2)P_2\vec{\delta}_1\Big); \end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned} C_{22}^{(2)}z_{22} := \Big(\Big\{(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})(\zeta_{2j}+\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3}))\Big\}_{j=1}^2; \\ -\sum_{j=1}^2(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_{2j})\zeta_{2j}\,d\Gamma_{2j}+(m_2l_2+m_3h_2)P_2\vec{\delta}_2\Big); \end{aligned} \tag{4.69}$$

$$C_{23}^{(2)}z_{23} := m_3l_3P_2\vec{\delta}_3. \tag{4.70}$$

Лемма 4.2. *Операторная матрица* $C^{(2)} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ *является ограниченным самосопряженным оператором потенциальной энергии гидромеханической системы.*

Доказательство. Ограниченность $C^{(2)}$ следует из ее определения (см. (4.68)–(4.70)). Проверим, что $C^{(2)}$ — самосопряженная операторная матрица, вычислив ее квадратичную форму. Имеем

$$
\begin{aligned}
(C_{11}^{(2)} z_{21}, z_{21})_{\mathcal{H}_{21}} &= \Big((\rho_{11}-\rho_{12})(\zeta_{11}+\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})), \zeta_{11}\Big)_{L_{2,\Gamma_{11}}} + \\
&+ \left[-(\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_{21})\zeta_{11}\,d\Gamma_{11} + (m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)P_2\vec{\delta}_1\right]\cdot\overline{P_2\vec{\delta}_1} = \\
&= (\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}\left[|\zeta_{11}|^2+\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\overline{\zeta_{11}}\right]d\Gamma_{11}+ \\
&+ (\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}((\overline{P_2\vec{\delta}_1}\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\zeta_{11}\,d\Gamma_{11} + (m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 = \\
&= (\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}\left[|\zeta_{11}|^2+2\mathrm{Re}\left(\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})\overline{\zeta_{11}}\right)\right]d\Gamma_{11} + (m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 = \\
&= (\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}}\left[|\zeta_{11}+\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2-|\theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_{11})\cdot\vec{e}_1^{\,3})|^2\right]d\Gamma_{11}+ \\
&+ (m_1l_1+(m_2+m_3)h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2; \qquad (4.71)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(C_{22}^{(2)} z_{22}, z_{22})_{\mathcal{H}_{22}} &= \left(\Big\{(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})(\zeta_{2j}+\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3}))\Big\}_{j=1}^2, \{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2\right)_{L_{2,\Gamma_{21}}\oplus L_{2,\Gamma_{22}}} - \\
&- \left(\sum_{j=1}^2(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_{2j})\zeta_{2j}\,d\Gamma_{2j}\right)\cdot\overline{P_2\vec{\delta}_2} + (m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2 = \\
&= \sum_{j=1}^2(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}\left(|\zeta_{2j}|^2+2\mathrm{Re}\left(\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})\right)\overline{\zeta_{2j}}\right)d\Gamma_{2j}+ \\
&+ (m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2 = \sum_{j=1}^2(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}}\Big[|\zeta_{2j}+\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2- \\
&-|\theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})|^2\Big]\,d\Gamma_{2j} + (m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2; \qquad (4.72)
\end{aligned}
$$

$$
(C_{33}^{(2)} z_{23}, z_{23})_{\mathcal{H}_{23}} = m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2. \qquad (4.73)
$$

Складывая левые и правые части (4.71)–(4.73) и сравнивая с выражением во второй фигурной скобке слева в (2.21), приходим к выводу, что $C^{(2)} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ — оператор потенциальной энергии системы. Отсюда же следует и его самосопряженность. □

Введем теперь следующие величины (см. (4.66)):

$$
\begin{aligned}
\Delta_1^{(11)} &:= (m_1l_1+(m_2+m_3)h_2)-(\rho_{11}-\rho_{12})\beta_{11}^{(11)}, \\
\Delta_1^{(22)} &:= (m_2l_2+m_3h_2)-\left[(\rho_{21}-\rho_{22})\beta_{11}^{(21)}+(\rho_{22}-\rho_{23})\beta_{11}^{(22)}\right].
\end{aligned} \qquad (4.74)
$$

Лемма 4.3. *Оператор $C^{(2)} : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ неотрицателен тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$
\Delta_1^{(11)} \geqslant 0, \quad \Delta_2^{(11)} \geqslant 0, \quad \Delta_1^{(22)} \geqslant 0, \quad \Delta_2^{(22)} \geqslant 0, \qquad (4.75)
$$

и положительно определен, если и только если

$$
\Delta_1^{(11)} > 0, \quad \Delta_2^{(11)} > 0, \quad \Delta_1^{(22)} > 0, \quad \Delta_2^{(22)} > 0. \qquad (4.76)
$$

Доказательство. Оно повторяет доказательства лемм 3.7 и 3.19 с заменой некоторых обозначений. В (4.76) первые два условия необходимы и достаточны для положительной определенности операторной матрицы $C_{11}^{(2)}$ (лемма 3.7), а вторые два — для операторной матрицы $C_{22}^{(2)}$ (лемма 3.19). Для $C_{33}^{(2)}$ это свойство очевидно. □

4.2.2. Введение оператора диссипации энергии и оператора обмена энергиями. Вернемся снова к системе уравнений (4.22), (4.23), (4.26), (4.40), (4.44), (4.10), описывающей в операторной форме эволюцию исследуемой гидромеханической системы, и выделим теперь операторную матрицу, связанную с действием диссипативных сил: на элементах $z_1 = (z_{11}; z_{12}; z_{13})^\tau$, $z_{11} = (\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2; \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2; \vec{\omega}_1)$, $z_{12} = (\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3; \vec{\omega}_2)$, $z_{13} = \vec{\omega}_3$ она имеет вид

$$
\begin{aligned}
&A_1 z_1 = \Big(\vec{0}, \vec{0}, \alpha_1\vec{\omega}_1 - \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1);\ \widetilde{A}_2\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3, \alpha_1(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) - \alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2);\ \alpha_3(\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2)\Big)^\tau,\\
&A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{13},\\
&\mathcal{D}(A_1) = \mathcal{H}_{11} \oplus (\mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus \mathcal{H}_{13}, \quad \mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \subset \vec{J}^1_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2).
\end{aligned} \tag{4.77}
$$

Лемма 4.4. *Оператор* A_1*, определенный в* (4.77)*, является неограниченным неотрицательным самосопряженным оператором, действующим в* $\mathcal{H}_1$.

Доказательство. Вычислим квадратичную форму оператора A_1 на элементах из $\mathcal{D}(A_1)$. Будем иметь

$$
\begin{aligned}
(A_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} &= \Big(\widetilde{A}_2\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3, \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3\Big)_{\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)} + \Big(\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \sum_{l=2}^3 \alpha_l|\vec{\omega}_l - \vec{\omega}_{l-1}|^2\Big) =\\
&= \|\vec{u}_{2k}\|^2_{\vec{J}^1_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)} + \Big(\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \sum_{l=2}^3 \alpha_l|\vec{\omega}_l - \vec{\omega}_{l-1}|^2\Big) \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{4.78}
$$

Так как $\widetilde{A}_2$ — самосопряженный неограниченный оператор, действующий в $\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$ и заданный на $\mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \subset \vec{J}^1_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \subset \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$, $\mathcal{R}(\widetilde{A}_2) = \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$, то из (4.78) получаем утверждение леммы. □

Введем, наконец, операторную матрицу вида

$$
B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} : \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}, \tag{4.79}
$$

отвечающую оставшимся слагаемым в упомянутой выше системе уравнений, связанным с действием вспомогательных операторов на динамические и кинематические переменные изучаемой системы. Именно, для кинематических переменных

$$
z_2 = (z_{21}; z_{22}; z_{23})^\tau, \quad z_{21} = (\zeta_{11}; P_2\vec{\delta}_1), \quad z_{22} = (\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2; P_2\vec{\delta}_2), \quad z_{23} = P_2\vec{\delta}_3,
$$

определим оператор B_{12} по закону

$$
B_{12} = \operatorname{diag}\big(B_{12,1}; B_{12,2}; B_{12,3}\big) : \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{21} \oplus \mathcal{H}_{22} \oplus \mathcal{H}_{23} \to \mathcal{H}_1, \tag{4.80}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{12,1} z_{21} = \Big(\vec{0};\ &Q_1(\zeta_{11} + \theta_{11}((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3}));\\
&- (\rho_{11} - \rho_{12}) \int_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\zeta_{11}\, d\Gamma_{11} + (m_1 l_1 + (m_2 + m_3)h_1)P_2\vec{\delta}_1\Big);
\end{aligned} \tag{4.81}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{12,2} z_{22} = \Big(&Q_2\left\{\zeta_{2j} + \theta_{2j}((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^{\,3})\right\}_{j=1}^2;\\
&- \sum_{j=1}^2 (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int_{\Gamma_{2j}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_{2j})\zeta_{2j}\, d\Gamma_{2j} + (m_2 l_2 + m_3 h_2)P_2\vec{\delta}_2\Big);
\end{aligned} \tag{4.82}
$$

$$
B_{12,3} z_{23} = m_3 l_3 P_2\vec{\delta}_3. \tag{4.83}
$$

Отметим, что здесь $Q_1 : \mathcal{D}(Q_1) = H^{1/2}_{\Gamma_{11}} \to \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ — оператор краевой задачи вида (3.58) (см. лемму 3.2), а $Q_2 : \mathcal{D}(Q_2) = H^{1/2}_{\Gamma_{21}} \times H^{1/2}_{\Gamma_{22}} \to \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$ — оператор краевой задачи (3.203) (см. также (3.209)).

Далее, определим оператор B_{21} по закону

$$B_{21} = \operatorname{diag}\Big(B_{21,1}; B_{21,2}; B_{21,3}\Big) : \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{11} \oplus \mathcal{H}_{12} \oplus \mathcal{H}_{13} \to \mathcal{H}_2, \tag{4.84}$$

$$\begin{gathered} B_{21,1}z_{11} := (-(\rho_{11}-\rho_{12})\left[\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}) + \theta_{11}((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11})\cdot \vec{e}_1^{\,3})\right]; \\ (\rho_{11}-\rho_{12})\int\limits_{\Gamma_{11}} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_{11})\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11})\, d\Gamma_{11} - (m_1 l_1 + (m_2+m_3)h_1)P_2\vec{\omega}_1); \end{gathered} \tag{4.85}$$

$$\begin{gathered} B_{21,2}z_{12} := \Big(-\left\{(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\left[\gamma_{n,2j}\vec{u}_{2j} + \theta_{2j}((P_2\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2j})\cdot\vec{e}_2^{\,3})\right]\right\}_{j=1}^{2}; \\ \sum_{j=1}^{2}(\rho_{2j}-\rho_{2,j+1})\int\limits_{\Gamma_{2j}} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_{2j})\gamma_{n,2j}\vec{u}_{2j}\, d\Gamma_{2j} - (m_2 l_2 + m_3 h_2)P_2\vec{\omega}_2\Big); \end{gathered} \tag{4.86}$$

$$B_{21,3}z_{13} = -m_3 l_3 P_2 \vec{\omega}_3. \tag{4.87}$$

В (4.84)–(4.87) операторы $B_{21,1}$ и $B_{21,2}$ неограниченные и заданы, как и соответствующие операторы B_{21} и B_{22} из пунктов 3.2.7 и 3.3.5 (см. (3.109), (3.229)), на следующих областях определения:

$$\mathcal{D}(B_{21,1}) = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \mathcal{D}(\gamma_{n,11}) \oplus \mathbb{C}^3, \tag{4.88}$$

$$\mathcal{D}(\gamma_{n,11}) := \{\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^{2} : \gamma_{n_1 1}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}) = \gamma_{n,11}(\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12}) \in L_{2,\Gamma_{11}}\}; \tag{4.89}$$

$$\mathcal{D}(B_{21,2}) := \{z_{12} = (\vec{u}_2; \vec{\omega}_2) \in \mathcal{H}_{12} : \vec{u}_2 = \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^{3} \in \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2),\ \gamma_{n,2j}\vec{u}_{2j} \in L_{2,\Gamma_{2j}},\ j=1,2\}. \tag{4.90}$$

Лемма 4.5. *Операторы B_{12} и B_{21}, определяемые формулами* (4.80)–(4.83) *и* (4.84)–(4.87) *на своих областях определения, являются кососамосопряженными*:

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = -(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2}, \tag{4.91}$$

$$\forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}), \quad \forall z_2 \in \mathcal{D}(B_{12}) = (\mathcal{D}(Q_1) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (\mathcal{D}(Q_2) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}^2. \tag{4.92}$$

Доказательство. Оно повторяет доказательство лемм 3.8 (для $B_{12,1}$ и $B_{21,1}$) и 3.20(1) (для $B_{12,2}$ и $B_{21,2}$). Для $B_{12,3}$ и $B_{21,3}$ оно очевидно (см. (4.83) и (4.87)). □

4.3. Итоговая операторная формулировка исследуемой задачи. После введения всех операторных матриц задачу Коши для дифференциально-операторных уравнений, описывающих совместные малые движения системы из трех сочлененных маятников, т. е. совокупности динамических уравнений (4.22), (4.23), (4.26), (4.40), (4.44), (4.10), а также кинематических уравнений (4.62)–(4.64), вместе с начальными условиями можно коротко переписать в виде

$$\begin{gathered} C^{(1)}\frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \\ gC^{(2)}\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{gathered} \tag{4.93}$$

где $C^{(1)}$ — операторная матрица кинетической энергии, $C^{(2)}$ — операторная матрица потенциальной энергии, A_1 — операторная матрица диссипации энергии, B_{12} и B_{21} — операторные матрицы, по которым строится оператор обмена

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad D(B) = D(B_{21}) \oplus D(B_{12}), \quad \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \tag{4.94}$$

между кинематической и потенциальной энергиями. Напомним, что z_1 — совокупность динамических переменных исследуемой системы (см. (4.45)), а z_2 — совокупность ее кинематических переменных исследуемой системы (см. (4.46)). Наконец, заданная функция $f_1(t)$ переменной t со значениями в $\mathcal{H}_1$ такова:

$$f_1(t) := \Big(\big(P_{0,1}\{f_{1k}(t)\}_{k=1}^2; P_{h,S_1}\{\vec{f}_{1k}\}_{k=1}^2; M_{1,\text{пр}}(t)\big);\ \big(P_0\{P_{0,S_{2k}}\vec{f}_{2k}(t)\}_{k=1}^3;\ \vec{M}_{2,\text{пр}}(t)\big);\ \vec{M}_{3,\text{пр}}(t)\Big)^\tau. \tag{4.95}$$

Здесь функции справа — это заданные функции в уравнениях (4.22), (4.23), (4.26) — первый маятник, (4.40), (4.44) — второй маятник, (4.10) — третий маятник.

Свойства операторов $C^{(1)},\ C^{(2)},\ A_1,\ B_{12}$ и B_{21} описаны в теореме 4.1 и леммах 4.1–4.5.

Заметим еще, что начальные данные в (4.93) таковы:

$$\begin{gathered} z_1(0) = z_1^0 = (z_{11}^0; z_{12}^0; z_{13}^0)^\tau, \quad z_{11}^0 = \big(\{\vec{w}_{1k}^0\}_{k=1}^2; \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}^0\}_{k=1}^2; \vec{\omega}_1^0\big) \in \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3, \\ z_{12}^0 = \big(\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3; \vec{\omega}_2\big) \in \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3, \quad z_{13}^0 = \vec{\omega}_3^0 \in \mathbb{C}^3, \quad z_2(0) = z_2^0 = (z_{21}^0; z_{22}^0; z_{23}^0), \\ z_{21}^0 = (\zeta_{11}^0; P_2\vec{\delta}_1^0) \in L_{2,\Gamma_{11}} \oplus \mathbb{C}^2,\ z_{22}^0 = \Big(\{\zeta_{2j}^0\}_{j=1}^2; P_2\vec{\delta}_2^0\Big) \in (L_{2,\Gamma_{21}} \oplus L_{2,\Gamma_{22}}) \oplus \mathbb{C}^2, \quad z_{23}^0 = P_2\vec{\delta}_3^0 \in \mathbb{C}^2. \end{gathered} \tag{4.96}$$

Как и ранее в пунктах 3.1, 3.2.7, 3.3.7, задачу (4.93) можно переписать в виде

$$C\frac{dz}{dt} + Az + gBz = f(t), \quad z(0) = z^0, \tag{4.97}$$

$$C := \operatorname{diag}(C^{(1)}; gC^{(2)}), \quad A := \operatorname{diag}(A_1; 0), \quad B := \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.98}$$

где C — оператор полной энергии системы, A — оператор диссипации, а B — оператор обмена между кинетической и потенциальной энергиями.

4.4. О разрешимости задачи Коши для финальной системы дифференциально-операторных уравнений. Вернемся к задаче Коши (4.93) и выясним условия, при которых эта задача имеет решение на произвольном отрезке времени.

Определение 4.1. Будем говорить, что задача (4.93) имеет *сильное решение* (по переменной t) на произвольном отрезке времени $[0,T]$, если выполнены следующие условия:

$$1^\circ.\ z_1(t) \in C\left([0,T]; \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(B_{21})\right) \cap C^1([0,T]; \mathcal{H}_1); \tag{4.99}$$

$$2^\circ.\ z_2(t) \in C\left([0,T]; \mathcal{D}(B_{12})\right) \cap C^1([0,T]; \mathcal{H}_2); \tag{4.100}$$

3°. При любом $t \in [0,T]$ выполнены уравнения (4.93), а при $t = 0$ — начальные условия.

Очевидно, необходимыми условиями существования сильного решения задачи (4.93) являются условия

$$f_1(t) \in C([0,T]; \mathcal{H}_1), \quad z_1^0 \in \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(B_{21}), \quad z_2^0 \in \mathcal{D}(B_{12}). \tag{4.101}$$

Переходя к вопросу о разрешимости задачи (4.93), т. е. задачи (4.97)-(4.98), выясним сначала, какими свойствами обладает операторная матрица $A+gB$ как оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_2 = \bigoplus_{k=1}^3 \mathcal{H}_{2k}$. Исходя из определений элементов матриц B_{12} и B_{21} (см. (4.80)–(4.87)) и леммы 4.5, а также из определения (4.77) оператора A_1 и леммы 4.4, получаем представление

$$A + gB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & igF_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,0} & 0 & 0 & igF_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & igF_3 \\ igF_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & igF_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & igF_3^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \operatorname{diag}(A_\alpha;\ 0), \tag{4.102}$$

где

$$A_\alpha : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1 = \Big(\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3\Big) \oplus \Big(\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3\Big) \oplus \mathbb{C}^3 \tag{4.103}$$

имеет вид

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_1+\alpha_2 & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 & 0 & \alpha_2+\alpha_3 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \tag{4.104}$$

Поясним обозначения в (4.102). Так как $B_{12}^* = -B_{21}$ и имеет диагональную структуру (см. (4.80)), то можно переобозначить

$$(B_{12})_k = iF_k, \quad k = 1,2,3, \tag{4.105}$$

и тогда $(B_{21})_k = iF_k^*$. Далее, оператор $A_{2,0} : \mathcal{H}_{12} \to \mathcal{H}_{12}$ действует, согласно (4.77), по закону

$$A_{2,0} z_{12} = (\widetilde{A}_2 \vec{u}_2;\ \vec{0}), \quad \vec{u}_2 = \{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3 \in \mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \subset \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2), \quad z_{12} = \{\vec{u}_2;\ \vec{\omega}_2\} \in \mathcal{H}_{12}. \tag{4.106}$$

Введем еще оператор $A_{2,\varepsilon}$ по формуле

$$A_{2,\varepsilon} z_{12} := (\widetilde{A}_2 \vec{u}_2;\ \varepsilon\vec{\omega}_2), \quad \varepsilon > 0. \tag{4.107}$$

Тогда, в силу свойств оператора $\widetilde{A}_2$, получим, что

$$A_{2,\varepsilon} : \mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \oplus \mathbb{C}^3 \subset \mathcal{H}_{12} \to \mathcal{H}_{12} \tag{4.108}$$

— положительно определенный оператор. При этом возникает представление вида (4.102)–(4.104), где в (4.102) вместо $A_{2,0}$ стоит оператор $A_{2,\varepsilon}$ из (4.107), а в (4.104) вместо $\alpha_2+\alpha_3$ стоит выражение $\alpha_2+\alpha_3-\varepsilon$. Соответствующую матрицу обозначим $A_{\alpha,\varepsilon}$.

В итоге получим представление

$$A + gB = \mathcal{A}_{0,\varepsilon} + \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}, \quad \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon} := \operatorname{diag}(A_{\alpha,\varepsilon}; 0), \tag{4.109}$$

где $\mathcal{A}_{0,\varepsilon}$ — первая матрица справа в (4.102) с заменой $A_{2,0}$ на $A_{2,\varepsilon}$. Наконец, представим еще $\mathcal{A}_{0,\varepsilon}$ в виде

$$\mathcal{A}_{0,\varepsilon} = \mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{I}_5, \quad \mathcal{I}_5 := \operatorname{diag}(I; 0; I; I; I; I), \tag{4.110}$$

добавив к $\mathcal{A}_{0,\varepsilon}$ единичные операторы на диагонали:

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & igF_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{2,\varepsilon} & 0 & 0 & igF_2 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & igF_3 \\ igF_1^* & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & igF_2^* & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & igF_3^* & 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{4.111}$$

Тогда получим представление

$$A + gB = \mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{I}_5 + \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}. \tag{4.112}$$

Заметим теперь, что оператор $A + gB$ аккретивный:

$$\operatorname{Re}((A+gB)z, z)_{\mathcal{H}} \geqslant 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B). \tag{4.113}$$

Покажем, опираясь на представление (4.112), что он является в существенном аккретивным оператором, т. е. его замыкание — максимальный аккретивный оператор.

С этой целью воспользуемся следующей факторизацией оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ из (4.111) с симметричными крайними множителями:

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \operatorname{diag}(I; \mathcal{A}_{2,\varepsilon}^{1/2}; I; I; I; I)\, \mathcal{J}_\varepsilon \operatorname{diag}(I; \mathcal{A}_{2,\varepsilon}^{1/2}; I; I; I; I), \tag{4.114}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & igF_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & igA_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & igF_3 \\ igF_1^* & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & igF_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2} & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & igF_3^* & 0 & 0 & I \end{pmatrix}. \tag{4.115}$$

Заметим теперь, что операторы $\mathcal{I}_5$ и $A_{\alpha,\varepsilon}$ в выражении (4.112) ограничены и поэтому заданы на всем пространстве $\mathcal{H}$. Поэтому достаточно убедиться, что A_ε — в существенном максимальный оператор.

Лемма 4.6. *В представлении* (4.114), (4.115) *оператор* $F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2} : \mathcal{H}_{12} \to \mathcal{H}_{22}$ *компактен, а оператор* $A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2$ *допускает замыкание до компактного оператора* $(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2})^* : \mathcal{H}_{22} \to \mathcal{H}_{21}$.

Доказательство. Заметим сначала, что $\mathcal{D}(F_2^*) = \mathcal{D}((B_{21})_2)$ (см. (4.90)) и это множество плотно в $\mathcal{H}_{12} = \vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3$. Далее, $\mathcal{D}(F_2) = \mathcal{D}((B_{12})_2)$ (см. (4.82)) и множество $\mathcal{D}(F_2) = \mathcal{D}(Q_2) \oplus \mathbb{C}^2 = \left(H_{\Gamma_{21}}^{1/2} \times H_{\Gamma_{22}}^{1/2}\right) \oplus \mathbb{C}^2$ плотно в $\mathcal{H}_{22}$. Так как оператор $\widetilde{A}_2^{-1/2}$ ограниченно действует из $\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}(\Omega)$ в $\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}^1(\Omega)$, а $F_2^* = -i(B_{21})_2$ из $\vec{J}_{0,S_2,\Gamma}^1(\Omega)$ в $H_{\Gamma_{21}}^{1/2} \times H_{\Gamma_{22}}^{1/2}$, то $F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2} : \mathcal{H}_{12} \to \mathcal{H}_{22}$ — компактный оператор (в силу теоремы вложения Гальярдо, см. [7]).

Пусть теперь $z_{22} \in \mathcal{D}(F_2)$, $z_{12} \in \mathcal{H}_{12}$. Тогда

$$\left((A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2) z_{22}, z_{12}\right)_{\mathcal{H}_{12}} = \left(F_2 z_{22}, A_{2,\varepsilon}^{-1/2} z_{12}\right)_{\mathcal{H}_{12}} = \left(z_{22}, F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2} z_{12}\right)_{\mathcal{H}_{22}}.$$

Отсюда следует, что

$$A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2 = \left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^* \Big|_{\mathcal{D}(F_2)},$$

и так как $\mathcal{D}(F_2)$ плотно в $\mathcal{H}_{22}$, то замыкание оператора $A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2$ на все $\mathcal{H}_{22}$ совпадает с $(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2})^*$, причем

$$\overline{A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2} = \left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^* : \mathcal{H}_{22} \to \mathcal{H}_{12}$$

— компактный оператор. □

В качестве следствия из леммы 4.6 получаем такой вывод: средний множитель в (4.114) допускает замыкание до ограниченного оператора $\overline{\mathcal{J}_\varepsilon}$ путем замены $A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2$ на $\left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^*$, причем оператор $\overline{\mathcal{J}_\varepsilon}$ равномерно аккретивен:

$$\operatorname{Re}(\overline{\mathcal{J}_\varepsilon} z, z)_{\mathcal{H}} \geqslant \|z\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall z \in \mathcal{H}. \tag{4.116}$$

Другим следствием леммы 4.6 является такое утверждение.

Теорема 4.2. *Оператор* $A + gB$ *допускает замыкание до максимального аккретивного оператора* $\overline{A + gB}$, *действующего в* $\mathcal{H}$, *и поэтому оператор* $-\overline{(A + gB)}$ *является генератором сжимающей полугруппы операторов.*

При этом $\overline{A + gB}$ *задан на области определения*

$$\begin{gathered}\mathcal{D}(\overline{A + gB}) = \bigl\{z = (z_1; z_2)^\tau,\ z_1 = (z_{11}; z_{12}; z_{13}),\ z_2 = (z_{21}; z_{22}; z_{23}) : \\ z_{12} \in \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}^{-1/2}), \quad A_{2,\varepsilon}^{-1/2} z_{12} + ig\left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^* z_{22} \in \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}^{-1/2}), \\ z_{11} \in \mathcal{D}(F_1^*), \quad z_{13} \in \mathbb{C}^3, \quad z_{21} \in \mathcal{D}(F_1), \quad z_{22} \in \mathbb{C}^3\bigr\}\end{gathered} \tag{4.117}$$

и действует на ней по закону

$$\overline{A + gB} z = \overline{A_\varepsilon} z - \mathcal{I}_5 z - \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon} z, \tag{4.118}$$

$$\begin{gathered}\overline{A_\varepsilon} z = \Bigl(\Bigl(z_{11} + igF_1 z_{21};\ A_{2,\varepsilon}^{1/2}\left(A_{2,\varepsilon}^{1/2} z_{12} + ig(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2})^* z_{22}\right);\ z_{13} + igF_3 z_{23};\Bigr) \\ (igF_1^* z_{11} + z_{21};\ igF_2^* z_{12} + z_{22};\ igF_3^* z_{13} + z_{23})\Bigr)^\tau.\end{gathered} \tag{4.119}$$

Доказательство. Так как в представлении (4.112) операторы $\mathcal{I}_5$ и $\mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon}$ ограничены, то достаточно установить, что оператор допускает замыкания до максимального оператора. Заметим, что свойство аккретивности в таком процессе сохраняется (см. (4.113)).

В представлении (4.114) крайние множители — самосопряженные положительно определенные операторы, имеющие ограниченные обратные, заданные на всем пространстве. После замыкания оператор $\overline{\mathcal{J}_\varepsilon}$ сохраняет свойство (4.116) равномерной аккретивности. Поэтому он имеет ограниченный обратный оператор, заданный на всем пространстве. Отсюда следует, что $\overline{\mathcal{A}_\varepsilon}$ — максимальный равномерно аккретивный оператор, и поэтому область его значений совпадает со всем пространством.

Можно непосредственно убедиться также, что тогда область определения оператора $\overline{\mathcal{A}_\varepsilon}$ задается посредством (4.117), а сам он действует по закону (4.118), (4.119). $\square$

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса разрешимости задачи Коши (4.97).

Определение 4.2. Будем говорить, что состояние равновесия гидромеханической системы из трех сочлененных маятников с полостями, заполненными жидкостями, является *статически устойчивым по линейному приближению*, если оператор потенциальной энергии $C^{(2)}$ положительно определен в пространстве $\mathcal{H}_2$:

$$(C^{(2)}z_2, z_2)_{\mathcal{H}} \geqslant c\|z_2\|^2_{\mathcal{H}}, \quad c > 0. \tag{4.120}$$

Будем считать далее, что свойство (4.120) выполнено. Тогда оператор полной энергии C в (4.97), (4.98) — ограниченный положительно определенный, и потому существует ограниченный положительно определенный оператор C^{-1}, заданный на всем $\mathcal{H}$.

Учитывая этот факт, перепишем задачу Коши (4.94) в равносильном виде:

$$\frac{dz}{dt} = -C^{-1}(A + gB)z + C^{-1}f(t), \quad z(0) = z^0, \tag{4.121}$$

и введем в $\mathcal{H}$ новое скалярное произведение

$$[z, w] := (Cz, w)_{\mathcal{H}} \quad \forall z,\ w \in \mathcal{H}, \tag{4.122}$$

порождающее, в силу свойств оператора C, эквивалентную норму в $\mathcal{H} = \mathcal{H}_C$.

Рассмотрим, наряду с задачей (4.121), задачу Коши с замкнутым оператором:

$$\frac{dz}{dt} = -C^{-1}\overline{(A + gB)}z + C^{-1}f(t), \quad z(0) = z^0. \tag{4.123}$$

Так как оператор $-\overline{(A + gB)}$ является максимальным диссипативным оператором в $\mathcal{H}$, то $-C^{-1}\overline{(A + gB)}$ обладает этим свойством в $\mathcal{H}_C$:

$$\mathrm{Re}\,[C^{-1}\overline{(A + gB)}z, z] = \mathrm{Re}\,[(\overline{(A + gB)}z, z)_{\mathcal{H}}] \geqslant 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(\overline{A + gB}). \tag{4.124}$$

Поэтому оператор $-C^{-1}\overline{(A + gB)}$ есть оператор сжимающей полугруппы операторов в $\mathcal{H}_C = \mathcal{H}$. Отсюда по теореме Р. С. Филлипса (см., например, [13, с. 166], а также [26, с. 127]) следует, что если выполнены условия

$$f(t) \in C^1\left([0, T], \mathcal{H}\right), \quad z^0 \in \mathcal{D}(\overline{(A + gB)}), \tag{4.125}$$

то задача (4.123) имеет сильное решение на отрезке $[0, T]$.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены следующие условия.*

1°. *Первая группа условий*:

$$z^0_{11} = \left(\{\vec{w}_{1k}\}^2_{k=1};\ \{\rho^{-1}_{1k}\nabla\Phi^0_{1k}\}^2_{k=1};\ \vec{\omega}^0_1\right) \in \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathcal{D}(\gamma_{n,11}) \oplus \mathbb{C}^3;$$

$$z^0_{12} = \left(\{\vec{u}^0_{2k}\}^3_{k=1};\ \vec{\omega}^0_2\right) \in \left(\mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \cap \mathcal{D}(\{\gamma_{n,2j}\}^2_{j=1})\right) \oplus \mathbb{C}^3, \quad z^0_{13} \in \mathbb{C}^3.$$

2°. *Вторая группа условий*:

$$z^0_{21} = \left(\zeta^0_{11};\ P_2\vec{\delta}^0_1\right) \in H^{1/2}_{\Gamma_{11}} \oplus \mathbb{C}^2,$$

$$z^0_{22} = \left(\{\zeta^0_{2j}\}^2_{j=1};\ P_2\vec{\delta}^0_2\right) \in \left(H^{1/2}_{\Gamma_{21}} \times H^{1/2}_{\Gamma_{22}}\right) \oplus \mathbb{C}^2, \quad z^0_{23} = P_2\vec{\delta}^0_3 \in \mathbb{C}^2.$$

3°. *Третья группа условий*:

$$\vec{f}_{1k} \in C^1\left([0, T]; \vec{L}_2(\Omega_{1k})\right), \quad k = 0, 1, 2;$$

$$\vec{f}_{2k} \in C^1\left([0, T]; \vec{L}_2(\Omega_{2k})\right), \quad k = 0, 1, 2, 3;$$

$$\vec{f}_{3k} \in C^1\left([0, T]; \vec{L}_2(\Omega_{3k})\right), \quad k = 0, 1.$$

Тогда задача (4.121) *имеет единственное сильное* (*по переменной* t) *решение на отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. Пусть выполнена первая и вторая группы условий, т. е. начальные условия исследуемой проблемы. Тогда можно проверить, что в задаче Коши (4.123) выполнено условие

$$z(0) = z^0 \in \mathcal{D}(A+gB) = \mathcal{D}(C^{-1}(A+gB)) \subset \mathcal{D}(C^{-1}\overline{(A+gB)}).$$

Можно убедиться также, что в этой задаче $f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H})$. Поэтому по теореме Р. С. Филлипса задача (4.123) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Это означает, что справедливо уравнение (4.123), где все слагаемые — элементы из $C([0,T];\mathcal{H}_C)$. Отсюда следует, что справедливо и уравнение

$$C\frac{dz}{dt} + \overline{(A+gB)}z = f(t), \tag{4.126}$$

где все слагаемые — элементы из $C([0,T];\mathcal{H})$. Учитывая представление (4.118), (4.119) для $\overline{(A+gB)}z$, а также факторизацию $\overline{\mathcal{A}}_\varepsilon$ в виде (4.114) со средним множителем $\overline{\mathcal{J}}_\varepsilon$ (см. (4.114), (4.119)) получим из предыдущего, что имеет место уравнение

$$C\frac{dz}{dt} + \overline{\mathcal{A}}_\varepsilon z - \mathcal{I}_5 z - \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon} z = f(t), \quad z(0) = z^0, \tag{4.127}$$

где все слагаемые в уравнении — непрерывные по t функции, а $\overline{\mathcal{A}}_\varepsilon z$ выражается формулой (4.119).

Заметим теперь, что уравнение (4.121) и соответственно исходную задачу (4.97), т. е. задачу (4.93), можно переписать в эквивалентной форме

$$C\frac{dz}{dt} + \mathcal{A}_\varepsilon z - \mathcal{I}_5 z - \mathcal{A}_{\alpha,\varepsilon} z = f(t), \quad z(0) = z^0, \tag{4.128}$$

с незамкнутым оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$ (см. (4.111), (4.112), (4.114), (4.115)). Поэтому утверждение теоремы будет доказано, если в задаче (4.127) можно в представлении для $\overline{\mathcal{A}_\varepsilon}$ (см. (4.119)) иметь возможность раскрыть скобки в выражении

$$A_{2,\varepsilon}^{1/2}\left(A_{2,\varepsilon}^{1/2} z_{12} + ig(F^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2})^* z_{22}\right), \tag{4.129}$$

т. е. установить, что в скобках каждое слагаемое является функцией из $C([0,T];\mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}^{1/2}))$.

С этой целью перепишем задачу (4.126) в исходной форме, опираясь на представления для $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\overline{\mathcal{A}}_\varepsilon$ (см. (4.111)) и переходя к системе уравнений с компонентами z_1 и z_2. Тогда, в частности, второе уравнение примет вид второго уравнения из (4.93), где $C^{(2)}$ и B_{21} — диагональные операторы (см. (4.67)–(4.70)). Значит, второе уравнение этой диагональной системы имеет прежний вид:

$$C_{22}^{(2)}\frac{dz_{22}}{dt} + ig(B_{21})_2 z_{12} = 0. \tag{4.130}$$

Напомним теперь, что согласно лемме 4.1 при выполнении условия (4.66) связь (4.130) равносильна соотношениям (4.60), которые можно переписать в виде

$$\frac{dz_{22}}{dt} = \widetilde{\gamma}_n z_{12} := \left(\{\gamma_{n,2j}\vec{u}_2\}_{j=1}^2;\ P_2\vec{\omega}_2\right). \tag{4.131}$$

Отсюда получаем, что

$$z_{22}(t) = z_{22}^0 + \int_0^t \widetilde{\gamma}_n z_{12}(s)\,ds \in C^1([0,T];\mathcal{H}_{22}). \tag{4.132}$$

Представляя это выражение в (4.129), приходим к выводу, что для сильного решения задачи (4.127) (с замкнутым оператором $\overline{\mathcal{A}_\varepsilon}$) имеет место свойство

$$A_{2,\varepsilon}^{1/2} z_{12}(t) + ig(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2})^*\Big(z_{22}^0 + \int_0^t \widetilde{\gamma}_n z_{12}(s)\,ds\Big) =: v_{12}(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}^{1/2})). \tag{4.133}$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$z_{12}(t) + igA_{2,\varepsilon}^{-1/2}\left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2}\right)^* \int_0^t \widetilde{\gamma}_n z_{12}(s)\,ds =$$

$$= A_{2,\varepsilon}^{-1/2} \left(v_{12}(t) - ig \left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2} \right)^* z_{22}^0 \right) =: \varphi_{12}(t) \in C\left([0;T]; \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon})\right), \quad (4.134)$$

так как

$$\left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2} \right)^* z_{22}^0 = A_{2,\varepsilon}^{-1/2} F_2 z_{22}^0 \in \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}^{1/2}), \quad z_{22}^0 \in \mathcal{D}(F_2) = \mathcal{D}((B_{12})_2) = \mathcal{D}(Q_2) \oplus \mathbb{C}^2, \quad (4.135)$$

(см. (4.82) и лемму 4.6).

Докажем, что на самом деле

$$z_{12}(t) \in C\left([0;T]; \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon})\right). \quad (4.136)$$

Действительно, рассмотрим (4.134) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве $H(A_{2,\varepsilon}) = \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon})$ с нормой, эквивалентной норме графика (поскольку $A_{2,\varepsilon} \gg 0$):

$$\|z_{12}\|_{H(A_{2,\varepsilon})} := \|A_{2,\varepsilon} z_{12}\|_{\mathcal{H}_{12}}.$$

В (4.134) правая часть $\varphi_{12}(t)$ — непрерывная функция t со значениями в $H(A_{2,\varepsilon})$. Далее, оператор $\left(A_{2,\varepsilon}^{-1/2} \left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2} \right)^* \widetilde{\gamma}_n \right)$, суженный на $H(A_{2,\varepsilon})$, ограниченно действует из $H(A_{2,\varepsilon})$ в $H(A_{2,\varepsilon})$. В самом деле, если $z_{12} = (\vec{u}_2; \vec{\omega}_2) \in \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon})$, то $\widetilde{u}_2 \in \mathcal{D}(\widetilde{A}_2) \subset \mathcal{D}(\widetilde{A}_2^{1/2}) = \vec{J}^1_{0,S_2,\Gamma}(\Omega_2)$, и тогда $\widetilde{\gamma}_n z_{12} \in \left(H^{1/2}_{\Gamma_{12}} \times H^{1/2}_{\Gamma_{22}} \right) \oplus \mathbb{C}^2 = \mathcal{D}(Q_2) \oplus \mathbb{C}^2 = \mathcal{D}((B_{12})_2) = \mathcal{D}(F_2)$. Поэтому по лемме 4.6 имеем

$$A_{2,\varepsilon}^{-1/2} \left(F_2^* A_{2,\varepsilon}^{-1/2} \right)^* \widetilde{\gamma}_n z_{12} = A_2^{-1} \left(F_2 \widetilde{\gamma}_n z_{12} \right) \in \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}) = \mathcal{H}(A_{2,\varepsilon}).$$

Отсюда следует, что уравнение (4.134) однозначно разрешимо и имеет решение $z_{12}(t)$ со свойством (4.136). Поэтому в сумме (4.129) каждое слагаемое является элементом из $C\left([0;T]; \mathcal{D}(A_{2,\varepsilon}^{1/2})\right)$, и потому в этом выражении можно раскрыть скобки. Это означает, что исходное уравнение (с замкнутым оператором) после раскрытия скобок переходит в уравнение с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon - \mathcal{I}_5 - \mathcal{A}_{2,\varepsilon} = A + gB$, где все слагаемые — непрерывные функции t со значениями в $\mathcal{H}$. Таким образом, доказано, что задача (4.121), а вместе с ней и задача (4.97) имеет сильное решение на отрезке $[0;T]$. □

5. Малые колебания консервативной системы из трех сочлененных маятников

В этом параграфе рассмотрим упрощенный вариант исследуемой гидромеханической системы, когда сила трения в шарнирах пренебрежимо мала, а жидкости в полостях маятников идеальные (т. е. невязкие):

$$\alpha_k = 0, \quad \mu_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.1)$$

Такая система будет консервативной, так как диссипативные силы равны нулю.

5.1. Получение операторных уравнений движения системы. Общая схема получения уравнений движения системы маятников и жидкостей в полостях маятников остается прежней, за исключением уравнений движения трех жидкостей во втором маятнике.

Именно, для третьего маятника по-прежнему приходим к уравнению (4.10), а для первого маятника — к уравнениям (4.22)–(4.24), (4.26). Далее, для соответствующих уравнений, описывающих динамику второго маятника с полостью, заполненной системой из трех идеальных жидкостей, т. е. уравнений (2.7) и (2.8) при условиях (5.1), теперь следует применить тот же подход, который был применен при рассмотрении динамики первого маятника. В частности, в уравнении (4.27) следует положить $\mu_{2k} = 0$ $(k = 1, 2, 3)$, а затем набор полей скоростей $\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3$ искать в форме

$$\{\vec{u}_{2k}\}_{k=1}^3 = \{\vec{w}_{2k}\}_{k=1}^3 + \left\{\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}\right\}_{k=1}^3, \quad (5.2)$$

$$\{\vec{w}_{2k}\}_{k=1}^3 \in \vec{J}_0(\Omega_2) = \vec{J}_0(\Omega_{21}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_{22}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_{23}), \quad \left\{\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}\right\}_{k=1}^3 \in \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \quad (5.3)$$

и воспользоваться ортогональным разложением

$$\vec{L}_2(\Omega_2) = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2) \quad (5.4)$$

(см. соответствующие построения для первого маятника и формулы (4.15)–(4.18)). При этом набор полей давлений разыскиваем в виде

$$\left\{\rho_{2k}^{-1} \nabla p_{2k}\right\}_{k=1}^3 = \left\{\rho_{2k}^{-1} \nabla \varphi_{2k}\right\}_{k=1}^3 + \left\{\rho_{2k}^{-1} \nabla \psi_{2k}\right\}_{k=1}^3, \quad (5.5)$$

$$\left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\varphi_{2k}\right\}_{k=1}^{3} \in \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2), \quad \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\psi_{2k}\right\}_{k=1}^{3} \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2). \tag{5.6}$$

Применим далее метод ортогонального проектирования для уравнений движения жидкостей во втором маятнике, т. е. для уравнения

$$\left\{\frac{d\vec{u}_{2k}}{dt}\right\}_{k=1}^{3} + \left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1\right\}_{k=1}^{3} + \left\{\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} + \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla p_{2k}\right\}_{k=1}^{3} = \left\{\vec{f}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} \tag{5.7}$$

(см. (4.27) при $\mu_{2k} = 0$). Введя ортопроекторы

$$\begin{aligned}
&P_{0,2}: \quad \vec{L}_2(\Omega_2) \to \vec{J}_0(\Omega_2), \quad P_{0,2} = \{P_{0,2k}\}_{k=1}^{3}, \\
&P_{h,S_2,\Gamma}: \quad \vec{L}_2(\Omega_2) \to \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2), \\
&P_{0,2,\Gamma}: \quad \vec{L}_2(\Omega_2) \to \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2),
\end{aligned} \tag{5.8}$$

и действуя ими на обе части (5.7), получим уравнения в проекциях:

$$\left\{\frac{d\vec{w}_{2k}}{dt}\right\}_{k=1}^{3} + P_{0,2}\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1\right\}_{k=1}^{3} + P_{0,2}\left\{\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} = P_{0,2}\left\{\vec{f}_{2k}\right\}_{k=1}^{3}, \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}
\left\{\frac{d}{dt}\left(\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\right)\right\}_{k=1}^{3} + P_{h,S_2,\Gamma}\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1\right\}_{k=1}^{3} + P_{h,S_2,\Gamma}\left\{\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} + \\
+ \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\varphi_{2k}\right\}_{k=1}^{3} = P_{h,S_2,\Gamma}\left\{\vec{f}_{2k}\right\}_{k=1}^{3},
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$P_{0,2,\Gamma}\left\{\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1\right\}_{k=1}^{3} + P_{0,2,\Gamma}\left\{\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_{2k}\right\}_{k=1}^{3} + \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\psi_{2k}\right\}_{k=1}^{3} = P_{0,2,\Gamma}\left\{f_{2k}\right\}_{k=1}^{3}. \tag{5.11}$$

Здесь снова (как и в уравнениях движения жидкостей в первом маятнике) набор полей $\left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\psi_{2k}\right\}_{k=1}^{3}$ явно находится по другим искомым и заданным переменным задачи, и поэтому уравнение (5.11) далее не учитывается в исследовании проблемы.

Аналогично преобразуется и уравнение движения второго маятника, что приводит (взамен уравнения (4.44)) к уравнению

$$\begin{aligned}
\vec{J}_2\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} + \int\limits_{G_2}\left(\vec{r}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1\right)\right) dm_2 + \sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}\left(\vec{r}_{2k} \times \frac{d}{dt}\left(\vec{w}_{2k} + \rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\right)\right) d\Omega_{2k} + \\
+ \rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}\left(\vec{h}_2 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{30}\right)\right) d\Omega_{30} + \\
+ \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}\left(\vec{h}_2 \times P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_{31}\right)\right) d\Omega_{31} + \\
+ g(m_2 l_2 + m_3 h_2)P_2\vec{\delta}_2 - g\sum_{j=1}^{2}\left(\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}\right)\int\limits_{\Gamma_{2j}}\left(\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_{2j}\right)\zeta_{2j}\, d\Gamma_{2j} = \vec{M}_{2,\text{пр}}(t).
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Таким образом, система уравнений, описывающая эволюцию системы сочлененных маятников с полостями, содержащими идеальные жидкости при отсутствии трения в шарнирах, свелась к задаче Коши для уравнения (4.12), уравнения (4.19) при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, уравнений (5.9), (5.10), (5.12) и уравнения (4.10) при $\alpha_3 = 0$.

5.2. Переход к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Введем, как и ранее, динамические и кинематические переменные задачи, однако с соответствующими изменениями для второго маятника. Именно, будем считать, что они имеют вид (4.45), (4.46), но теперь

$$z_{12} = \left(\left\{\vec{w}_{2k}\right\}_{k=1}^{3};\ \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\right\}_{k=1}^{3};\ \vec{\omega}_2\right) \in \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3. \tag{5.13}$$

Далее вводим оператор кинетической энергии системы посредством соотношений вида (4.47)–(4.56), осуществляя замены в этих формулах $\vec{u}_{2k} = \vec{w}_{2k} + \rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}$, $k = 1,2,3$, а $P_0 = P_{0,S_2,\Gamma}$ выражая в виде

$$P_0 = P_{0,2} + P_{0,S_2,\Gamma}. \tag{5.14}$$

Тогда новый оператор кинетической энергии $C^{(1)}$ будет обладать прежними свойствами (см. теорему 4.1). Оператор потенциальной энергии $C^{(2)}$ (см. (4.67)) будет прежний, и для него справедливы утверждения лемм 4.2 и 4.3. Введем, наконец, оператор обмена энергиями (4.79) с компонентами (4.80)–(4.83) и (4.84)–(4.87), снова заменяя $\vec{u}_{2j}$ на $\vec{w}_{2j} + \rho_{2j}^{-1}\nabla\Phi_{2j}, j = 1,2$, в формулах (4.85), (4.86). Здесь опять справедливы утверждения леммы 4.5.

В конечном итоге приходим к задаче Коши в пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$:

$$\begin{aligned} &C^{(1)}\frac{dz_1}{dt} + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \\ &gC^{(2)}\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \end{aligned} \tag{5.15}$$

она является частным случаем задачи (4.93) при $A_1 = 0$. Здесь

$$\begin{aligned} &z_1 = (z_{11}; z_{12}; z_{13})^\tau, \quad z_{11} = \left(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2;\ \{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^2;\ \vec{\omega}_1\right), \\ &z_{12} = \left(\{\vec{w}_{2k}\}_{k=1}^3;\ \{\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\}_{k=1}^3;\ \vec{\omega}_2\right), \quad z_{13} = \vec{\omega}_3, \\ &z_2 = (z_{21}; z_{22}; z_{23})^\tau, \quad z_{21} = (\zeta_{11}; P_2\vec{\delta}_1), \quad z_{22} = (\{\zeta_{2j}\}_{j=1}^2;\ P_2\vec{\delta}_2), \quad z_{23} = P_2\vec{\delta}_3. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Коротко эту задач записываем в виде

$$C\frac{dz}{dt} + gBz = f(t), \quad z(0) = z^0, \tag{5.17}$$

(сравн. с (4.97), (4.98)), где C — оператор полной энергии системы, а B — оператор обмена между кинетической и потенциальной энергиями системы, $B^* = -B$.

Скажем несколько слов о разрешимости задачи (5.17). Если система статически устойчива по линейному приближению, т. е. оператор $C^{(2)}$ положительно определен в $\mathcal{H}_2$, то оператор $-C^{-1}B$ является консервативным и потому порождает изометрическую полугруппу операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}_C = \mathcal{H}$ с эквивалентной нормой (см. (4.122)). Потому при выполнении условий

$$z^0 \in \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H}, \quad f(t) \in C^1\left([0;T];\mathcal{H}\right) \tag{5.18}$$

задача (5.17) имеет единственное сильное (по переменной t) решение на любом отрезке $[0;T]$. Для этого решения имеет место закон баланса полной энергии, а при $f(t) \equiv 0$ — закон сохранения полной энергии. Более подробно на этой эволюционной проблеме не будем останавливаться.

5.3. О собственных колебаниях консервативной системы. Будем считать, что в задаче (5.15) оператор $C^{(2)}$ потенциальной энергии положительно определен, т. е. система статически устойчива по линейному приближению. Рассмотрим решения однородной задачи (5.15), зависящие от t по закону

$$z_k(t) = \exp(i\lambda t)z_k, \quad k = 1,2. \tag{5.19}$$

Здесь λ — частота собственных колебаний, а z_k — амплитудные элементы.

Для нахождения амплитудных элементов (ненулевых решений задачи) приходим к спектральной проблеме

$$i\lambda C^{(1)}z_1 + gB_{12}z_2 = 0, \quad i\lambda C^{(2)}z_2 + B_{21}z_1 = 0. \tag{5.20}$$

Проверим сначала, имеет ли задача (5.20) вместе с тривиальной проблемой

$$i\lambda P^3\vec{\delta}_k - P^3\vec{\omega}_3 = \vec{0}, \quad k = 1,2,3, \tag{5.21}$$

возникшей из связи $d(P^3\vec{\delta}_k)/dt = P^3\vec{\omega}_k,\ k = 1,2,3$, решения при $\lambda = \lambda_0 = 0$.

Приходим к задаче

$$B_{12}z_2 = 0, \quad B_{21}z_1 = 0, \quad P^3\vec{\omega}_k = 0, \quad k = 1,2,3, \tag{5.22}$$

Напомним, что для рассматриваемой гидромеханической системы выполнены условия леммы 4.1, т. е. условия (4.66). Поэтому по этой лемме и из определений (4.80)–(4.83) для блоков матрицы B_{12} и определений (4.84)–(4.87) для блоков матрицы B_{21} получаем из (5.22), что справедливые соотношения (4.59)–(4.62) для решений вида (5.19) при $\lambda = \lambda_0 = 0$ приводят к формулам

$$\begin{gathered} \gamma_{n,11}\vec{u}_{11} = \gamma_{n,11}\vec{u}_{12} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \quad P_2\vec{\omega}_1 = \vec{0}, \quad P_2\vec{\omega}_2 = \vec{0}, \quad P_2\vec{\omega}_3 = \vec{0}, \\ \gamma_{n,21}\vec{u}_{21} = \gamma_{n,21}\vec{u}_{22} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \quad \gamma_{n,22}\vec{u}_{22} = \gamma_{n,22}\vec{u}_{23} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}). \end{gathered} \tag{5.23}$$

Отсюда приходим к выводу, что

$$\begin{gathered} z_2 = z_2^0 = \left(z_{21}^0; z_{22}^0; z_{23}^0\right); \quad z_{21}^0 = (\zeta_{21}^0; P_2\vec{\delta}_1^0) = (0, \vec{0}), \quad P_2\vec{\delta}_3^0 = 0, \\ z_{22}^0 = \left(\left\{\zeta_{2j}^0\right\}_{j=1}^2; \ P_2\vec{\delta}_2^0\right) = (0, \vec{0}); \\ z_1 = z_1^0 = \left(z_{11}^0; z_{12}^0; z_{13}^0\right)^\tau; \quad z_{11}^0 = \left(\left\{\vec{w}_{1k}^0\right\}_{k=1}^2; \ \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}^0\right\}_{k=1}^2; \ \vec{\omega}_1^0\right) = \\ = \left(\left\{\vec{w}_{1k}^0\right\}_{k=1}^2; \ \vec{0}; \ \vec{0}\right), \quad \forall\, \vec{w}_{1k}^0 \in \vec{J}_0(\Omega_{1k}), \quad k = 1, 2; \\ z_{12}^0 = \left(\left\{\vec{w}_{2k}^0\right\}_{k=1}^3; \ \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}^0\right\}_{k=1}^3; \ \vec{\omega}_2^0\right) = \left(\left\{\vec{w}_{2k}^0\right\}_{k=1}^3; \ \vec{0}; \ \vec{0}\right), \\ \forall\, \vec{w}_{2k}^0 \in \vec{J}_0(\Omega_{2k}), \ k = 1, 2, 3, \quad z_{13}^0 = \vec{\omega}_3^0 = \vec{0}. \end{gathered} \tag{5.24}$$

Лемма 5.1. *Собственное значение* $\lambda = \lambda_0 = 0$ *спектральной задачи* (5.20), (5.21) *бесконечнократно. Физически ему отвечает такое стационарное состояние системы, когда движение жидкостей в полостях маятников не зависят от времени и являются чисто вихревыми, причем границы раздела* $\Gamma_{11}, \Gamma_{21}, \Gamma_{22}$ *между жидкостями не отклоняются, а вся система в целом* (*каждый маятник*) *по отношению к исходному состоянию повернута вокруг вертикальной оси на произвольные углы* $(\vec{\delta}_1^3)^0$, $(\vec{\delta}_2^3)^0$, $(\vec{\delta}_3^3)^0$ *соответственно.*

Рассмотрим теперь случай ненулевых частот колебаний: $\lambda \neq 0$. Здесь можно исключить переменную z_2 и ввести характеристики, зависящие от $z_1 = (z_{11}; \ z_{12}; \ z_{13})$.

В самом деле, для динамических переменных из однородного уравнения (4.22) движения жидкостей в первом маятнике для решений вида (5.19) получаем связь

$$i\lambda\left(\{\vec{w}_{1k}\}_{k=1}^2 + P_{0,1}\left\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\right\}_{k=1}^2\right) = 0, \tag{5.25}$$

и тогда

$$z_{11} = \widetilde{z}_{11} := \left(-P_{0,1}\left\{\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{1k}\right\}_{k=1}^2; \ \left\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\right\}_{k=1}^2; \ \vec{\omega}_1\right). \tag{5.26}$$

Далее, из аналогичного уравнения для второго маятника (см. (5.9)) получаем также связь

$$i\lambda\left(\{\vec{w}_{2k}\}_{k=1}^3 + P_{0,2}\left\{\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k}\right\}_{k=1}^3\right) = \vec{0}, \tag{5.27}$$

и тогда

$$z_{12} = \widetilde{z}_{12} := \left(-P_{0,2}\left\{\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2k}\right\}_{k=1}^3; \ \left\{\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\right\}_{k=1}^2; \ \vec{\omega}_2\right). \tag{5.28}$$

Для третьего маятника имеем

$$z_{13} = \widetilde{z}_{13} = \vec{\omega}_3. \tag{5.29}$$

Что касается соответствующих преобразований для кинематических переменных, то здесь имеем связь для первого маятника:

$$i\lambda\zeta_{11} = \gamma_{n,11}\left(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}\right) = \gamma_{n,11}\left(\rho_{12}^{-1}\nabla\Phi_{12}\right), \quad i\lambda P_2\vec{\delta}_1 = P_2\vec{\omega}_1. \tag{5.30}$$

Перепишем их в такой форме

$$z_{21} = (i\lambda)^{-1}\left(\gamma_{n,11}\left(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11}\right); \ P_2\vec{\omega}_1\right) =: (i\lambda)^{-1}\,\widetilde{z}_{21}. \tag{5.31}$$

Отсюда видно, что $\widetilde{z}_{21}$ также выражается через динамические переменные системы.

Для второго маятника соответственно имеем:

$$\begin{gathered} i\lambda\zeta_{21} = \gamma_{n,21}\left(\rho_{21}^{-1}\nabla\Phi_{21}\right) = \gamma_{n,21}\left(\rho_{22}^{-1}\nabla\Phi_{22}\right), \\ i\lambda\zeta_{22} = \gamma_{n,22}\left(\rho_{22}^{-1}\nabla\Phi_{22}\right) = \gamma_{n,23}\left(\rho_{23}^{-1}\nabla\Phi_{23}\right), \quad i\lambda P_2\vec{\delta}_2 = P_2\vec{\omega}_2, \end{gathered} \tag{5.32}$$

и эти связи перепишем в виде

$$z_{22} = (i\lambda)^{-1}\left(\{\gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1}\nabla\Phi_{2j})\}_{j=1}^{2};\ P_2\vec{\omega}_2\right) =: (i\lambda)^{-1}\,\widetilde{z}_{22}. \tag{5.33}$$

Наконец,

$$z_{23} = P_2\vec{\delta}_3 = (i\lambda)^{-1}\,P_2\vec{\omega}_3 =: (i\lambda)^{-1}\,\widetilde{z}_{23}. \tag{5.34}$$

Подставим теперь представления (5.31), (5.33), (5.34) в систему уравнений (5.11) и умножим первое уравнение на $\widetilde{z}_1$ в $\mathcal{H}_1$. Используя свойство $B_{12}^* = -B_{21}$, будем иметь соотношение

$$i\lambda(C^{(1)}\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1} - g(i\lambda)^{-1}(\widetilde{z}_2, B_{21}\widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} = 0. \tag{5.35}$$

Однако непосредственное вычисление показывает, что

$$(\widetilde{z}_2, B_{21}\widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} = (\widetilde{z}_2, C^{(2)}\widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2} = (C^{(2)}\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2}. \tag{5.36}$$

Поэтому числа $\mu := \lambda^2/g$ (квадраты частот колебаний системы) можно найти по формуле

$$\mu = \lambda^2/g = \frac{(C^{(2)}\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2}}{(C^{(1)}\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}}, \tag{5.37}$$

где $\widetilde{z}_1$ и $\widetilde{z}_2$ — соответствующие амплитудные элементы в задаче (5.20), (5.21).

Напомним, что вариационное отношение (5.37) следует рассматривать на классе функций

$$\{\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}\}_{k=1}^{2} \in \vec{G}_{h,S_1,\Gamma}(\Omega_1), \quad \{\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}\}_{k=1}^{3} \in \vec{G}_{h,S_2,\Gamma}(\Omega_2), \tag{5.38}$$

т. е. таких, для которых выполнены следующие уравнения и краевые условия:

для первого маятника

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi_{1k} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_{1k}), \\ &\rho_{11}^{-1}\frac{\partial\Phi_{11}}{\partial n_{11}} = \rho_{12}^{-1}\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial n_{11}} \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \quad \vec{n}_{11} = \vec{e}_1^{\,3}; \end{aligned} \tag{5.39}$$

для второго маятника

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi_{2k} = 0 \quad (\text{в } \Omega_{1k}), \quad \frac{\partial\Phi_{2k}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_{2k}), \\ &\rho_{21}^{-1}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n_{21}} = \rho_{22}^{-1}\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n_{21}} \quad (\text{на } \Gamma_{21}), \quad \vec{n}_{21} = \vec{e}_2^{\,3}, \\ &\rho_{22}^{-1}\frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n_{21}} = \rho_{23}^{-2}\frac{\partial\Phi_{23}}{\partial n_{22}} \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \quad \vec{n}_{22} = \vec{e}_2^{\,3}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

5.4. Теорема о дискретности спектра. Использование потенциалов Жуковского. Докажем, что вариационному отношению (5.37) на решениях задач сопряжения (5.39), (5.40) отвечает дискретный спектр частот колебаний гидродинамической системы из трех сочлененных маятников. Предварительно преобразуем вариационную задачу введением потенциалов Жуковского для каждого маятника.

Воспользуемся выражением (4.58) для кинетической энергии третьего маятника и учтем, что

$$P_{G,3}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2) = \vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2.$$

Имеем квадратичную форму

$$\begin{aligned} &\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30}|^2\,d\Omega_{30} + \\ &+ \rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + P_{G,3}(\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{31})|^2\,d\Omega_{31}, \\ &P_{G,3} : \vec{L}_2(\Omega_{31}) \ \to\ \vec{G}(\Omega_{31}) := \{\vec{u}_{31} = \nabla\psi_{31} : \int\limits_{\partial\Omega_{31}} \psi_{31}\,dS = 0\} \end{aligned} \tag{5.41}$$

— ортопроектор. Тогда, рассуждая так же, как и в пункте 3.1, и вводя потенциалы Жуковского $\psi_{31,l}$ (см. (3.21)–(3.31)), будем иметь из (5.41) форму

$$\rho_{30}\int\limits_{\Omega_{30}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_{30}|^2\,d\Omega_{30}+\rho_{31}\int\limits_{\Omega_{31}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\sum_{l=1}^{3}\omega_3^l\nabla\psi_{31,l}|^2\,d\Omega_{31}. \quad (5.42)$$

Аналогичные преобразования проведем для первого и второго маятников. Для первого маятника квадратичная форма кинетической энергии, как следует из (4.58), имеет вид

$$\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{10}|^2\,d\Omega_{10}+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1k}+\vec{w}_{1k}+\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}|^2\,d\Omega_{1k}, \quad (5.43)$$

причем для спектральной задачи при $\lambda\neq 0$ выполнено условие связи (5.25), которое приводит к квадратичной форме

$$\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{10}|^2\,d\Omega_{10}+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}+P_{G,1k}(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1k})|^2\,d\Omega_{1k}, \quad (5.44)$$

где $P_{G,1k}:\vec{L}_2(\Omega_{1k})\ \to\ \vec{G}(\Omega_{1k}),\ k=1,2$ — соответствующие ортопроекторы.

Вводя потенциал Жуковского соотношениями

$$P_{G,1k}(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{1k})=\nabla\psi_{1k},\quad k=1,2, \quad (5.45)$$

и представляя их в виде

$$\begin{gathered}\psi_{1k}=\sum_{l=1}^{3}\omega_1^l\psi_{1k,l},\quad \Delta\psi_{1k,l}=0\quad(\text{в }\Omega_{1k}),\\ \frac{\partial\psi_{1k,l}}{\partial n}=(\vec{e}_1^{\,l}\times\vec{r}_{1k})\cdot\vec{n}_{1k}\quad(\text{на }\partial\Omega_{1k}),\qquad \int\limits_{\partial\Omega_{1k}}\psi_{1k,l}\,dS=0,\end{gathered} \quad (5.46)$$

приходим к следующему выражению для кинетической энергии первого маятника:

$$\rho_{10}\int\limits_{\Omega_{10}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_{10}|^2\,d\Omega_{10}+\sum_{k=1}^{2}\rho_{1k}\int\limits_{\Omega_{1k}}|\rho_{1k}^{-1}\nabla\Phi_{1k}+\sum_{l=1}^{3}\omega_1^l\nabla\psi_{1k,l}|^2\,d\Omega_{1k}. \quad (5.47)$$

Для второго маятника аналогично из (4.58) имеем квадратичную форму

$$\rho_{20}\int\limits_{\Omega_{20}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{20}|^2\,d\Omega_{20}+\sum_{k=1}^{3}\rho_{2k}\int\limits_{\Omega_{2k}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}+\vec{w}_{2k}+\rho_{2k}^{-1}\nabla\Phi_{2k}|^2\,d\Omega_{2k}, \quad (5.48)$$

причем для спектральной задачи из (5.27) следует, что

$$i\lambda(\vec{w}_{2k}+P_{0,2k}(\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}))=0,\quad k=1,2,3. \quad (5.49)$$

Подставляя эти связи в (5.48), вводя потенциалы Жуковского

$$\nabla\psi_{2k}:=P_{G,2k}(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_{2k}),\quad k=1,2,3,$$

и их компоненты $\psi_{2k,l}$:

$$\begin{gathered}\psi_{2k}:=\sum_{l=1}^{3}\omega_2^l\psi_{2k,l},\quad \Delta\psi_{2k,l}=0\quad(\text{в }\Omega_{2k}),\\ \frac{\partial\psi_{2k,l}}{\partial n}=(\vec{e}_2^{\,l}\times\vec{r}_{2k})\cdot\vec{n}_{2k}\quad(\text{на }\partial\Omega_{2k}),\qquad \int\limits_{\Omega_{2k}}\psi_{2k,l}\,dS=0,\end{gathered} \quad (5.50)$$

приходим к квадратичному функционалу для кинетической энергии второго маятника

$$\rho_{20} \int\limits_{\Omega_{20}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{20}|^2 \, d\Omega_{20} + \sum_{k=1}^{3} \rho_{2k} \int\limits_{\Omega_{2k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k} + \sum_{l=1}^{3} \omega_2^l \nabla \psi_{2k,l}|^2 \, d\Omega_{2k}. \quad (5.51)$$

Окончательно получаем, что квадратичный функционал кинетической энергии гидромеханической энергии из трех сочлененных маятников имеет вид

$$\begin{aligned}(C^{(1)}\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1} = \Big[\rho_{10} \int\limits_{\Omega_{10}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{10}|^2 \, d\Omega_{10} + \sum_{k=1}^{2} \rho_{1k} \int\limits_{\Omega_{1k}} |\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k} + \sum_{l=1}^{3} \omega_1^l \nabla \psi_{1k,l}|^2 \, d\Omega_{1k}\Big] + \\ + \Big[\rho_{20} \int\limits_{\Omega_{20}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{20}|^2 \, d\Omega_{20} + \sum_{k=1}^{3} \rho_{2k} \int\limits_{\Omega_{2k}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k} + \sum_{l=1}^{3} \omega_2^l \nabla \psi_{2k,l}|^2 \, d\Omega_{2k}\Big] + \\ + \Big[\rho_{30} \int\limits_{\Omega_{30}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{30}|^2 \, d\Omega_{30} + \rho_{31} \int\limits_{\Omega_{31}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{h}_2 + \sum_{l=1}^{3} \omega_3^l \nabla \psi_{3k,l}|^2 \, d\Omega_{31}\Big].\end{aligned} \quad (5.52)$$

Опираясь теперь на определения операторных блоков оператора потенциальной энергии (см. (4.67)–(4.70)), формулы (4.71)–(4.73) для соответствующих квадратичных функционалов и на определения (5.31)–(5.34) элемента $\widetilde{z}_2$ и его компонент, приходим к квадратичному функционалу

$$\begin{aligned}(C^{(2)}\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2} = \Big\{(\rho_{11} - \rho_{12}) \int\limits_{\Gamma_{11}} \big[|\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1} \nabla \Phi_n) + \theta_{11}((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 - \\ - |\theta_{11}((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{11}) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2\big] \, d\Gamma_{11} + (m_1 l_1 + (m_2 + m_3) h_2) |P_2\vec{\omega}_2|^2\Big\} + \\ + \Big\{\sum_{j=1}^{2} (\rho_{2,j} - \rho_{2,j+1}) \int\limits_{\Gamma_{2j}} \big[|\gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1} \nabla \Phi_{2j}) + \theta_{2j}((P_2\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^{\,3})|^2 - \\ - |\theta_{2j}((P_2\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{2j}) \cdot \vec{e}_2^{\,3})|^2\big] \, d\Gamma_{2j} + (m_2 l_2 + m_3 h_2) |P_2\vec{\omega}_2|^2\Big\} + m_3 l_3 |P_2\vec{\omega}_3|^2.\end{aligned} \quad (5.53)$$

Таким образом, вариационное отношение (5.37) с квадратичными функционалами (5.52), (5.53) следует рассматривать в классе функций, удовлетворяющих связям (5.39), (5.40), с заданными потенциалами Жуковского для областей $\Omega_{1k},\ k = 1, 2$ (первый маятник, см. (5.46)), для областей $\Omega_2 k,\ k = 1, 2, 3$ (второй маятник, см. (5.50)), а также для области Ω_{31} (третий маятник).

Теорема 5.1. *Вариационная задача* (5.37), (5.52), (5.53), (5.39), (5.40) *имеет дискретный спектр* $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, *состоящий из конечнократных положительных собственных значений* μ_j *с предельной точкой* $\mu = +\infty$. *Отвечающая им система собственных элементов*

$$\begin{aligned}&\{\widetilde{z}_{1j} = \big((\widetilde{z}_{1,j})_1;\ (\widetilde{z}_{1,j})_2;\ (\widetilde{z}_{1,j})_3\big)\}_{j=1}^{\infty}, \\ &(\widetilde{z}_{1,j})_1 = \big(-P_{0,1}\{\vec{\omega}_{1,j} \times \vec{r}_{1k}\}_{k=1}^{2};\ \{\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k,j}\}_{j=1}^{2};\ \vec{\omega}_{1,j}\big), \\ &(\widetilde{z}_{1,j})_2 = \big(-P_{0,2}\{\vec{\omega}_{1,j} \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_{3,j} \times \vec{r}_{2k}\}_{k=1}^{3};\ \vec{\omega}_{2,j}\big), \quad (\widetilde{z}_{1,j})_3 = \vec{\omega}_{3,j}.\end{aligned} \quad (5.54)$$

образует базис в подпространстве пространства $\mathcal{H}_1 = \oplus_{k=1}^{3} \mathcal{H}_{1k}$ *ортогональном к подпространству* $\mathcal{H}_{10}$ *решений, отвечающих нулевому собственному значению* $\lambda = \lambda_0 = 0$ (*см.* (5.24)). *Этот базис ортогонален по формам операторов кинетической и потенциальной энергии гидромеханической системы* (*см.* (5.52), (5.53)).

Собственные элементы и собственные значения можно найти, рассматривая последовательные минимумы вариационного отношения (5.37) *в классе функций, удовлетворяющих условиям* (5.39), (5.40). *Для нахождения приближенных решений задачи можно применить метод Ритца к функционалу*

$$F(\widetilde{z}_1) := (C^{(2)}\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2} - \mu (C^{(1)}\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}. \quad (5.55)$$

При $j \to \infty$ собственные значения μ_j асимптотически разбиваются на 2 ветви

$$\mu_{j,k}, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{5.56}$$

отвечающие пограничным волнам в окрестности поверхности раздела Γ_{11} (первый маятник), и волнами в окрестности Γ_{21} и Γ_{22} (второй маятник). Эти ветви имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\mu_{j,1} = (j/c_1)^{1/2}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty), \quad c_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{(\rho_{11} + \rho_{12})^2}{(\rho_{11} - \rho_{12})^2} |\Gamma_{11}| > 0; \tag{5.57}$$

$$\mu_{j,2} = (j/c_2)^{1/2}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty), \quad c_2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{2} \frac{(\rho_{2k} + \rho_{2,k+1})^2}{(\rho_{2k} - \rho_{2,k+1})^2} |\Gamma_{2k}| > 0. \tag{5.58}$$

Доказательство. Заметим сначала, что совокупность элементов $\{\widetilde{z}_1\} \in \mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_{10}$, для которых при условиях (5.39), (5.40) конечна квадратичная форма (5.53), компактна в $\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_{10}$. Поэтому по теореме С. Г. Михлина (см. [26]) вариационная задача имеет дискретный положительный спектр $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ с предельной точкой $\mu = +\infty$, а система собственных элементов $\{\widetilde{z}_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$ отвечающая этим собственным значениям, образует ортогональный базис в $\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_{10}$ как по форме (5.52), так и по форме (5.53). В частности, этот базис можно выбрать удовлетворяющим свойствам

$$(C^{(1)}\widetilde{z}_{1,j}; \widetilde{z}_{1,j})_{\mathcal{H}_1} = \delta_{jl}, \quad (C^{(2)}\widetilde{z}_{2,j}; \widetilde{z}_{2,j})_{\mathcal{H}_2} = \mu_j \delta_{jl}, \quad j, l = 1, 2, \ldots. \tag{5.59}$$

Из [26] также получаем, что собственные значения μ_j можно найти по методу Ритца на основе функционала (5.55). Переходя к доказательству последних (асимптотических) утверждений теоремы, заметим, что квадратичная форма $(C^{(1)}\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_1}$ отличаются от «невозмущенной» квадратичной формы

$$(C_0^{(1)}\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_1} := \sum_{k=1}^{2} \rho_{1k} \int\limits_{\Omega_{1k}} |\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k}|^2 \, d\Omega_{1k} + \sum_{k=1}^{3} \rho_{2k} \int\limits_{\Omega_{2k}} |\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}|^2 \, d\Omega_{2k} \tag{5.60}$$

тем, что первая форма является расширением формы (5.60) на конечномерное (девятимерное) подпространство. Далее, аналогично квадратичная форма потенциальной энергии (5.53) является расширением формы

$$(C_0^{(2)}\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2} = (\rho_{11} - \rho_{12}) \int\limits_{\Gamma_{11}} |\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1} \nabla \Phi_{11})|^2 \, d\Gamma_{11} + \sum_{j=1}^{2} (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int\limits_{\Gamma_{2j}} |\gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1} \nabla \Phi_{2j})|^2 \, d\Gamma_{2j} \tag{5.61}$$

на это же конечномерное подпространство.

Отсюда и из общих результатов М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка (см., например, [26]) следует, что асимптотическое поведение чисел μ_j при $j \to \infty$ такое же, как для собственных значений вариационного отношения

$$(C_0^{(2)}\widetilde{z}_2, \widetilde{z}_2)_{\mathcal{H}_2} \ / \ (C_0^{(1)}\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1} \tag{5.62}$$

при дополнительных условиях (5.39), (5.40).

Однако вариационному отношению (5.62) отвечают две независимые спектральные задачи: первая задача — для отношения

$$(\rho_{11} - \rho_{12}) \int\limits_{\Gamma_{11}} |\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1} \nabla \Phi_{11})|^2 \, d\Omega_{11} \ / \ \sum_{k=1}^{2} \rho_{1k} \int\limits_{\Omega_{1k}} |\rho_{1k}^{-1} \nabla \Phi_{1k}|^2 \, d\Omega_{1k}, \tag{5.63}$$

рассматриваемого в классе функций (5.39), и вторая задача — для отношения

$$\sum_{j=1}^{2} (\rho_{2j} - \rho_{2,j+1}) \int\limits_{\Gamma_{2j}} |\gamma_{n,2j}(\rho_{2j}^{-1} \nabla \Phi_{2j})|^2 \, d\Gamma_{2j} \ / \ \sum_{k=1}^{3} \rho_{2k} \int\limits_{\Omega_{2k}} |\rho_{2k}^{-1} \nabla \Phi_{2k}|^2 \, d\Omega_{2k}, \tag{5.64}$$

рассматриваемого в классе функций (5.40).

Вариационные задачи (5.63) и (5.64) подробно исследованы, см., например, [37, с. 189–198]. Каждая из них имеет дискретный положительный спектр $\{\mu_{j,k}^0\}_{j=1}^{\infty}$, $k = 1, 2$ с предельной точкой

$\mu^0 = +\infty$. Асимптотические формулы (5.57) и (5.58) для этих задач следуют из работ И. С. Вулиса и М. З. Соломяка (см. [11, 12]).

С физической точки зрения собственным значениям $\mu_{j,1}$ отвечают пограничные волны собственных колебаний системы из двух идеальных жидкостей, заполняющих неподвижный сосуд, и имеющих границу раздела Γ_{11}. Соответственно собственным значениям $\mu_{j,2}$ отвечают пограничные волны собственных колебаний систем из трех жидкостей в окрестностях их границ раздела Γ_{21} и Γ_{22} (в полости неподвижного второго маятника). □

Замечание 5.1. Как показывают примеры, совокупность пограничных волн у поверхностей Γ_{21} и Γ_{22} во втором маятнике также асимптотически распадается на две совокупности: пограничные волны в окрестности Γ_{21} и пограничные волны в окрестности Γ_{22}. Каждой из этих совокупностей отвечает своя серия положительных собственных значений $\{\mu^0_{j,kl}\}_{j=1}^{\infty}$, $kl = 21, 22$, с асимптотическим поведением вида (5.57), т. е. отвечающим колебаниям лишь в одной окрестности Γ_{kl}.

5.5. Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости. До сих пор предполагалось, что исследуемая гидродинамическая система из трех сочлененных маятников статически устойчива по линейному приближению, то есть оператор потенциальной энергии системы положительно определен. Рассмотрим теперь случай, когда оператор $C^{(2)}$ имеет конечное число (не более 4) отрицательных собственных значений, то есть система не является статически устойчивой.

Учитывая формулы (5.26), (5.28), (5.29) и (5.31), (5.33), (5.34), а также связь $(i\lambda)^{-1}P^3\vec{\omega}_k = P^3\vec{\delta}_k$, введем оператор, связывающий между собой $\widetilde{z}_1$ и $\widetilde{z}_2$. Имеем

$$\widetilde{z}_2 = \breve{\gamma}_n\widetilde{z}_1 := (\gamma_{n,11}(\rho_{11}^{-1}\nabla\Phi_{11});\ P_2\vec{\omega}_1;\ \{\gamma_{n,2l}(\rho_{2l}^{-1}\nabla\Phi_{2l})\}_{l=1}^{2};\ P_2\vec{\omega}_2;\ P_2\vec{\omega}_3) \tag{5.65}$$

и заметим, что задача о спектре вариационного отношения (5.37) равносильна задаче

$$(\breve{\gamma}_n)^*C^{(2)}\breve{\gamma}_n\widetilde{z}_1 = \mu C_0^{(1)}\widetilde{z}_1, \quad \breve{\gamma}_n : \mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_{10} \ \to\ \mathcal{H}_2, \tag{5.66}$$

где $C_0^{(1)}$ — сужение оператора $C^{(1)}$ на $\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_{10}$; при этом $C^{(2)}$ представим в виде

$$C^{(2)} = |C^{(2)}|^{1/2}J_\kappa|C^{(2)}|^{1/2}, \tag{5.67}$$

где оператор $|C^{(2)}|^{1/2} \gg 0$ в $\mathcal{H}_2$, а J_κ — каноническая симметрия: $J_\kappa = J_\kappa^{-1} = J_\kappa^*$. Можно привести также (с учетом дополнительной связи и опираясь на свойства решений вспомогательных задач сопряжения, см. (5.58), (5.60) и (4.41)–(4.43)), что операторы $(\breve{\gamma}_n)^*$ и $\breve{\gamma}_n$ имеют ограниченные (и даже компактные) обратные в подпространстве $\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_{10}$, т. е. на элементах у которых $P^3\vec{\omega}_k = \vec{0}$. Тогда, осуществляя в (5.65), (5.66) замену по формуле

$$|C^{(2)}|^{1/2}\breve{\gamma}_n\widetilde{z}_1 =: v_1 \in \mathcal{H}_2, \tag{5.68}$$

приходим к задаче

$$v_1 = \mu J_\kappa C v_1, \quad C := |C^{(2)}|^{-1/2}((\breve{\gamma}_n)^*)^{-1}C_0^{(1)}(\breve{\gamma}_n)^{-1}|C^{(2)}|^{-1/2}, \tag{5.69}$$

где оператор C положительный и компактный.

Теорема 5.2. *Задача* (5.66) *имеет дискретный спектр* $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, *состоящий из конечнократных собственных значений* $\mu_j \in \mathbb{R}$ *с предельной точкой* $\mu = +\infty$. *При этом первые* κ *собственных значений отрицательные, а остальные положительные. Собственные элементы* $\{z_{2,j}\}_{j=1}^{\infty}$ *задачи* (5.66) *образуют базис, ортогональный по форме* $(C^{(1)}\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_1}$. *При этом выполнены формулы ортогональности* (5.59), *где теперь* $\mu_j < 0$ $(j \leqslant \kappa)$, $\mu_j > 0$ $(j \geqslant \kappa + 1)$.

Асимптотическое поведение собственных значений μ_j *при* $j \to \infty$ *по-прежнему имеет вид* (5.57), (5.58).

Доказательство. Оно основано на теореме Л. С. Понтрягина (см. [31], а также [2]) с учетом того, что оператор $J_\kappa C$ в (5.69) является компактным положительным оператором, действующим в пространстве с индефинитной метрикой

$$[v, w] := (J_\kappa v,\ w)_{\mathcal{H}_2}.$$

□

Следствием установленных фактов является утверждение, которое называют обращением теоремы Лагранжа об устойчивости.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия* (4.66) *и не выполнены условия* (4.76), *т. е. изучаемая гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению. Тогда она является и динамически неустойчивой, т. е. имеются решения однородной начально-краевой задачи* (4.63), *экспоненциально возрастающие по t при $t \to +\infty$.*

Доказательство. В самом деле, при $\mu = \lambda^2/g < 0$ задача имеет решения, зависящие от t по закону $\exp\left((|\mu|g)^{1/2}t\right)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013.
2. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
3. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014.
4. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976.
5. *Батыр Э. И., Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гиростатов// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 5–88.
6. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Мат. анализ. — 1977. — *14*. — С. 5–52.
7. *Войтицкий В. И.* К проблеме малых движений системы трех сочлененных маятников с полостями, заполненными однородными несжимаемыми жидкостями// Динам. сист. — 2018. — *8*, № 4. — С. 337–356.
8. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых колебаниях системы из трех сочлененных маятников с полостями, заполненными несмешивающимися несжимаемыми жидкостями// Материалы межд. конф. «Современные методы и проблемы математической гидродинамики», Воронеж, 3–8 мая 2018 г. — 2018. — С. 84–91.
9. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых движениях физического маятника, содержащего полость, заполненную системой однородных несмешивающихся жидкостей// Сб. материалов межд. конф. «XXIX Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам» (КРОМШ-2018). Секции 1–3. — Симферополь: Полипринт, 2018. — С. 58–62.
10. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* О малых движениях физического маятника с полостью, заполненной системой трех однородных несмешивающихся вязких жидкостей// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2018. — № 3. — С. 22–45.
11. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова // Вестн. ЛГУ. — 1973. — *19*. — С. 148–150.
12. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1974. — *38*, № 6. — С. 1362–1392.
13. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
14. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью// В сб.: «Избранные сочинения. Т. 1». — М.—Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 31–52.
15. *Кононов Ю. Н.* О движении связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость// Мех. тверд. тела. — 2000. — *30*. — С. 207–216.
16. *Копачевский Н. Д.* О колебаниях тела с полостью, частично заполненной тяжелой идеальной жидкостью: теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений// Пробл. динам. та стiйк. багатовимiр. систем. — 2005. — *2*, № 1. — С. 158–194.
17. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 71–105.
18. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2016.
19. *Копачевский Н. Д., Войтицкий В. И., Ситшаева З. З.* О колебаниях двух сочлененных маятников, содержащих полости, частично заполненные несжимаемой жидкостью// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2017. — *63*, № 4. — С. 627–677.
20. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.

21. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
22. *Крейн С. Г., Моисеев Н. Н.* О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной границей// Прикл. мат. мех. — 1957. — *21*, № 2. — С. 169–174.
23. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
24. *Луковский И. А., Барняк М. Я., Комаренко А. И.* Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости. — Киев: Наукова думка, 1989.
25. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968.
26. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
27. *Моисеев Н. Н., Петров А. А.* Численные методы расчета собственных частот и колебаний ограниченного объема жидкости. — М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1966.
28. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. — М.: Наука, 1965.
29. *Мышкис А. Д., Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. — Киев: Наукова думка, 1992.
30. *Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. — М.: Машиностроение, 1977.
31. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1944. — *8*, № 6. — С. 243–280.
32. *Рапопорт И. М.* Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. — М.: Машиностроение, 1967.
33. *Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В.* Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных областях. — Киев: Наукова думка, 1969.
34. *Харламов П. В.* Составной пространственный маятник// Мех. тверд. тела. — 1972. — *4*. — С. 73–82.
35. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. — М.: ВЦ АН СССР, 1968.
36. *Gagliargo E.* Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alaine classi di funzioni in n variabili// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1957. — *27*. — С. 284–305.
37. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. — Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2001.
38. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2003.
39. *Myshkis A. D., Babskii V. G., Kopachevsky N. D., Slobozhanin L. A., Tyuptsov A. D.* Low-gravity fluid mechanics. mathematical theory of capillary phenomena. — Berlin: Springer, 1987.

Н. Д. Копачевский
Таврическая академия Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского,
факультет математики и информатики, кафедра математического анализа
E-mail: `kopachevsky@list.ru`

В. И. Войтицкий
Таврическая академия Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского,
факультет математики и информатики, кафедра математического анализа
E-mail: `victor.voytitsky@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-434-512 UDC 517.98, 517.955, 532.5

On Oscillations of Connected Pendulums with Cavities Filled with Homogeneous Fluids

© 2019 **N. D. Kopachevsky, V. I. Voytitsky**

Abstract. We consider the problem and normal (eigen) oscillations of the system of three connected (coupled to each other) pendulums with cavities filled with one or several immiscible homogeneous fluids. We study the case of partially dissipative system when the cavity of the first pendulum is completely filled with two ideal fluids, the cavity of the second one is filled with three viscous fluids, and the cavity third one is filled with one ideal fluid. We use methods of functional analysis. We prove the theorem on correct solvability of the initial-boundary value problem on any interval of time. We study the case of eigen oscillations of conservative system where all fluids in cavities of pendulums are ideal and the friction in joints (points of suspension) is not taken into account. We consider in detail three auxiliary problems on small oscillations of single pendulums with three above variants of fluids in cavities.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems in Domains with Smooth and Lipschitz Boundaries], MTSNMO, Moscow, 2013 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Fundamentals of Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metrics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevskiy, *Prilozheniya indefinitnoy metriki* [Applications of Indefinite Metrics], DIAYPI, Simferopol', 2014 (in Russian).
4. V. G. Babskiy N. D. Kopachevskiy, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Gidromekhanika nevesomosti* [Hydromechanics of Weightlessness], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
5. E. I. Batyr and N. D. Kopachevskiy, "Malye dvizheniya i normal'nye kolebaniya sistemy sochlenennykh girostatov" [Small motions and normal oscillations in systems of connected gyrostats], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **49**, 5–88 (in Russian).
6. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra differentsial'nykh uravneniy" [Asymptotics of spectra of differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1977, **14**, 5–52 (in Russian).
7. V. I. Voytitskiy, "K probleme malykh dvizheniy sistemy trekh sochlenennykh mayatnikov s polostyami, zapolnennymi odnorodnymi neszhimaemymi zhidkostyami" [To the problem of small motions of system of three connected pendulums with cavities filled with homogeneous incompressible fluids], *Dinam. sist.* [Dynam. Syst.], 2018, **8**, No. 4, 337–356 (in Russian).
8. V. I. Voytitskiy and N. D. Kopachevskiy, "O malykh kolebaniyakh sistemy iz trekh sochlenennykh mayatnikov s polostyami, zapolnennymi nesmeshivayushchimisya neszhimaemymi zhidkostyami" [On small motions of system of three connected pendulums with cavities filled with immiscible incompressible fluids], Materials Int. Conf. "*Contemporary Methods and Problems of Mathematical Hydrodynamics,*" *Voronezh, 3–8 May 2018*, Voronezh, 2018, pp. 84–91 (in Russian).
9. V. I. Voytitskiy and N. D. Kopachevskiy, "O malykh dvizheniyakh fizicheskogo mayatnika, soderzhashchego polost', zapolnennuyu sistemoy odnorodnykh nesmeshivayushchikhsya zhidkostey" [On small motions of a physical pendulum with cavity filled with a system of homogeneous immiscible fluids], Matherials Int. Conf. *XXIX Crimean Autumnal Mathematical School on Spectral and Evolution Problems*, Sec. 1–3, Poliprint, Simferopol', 2018, pp. 58–62 (in Russian).
10. V. I. Voytitskiy and N. D. Kopachevskiy, "O malykh dvizheniyakh fizicheskogo mayatnika s polost'yu, zapolnennoy sistemoy trekh odnorodnykh nesmeshivayushchikhsya vyazkikh zhidkostey" [On small motions of a physical pendulum with cavity filled with a system of three homogeneous immiscible viscous fluids], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2018, No. 3, 22–45 (in Russian).

11. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, “Spektral’naya asimptotika vyrozhdayushcheysya zadachi Steklova” [Spectral asymptotics of the degenerating Steklov problem], *Vestn. LGU* [Bull. LGU], 1973, **19**, 148–150 (in Russian).
12. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, “Spektral’naya asimptotika vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh operatorov vtorogo poryadka” [Spectral asymptotics of second-order degenerating elliptic operators], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1974, **38**, No. 6, 1362–1392 (in Russian).
13. J. Goldstein, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (Russian translation).
14. N. E. Zhukovskiy, “O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoy kapel’noy zhidkost’yu” [On motion of solid body with cavities filled with homogeneous drip fluid], In: *Izbrannye sochineniya. T. 1* [Selected Works. Vol. 1], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1948, pp. 31–52 (in Russian).
15. Yu. N. Kononov, “O dvizhenii svyazannykh tverdykh tel s polostyami, soderzhashchimi zhidkost’” [On motion of connected solid bodies with cavities containing fluid], *Mekh. tverd. tela* [Mech. Solid Body], 2000, **30**, 207–216 (in Russian).
16. N. D. Kopachevskiy, “O kolebaniyakh tela s polost’yu, chastichno zapolnennoy tyazheloy ideal’noy zhidkost’yu: teoremy sushchestvovaniya, edinstvennosti i ustoychivosti sil’nykh resheniy” [On oscillations of a body with a cavity partially filled with heavy ideal fluid: existence, uniqueness, and stability theorems for strong solutions], *Probl. dinam. ta stiyk. bagatovimir. sistem* [Probl. Dynam. Stability Multidim. Syst.], 2005, **2**, No. 1, 158–194 (in Russian).
17. N. D. Kopachevskiy, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv i polutoralineynykh form” [Abstract Green formulas for triples of Hilbert spaces and sesquilinear forms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 71–105 (in Russian).
18. N. D. Kopachevskiy, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green Formula and Some Its Applications], Forma, Simferopol’, 2016 (in Russian).
19. N. D. Kopachevskiy, V. I. Voytitskiy, and Z. Z. Sitshaeva, “O kolebaniyakh dvukh sochlenennykh mayatnikov, soderzhashchikh polosti, chastichno zapolnennye neszhimaemoy zhidkost’yu” [On oscillations of two connected pendulums containing cavities partially filled by incompressible fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2017, **63**, No. 4, 627–677 (in Russian).
20. N. D. Kopachevskiy, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: Evolyutsionnye i spektral’nye zadachi* [Operator Methods in Nonlinear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
21. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial’nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
22. S. G. Kreyn and N. N. Moiseev, “O kolebaniyakh tverdogo tela, soderzhashchego zhidkost’ so svobodnoy granitsey” [On oscillations of solid body containing fluid with free boundary], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1957, **21**, No. 2, 169–174 (in Russian).
23. J. L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
24. I. A. Lukovskiy, M. Ya. Barnyak and A. I. Komarenko, *Priblizhennye metody resheniya zadach dinamiki ogranichennogo obema zhidkosti* [Approximate Methods of Solution for Problems of Dynamics of Bounded Volume of Fluid], Naukova dumka, Kiev, 1989 (in Russian).
25. G. N. Mikishev and B. I. Rabinovich, *Dinamika tverdogo tela s polostyami, chastichno zapolnennymi zhidkost’yu* [Dynamics of a Solid Body with Cavities Partially Filled with Fluid], Mashinostroenie, Moscow, 1968 (in Russian).
26. S. G. Mikhlin, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
27. N. N. Moiseev and A. A. Petrov, *Chislennye metody rascheta sobstvennykh chastot i kolebaniy ogranichennogo obema zhidkosti* [Numerical Methods for Computing Eigen Frequencies and Oscillations of Bounded Volume of Fluid], VTs AN SSSR, Moscow, 1966 (in Russian).
28. N. N. Moiseev and V. V. Rumyantsev, *Dinamika tela s polostyami, soderzhashchimi zhidkost’* [Dynamics of a Body with Cavities Containing Fluid], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
29. A. D. Myshkis, V. G. Babskiy, N. D. Kopachevskiy, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti* [Methods of Solution of Hydromechanical Problems for Weightlessness Conditions], Naukova dumka, Kiev, 1992 (in Russian).
30. G. S. Narimanov, L. V. Dokuchaev, and I. A. Lukovskiy, *Nelineynaya dinamika letatel’nogo apparata s zhidkost’yu* [Nonlinear Dynamics of an Aircraft with Fluid], Mashinostroenie, Moscow, 1977 (in Russian).

31. L. S. Pontryagin, “Ermitovy operatory v prostranstve s indefinitnoy metrikoy” [Hermit operators in the space with indefinite metrics], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1944, **8**, No. 6, 243–280 (in Russian).
32. I. M. Rapoport, *Kolebaniya uprugoy obolochki, chastichno zapolnennoy zhidkost'yu* [Oscillations of Elastic Casing Partially Filled with Fluid], Mashinostroenie, Moscow, 1967 (in Russian).
33. S. F. Feshchenko, I. A. Lukovskiy, B. I. Rabinovich, and L. V. Dokuchaev, *Metody opredeleniya prisoedinennykh mass zhidkosti v podvizhnykh oblastyakh* [Methods of Determination of Connected Masses of Fluid in Movable Domains], Naukova dumka, Kiev, 1969 (in Russian).
34. P. V. Kharlamov, “Sostavnoy prostranstvennyy mayatnik” [Compound spatial pendulum], *Mekh. tverd. tela* [Mech. Solid Body], 1972, **4**, 73–82 (in Russian).
35. F. L. Chernous'ko, *Dvizhenie tverdogo tela s polostyami, soderzhashchimi vyazkuyu zhidkost'* [Motion of Solid Body with Cavities Filled with Viscous Fluid], VTs AN SSSR, Moscow, 1968 (in Russian).
36. E. Gagliargo, “Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alaine classi di funzioni in n variabili,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1957, **27**, 284–305.
37. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics*, Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, Vol. 1, 2001.
38. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2003.
39. A. D. Myshkis, V. G. Babskii, N. D. Kopachevsky, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Low-gravity fluid mechanics. mathematical theory of capillary phenomena*, Springer, Berlin, 1987.

N. D. Kopachevsky
Taurida Academy, V. I. Vernadsky Crimea Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru

V. I. Voytitsky
Taurida Academy, V. I. Vernadsky Crimea Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: victor.voytitsky@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 3 (2019). С. 513–546

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-513-546 УДК 517.958

О ВНУТРЕННЕЙ РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА—КУЗНЕЦОВА

© 2019 г. **А. В. ФАМИНСКИЙ**

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы внутренней регулярности слабых решений начально-краевых задач для уравнения Захарова—Кузнецова с двумя пространственными переменными. Начальная функция предполагается нерегулярной, а основным параметром, влияющим на регулярность, является скорость убывания начальной функции на бесконечности. Основные результаты работы относятся к случаю задачи, поставленной на полуполосе. При этом различные типы краевых условий (например, Дирихле или Неймана) влияют на характер внутренней регулярности. Приводится также обзор ранее полученных результатов для других типов областей: всей плоскости, полуплоскости и полосы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Двумерное уравнение Захарова—Кузнецова (ЗК)

$$u_t + bu_x + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = 0, \quad u = u(t,x,y), \quad b \in \mathbb{R} - \text{const}, \tag{1.1}$$

является модельным для описания нелинейных волн в средах с дисперсией, распространяющихся в заданном направлении (в данном случае это ось x) и испытывающих поперечные деформации. Впервые оно было выведено в работе [4] для описания нелинейных ионно-звуковых волн в плазме, помещенной в магнитное поле, и в дальнейшем получило название уравнения Захарова—Кузнецова. Следует отметить, что в указанной статье рассматривался случай трех пространственных переменных (тогда в левую часть уравнения добавляется слагаемое u_{xzz}), однако здесь изучается его редуцированный двумерный вариант. Строгий вывод ЗК-модели можно найти, например, в [30, 36].

Уравнение (1.1) является одним из вариантов $(2+1)$-мерного обобщения уравнения Кортевега—де Фриза

$$u_t + bu_x + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad u = u(t,x). \tag{1.2}$$

Отметим, что в отличие от уравнения (1.2), обладающего бесконечным набором законов сохранения, для уравнения Захарова—Кузнецова известны только два:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} u^2\,dxdy = \text{const}, \quad \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \Bigl(u_x^2 + u_y^2 - \frac{1}{3}u^3\Bigr)\,dxdy = \text{const}. \tag{1.3}$$

Аналог 1-го из указанных законов сохранения (вместе с так называемом эффектом локального сглаживания) был использован в статье [5] (см. также [32]) для построения глобальных по времени слабых решений задачи Коши для уравнения (1.2) при нерегулярной начальной функции $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$, а именно, решений из класса

$$u \in L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R})), \quad \sup_{x_0\in\mathbb{R}} \int_0^T \int_{x_0}^{x_0+1} u_x^2\,dxdt < +\infty.$$

Более того, в [5] было показано, что если дополнительно известно, что $x^\alpha u_0 \in L_2(\mathbb{R}_+)$ (здесь и далее $\mathbb{R}_+ = (0,+\infty)$) для некоторого $\alpha > 0$, то

$$x^\alpha u \in L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}_+)), \quad x^{\alpha-1/2}u_x \in L_2(0,T;L_2(\mathbb{R}_+)).$$

При этом в случае $\alpha \geqslant 3/4$ построенные решения единственны в классе

$$(1+x_+)^{3/4}u \in L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}))$$

(здесь и далее $x_+ = \max(x,0)$). Наконец, в этой же работе было установлено свойство повышения внутренней гладкости слабых решений в зависимости от скорости убывания начальной функции при $x \to +\infty$: если $\alpha \geqslant n/2$ для некоторого натурального n, то решение обладает при $t > 0$ обобщенными производными до порядка $n+1$, причем для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$(x-x_0+1)^{\alpha-n/2}\partial_x^n u \in L_\infty(\delta,T;L_2(x_0,+\infty)), \quad \sup_{x_1\geqslant x_0} \int_\delta^T \int_{x_1}^{x_1+1} (\partial_x^{n+1}u)^2\,dxdt < +\infty,$$

а если $\alpha > n/2$, то

$$(x-x_0+1)^{\alpha-n/2-1/2}\partial_x^{n+1}u \in L_2(\delta,T;L_2(x_0,+\infty)).$$

Для случая начальной функции из пространства $H^1(\mathbb{R})$ аналогичные результаты (с использованием также аналога 2-го из законов сохранения (1.3)) были получены в статье [7], а для начально-краевой задачи на полуоси $\mathbb{R}_+$ с краевым условием $u|_{x=0} = \mu(t)$ — в статье [8].

Отметим также, что в статье [31] рассматривалась задача Коши для уравнения Кортевега—де Фриза с нерегулярной начальной функцией, экспоненциально быстро убывающей при $x \to +\infty$, а именно, $(1+\exp(\alpha x))u_0 \in L_2(\mathbb{R})$ для $\alpha > 0$; была установлена однозначная разрешимость в классе функций таких, что

$$(1+\exp(\alpha x))u \in L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R})), \quad \exp(\alpha x)u_x \in L_2((0,T)\times\mathbb{R}),$$

и доказана бесконечная гладкость построенных решений при $t > 0$.

Целью настоящей работы является изучение свойств внутренней регулярности слабых решений различных начально-краевых задач для уравнения (1.1), аналогичных описанным выше для уравнения (1.2). Поскольку основным параметром, влияющим на гладкость решения, является скорость убывания начальной функции (и, как следствие, самого решения) при $x \to +\infty$, будем рассматривать следующие области: 1) вся плоскость $\mathbb{R}^2$, 2) полуплоскость $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) : x > 0\}$, 3) горизонтальная полоса заданной ширины $\Sigma_L = \{(x,y) : 0 < y < L\}$, 4) полуполоса $\Sigma_{L,+} = \{(x,y) : x > 0, 0 < y < L\}$. Основные новые результаты настоящей статьи относятся именно к этому последнему 4-му случаю. В качестве весов при $x \to +\infty$ будут выбираться степенные функции и экспоненты.

Везде далее (если не оговорено противное) j, k, l, m, n обозначают неотрицательные целые числа, $p,q \in [1,+\infty]$, $s \in \mathbb{R}$, $[s]$ — целая часть числа $s \geqslant 0$. Если $\nu = (k_1,k_2)$ — целочисленный мультииндекс, $|\nu| = k_1 + k_2$, то положим $\partial^\nu = \partial_x^{k_1}\partial_y^{k_2}$. Пусть

$$|D^k\phi| = \Bigl(\sum_{|\nu|=k} (\partial^\nu\phi)^2\Bigr)^{1/2}, \qquad |D\phi| = |D^1\phi|.$$

Положим

$$\omega(x) \equiv \begin{cases} ce^{1/(x^2-1)}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

где положительная константа c выбрана так, чтобы $\int\limits_{-1}^{1} \omega(x)\,dx = 1$. Свойства этой функции хорошо известны, в частности, $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$. Положим

$$\eta(x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{2x-1} \omega(\xi)\,d\xi = 2\int\limits_{-\infty}^{x} \omega(2\xi-1)\,d\xi.$$

Тогда $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta'(x) > 0$ при $x \in (0,1)$, $\eta(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $\eta(x) = 1$ при $x \geqslant 1$, $\eta(x) + \eta(1-x) \equiv 1$. Будем также использовать свойство $\eta'(x) \leqslant c\eta^{1/2}(x)$ для некоторой положительной константы c и любого $x \in \mathbb{R}$ (оно легко следует из ограниченности сверху η'' на $\mathbb{R}$).

Пусть I обозначает либо всю действительную ось $\mathbb{R}$, либо полуось $\mathbb{R}_+$. Будем говорить, что бесконечно гладкая на $\overline{I}$ функция $\psi(x)$ является *допустимой весовой функцией*, если $|\psi^{(j)}(x)| \leqslant c(j)\psi(x)$ для всех натуральных чисел j и всех $x \in \overline{I}$. Очевидно, что любая допустимая весовая функция удовлетворяет неравенству $c^{-1}e^{-c_0 x} \leqslant \psi(x) \leqslant ce^{c_0 x}$ для некоторых положительных констант c_0, c и всех $x \in \overline{I}$. Нетрудно видеть, что $\psi^s(x)$ для любого $s \in \mathbb{R}$ также является допустимой весовой функцией (более подробно см. в [18]). Также очевидно, что произведение допустимых весовых функций является допустимой весовой функцией.

Примерами допустимых весовых функций являются $e^{2\alpha x}$ и $1 + e^{2\alpha x}$ (в дальнейшем они будут использоваться при $\alpha > 0$). Другим важным примером в случае $I = \mathbb{R}_+$ является степенная функция

$$\rho_\alpha(x) \equiv (1+x)^{2\alpha}, \quad \alpha > 0. \tag{1.4}$$

При $\alpha = 0$ будем использовать обозначение

$$\rho_0(x) \equiv 2 - \frac{1}{\ln(x+e)}. \tag{1.5}$$

Важной особенностью приведенных примеров весовых функций является то, что их производные $\psi'(x)$ также являются допустимыми весовыми функциями.

Будем говорить, что $\psi_1(x) \sim \psi_2(x)$ на I, если $c^{-1}\psi_1(x) \leqslant \psi_2(x) \leqslant c\psi_1(x)$ для некоторой положительной константы c и всех $x \in I$.

Лемма 1.1. *Пусть Ω — одна из четырех упомянутых выше областей* ($\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2_+$, Σ_L *или* $\Sigma_{L,+}$). *Пусть $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ суть две допустимые весовые функции, такие что $\psi_1(x) \leqslant c_0\psi_2(x)$ $\forall x \in \overline{I}$* ($I = \mathbb{R}$ *или* $I = \mathbb{R}_+$ *соответственно*) *для некоторой константы $c_0 > 0$. Пусть k — натуральное число, $m \in [0,k)$, $q \in [2,+\infty]$, если $k - m \geqslant 2$, и $q \in [2,+\infty)$, если $m = k-1$. Тогда существует константа $c > 0$, такая что для любой функции $\varphi(x,y)$, для которой $|D^k\varphi|\psi_1^{1/2}(x) \in L_2(\Omega)$, $\varphi\psi_2^{1/2}(x) \in L_2(\Omega)$, справедливо следующее неравенство*:

$$\big\||D^m\varphi|\psi_1^s(x)\psi_2^{1/2-s}(x)\big\|_{L_q(\Omega)} \leqslant c\big\||D^k\varphi|\psi_1^{1/2}(x)\big\|^{2s}_{L_2(\Omega)}\big\|\varphi\psi_2^{1/2}(x)\big\|^{1-2s}_{L_2(\Omega)} + c\big\|\varphi\psi_2^{1/2}(x)\big\|_{L_2(\Omega)}, \tag{1.6}$$

где

$$s = s(k,m,q) = \frac{m+1}{2k} - \frac{1}{kq}. \tag{1.7}$$

Доказательство. Если $\Omega = \mathbb{R}^2$, то данное неравенство является частным случаем более общего неравенства, установленного в [9] для произвольного числа переменных (при $q = +\infty$ в той статье накладывалось некоторое дополнительное техническое неравенство на функции ψ_1 и ψ_2, которое, как выяснилось позднее, легко снять). Для остальных областей доказательство аналогично (см., например, [19], где рассматривалась область $\Omega = \Sigma_L$). В целях использования неравенства в настоящей статье приведем доказательство для $\Omega = \Sigma_{L,+}$ и $k \leqslant 2$.

Без ограничения общности можно считать, что φ — гладкая убывающая при $x \to +\infty$ функция. Вначале следуя [6], установим одно вспомогательное неравенство: для $p \in [1,2)$, $p^* = 2p/(2-p)$ равномерно относительно L

$$\|\varphi\|_{L_{p^*}(\Sigma_{L,+})} \leqslant \frac{c(p)}{L}\big\||D\varphi| + |\varphi|\big\|_{L_p(\Sigma_{L,+})}. \tag{1.8}$$

Для $p=1$ (тогда $p^*=2$) это неравенство следует из неравенства

$$\iint\limits_{\Sigma_{L,+}} \varphi^2\,dxdy \leqslant \int\limits_0^L \sup_{x\in\mathbb{R}_+}|\varphi|\,dy \int\limits_{\mathbb{R}_+} \sup_{y\in(0,L)}|\varphi|\,dx$$

и очевидных одномерных интерполяционных неравенств

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}_+}|f'|\,dx, \qquad \sup_{y\in(0,L)}|f| \leqslant \frac{c}{L}\int\limits_0^L \big(|f'|+|f|\big)\,dy.$$

Если $p\in(1,2)$, то пусть $\widetilde{\varphi}\equiv|\varphi|^{p^*/2}\operatorname{sign}\varphi$, тогда из неравенства (1.8) для $p=1$ следует, что

$$\begin{aligned}\|\varphi\|^{p^*/2}_{L_{p^*}(\Sigma_{L,+})} &= \|\widetilde{\varphi}\|_{L_2(\Sigma_{L,+})} \leqslant \frac{c}{L}\big\||D\widetilde{\varphi}|+|\widetilde{\varphi}|\big\|_{L_1(\Sigma_{L,+})} \leqslant \frac{c(p)}{L}\big\||\varphi|^{p^*/2-1}(|D\varphi|+|\varphi|)\big\|_{L_1(\Sigma_{L,+})} \leqslant \\ &\leqslant \frac{c(p)}{L}\||\varphi|^{p^*/2-1}\|_{L_{p/(p-1)}(\Sigma_{L,+})}\big\||D\varphi|+|\varphi|\big\|_{L_p(\Sigma_{L,+})} = \frac{c(p)}{L}\|\varphi\|^{p^*/2-1}_{L_{p^*}(\Sigma_{L,+})}\big\||D\varphi|+|\varphi|\big\|_{L_p(\Sigma_{L,+})},\end{aligned}$$

откуда (1.8) вытекает и в этом случае.

Теперь мы можем доказать неравенство (1.6) для $k=1$, $m=0$, $q>2$ (для $q=2$ оно очевидно). Действительно, выбрав $p\in(1,2)$, такое что $q<p^*$, и применив сначала неравенство Гельдера, потом неравенство (1.8) к функции $\Phi\equiv|\varphi|^{2/p}\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/p^*}\operatorname{sign}\varphi$ (заметим, что $|D\Phi|\leqslant c(q)\big(|D\varphi|+|\varphi|\big)\psi_1^{1/2}|\varphi|^{2/p^*}\psi_2^{1/p^*}$) и в конце опять неравенство Гельдера, находим, что

$$\begin{aligned}\|\varphi\psi_1^{s(1,0,q)}\psi_2^{1/2-s(1,0,q)}\|_{L_q(\Sigma_{L,+})} &= \|\varphi\psi_1^{1/2-1/q}\psi_2^{1/q}\|_{L_q(\Sigma_{L,+})} = \big\||\Phi|^{q-2}\big(|\varphi|\psi_2^{1/2}\big)^{q-2(q-2)/p}\big\|^{1/q}_{L_1(\Sigma_{L,+})} \leqslant \\ &\leqslant \|\Phi\|^{1-2/q}_{L_{p^*}(\Sigma_{L,+})}\|\varphi\psi_2^{1/2}\|^{1-2(q-2)/(pq)}_{L_2(\Sigma_{L,+})} \leqslant \frac{c(q)}{L^{1-2/q}}\big\||D\Phi|+|\Phi|\big\|^{1-2/q}_{L_p(\Sigma_{L,+})}\|\varphi\psi_2^{1/2}\|^{1-2(q-2)/(pq)}_{L_2(\Sigma_{L,+})} \leqslant \\ &\leqslant \frac{c_1(q)}{L^{1-2/q}}\big\|\big(|D\varphi|+|\varphi|\big)\psi_1^{1/2}|\varphi|^{2/p^*}\psi_2^{1/p^*}\big\|^{1-2/q}_{L_p(\Sigma_{L,+})}\|\varphi\psi_2^{1/2}\|^{1-2(q-2)/(pq)}_{L_2(\Sigma_{L,+})} \leqslant \\ &\leqslant \frac{c_1(q)}{L^{1-2/q}}\big\|\big(|D\varphi|+|\varphi|\big)\psi_1^{1/2}\big\|^{1-2/q}_{L_2(\Sigma_{L,+})}\|\varphi\psi_2^{1/2}\|^{2/q}_{L_2(\Sigma_{L,+})}.\end{aligned}$$

Если $k=2$, $m=1$, $q=2$, интегрирование по частям приводит к равенству

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma_{L,+}}(\varphi_x^2+\varphi_y^2)\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\,dxdy &= -\iint\limits_{\Sigma_{L,+}}(\varphi_{xx}+\varphi_{yy})\psi_1^{1/2}\cdot\varphi\psi_2^{1/2}\,dxdy- \\ &-\iint\limits_{\Sigma_{L,+}}\varphi\varphi_x(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})'\,dxdy+\int\limits_{\mathbb{R}_+}\Big(\varphi\varphi_y\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\Big)\Big|_{y=0}^{y=L}dx-\int\limits_0^L\Big(\varphi\varphi_x\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\Big)\Big|_{x=0}dy.\end{aligned}$$

Для оценки предпоследнего интеграла в правой части этого равенства используем следующее одномерное интерполяционное неравенство:

$$\sup_{y\in[0,L]}|f|\leqslant c\Big[\Big(\int\limits_0^L(f')^2\,dy\Big)^{1/4}\Big(\int\limits_0^L f^2\,dy\Big)^{1/4}+\frac{1}{L^{1/2}}\Big(\int\limits_0^L f^2\,dy\Big)^{1/2}\Big],$$

а для оценки последнего интеграла — следующее:

$$\sup_{x\geqslant0}|f|(\psi_1\psi_2)^{1/4}\leqslant c\Big[\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+}(f')^2\psi_1\,dx\Big)^{1/4}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+}f^2\psi_2\,dx\Big)^{1/4}+\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+}f^2\psi_2\,dx\Big)^{1/2}\Big]$$

(которое, в свою очередь, следует из элементарного неравенства $\sup\limits_{x\geqslant0}f^2(x)\leqslant 2\int\limits_{\mathbb{R}_+}|f'f|\,dx$ и свойств допустимых весовых функций), а тогда

$$\left|\int_0^L \Bigl(\varphi\varphi_x\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\Bigr)\Big|_{x=0}\,dy\right| \leqslant \Bigl(\int_0^L \sup_{x\geqslant 0}\varphi^2\psi_1^{1/4}\psi_2^{3/4}\,dy\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int_0^L \sup_{x\geqslant 0}\varphi_x^2\psi_1^{3/4}\psi_2^{1/4}\,dy\Bigr)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c\Bigl(\iint_{\Sigma_{L,+}}\varphi_x^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}\Bigr)^{1/2}\Bigl[\Bigl(\iint_{\Sigma_{L,+}}\varphi_{xx}^2\psi_1\Bigr)^{1/4}\Bigl(\iint_{\Sigma_{L,+}}\varphi^2\psi_2\Bigr)^{1/4} + \Bigl(\iint_{\Sigma_{L,+}}\varphi^2\psi_2\Bigr)^{1/2}\Bigr].$$

В итоге получаем неравенство (1.6) в случае $k = 2$, $m = 1$, $q = 2$.

Комбинация уже полученных неравенств (1.6) в случаях $k = 1$, $m = 0$ и $k = 2$, $m = 1$, $q = 2$ приводит к этому неравенству в случае $k = 2$, $m = 0$, $q \in (2, +\infty)$, поскольку

$$\bigl(|\varphi|\psi_1^{s(2,0,q)}\psi_2^{1/2-s(2,0,q)}\bigr)^q = |\varphi|^q\psi_1^{q/4-1/2}\psi_2^{q/4+1/2} =$$
$$= |\varphi|^q(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})^{q/2-1}\psi_2 = \bigl(|\varphi|(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})^{s(1,0,q)}\psi_2^{1/2-s(1,0,q)}\bigr)^q,$$

и в случае $k = 2$, $m = 1$, $q \in (2, +\infty)$, поскольку при $|\nu| = 1$

$$\bigl(|\partial^\nu\varphi|\psi_1^{s(2,1,q)}\psi_2^{1/2-s(2,1,q)}\bigr)^q = |\partial^\nu\varphi|^q\psi_1^{q/2-1/2}\psi_2^{1/2} =$$
$$= |\partial^\nu\varphi|^q\psi_1^{q/2-1}(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}) = \bigl(|\partial^\nu\varphi|\psi_1^{s(1,0,q)}(\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2})^{1/2-s(1,0,q)}\bigr)^q.$$

Осталось рассмотреть случай $k = 2$, $m = 0$, $q = +\infty$. Здесь мы воспользуемся неравенством

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant c\bigl(\|f_{xx}\|_{L_1(\Omega)} + \|f_{yy}\|_{L_1(\Omega)} + \|f\|_{L_1(\Omega)}\bigr) \tag{1.9}$$

из книги [3] и применим его к функции $f \equiv \varphi^2\psi_1^{1/2}\psi_2^{1/2}$. Используя неравенство Коши—Буняковского и уже полученную оценку (1.6) в случае $k = 2$, $m = 1$, $q = 2$, завершаем доказательство леммы. □

Статья организована следующим образом. В разделе 2, который является основным разделом работы, устанавливаются результаты о внутренней регулярности слабых решений начально-краевых задач в области $\Sigma_{L,+}$. В разделах 3, 4 и 5, которые носят обзорный характер, в основном приводятся установленные ранее результаты на аналогичную тему для областей $\mathbb{R}^2_+$, $\mathbb{R}^2$ Σ_L соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-01-00590).

2. Начально-краевые задачи на полуполосе

Для уравнения (1.1) рассмотрим начально-краевые задачи в области $\Pi^+_{T,L} = (0,T)\times\Sigma_{L,+}$ (T и L — произвольные положительные числа) с начальными и краевыми условиями

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y)\in\Sigma_{L,+}, \tag{2.1}$$
$$u(t,0,y) = \mu(t,y), \qquad (t,y)\in B_{T,L} = (0,T)\times(0,L), \tag{2.2}$$

а также одним из 4-х краевых условий при $(t,x)\in\Omega_{T,+} = (0,T)\times\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} &\text{или} && a)\ u(t,x,0) = u(t,x,L) = 0,\\ &\text{или} && b)\ u_y(t,x,0) = u_y(t,x,L) = 0,\\ &\text{или} && c)\ u(t,x,0) = u_y(t,x,L) = 0,\\ &\text{или} && d)\ u \text{ — } L\text{-периодическая функция по } y. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Мы будем использовать обозначение «задача (1.1), (2.1)–(2.3)» для каждой из этих задач.

Для описания полученных результатов введем некоторые обозначения. Для любых $x_0 \geqslant 0$, $y_0 \in [0, L/2)$ положим

$$\Sigma_{L,x_0} = (x_0,+\infty)\times(0,L), \qquad \Sigma_{L,x_0,y_0} = (x_0,+\infty)\times(y_0,L-y_0)$$

(тогда $\Sigma_{L,+} = \Sigma_{L,0}$, $\Sigma_{L,x_0} = \Sigma_{L,x_0,0}$). Для любого $\delta\in[0,T)$ положим

$$\Pi^{\delta,x_0}_{T,L} = (\delta,T)\times\Sigma_{L,x_0}, \quad \Pi^{\delta,+}_{T,L} = \Pi^{\delta,0}_{T,L}, \quad \Pi^{\delta,x_0,y_0}_{T,L} = (\delta,T)\times\Sigma_{L,x_0,y_0}$$

(тогда $\Pi^+_{T,L} = \Pi^{0,+}_{T,L}$, $\Pi^{\delta,x_0}_{T,L} = \Pi^{\delta,x_0,0}_{T,L}$).

Введем специальные функциональные пространства, учитывающие граничные условия (2.3). Пусть символ $\widetilde{\mathcal{S}}(\overline{\Sigma}_L)$ обозначает пространство бесконечно гладких на $\overline{\Sigma}_L$ функций $\varphi(x,y)$, для которых $(1+|x|)^n|\partial^\nu\varphi(x,y)| \leqslant c(n,\nu)$ для любых n, мультииндексов ν, $(x,y)\in\overline{\Sigma}_L$ и $\partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=L}=0$ в случае a), $\partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=0}=\partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=L}=0$ в случае b), $\partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=0}=\partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=L}=0$ в случае c), $\partial_y^{m}\varphi\big|_{y=0}=\partial_y^{m}\varphi\big|_{y=L}$ в случае d) для любого m.

Пусть пространство $\widetilde{H}^s(\Sigma_L)$ является замыканием пространства $\widetilde{\mathcal{S}}(\overline{\Sigma}_L)$ по норме $H^s(\Sigma_L)$ и $\widetilde{H}^s(\Sigma_{L,x_0})$ является сужением $\widetilde{H}^s(\Sigma_L)$ на Σ_{L,x_0} (в частности, $\widetilde{H}^s(\Sigma_{L,+})=\widetilde{H}^s(\Sigma_{L,0})$).

Нетрудно видеть, что $\widetilde{H}^0(\Sigma_{L,x_0})=L_2(\Sigma_{L,x_0})$; для $j\geqslant 1$

в случае a) $\quad \widetilde{H}^j(\Sigma_{L,x_0})=\{\varphi\in H^j(\Sigma_{L,x_0}):\partial_y^{2m}\varphi|_{y=0}=\partial_y^{2m}\varphi|_{y=L}=0,\ 2m<j\}$,

в случае b) $\quad \widetilde{H}^j(\Sigma_{L,x_0})=\{\varphi\in H^j(\Sigma_{L,x_0}):\partial_y^{2m+1}\varphi|_{y=0}=\partial_y^{2m+1}\varphi|_{y=L}=0,\ 2m+1<j\}$,

в случае c) $\quad \widetilde{H}^j(\Sigma_{L,x_0})=\{\varphi\in H^j(\Sigma_{L,x_0}):\partial_y^{2m}\varphi|_{y=0}=0,\ 2m<j,\ \partial_y^{2m+1}\varphi|_{y=L}=0,\ 2m+1<j\}$,

в случае d) $\quad \widetilde{H}^j(\Sigma_{L,x_0})=\{\varphi\in H^j(\Sigma_{L,x_0}):\partial_y^{m}\varphi|_{y=0}=\partial_y^{m}\varphi|_{y=L},\ m<j\}$

(для натуральных j эти свойства можно принять за определение указанных пространств).

В полуполосе Σ_{L,x_0,y_0} (при $y_0>0$) будем использовать обычные пространства Соболева $H^j(\Sigma_{L,x_0,y_0})$ (без граничных условий).

Определение 2.1. Пусть $u_0\in L_2(\Sigma_{L,+})$, $\mu\in L_2(B_{T,L})$. Функция $u\in L_\infty(0,T;L_2(\Sigma_{L,+}))$ называется *слабым решением* задачи (1.1), (2.1)–(2.3), если для любой функции $\phi\in L_2(0,T;\widetilde{H}^2(\Sigma_{L,+}))$, для которой $\phi_t,\phi_{xxx},\phi_{xyy}\in L_2(\Pi_{T,L}^+)$, $\phi\big|_{t=T}=0$, $\phi\big|_{x=0}=\phi_x\big|_{x=0}=0$, справедливо равенство

$$\iiint_{\Pi_{T,L}^+}\Big[u(\phi_t+b\phi_x+\phi_{xxx}+\phi_{xyy})+\frac12u^2\phi_x\Big]\,dxdydt+\iint\limits_{\Sigma_{L,+}}u_0\phi\big|_{t=0}\,dxdy+\iint\limits_{B_{T,L}}\mu\phi_{xx}\big|_{x=0}\,dydt=0. \quad (2.4)$$

Замечание 2.1. Заметим, что поскольку $\phi_x\in L_2(0,T;H^2(\Sigma_{L,+}))\subset L_2(0,T;L_\infty(\Sigma_{L,+}))$ и $\phi\in L_\infty(0,T;H^1(\Sigma_{L,+}))$, интегралы в (2.4) существуют.

Введем специальные весовые пространства. Пусть $\psi(x)\not\equiv\mathrm{const}$ — некоторая допустимая весовая функция на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Положим для $x_0\geqslant 0$, $y_0\in[0,L/2)$

$$L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0,y_0})=\{\varphi(x,y):\varphi\psi^{1/2}\in L_2(\Sigma_{L,x_0,y_0})\}$$

и снабдим это пространство естественной нормой (тогда $L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0})=L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0,0})$). На самом деле мы будем рассматривать специальные частные случаи этих пространств, соответствующие степенным и экспоненциальным весам, и использовать следующие обозначения:

$$L_2^{\alpha}(\Sigma_{L,x_0,y_0})=L_2^{(1+x)^{2\alpha}}(\Sigma_{L,x_0,y_0}),\qquad L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0,y_0})=L_2^{e^{2\alpha x}}(\Sigma_{L,x_0,y_0})\quad\forall\alpha>0,$$

$L_2^0(\Sigma_{L,x_0,y_0})=L_2(\Sigma_{L,x_0,y_0})$ (и $L_2^\alpha(\Sigma_{L,x_0})=L_2^\alpha(\Sigma_{L,x_0,0})$, $L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0})=L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0,0})$, соответственно). В дальнейшем в этой части начальные функции в результатах для уравнения Захарова—Кузнецова будут выбираться именно из пространств $L_2^\alpha(\Sigma_{L,+})$ при $\alpha\geqslant 0$ и $L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})$ при $\alpha>0$.

Определим пространства

$$\widetilde{H}^{k,\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0})=\{\varphi(x,y):\varphi\psi^{1/2}\in\widetilde{H}^k(\Sigma_{L,x_0})\},$$
$$H^{k,\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0,y_0})=\{\varphi(x,y):\varphi\psi^{1/2}\in H^k(\Sigma_{L,x_0,y_0})\}$$

и снабдим их естественными нормами.

Определим следующие пространства функций, в которых будем рассматривать решения. Пусть производная $\psi'(x)$ также является допустимой весовой функцией. Введем пространство

$$\widetilde{X}^{k,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})=\{u(t,x,y):\partial_t^ju\in C([\delta,T];\widetilde{H}^{k-3j,\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0}))\cap \\ \cap L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{k-3j+1,\psi'(x)}(\Sigma_{L,x_0})),\quad j\leqslant k/3\},$$

и его более слабый вариант

$$\widetilde{X}_w^{k,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})=\{u(t,x,y):\partial_t^ju\in C_w([\delta,T];\widetilde{H}^{k-3j,\psi(x)}(\Sigma_{L,x_0}))\cap \\ \cap L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{k-3j+1,\psi'(x)}(\Sigma_{L,x_0})),\quad j\leqslant k/3\}$$

(символ C_w означает слабую непрерывность). Положим

$$\widetilde{X}^{k,\alpha}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) = \widetilde{X}^{k,\rho_\alpha(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}), \quad \widetilde{X}_w^{k,\alpha}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) = \widetilde{X}_w^{k,\rho_\alpha(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) \quad \forall \alpha \geqslant 0,$$

(функции ρ_α заданы формулами (1.4), (1.5)),

$$\widetilde{X}^{k,\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) = \widetilde{X}^{k,e^{2\alpha x}}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) \quad \forall \alpha > 0.$$

Будем считать, что

$$\widetilde{X}^{\psi(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) = \widetilde{X}^{0,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}), \quad \widetilde{X}_w^{\psi(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}) = \widetilde{X}_w^{0,\psi(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$$

(с последующими аналогичными уточнениями обозначений $\widetilde{X}^{\alpha}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$, $\widetilde{X}_w^{\alpha}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$ и $\widetilde{X}^{\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$). Нетрудно видеть, что, например, при $\alpha > 0$

$$X_w^{\alpha}(\Pi_{T,L}^{+}) = C_w([0,T]; L_2^{\alpha}(\Sigma_{L,+})) \cap L_2(0,T; \widetilde{H}^{1,\alpha-1/2}(\Sigma_{L,+})),$$
$$X_w^{\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{+}) = C_w([0,T]; L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})) \cap L_2(0,T; \widetilde{H}^{1,\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})).$$

В области $\Pi_{T,L}^{\delta,x_0,y_0}$ положим при $\alpha > 0$

$$X^{\alpha}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0,y_0}) = \{u(t,x,y) : u \in C([\delta,T]; L_2^{\alpha}(\Sigma_{L,x_0,y_0})) \cap L_2(\delta,T; H^{1,\alpha-1/2}(\Sigma_{L,x_0,y_0}))\}.$$

Положим для $\delta \in [0,T)$

$$\lambda^{+}(u;T,L,\delta) = \sup_{x_0 \geqslant 0} \int\limits_{\delta}^{T} \int\limits_{x_0}^{x_0+1} \int\limits_{0}^{L} u^2 \, dydxdt, \qquad \lambda^{+}(u;T,L) = \lambda^{+}(u;T,L,0).$$

Для описания свойств краевой функции μ введем анизотропные пространства. Пусть $B_L = \mathbb{R}^t \times (0,L)$. Определим функциональное пространство $\widetilde{\mathcal{S}}(\overline{B}_L)$ полностью аналогично $\widetilde{\mathcal{S}}(\overline{\Sigma}_L)$, где переменная x заменена на t. Пусть $\widetilde{H}^{s/3,s}(B_L)$ является замыканием пространства $\widetilde{\mathcal{S}}(\overline{B}_L)$ по норме $H^{s/3,s}(B_L)$.

Точнее, пусть $\psi_l(y)$, $l = 1,2\ldots,$ — ортонормальная в $L_2(0,L)$ система собственных функций оператора $(-f'')$ на отрезке $[0,L]$ с соответствующими граничными условиями: $f(0) = f(L) = 0$ в случае a), $f'(0) = f'(L) = 0$ в случае b), $f(0) = f'(L) = 0$ в случае c), $f(0) = f(L), f'(0) = f'(L)$ в случае d), λ_l — соответствующие собственные значения. Подобные системы хорошо известны и записываются через тригонометрические функции.

Для любой функции $\mu \in \widetilde{\mathcal{S}}(\overline{B}_L)$, $\theta \in \mathbb{R}$ и l пусть

$$\widehat{\mu}(\theta,l) \equiv \iint\limits_{B_L} e^{-i\theta t} \psi_l(y) \mu(t,y) \, dtdy. \tag{2.5}$$

Тогда норма в пространстве $H^{s/3,s}(B_L)$ определяется как

$$\Big(\sum_{l=1}^{+\infty} \big\| (|\theta|^{2/3} + l^2)^{s/2} \widehat{\mu}(\theta,l) \big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^\theta)} \Big)^{1/2},$$

а норма в $H^{s/3,s}(B_{T,L})$ — как норма сужения на $B_{T,L}$. В наиболее важном для нас случае $s \geqslant 0$ величины $\widehat{\mu}(\theta,l)$ могут быть определены напрямую как пределы в $L_2(B_L)$ интегралов $\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{0}^{L} e^{-i\theta t}\psi_l(y)\mu(t,y)\,dtdy$, $T \to +\infty$.

Использование подобных анизотропных пространств может быть обосновано следующим рассуждением. Пусть $v(t,x,y)$ является решением задачи Коши

$$v_t + v_{xxx} + v_{xyy} = 0, \qquad v\big|_{t=0} = v_0(x,y)$$

из пространства $C_b(\mathbb{R}^t; H^s(\mathbb{R}^2))$, которое легко строится с помощью преобразования Фурье. Тогда согласно [17] равномерно по $x \in \mathbb{R}$

$$\big\| D_t^{1/3} v \big\|^2_{H_{t,y}^{s/3,s}(\mathbb{R}^2)} + \big\| \partial_x v \big\|^2_{H_{t,y}^{s/3,s}(\mathbb{R}^2)} + \big\| \partial_y v \big\|^2_{H_{t,y}^{s/3,s}(\mathbb{R}^2)} \sim \|v_0\|^2_{H^s(\mathbb{R}^2)}$$

(здесь символ D^α обозначает потенциал Рисса порядка $-\alpha$, пространство $H^{s/3,s}_{t,y}(\mathbb{R}^2)$ определено в части 3).

Сформулируем основные результаты о слабых решениях рассматриваемых начально-краевых задач в полуполосе $\Sigma_{L,+}$. Сначала рассмотрим случай степенных весов.

Теорема 2.1. *Пусть $u_0 \in L_2^\alpha(\Sigma_{L,+})$ для некоторого $\alpha \geqslant 0$, $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B_{T,L})$ для некоторого $s > 3/2$. Тогда существует слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) *$u \in \widetilde{X}^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})$, более того, $\lambda^+(|Du|;T,L) < +\infty$. Если $\alpha \geqslant 1$, то это решение единственно в пространстве $\widetilde{X}^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})$ и, кроме того, $u \in \widetilde{X}^\alpha(\Pi^+_{T,L})$.*

Теорема 2.2. *Пусть $u_0 \in L_2^\alpha(\Sigma_{L,+})$ для некоторого $\alpha \geqslant 1/2$, $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$. Тогда существует слабое решение $u(t,x,y)$ задачи* (1.1), (2.1)–(2.3), *обладающее теми же свойствами, что и решение, построенное в теореме* 2.1, *и такое, что*

$$u \in \widetilde{X}^{1,\alpha-1/2}_w(\Pi^{\delta,+}_{T,L}), \quad \lambda^+(|D^2u|;T,L,\delta) < +\infty \quad \forall\delta \in (0,T).$$

Если $\alpha > 1/2$, то $u \in \widetilde{X}^{\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L})$ $\forall\delta \in (0,T)$; если $\alpha \geqslant 1$, то $u \in \widetilde{X}^{1,\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L})$ $\forall\delta \in (0,T)$.

Теорема 2.3. *Пусть условия теоремы* 2.2 *выполнены при $\alpha > 1$. Тогда слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) *$u(t,x,y)$ из пространства $\widetilde{X}^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})$ обладает следующим свойством:*

$$u \in \widetilde{X}^{2,\alpha-1}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}) \quad \forall\delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0.$$

Замечание 2.2. Вопрос о справедливости утверждения теоремы 2.3 при $\alpha = 1$ остается открытым.

Теорема 2.4. *Пусть условия теоремы* 2.2 *выполнены при $\alpha \geqslant l/2$ для некоторого $l \geqslant 3$. Тогда слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) *$u(t,x,y)$ из пространства $\widetilde{X}^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})$ обладает следующим свойством: в случаях краевых условий* (2.3) *a) или c)*

$$\partial_x^{l-3} u \in \widetilde{X}^{3,\alpha-l/2}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}) \quad \forall\delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0,$$

а в случаях краевых условий (2.3) *b) или d)*

$$u \in \widetilde{X}^{l,\alpha-l/2}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}) \quad \forall\delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0.$$

Теорема 2.5. *Пусть рассматривается случай краевых условий* (2.3) *a) или c), $4 \leqslant m \leqslant l$ и условия теоремы* 2.2 *выполнены при $\alpha > l/2 + m - 3$. Тогда слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) *$u(t,x,y)$ из пространства $\widetilde{X}^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})$ обладает следующим свойством: если $4 \leqslant k \leqslant m$, то*

$$\partial_x^{l-k}\partial_y^k u \in X^{\alpha-l/2-k+3}(\Pi^{\delta,x_0,y_0}_{T,L}) \quad \forall\delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0\ \forall y_0 \in (0,L/2).$$

Замечание 2.3. С использованием самого равенства (1.1) аналогичное утверждение нетрудно сформулировать и для производных решения по времени.

Теперь перейдем к случаю экспоненциальных весов.

Теорема 2.6. *Пусть $u_0 \in L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})$ для некоторого $\alpha > 0$, $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B_{T,L})$ для некоторого $s > 3/2$. Тогда существует единственное слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) *$u \in \widetilde{X}^{\alpha,exp}(\Pi^+_{T,L})$. Если дополнительно известно, что $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$, то*

$$u \in \widetilde{X}^{1,\alpha,exp}(\Pi^{\delta,+}_{T,L}) \quad \forall\delta \in (0,T).$$

Теорема 2.7. *Пусть $u_0 \in L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})$ для некоторого $\alpha > 0$, $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$. Тогда слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) *$u(t,x,y)$ из пространства $\widetilde{X}^{\alpha,exp}(\Pi^+_{T,L})$ обладает следующим свойством: в случаях краевых условий* (2.3) *a) или c) для любого l*

$$\partial_x^l u \in \widetilde{X}^{3,\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}) \quad \forall\delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0,$$

а в случаях краевых условий (2.3) *b) или d) для любого l*

$$u \in \widetilde{X}^{l,\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}) \quad \forall\delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0.$$

Теорема 2.8. *Пусть рассматривается случай краевых условий* (2.3) *a) или c), выполнены условия теоремы* 2.7. *Тогда слабое решение задачи* (1.1), (2.1)–(2.3) $u(t,x,y)$ *из пространства* $\widetilde{X}^{\alpha,exp}(\Pi^+_{T,L})$ *обладает следующим свойством*: *для любых* j *и мультииндексов* ν

$$\partial^j_t\partial^\nu u \in C([\delta,T];L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0,y_0})) \quad \forall\delta\in(0,T),\ \forall x_0>0,\ \forall y_0\in(0,L/2).$$

Замечание 2.4. Таким образом при выполнении условий теоремы 2.7 слабое решение становится бесконечно гладким при $t>0$, $x>0$, $0<y<L$.

Далее в этой части при интегрировании по всей полуполосе $\Sigma_{L,+}$ пределы интегрирования будем опускать.

Прежде чем приступить к доказательству сформулированных теорем, рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу в $\Pi^+_{T,L}$ для линейного уравнения

$$u_t + bu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = f(t,x,y) \tag{2.6}$$

с граничными условиями (2.1)–(2.3).

Слабое решение этой задачи определяется аналогично равенству (2.4). Отметим, что такое решение единственно в пространстве $L_2(\Pi^+_{T,L})$ (см. [22]).

Для исследования этой задачи при неоднородном краевом условии (2.2) в статье [22] были построены и исследованы специальные решения однородного уравнения (2.6) типа «граничного потенциала», использующиеся для обнуления этого краевого условия.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$z^3-(\lambda_l-b)z+p=0,\quad p=\varepsilon+i\theta\in\mathbb{C},$$

где λ_l суть упомянутые выше собственные значения оператора $(-f'')$ на отрезке $[0,L]$ с соответствующими граничными условиями на концах отрезка. Для $\varepsilon>0$ обозначим через $z_0(p,l)$ единственный корень этого уравнения, для которого $\operatorname{Re} z_0<0$. Нетрудно видеть, что существует число

$$r_0(\theta,l)=\lim_{\varepsilon\to+0} z_0(\varepsilon+i\theta,l), \tag{2.7}$$

которое, разумеется, является корнем уравнения

$$r^3-(\lambda_l-b)r+i\theta=0. \tag{2.8}$$

В статье [22] с помощью формулы Кардано были изучены свойства этого корня и введено следующее определение граничного потенциала: для $\mu\in L_2(B_L)$ при $x\geqslant 0$, $y\in[0,L]$ пусть

$$J(t,x,y;\mu)\equiv\sum_{l=1}^{+\infty}\mathcal{F}_t^{-1}\Big[e^{r_0(\theta,l)x}\widehat{\mu}(\theta,l)\Big](t)\psi_l(y), \tag{2.9}$$

где символ $\mathcal{F}_t^{-1}$ обозначает обратное преобразование Фурье (по переменной t), величины $\widehat{\mu}(\theta,l)$ заданы формулами (2.5), а функции ψ_l суть собственные функции упомянутого выше оператора на отрезке $[0,L]$. Перечислим некоторые свойства функции J, установленные в [22].

Любая функция J — бесконечно гладкая при $x>0$ и удовлетворяет равенству (2.6) для $f\equiv 0$. Для любых $T>0$, $x_0>0$, n и j

$$\sup_{x\geqslant x_0}\|\partial^n_x J(\cdot,x\cdot;\mu)\|_{\widetilde{H}^{j,3j}(B_{T,L})}\leqslant c(T,x_0,n,j)\|\mu\|_{L_2(B_L)}. \tag{2.10}$$

Далее, при $3m\leqslant k$

$$\|\partial^m_t J\|_{C_b(\mathbb{R}^t;\widetilde{H}^{k-3m}(\Sigma_{L,+}))}\leqslant c(k)\|\mu\|_{\widetilde{H}^{(k+1)/3,k+1}(B_L)}, \tag{2.11}$$

при $3m+|\nu|\leqslant k+1$

$$\|\partial^m_t\partial^\nu J\|_{C_b(\overline{\mathbb{R}}^x_+;L_2(B_L))}\leqslant c(k)\|\mu\|_{\widetilde{H}^{(k+1)/3,k+1}(B_L)}, \tag{2.12}$$

в частности, $J(t,0,y;\mu)\equiv\mu(t,y)$, наконец, при $s>3/2$

$$\|J\|_{L_2(0,T;W^1_\infty(\Sigma_{L,+}))}\leqslant c(T,s)\|\mu\|_{\widetilde{H}^{(s+1)/3,s+1}(B_L)}. \tag{2.13}$$

Введем вспомогательные пространства функций, экспоненциально быстро убывающих при $x\to+\infty$. Пусть символ $\widetilde{\mathcal{S}}_{exp}(\overline{\Sigma}_{L,+})$ обозначает пространство бесконечно гладких на $\overline{\Sigma}_{L,+}$ функций $\varphi(x,y)$, таких что $e^{nx}|\partial^\nu\varphi(x,y)|\leqslant c(n,\nu)$ для любых n, мультииндексов ν, $(x,y)\in\overline{\Sigma}_{L,+}$

и $\partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=L} = 0$ в случае a), $\partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=L} = 0$ в случае b), $\partial_y^{2m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{2m+1}\varphi\big|_{y=L} = 0$ в случае c), $\partial_y^{m}\varphi\big|_{y=0} = \partial_y^{m}\varphi\big|_{y=L} = 0$ в случае d) для любого m.

Пусть $\widetilde\Phi_0(x,y) \equiv u_0(x,y)$, а при $j \geqslant 1$

$$\widetilde\Phi_j(x,y) \equiv \partial_t^{j-1} f(0,x,y) - (b\partial_x + \partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2)\widetilde\Phi_{j-1}(x,y).$$

В статье [22] было доказано следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть* $u_0 \in \widetilde{\mathbb S}(\overline\Sigma_L) \cap \widetilde{\mathbb S}_{exp}(\overline\Sigma_{L,+})$, $f \in C^\infty\big([0,2T]; \widetilde{\mathbb S}(\overline\Sigma_L) \cap \widetilde{\mathbb S}_{exp}(\overline\Sigma_{L,+})\big)$, $\mu \in \widetilde{\mathbb S}(\overline B_L)$ *и* $\partial_t^j\mu(0,y) \equiv \widetilde\Phi_j(0,y)$ *для любого* j. *Тогда существует единственное решение задачи* (2.6), (2.1)–(2.3) $u \in C^\infty\big([0,T]; \widetilde{\mathbb S}_{exp}(\overline\Sigma_{L,+})\big)$.

Эта лемма позволяет строить решения задачи (2.6), (2.1)–(2.3) в негладком случае как пределы решений из пространства $C^\infty\big([0,T]; \widetilde{\mathbb S}_{exp}(\overline\Sigma_{L,+})\big)$ при наличии соответствующих оценок, установленных в гладком случае. Поэтому в доказательстве последующих лемм, относящихся к линейной задаче, для получения оценок решений рассматривается именно гладкий случай.

Лемма 2.2. *Пусть* $\psi(x)$ *является допустимой весовой функцией на* $\overline{\mathbb R}_+$, *такой что* $\psi'(x)$ *также является допустимой весовой функцией,* $u_0 \in L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu \in \widetilde H^{1/3,1}(B_{T,L})$, $f \equiv f_0 + f_{1x}$, *где* $f_0 \in L_1(0,T; L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f_1 \in L_2(0,T; L_2^{\psi^2(x)/\psi'(x)}(\Sigma_{L,+}))$. *Тогда существует* (*единственное*) *слабое решение задачи* (2.6), (2.1)–(2.3) $u \in \widetilde X^{\psi(x)}(\Pi^+_{T,L})$.

Доказательство. При $\mu \equiv 0$ это утверждение было доказано в [22]. В общем случае положим

$$g(t,x,y) \equiv J(t,x,y;\mu)\eta(2-x), \quad \widetilde g \equiv g_t + bg_x + g_{xxx} + g_{xyy}, \tag{2.14}$$

$$U(t,x,y) \equiv u(t,x,y) - g(t,x,y), \quad U_0(x,y) \equiv u_0(x,y) - g(0,x,y). \tag{2.15}$$

В силу свойств (2.10)–(2.12) $g \in \widetilde X^{\psi(x)}(\Pi^+_{T,L})$, кроме того, так как

$$\widetilde g = -bJ\eta'(2-x) - J\eta'''(2-x) + 3J_x\eta''(2-x) - 3J_{xx}\eta'(2-x) - J_{yy}\eta'(2-x),$$

то $\widetilde g \in C^\infty(\overline\Pi^+_{T,L})$, $\widetilde g = 0$ при $x \in [0,1] \cup [2,+\infty)$. Для функции U рассмотрим начально-краевую задачу $\Pi^+_{T,L}$ для уравнения

$$U_t + bU_x + U_{xxx} + U_{xyy} = f - \widetilde g, \tag{2.16}$$

с начальными и краевыми условиями

$$U\big|_{t=0} = U_0, \qquad U\big|_{x=0} = 0 \tag{2.17}$$

и с теми же краевыми условиями на $\Omega_{T,+}$, как (2.3). Согласно [22] решение этой задачи $U \in \widetilde X^{\psi(x)}(\Pi^+_{T,L})$ существует, тогда функция $u \equiv U + g$ дает решение исходной задачи. Заметим, что также согласно результатам статьи [22] и свойствам функции g

$$\begin{aligned} &\|u\|_{C([0,T];L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,+}))} + |||Du|||_{L_2(0,T;L_2^{\psi'(x)}(\Sigma_{L,+}))} \leqslant \\ &\leqslant c\Big(\|u_0\|_{L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,+})} + \|\mu\|_{H^{1/3,1}(B_{T,L})} + \|f_0\|_{L_1(0,T;L_2^{\psi(x)}(\Sigma_{L,+}))} + \|f_1\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi^2(x)/\psi'(x)}(\Sigma_{L,+}))}\Big). \end{aligned} \tag{2.18}$$

□

Лемма 2.3. *Пусть* $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ *являются допустимыми весовыми функциями на* $\overline{\mathbb R}_+$, *такими что* $\psi_0'(x)$, $\psi_1'(x)$ *также являются допустимыми весовыми функциями и* $\psi_0'(x) \sim \psi_1(x)$. *Пусть* $u_0 \in L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu \in \widetilde H^{2/3,2}(B_{T,L})$, $f \equiv f_0 + f_{1x}$, *где* $f_0 \in L_1(0,T; L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f_1 \in L_2(0,T; L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f \in L_2(\delta,T; L_2^{\psi_1^2(x)/\psi_1'(x)}(\Sigma_{L,+}))$ *для любого* $\delta \in (0,T)$. *Тогда* (*единственное*) *слабое решение задачи* (2.6), (2.1)–(2.3) $u \in \widetilde X^{\psi_0(x)}(\Pi^+_{T,L})$ *обладает следующим свойством*:

$$u \in \widetilde X^{1,\psi_1(x)}(\Pi^{\delta,+}_{T,L}) \quad \forall\delta \in (0,T). \tag{2.19}$$

Доказательство. Пусть $\varphi_\delta(t) \equiv \eta\Big(\dfrac{2t}{\delta} - 1\Big)$. Перейдем к функции U по формулам (2.14), (2.15). Заметим, что если $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$, то $g \in \widetilde{X}^{1,\psi(x)}(B_{T,L})$ для любой допустимой весовой функции ψ (с соответствующей оценкой).

Умножим равенство (2.16) на $-2\big((U_x(t,x,y)\psi_1(x))_x + U_{yy}(t,x,y)\psi_1(x)\big)\varphi_\delta(t)$ и проинтегрируем по $\Sigma_{L,+}$:

$$\frac{d}{dt}\iint (U_x^2+U_y^2)\psi_1\varphi_\delta\,dxdy + \iint (3U_{xx}^2+4U_{xy}^2+U_{yy}^2)\psi_1'\varphi_\delta\,dxdy + \psi_1(0)\int_0^L U_{xx}^2\big|_{x=0}\varphi_\delta\,dy =$$

$$= \iint (U_x^2+U_y^2)\psi_1\varphi_\delta'\,dxdy - \int_0^L (2U_{xx}U_x\psi_1' - U_x^2\psi_1'' + bU_x^2\psi_1)\big|_{x=0}\varphi_\delta\,dy +$$

$$+ \iint (U_x^2+U_y^2)(b\psi_1'+\psi_1''')\varphi_\delta\,dxdy - 2\iint (f-\widetilde{g})\big(U_{xx}\psi_1 + U_x\psi_1' + U_{yy}\psi_1\big)\varphi_\delta\,dxdy. \quad (2.20)$$

Имеем:

$$\Big|\iint f(U_{xx}+U_{yy})\psi_1\varphi_\delta\,dxdy\Big| \leqslant \varepsilon \iint (U_{xx}^2+U_{yy}^2)\psi_1'\varphi_\delta\,dxdy + c(\varepsilon)\iint f^2\frac{\psi_1^2}{\psi_1'}\varphi_\delta\,dxdy, \quad (2.21)$$

где $\varepsilon > 0$ может быть выбран сколь угодно малым,

$$\int_0^L U_x^2\big|_{x=0}\,dy \leqslant c\Big(\iint U_{xx}^2\psi_1'\,dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint U_x^2\psi_1\,dxdy\Big)^{1/2} + c\iint U_x^2\psi\,dxdy. \quad (2.22)$$

Тогда из равенства (2.20) следует, что

$$\||DU|\|_{C([\delta,T];L_2^{\psi_1(x)}(\Sigma_{L,+}))} + \||D^2U|\|_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_1'(x)}(\Sigma_{L,+}))} \leqslant$$
$$\leqslant c(\delta)\Big(\|f\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_1^2(x)/\psi_1'(x)}(\Sigma_{L,+}))} + \||DU|\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi_1(x)}(\Sigma_{L,+}))}\Big). \quad (2.23)$$

Поскольку $\psi_0' \sim \psi_1$, применяя оценку (2.18) находим, что

$$\||Du|\|_{C([\delta,T];L_2^{\psi_1(x)}(\Sigma_{L,+}))} + \||D^2u|\|_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_1'(x)}(\Sigma_{L,+}))} \leqslant c(\delta)\Big(\|u_0\|_{L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})} + \|\mu\|_{H^{2/3,2}(B_{T,L})} +$$
$$+ \|f_0\|_{L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))} + \|f_1\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))} + \|f\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_1^2(x)/\psi_1'(x)}(\Sigma_{L,+}))}\Big), \quad (2.24)$$

откуда следует свойство (2.19). □

Лемма 2.4. *Пусть $\psi_j(x)$, $0 \leqslant j \leqslant l$, $l \geqslant 2$, являются допустимыми весовыми функциями на $\overline{\mathbb{R}}_+$, такими что $\psi_j'(x)$ также являются допустимыми весовыми функциями и $\psi_{j-1}'(x) \sim \psi_j(x)$ при $j \geqslant 1$. Пусть $u_0 \in L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu \in \widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$, $f \equiv f_0 + f_{1x}$, где $f_0 \in L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f_1 \in L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{j-1,\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$ для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 > 0$ при $1 \leqslant j \leqslant l$. Тогда (единственное) слабое решение задачи (2.6), (2.1)–(2.3) $u \in \widetilde{X}^{\psi_0(x)}(\Pi_{T,L}^+)$ обладает следующим свойством:*

$$u \in C([\delta,T];\widetilde{H}^{l,\psi_l(x)}(\Sigma_{L,x_0})) \cap L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{l+1,\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0})) \quad \forall \delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0. \quad (2.25)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по l. При $l = 1$ утверждение доказано в лемме 2.3 (для $x_0 = 0$). Пусть $l \geqslant 2$; предположим, что

$$\||D^{l-1}u|\|_{C([\delta,T];L_2^{\psi_{l-1}(x)}(\Sigma_{L,x_0}))} + \||D^l u|\|_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_{l-1}'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))} \leqslant c(\delta,x_0)\Big(\|u_0\|_{L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})} +$$
$$+ \|\mu\|_{H^{2/3,2}(B_{T,L})} + \|f_0\|_{L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))} + \|f_1\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))} +$$

$$+\sum_{j=1}^{l-1}\||D^{j-1}f\||_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0/2}))}\Big).$$

Пусть $\eta_{x_0}(x)\equiv\eta\Big(\dfrac{2x}{x_0}-1\Big)$, ν — мультииндекс, для которого $|\nu|=l-1$; умножив равенство (2.6) на $2(-1)^{l-1}\partial^\nu\big[(\partial^\nu u_x(t,x,y)\psi_l(x)\eta_{x_0}(x))_x+\partial^\nu u_{yy}\psi_l(x)\eta_{x_0}(x)\big]\varphi_\delta(t)$ и проинтегрировав по $\Sigma_{L,+}$, находим:

$$\frac{d}{dt}\iint\big[(\partial^\nu u_x)^2+(\partial^\nu u_y)^2\big]\psi_l\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy+\iint\big[3(\partial^\nu u_{xx})^2+4(\partial^\nu u_{xy})^2+(\partial^\nu u_{yy})^2\big](\psi_l\eta_{x_0})'\varphi_\delta\,dxdy=$$
$$=\iint\big[(\partial^\nu u_x)^2+(\partial^\nu u_y)^2\big]\psi_l\eta_{x_0}\varphi_\delta'\,dxdy+\iint\big[(\partial^\nu u_x)^2+(\partial^\nu u_y)^2\big]\big(b(\psi_l\eta_{x_0})'+(\psi_l\eta_{x_0})'''\big)\varphi_\delta\,dxdy-$$
$$-2\iint\partial^\nu f\big[(\partial^\nu u_{xx}\psi_l\eta_{x_0}+\partial^\nu u_x(\psi_l\eta_{x_0})'+\partial^\nu u_{yy}\psi_l\eta_{x_0}\big]\varphi_\delta\,dxdy,\quad(2.26)$$

откуда следует, что

$$\||D\partial^\nu u\||_{C([\delta,T];L_2^{\psi_l(x)}(\Sigma_{L,x_0}))}+\||D^2\partial^\nu u\||_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))}\leqslant$$
$$\leqslant c(\delta,x_0)\Big(\|\partial^\nu f\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_l^2(x)/\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0/2}))}+\||D\partial^\nu u\||_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_l(x)}(\Sigma_{L,x_0/2}))}\Big).\quad(2.27)$$

Суммируя по ν и применяя индуктивное предположение получаем, поскольку $\psi_{l-1}'\sim\psi_l$, что

$$\||D^l u\||_{C([\delta,T];L_2^{\psi_l(x)}(\Sigma_{L,x_0}))}+\||D^{l+1}u\||_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))}\leqslant c(\delta,x_0)\Big(\|u_0\|_{L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})}+$$
$$+\|\mu\|_{H^{1/3,1}(B_{T,L})}+\|f_0\|_{L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))}+\|f_1\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))}+$$
$$+\sum_{j=1}^{l}\||D^{j-1}f\||_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0/2}))}\Big).$$

□

Лемма 2.5. *Пусть для некоторого $l\geqslant4$ функции $\psi_j(x)$, $0\leqslant j\leqslant l$, удовлетворяют условиям леммы 2.4, $u_0\in L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu\in\widetilde H^{2/3,2}(B_{T,L})$, $f\equiv f_0+f_{1x}$, где $f_0\in L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f_1\in L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))$, $f\in L_2(\delta,T;\widetilde H^{j-1,\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$ при $1\leqslant j\leqslant3$, $\partial_x^{j-3}f\in L_2(\delta,T;\widetilde H^{2,\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$ для любых $\delta\in(0,T)$, $x_0>0$ при $4\leqslant j\leqslant l$. Тогда (единственное) слабое решение задачи (2.6), (2.1)–(2.3) $u\in\widetilde X^{\psi_0(x)}(\Pi_{T,L}^+)$ обладает следующим свойством:*

$$\partial_x^{l-3}u\in C([\delta,T];\widetilde H^{3,\psi_l(x)}(\Sigma_{L,x_0}))\cap L_2(\delta,T;\widetilde H^{4,\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))\quad\forall\delta\in(0,T)\ \forall x_0>0.\qquad(2.28)$$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по l. При $l=3$ утверждение доказано в лемме 2.4. Пусть $l\geqslant4$; предположим, что

$$\sum_{k=0}^{3}\|\partial_x^{l-k-1}\partial_y^k u\|_{C([\delta,T];L_2^{\psi_{l-1}(x)}(\Sigma_{L,x_0}))}+\sum_{k=0}^{4}\|\partial_x^{l-k}\partial_y^k u\|_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_{l-1}'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))}\leqslant$$
$$\leqslant c(\delta,x_0)\Big(\|u_0\|_{L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})}+\|\mu\|_{H^{2/3,2}(B_{T,L})}+\|f_0\|_{L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))}+\|f_1\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))}+$$
$$+\sum_{j=1}^{l-1}\sum_{k=0}^{\min(2,j-1)}\|\partial_x^{j-k-1}\partial_y^k f\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0/2}))}\Big).$$

Пусть $0\leqslant k\leqslant2$, $\nu=(l-k-1,k)$; аналогично доказательству леммы 2.4 умножив равенство (2.6) на $2(-1)^{l-1}\partial^\nu\big[(\partial^\nu u_x(t,x,y)\psi_l(x)\eta_{x_0}(x))_x+\partial^\nu u_{yy}\psi_l(x)\eta_{x_0}(x)\big]\varphi_\delta(t)$ и проинтегрировав по $\Sigma_{L,+}$, выводим равенство (2.26), откуда, в свою очередь, получаем оценку (2.27). Суммируя по k и применяя индуктивное предположение, получаем, поскольку $\psi_{l-1}'\sim\psi_l$, что

$$\sum_{k=0}^{3}\|\partial_x^{l-k}\partial_y^k u\|_{C([\delta,T];L_2^{\psi_l(x)}(\Sigma_{L,x_0})}+\sum_{k=0}^{4}\|\partial_x^{l-k+1}\partial_y^k u\|_{L_2(\delta,T;L_2^{\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0})}\leqslant$$
$$\leqslant c(\delta,x_0)\Big(\|u_0\|_{L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+})}+\|\mu\|_{H^{2/3,2}(B_{T,L})}+\|f_0\|_{L_1(0,T;L_2^{\psi_0(x)}(\Sigma_{L,+}))}+\|f_1\|_{L_2(0,T;L_2^{\psi_0^2(x)/\psi_0'(x)}(\Sigma_{L,+}))}+$$
$$+\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=0}^{\min(2,j-1)}\|\partial_x^{j-k-1}\partial_y^k f\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\psi_j^2(x)/\psi_j'(x)}(\Sigma_{L,x_0/2}))}\Big).$$

□

Лемма 2.6. *Пусть для некоторого $l\geqslant 4$ выполнены условия леммы 2.5. Пусть $4\leqslant m\leqslant l$ и для любого j, для которого $4\leqslant j\leqslant l$, существует набор допустимых весовых функций $\varkappa_{kj}(x)$, где $3\leqslant k\leqslant \min(j,m)$, таких что производные $\varkappa_{kj}'(x)$ также являются допустимыми весовыми функциями, $\varkappa_{3j}(x)\equiv\psi_j(x)$, $\varkappa_{kj}(x)\leqslant c\big(\varkappa_{(k-1)j}'\varkappa_{kj}'(x)\big)^{1/2}$ при $k\geqslant 4$ для некоторой константы c и любого $x\geqslant 0$. Пусть $\partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1}f\in L_2(\delta,T;L_2^{\varkappa_{(k-1)j}'(x)}(\Sigma_{L,x_0,y_0}))$ для любых $\delta\in(0,T)$, $x_0>0$, $y_0\in(0,L/2)$ при $4\leqslant j\leqslant l$, $4\leqslant k\leqslant\min(j,m)$. Тогда* (*единственное*) *слабое решение задачи* (2.6), (2.1)–(2.3) $u\in\widetilde{X}^{\psi_0(x)}(\Pi_{T,L}^+)$ *обладает следующим свойством*: *при* $4\leqslant j\leqslant l$

$$\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\in X^{\varkappa_{kj}(x)}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0,y_0})\quad\forall\delta\in(0,T)\ \forall x_0>0\ \forall y_0\in(0,L/2).\tag{2.29}$$

Доказательство. Положим $\gamma_{y_0}(y)\equiv\eta\Big(\dfrac{2y}{y_0}-1\Big)\eta\Big(\dfrac{2L-2y}{y_0}-1\Big)$. Пусть $4\leqslant j\leqslant l$, $4\leqslant k\leqslant\min(j,m)$, положим

$$v(t,x,y)\equiv\partial_x^{j-k}\partial_y^k u(t,x,y)\gamma_{y_0}(y).$$

Тогда функция v удовлетворяет в $\Sigma_{L,+}$ уравнению

$$v_t+bv_x+v_{xxx}+v_{xyy}=F\equiv\partial_x^{j-k}\partial_y^k f\gamma_{y_0}+2\partial_x^{j-k+1}\partial_y^{k+1}u\gamma_{y_0}'+\partial_x^{j-k+1}\partial_y^k u\gamma_{y_0}''.$$

Умножим это равенство на $2v(t,x,y)\varkappa_{kj}(x)\eta_{x_0}(x)\varphi_\delta(t)$ и проинтегрируем по $\Sigma_{L,+}$, тогда

$$\frac{d}{dt}\iint v^2\varkappa_{kj}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy+\iint(3v_x^2+v_y^2)(\varkappa_{kj}\eta_{x_0})'\varphi_\delta\,dxdy=\iint v^2\varkappa_{kj}\eta_{x_0}\varphi_\delta'\,dxdy+$$
$$+\iint v^2\big(b(\varkappa_{kj}\eta)'+(\varkappa_{kj}\eta)'''\big)\varphi_\delta\,dxdy+2\iint Fv\varkappa_{kj}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy.\tag{2.30}$$

Заметим, что

$$v_y^2\geqslant\frac12(\partial_x^{j-k}\partial_y^{k+1}u\gamma_{y_0})^2-(\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\gamma_{y_0}')^2,$$

$$2\int_0^L Fv\,dy=-2\int_0^L\partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1}f(\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\gamma_{y_0}^2)_y\,dy-4\int_0^L\partial_x^{j-k+1}\partial_y^k u\,\partial_x^{j-k}\partial_y^{k+1}u\,\gamma_{y_0}\gamma_{y_0}'\,dy-$$
$$-\int_0^L\partial_x^{j-k+1}\partial_y^k u\,\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\,\big(4(\gamma_{y_0}')^2+2\gamma_{y_0}\gamma_{y_0}''\big)\,dy,$$

где

$$-2\iint\partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1}f(\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\gamma_{y_0}^2)_y\varkappa_{kj}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy\leqslant\varepsilon\iint(\partial_x^{j-k}\partial_y^{k+1}u\,\gamma_{y_0})^2\varkappa_{kj}'\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy+$$
$$+\iint(\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\,\gamma_{y_0}')^2\varkappa_{kj}'\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy+c(\varepsilon)\iint(\partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1}f\,\gamma_{y_0})^2\frac{\varkappa_{kj}^2}{\varkappa_{kj}'}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy,$$

$$-4\iint\partial_x^{j-k+1}\partial_y^k u\,\partial_x^{j-k}\partial_y^{k+1}u\,\gamma_{y_0}\gamma_{y_0}'\varkappa_{kj}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \iint (\partial_x^{j-k}\partial_y^{k+1}u\,\gamma_{y_0})^2 \varkappa'_{kj}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy + c(\varepsilon)\iint (\partial_x^{j-k+1}\partial_y^k u\,\gamma'_{y_0})^2 \frac{\varkappa_{kj}^2}{\varkappa'_{kj}}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy.$$

Таким образом, поскольку $\varkappa_{kj}^2/\varkappa'_{kj} \leqslant c\varkappa'_{(k-1)j}$, $\varkappa_{kj} \leqslant c\varkappa'_{(k-1)j}$, из равенства (2.30) следует, что

$$\|\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\|_{C([\delta,T];L_2^{\varkappa_{kj}(x)}(\Sigma_{L,x_0,y_0}))} + \|\partial_x^{j-k}\partial_y^{k+1}u\|_{L_2(\delta,T;L_2^{\varkappa'_{kj}(x)}(\Sigma_{L,x_0,y_0}))} \leqslant$$
$$\leqslant c(\delta,x_0,y_0)\Big(\|\partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1}f\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\varkappa'_{(k-1)j}(x)}(\Sigma_{L,x_0/2,y_0/2}))} +$$
$$+ \|\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\varkappa'_{(k-1)j}(x)}(\Sigma_{L,x_0/2,y_0/2}))} + \|\partial_x^{j-k+1}\partial_y^k u\|_{L_2(\delta/2,T;L_2^{\varkappa'_{(k-1)j}(x)}(\Sigma_{L,x_0/2,y_0/2}))}\Big).$$

Заметим, что для $k=4$ последние два слагаемых в правой части этого неравенства уже оценены должным образом в лемме 2.5. Тогда индукция по k завершает доказательство леммы. □

Теперь перейдем к доказательству сформулированных выше теорем уже для самого уравнения Захарова—Кузнецова.

Доказательство теоремы 2.1. Хотя этот результат уже фактически установлен в [22], рассмотрим некоторые из деталей доказательства существования слабого решения, поскольку они будут использоваться далее при доказательстве следующих теорем. При этом ход доказательства будет отличаться от использованного в [22]. Доказательство же единственности здесь приводить не будем.

Прежде всего приблизим граничные данные более гладкими. Без ограничения общности можно считать, что $\mu \in \widetilde{H}^{s/3,s}(B_L)$. Пусть функции $\mu_h \in \widetilde{\mathcal{S}}(B_L)$, $h \in (0,1]$, таковы, что $\mu_h \to \mu$ в $\widetilde{H}^{s/3,s}(B_L)$ при $h \to +0$.

Положим $g_h(t,x,y) \equiv J(t,x,y;\mu_h)\eta(2-x)$, тогда $g_h \to g$ при $h \to +0$ в любом пространстве $\widetilde{X}^{\beta,exp}(\Pi_{T,L}^+)$, где функция g задана формулой (2.14). Кроме того согласно (2.13) равномерно по h

$$\|g_h\|_{L_2(0,T;W_\infty^1(\Sigma_{L,+}))} \leqslant c. \tag{2.31}$$

Пусть функции $u_0^h \in \widetilde{\mathcal{S}}(\Sigma_L)$ таковы, что $u_0^h \to u_0$ в пространстве $L_2^\alpha(\Sigma_{L,+})$ при $h \to +0$. Положим

$$U_{0h}(x,y) \equiv \Big(u_0^h(x,y) - g_h(0,x,y)\Big)\eta(\frac{2x}{h}-1)\eta(\frac{1}{h}+1-x), \quad u_{0h}(x,y) \equiv U_{0h}(x,y)+g_h(0,x,y). \tag{2.32}$$

Тогда $U_{0h} \to U_0$ (функция U_0 задана формулой (2.15)), $u_{0h} \to u_0$ в пространстве $L_2^\alpha(\Sigma_{L,+})$ при $h \to +0$. Кроме того $u_{0h}\big|_{x=0} = \mu_h\big|_{t=0}$. Воспользуемся результатом из статьи [22], согласно которому существует решение $u_h \in \widetilde{X}^{3,\beta,\exp}(\Pi_{T,L}^+)$ $\forall \beta > 0$ начально-краевой задачи для уравнения (1.1) с начальными и краевыми условиями

$$u\big|_{t=0} = u_{0h}, \qquad u\big|_{x=0} = \mu_h$$

и соответствующими краевыми условиями (2.3). Рассмотрим также функции $U_h \equiv u_h - g_h$, которые, очевидно, являются решениями задачи для уравнения

$$U_t + bU_x + U_{xxx} + U_{xyy} + UU_x + (g_h U)_x = F_h \equiv -g_h g_{hx} - \widetilde{g}_h \tag{2.33}$$

с начальными и краевыми условиями

$$U\big|_{t=0} = U_{0h}, \qquad U\big|_{x=0} = 0$$

и соответствующими краевыми условиями (2.3), где аналогично (2.14)

$$\widetilde{g}_h \equiv g_{ht} + bg_{hx} + g_{hxxx} + g_{hxyy}.$$

Заметим, что равномерно по h для любого $\beta > 0$

$$\|F_h\|_{C([0,T];L_2^{\beta,exp}(\Sigma_{L,+}))} \leqslant c.$$

Умножив равенство (2.33) (для $U \equiv U_h$) на $2U_h(t,x,y)$ и проинтегрировав по $\Sigma_{L,+}$, получим равенство (которое, разумеется, является аналогом 1-го из законов сохранения (1.3))

$$\frac{d}{dt}\iint U_h^2\,dxdy + \int\limits_0^L U_{hx}^2\big|_{x=0}\,dy + \iint g_{hx}U_h^2\,dxdy = 2\iint F_hU_h\,dxdy,$$

из которого с учетом (2.31) вытекают равномерные по h оценки

$$\|U_h\|_{C([0,T];L_2(\Sigma_{L,+}))} \leqslant c, \qquad \|u_h\|_{C([0,T];L_2(\Sigma_{L,+}))} \leqslant c. \tag{2.34}$$

Далее, умножив равенство (2.33) на $2U_h(t,x,y)\rho_\alpha(x)$ и проинтегрировав по $\Sigma_{L,+}$, получим равенство

$$\frac{d}{dt}\iint U_h^2\rho_\alpha\,dxdy + \int\limits_0^L U_{hx}^2\big|_{x=0}\,dy + 3\iint(3U_{hx}^2+U_{hy}^2)\rho_\alpha'\,dxdy -$$
$$- \iint U_h^2(\rho_\alpha'''+b\rho_\alpha')\,dxdy - \frac{1}{3}\iint U_h^3\rho_\alpha'\,dxdy + \iint(g_{hx}\rho_\alpha - g_h\rho_\alpha')U_h^2\,dxdy = 2\iint F_hU_h\rho_\alpha\,dxdy. \tag{2.35}$$

Здесь с учетом уже полученной оценки (2.34) и интерполяционного неравенства (1.6) (для $k=1$, $m=0$, $q=4$, $\psi_1=\psi_2\equiv\rho_\alpha'$)

$$\Big|\iint U_h^3\rho_\alpha'\,dxdy\Big| \leqslant \Big(\iint U_h^2\,dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint U_h^4(\rho_\alpha')^2\,dxdy\Big)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\iint(U_{hx}^2+U_{hy}^2)\rho_\alpha'\,dxdy + c(\varepsilon)\iint U_h^2\rho_\alpha\,dxdy \tag{2.36}$$

и тогда из равенства (2.35) следует, что равномерно по h

$$\|U_h\|_{\widetilde{X}^\alpha(\Pi_{T,L}^+)} \leqslant c, \qquad \|u_h\|_{\widetilde{X}^\alpha(\Pi_{T,L}^+)} \leqslant c. \tag{2.37}$$

Пусть теперь $\psi(x) \equiv 1+\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x$. Заметим, что эта функция является допустимой весовой функцией на всей оси $\mathbb{R}$, ее производная ψ' также является допустимой весовой функцией, кроме того, эта функция ограничена на $\mathbb{R}$. Пусть $x_0 \geqslant 0$, тогда умножив равенство (2.33) на $2U_h(t,x,y)\psi(x-x_0)$ и проинтегрировав по $\Sigma_{L,+}$, получим равенство аналогичное (2.35), в котором функция $\rho_\alpha(x)$ заменена на $\psi(x)$. Применяя уже полученную оценку (2.34), находим аналогично (2.37), что равномерно по h

$$\lambda^+(|Du_h|;T,L) \leqslant c. \tag{2.38}$$

На основе полученных оценок (2.37), (2.38) стандартным приемом (см., например, [22]) предельным переходом при $h\to+0$ строим слабое решение рассматриваемой задачи $u\in\widetilde{X}_w^\alpha(\Pi_{T,L}^+)$, $\lambda^+(|Du|;T,L)<+\infty$.

Если $\alpha\geqslant 1$, то рассмотрим построенное решение u как решение соответствующей начально-краевой задачи для линейного уравнения (2.6) при $f\equiv -uu_x$. Применим лемму 2.2 для $\psi(x)\equiv(1+x)^{2\alpha}$, $f_0\equiv 0$, $f_1\equiv -u^2/2$. Заметим, что в этом случае $\psi^2(x)/\psi'(x)\sim(1+x)^{2\alpha+1}\leqslant(1+x)^{2\alpha-1}(1+x)^{2\alpha}$, и согласно (1.6) (для $k=1$, $m=0$, $q=4$, $\psi_1=(1+x)^{2\alpha-1}$, $\psi_2=(1+x)^{2\alpha}$)

$$\int\limits_0^T\!\!\iint u^4(1+x)^{2\alpha-1}(1+x)^{2\alpha}\,dxdydt \leqslant c\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\iint u^2\rho_\alpha\,dxdy\int\limits_0^T\!\!\iint(|Du|^2\rho_\alpha'+u^2\rho_\alpha)\,dxdydt<+\infty. \tag{2.39}$$

Тогда в силу указанной леммы $u\in\widetilde{X}^\alpha(\Pi_{T,L}^+)$. □

Доказательство теоремы 2.2. Будем использовать те же гладкие решения u_h, что и в доказательстве теоремы 2.1. Заметим, что в данном случае $g_h\to g$ при $h\to+0$ в любом пространстве $\widetilde{X}^{1,\beta,exp}(\Pi_{T,L}^+)$.

Умножив равенство (2.33) (для $U\equiv U_h$) на $-\big(2(U_{hx}(t,x,y)\rho_{\alpha-1/2}(x))_x+2U_{hyy}(t,x,y)\rho_{\alpha-1/2}(x)+U_h^2(t,x,y)\rho_{\alpha-1/2}(x)(x)\big)\varphi_\delta(t)$ и проинтегрировав по $\Sigma_{L,+}$, получим равенство (являющееся аналогом 2-го из законов сохранения (1.3), см. также (2.20)):

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\iint\Big(U_{hx}^2+U_{hy}^2-\frac13U_h^3\Big)\rho_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\iint\big(3U_{hxx}^2+4U_{hxy}^2+U_{hyy}^2\big)\,\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\\
+\int_0^L U_{hxx}^2\big|_{x=0}\varphi_\delta\,dy=\iint\Big(U_{hx}^2+U_{hy}^2-\frac13U_h^3\Big)\rho_{\alpha-1/2}\varphi'_\delta\,dxdy+\\
+\iint\big(U_{hx}^2+U_{hy}^2\big)\big(b\rho'_{\alpha-1/2}+\rho'''_{\alpha-1/2}\big)\varphi_\delta\,dxdy-2\iint(U_{hxx}+U_{hyy})U_h^2\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy-\\
-\iint\Big(\frac b3U_h^3+\frac14U_h^4\Big)\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+2\iint(g_hU_h)_x(U_{hxx}+U_{hyy})\rho_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\\
+2\iint(g_hU_h)_xU_{hx}\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\frac13\iint(2g_{hx}\rho_{\alpha-1/2}-g_h\rho'_{\alpha-1/2})U_h^3\varphi_\delta\,dxdy-\\
-2\iint F_h(U_{hxx}\rho_{\alpha-1/2}+U_{hx}\rho'_{\alpha-1/2}+U_{hyy}\rho_{\alpha-1/2})\varphi_\delta\,dxdy-\iint F_hU_h^2\rho_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy-\\
-\int_0^L\big(2U_{hxx}U_{hx}\rho'_{\alpha-1/2}-U_{hx}^2\rho''_{\alpha-1/2}+bU_{hx}^2\rho_{\alpha-1/2}\big)\big|_{x=0}\varphi_\delta\,dy.\end{gathered}\tag{2.40}$$

Используем соответствующие аналоги неравенств (2.21), (2.22), (2.36). В частности, поскольку $\rho_{\alpha-1/2}(x)\sim\rho'_\alpha(x)$, из оценки (2.37) следует, что равномерно по h

$$\Big|\int_0^T\iint\Big(U_{hx}^2+U_{hy}^2-\frac13U_h^3\Big)\rho_{\alpha-1/2}\varphi'_\delta\,dxdy\,dt\Big|\leqslant c.$$

Кроме того, для сколь угодно малого $\varepsilon>0$

$$\begin{gathered}\Big|\iint(U_{hxx}+U_{hyy})U_h^2\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy\Big|\leqslant\varepsilon\iint|D^2U|^2\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+c(\varepsilon)\iint U_h^4\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy\equiv\\
\equiv\varepsilon\iint|D^2U|^2\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\gamma_{1h}(t),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Big|\iint(g_hU_h)_x(U_{hxx}+U_{hyy})\rho_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy\Big|\leqslant\varepsilon\iint|D^2U|^2\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\\
+c(\varepsilon)\operatorname*{ess\,sup}_{(x,y)\in\Sigma_{L,+}}(1+x)^{1+\varepsilon}(g_{hx}^2+g_h^2)\iint(U_{hx}^2+U_h^2)\rho_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy\equiv\varepsilon\iint|D^2U|^2\rho'_{\alpha-1/2}\varphi_\delta\,dxdy+\gamma_{2h}(t),\end{gathered}$$

где $\|\gamma_{jh}\|_{L_1(0,T)}\leqslant c$. Остальные слагаемые в правой части равенства (2.40) оцениваются аналогичным образом, и тогда равномерно по h

$$\|U_h\|_{\widetilde X^{1,\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L})}\leqslant c,\qquad\|u_h\|_{\widetilde X^{1,\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L})}\leqslant c.\tag{2.41}$$

Заменив в (2.40) $\rho_{\alpha-1/2}(x)$ на $1+\dfrac2\pi\operatorname{arctg}x$, получим аналогично (2.38), что

$$\lambda^+(|D^2u_h|;T,L,\delta)\leqslant c.\tag{2.42}$$

Из оценок (2.37), (2.41), (2.42) предельным переходом при $h\to+0$ получаем результат о существовании слабого решения рассматриваемой задачи $u\in\widetilde X^\alpha_w(\Pi^+_{T,L})\cap\widetilde X^{1,\alpha-1/2}_w(\Pi^{\delta,+}_{T,L})$, $\lambda^+(|D^2u|;T,L,\delta)<+\infty$.

Пусть $\alpha>1/2$, тогда $\rho'_{\alpha-1/2}(x)\sim(1+x)^{2\alpha-2}$. В силу интерполяционного неравенства (1.6) (для $k=2$, $\psi_1(x)\equiv(1+x)^{2\alpha-2}$, $\psi_2(x)\equiv(1+x)^{2\alpha}$)

$$\int_\delta^T \iint u^2 u_x^2 (1+x)^{4\alpha-2}\,dxdydt \leqslant \int_\delta^T \Bigl(\iint u^4 \psi_1^{1/2}\psi_2^{3/2}\,dxdy\Bigr)^{1/2}\Bigl(\iint u_x^4 \psi_1^{3/2}\psi_2^{1/2}\,dxdy\Bigr)^{1/2} dt \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\Bigl(\iint u^2\rho_\alpha(x)\,dxdy\Bigr)\int_\delta^T \iint \bigl(|D^2u|^2\rho'_{\alpha-1/2}(x) + u^2\rho_\alpha(x)\bigr)\,dxdy\,dt < +\infty. \quad (2.43)$$

Применяя лемму 2.2 к функции $v(t,x,y)\equiv u(t,x,y)\varphi_\delta(t)$ (где $f_0\equiv -uu_x\varphi_\delta - u\varphi'_\delta$, $f_1\equiv 0$, $\psi(x)\equiv (1+x)^{2\alpha-1}$, а тогда $\psi(x)\leqslant (1+x)^{4\alpha-2}$) получаем, что $u\in \widetilde{X}^{\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L})$.

Наконец, если $\alpha\geqslant 1$, то применим лемму 2.3 для $\psi_0(x)\equiv (1+x)^{2\alpha}$, $\psi_1(x)\equiv (1+x)^{2\alpha-1}$, $f\equiv -uu_x$, $f_0\equiv 0$ $f_1\equiv -u^2/2$. Заметим, что в этом случае $\psi_1^2(x)/\psi'_1(x)\sim (1+x)^{2\alpha}\leqslant (1+x)^{4\alpha-2}$. Тогда используя оценки (2.39) и (2.43), получаем, что $u\in \widetilde{X}^{1,\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L})$. □

Доказательство теоремы 2.3. Будем использовать те же гладкие решения u_h, что и в доказательстве теорем 2.1 и 2.2. При этом будем также использовать результат о дополнительной регулярности подобных решений при $x>0$ из статьи [23]: $\partial_x^n u_h \in \widetilde{X}^{3,\beta,exp}(\Pi^{0,x_0}_{T,L})$ для любых n, $x_0>0$ и $\beta>0$. В частности, $\partial_x^n u_{ht}, \partial_x^n u_{hty}, \partial_x^n\partial_y^j u_h \in L_2(0,T;L_2^{\beta,exp}(\Sigma_{L,x_0}))$ (при $j\leqslant 4$). Заметим, что тогда из самого равенства (1.1) (для $u\equiv u_h$) следует, что $u_{htyy}\in L_2(0,T;L_2^{\beta,exp}(\Sigma_{L,x_0}))$.

Пусть $\nu=(n_1,n_2)$ — произвольный мультииндекс, для которого $|\nu|=2$. Умножим равенство (1.1) на $\partial^\nu\bigl(\partial^\nu u_h(t,x,y)\rho_{\alpha-1}(x)\eta_{x_0}(x)\bigr)\varphi_\delta(t)$ и проинтегрируем по $\Pi^+_{t,L}$, тогда

$$\iint (\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy + \int_0^t\iint \bigl(3(\partial^\nu u_{hx})^2 + (\partial^\nu u_{hy})^2\bigr)(\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0})'\varphi_\delta\,dxdy\,d\tau =$$

$$= \int_0^t\iint (\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi'_\delta\,dxdy\,d\tau + \int_0^t\iint (\partial^\nu u_h)^2\bigl(b(\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0})' + (\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0})'''\bigr)\varphi_\delta\,dxdy\,d\tau -$$

$$- 2\int_0^t\iint \partial^\nu(u_hu_{hx})\partial^\nu u_h\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy\,d\tau. \quad (2.44)$$

Заметим, что поскольку $\rho'_{\alpha-1/2}(x)\sim\rho_{\alpha-1}(x)$, из оценки (2.41) следует, что 1-й и 2-й интегралы в правой части (2.44) уже оценены равномерно по h. Интеграл от нелинейности преобразуем:

$$-2\iint \partial^\nu(u_hu_{hx})\partial^\nu u_h\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy = \iint \partial^\nu(u_h^2)(\partial^\nu u_h\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0})_x\varphi_\delta\,dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \frac12\iint (\partial^\nu u_{hx})^2\rho'_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy + \frac12\iint (\partial^\nu(u_h^2))^2\frac{\rho^2_{\alpha-1}}{\rho'_{\alpha-1}}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy +$$

$$+ \iint \partial^\nu(u_h^2)\partial^\nu u_h(\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0})'\varphi_\delta\,dxdy. \quad (2.45)$$

Очевидно, что

$$\partial^\nu(u_h^2) = 2u_h\partial^\nu u_h + 2\partial^{\nu_1}u_h\partial^{\nu_2}u_h,$$

где $\nu_1+\nu_2=\nu$, $|\nu_1|=|\nu_2|=1$. Так как $\alpha>1$, то $\rho^2_{\alpha-1}(x)/\rho'_{\alpha-1}(x)\sim (1+x)\rho_{\alpha-1}(x)=\rho_{\alpha-1/2}(x)$, а тогда

$$\iint u_h^2(\partial^\nu u_h)^2\frac{\rho^2_{\alpha-1}}{\rho'_{\alpha-1}}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy \leqslant c\sup_{x\geqslant x_0/2}\bigl[(1+x)u_h^2\bigr]\iint (\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy, \quad (2.46)$$

где в силу неравенства (1.6) (для $k=2$, $m=0$, $q=+\infty$, $\psi_1(x)\equiv 1$, $\psi_2(x)\equiv (1+x)^2$) и оценок (2.37) и (2.41) равномерно по h

$$\|(1+x)u_h^2\|_{L_2(\delta/2,T;L_\infty(\Sigma_{L,x_0/2}))} \leqslant c\|u_h\|_{C[0,T];L_2^1(\Sigma_{L,+}))}\|u_h\|_{L_2(\delta/2,T;H^2(\Sigma_{L,x_0/2}))} \leqslant c_1. \quad (2.47)$$

Кроме того в силу неравенства (1.6) (для $\varphi \equiv u_{hx}$ или $\varphi \equiv u_{hy}$, $k=1$, $m=0$, $q=4$, $\psi_1(x) \equiv \rho_{\alpha-1}(x)$, $\psi_2(x) \equiv \rho_{\alpha-1/2}(x)$) и оценки (2.41) равномерно по h

$$\int\limits_0^T \iiint (\partial^{\nu_1} u_h)^2 (\partial^{\nu_2} u_h)^2 \frac{\rho_{\alpha-1}^2}{\rho'_{\alpha-1}} \eta_{x_0} \varphi_\delta \, dxdy\, dt \leqslant c \int\limits_{\delta/2}^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0/2}} |Du_h|^4 \rho_{\alpha-1}\rho_{\alpha-1/2}\, dxdy\, dt \leqslant$$
$$\leqslant c_1 \|u_h\|^2_{L_\infty(\delta/2,T;H^{1,\alpha-1/2}(\Sigma_{L,x_0/2}))} \|u_h\|^2_{L_2(\delta/2,T;H^{2,\alpha-1}(\Sigma_{L,x_0/2}))} \leqslant c_2. \quad (2.48)$$

Интеграл от функции $\partial^\nu(u_h^2)\partial^\nu u_h \rho'_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta$ оценивается полностью аналогично (и даже проще) (2.46)–(2.48). Наконец,

$$\iint |u_h|(\partial^\nu u_h)^2 \rho_{\alpha-1}\eta'_{x_0}\varphi_\delta\, dxdy \leqslant c \iint |u_h|(\partial^\nu u_h)^2 \eta_{x_0}^{1/2}\varphi_\delta\, dxdy \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\geqslant x_0/2} u_h^2 \iint (\partial^\nu u_h)^2 \rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\, dxdy + c_1 \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0/2}} (\partial^\nu u_h)^2 \varphi_\delta\, dxdy \equiv$$
$$\equiv \gamma_{1h}(t) \iint (\partial^\nu u_h)^2 \rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\, dxdy + \gamma_{2h}(t),$$

$$\iint |\partial^{\nu_1} u_h \partial^{\nu_2} u_h \partial^\nu u_h| \rho_{\alpha-1}\eta'_{x_0}\varphi_\delta\, dxdy \leqslant c \iint |\partial^{\nu_1} u_h \partial^{\nu_2} u_h \partial^\nu u_h| \eta_{x_0}^{1/2}\varphi_\delta\, dxdy \leqslant$$
$$\leqslant \iint (\partial^\nu u_h)^2 \rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\, dxdy + c_1 \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0/2}} |Du_h|^4 \varphi_\delta\, dxdy \equiv$$
$$\equiv \iint (\partial^\nu u_h)^2 \rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\, dxdy + \gamma_{3h}(t),$$

где согласно (2.41), (2.47), (2.48) $\|\gamma_{jh}\|_{L_1(0,T)} \leqslant c$ равномерно по h. Таким образом, из равенства (2.44) следует, что равномерно по h

$$\|u_h\|_{\widetilde{X}^{2,\alpha-1}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})} \leqslant c. \quad (2.49)$$

Предельным переходом при $h \to +0$ получаем существование решения исходной задачи $u \in \widetilde{X}^{2,\alpha-1}_w(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$ (и обладающего всеми свойствами решения из теоремы 2.2).

Для окончания доказательства теоремы применим лемму 2.4 при $l=2$, $\psi_j(x) \equiv (1+x)^{2\alpha-j}$, $f \equiv -uu_x$. Здесь $\psi_2^2(x)/\psi_2'(x) \sim (1+x)^{2\alpha-1}$. Тогда поскольку $u \in \widetilde{X}^\alpha(\Pi^+_{T,L}) \cap \widetilde{X}^{1,\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,+}_{T,L}) \cap \widetilde{X}^{2,\alpha-1}_w(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$, если $|\nu|=2$, то аналогично (2.46), (2.47)

$$\int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{2\alpha-1} u^2 (\partial^\nu u)^2\, dxdy\, dt \leqslant$$
$$\leqslant T \sup_{\delta\leqslant t\leqslant T} \Bigl\{ \sup_{x\geqslant x_0} \bigl[(1+x)u^2\bigr] \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{2\alpha-2}(\partial^\nu u)^2\, dxdy \Bigr\} < +\infty, \quad (2.50)$$

а если $|\nu|=1$, то аналогично (2.48)

$$\int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (\partial^\nu u)^4 (1+x)^{2\alpha-1}\, dxdy\, dt \leqslant$$
$$\leqslant T \sup_{\delta\leqslant t\leqslant T} \Bigl\{ \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{2\alpha-1}|Du|^2\, dxdy \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} \bigl((1+x)^{2\alpha-2}|D^2u|^2 + (1+x)^{2\alpha-1}|Du|^2\bigr)\, dxdy \Bigr\} < +\infty.$$
$$(2.51)$$

Таким образом, $uu_x \in L_2(\delta,T;H^{1,\psi^2(x)/\psi'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$. Кроме того, в случае a) $(uu_x)\big|_{y=0} = (uu_x)\big|_{y=L} = 0$, в случае c) $(uu_x)\big|_{y=0} = 0$, в случае d) $(uu_x)\big|_{y=0} = (uu_x)\big|_{y=L}$. В итоге, $uu_x \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{1,\psi_2^2(x)/\psi_2'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$. Тогда согласно лемме 2.4 $u \in \widetilde{X}^{2,\alpha-1}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$. □

Доказательство теоремы 2.4. Рассмотрим сначала случай $l=3$. Воспользуемся леммой 2.4 при $l=3$, $\psi_j(x) \equiv \rho_{\alpha-j/2}(x)$, $f \equiv -uu_x$. Заметим, что так как $\rho_{\alpha-3/2}(x) \sim (1+x)^{2\alpha-3}(x)$, $\rho'_{\alpha-3/2}(x) \geqslant c(1+x)^{2\alpha-4-\varepsilon}$, где $\varepsilon=0$ при $\alpha>3/2$, $\varepsilon>0$ произвольно мало при $\alpha=3/2$, то

$$\psi_3^2(x)/\psi_3'(x) \leqslant c(1+x)^{2\alpha-1}. \tag{2.52}$$

Для произвольного мультииндекса ν, $|\nu|=2$,

$$\partial^\nu(uu_x) = u\partial^\nu u_x + \sum_{|\nu_1|=1,|\nu_2|=2} c_{\nu_1,\nu_2}\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}u. \tag{2.53}$$

В силу неравенства (1.6) (для $k=2$, $m=0$, $q=+\infty$, $\psi_1(x)\equiv 1+x$, $\psi_2(x)\equiv(1+x)^3$), поскольку $u \in C([0,T],L_2^{3/2}(\Sigma_{L,+}))$, $|D^2u| \in C([\delta,T];L_2^{1/2}(\Sigma_{L,x_0}))$, то

$$\sup_{(t,x)\in\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}} \big[(1+x)|u(t,x)|\big] < +\infty; \tag{2.54}$$

тогда, поскольку $\partial^\nu u_x \in L_2(\delta,T;L_2^{\alpha-3/2}(\Sigma_{L,x_0}))$, то

$$\int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} u^2(\partial^\nu u_x)^2 \frac{\psi_3(x)^2}{\psi_3'(x)}\,dxdy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sup_{(t,x)\in\Pi^{\delta,x_0}_{T,L}}\big[(1+x)|u(t,x)|\big]\Big)^2 \int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{2\alpha-3}(\partial^\nu u_x)^2\,dxdy\,dt < +\infty. \tag{2.55}$$

Далее, так как $2\alpha-1 \leqslant 4\alpha-4$ при $\alpha \geqslant 3/2$, то аналогично (2.43)

$$\int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (\partial^{\nu_1}u)^2(\partial^{\nu_2}u)^2\frac{\psi_3^2(x)}{\psi_3'(x)}\,dxdy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_\delta^T \Big(\iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}}(1+x)^{4\alpha-3}(\partial^{\nu_1}u)^4\,dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}}(1+x)^{4\alpha-5}(\partial^{\nu_2}u)^4\,dxdy\Big)^{1/2}dt \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sup_{t\in(\delta,T)}\Big(\iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}}(1+x)^{2\alpha-1}|Du|^2\,dxdy\Big)\times$$

$$\times \int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} \big((1+x)^{2\alpha-3}|D^3u|^2 + (1+x)^{2\alpha-1}|Du|^2\big)\,dxdy\,dt < +\infty. \tag{2.56}$$

Таким образом, $uu_x \in L_2(\delta,T;H^{2,\psi_3^2(x)/\psi_3'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$.

Кроме того, в случае a) $(uu_x)\big|_{y=0} = (uu_x)\big|_{y=L} = 0$, в случае b) $(uu_x)_y\big|_{y=0} = (uu_x)_y\big|_{y=L} = 0$, в случае c) $(uu_x)\big|_{y=0} = (uu_x)_y\big|_{y=L} = 0$, в случае d) $(uu_x)\big|_{y=0} = (uu_x)\big|_{y=L}$, $(uu_x)_y\big|_{y=0} = (uu_x)_y\big|_{y=L}$. В итоге, $uu_x \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{2,\psi_3^2(x)/\psi_3'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$. Применяя лемму 2.4, находим, что $u \in \widetilde{X}^{3,\alpha-3/2}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$.

Для $l \geqslant 4$ применим индукцию по l. Пусть сначала рассматривается случай краевых условий b) или d). Используем лемму 2.5 для $\psi_j(x) \equiv \rho_{\alpha-j/2}(x)$, $f \equiv -uu_x$. Аналогично (2.52)

$$\psi_l^2(x)/\psi_l'(x) \leqslant c(1+x)^{2\alpha-l+2}.$$

Для произвольного мультииндекса ν, $|\nu| = l-1$, аналогично (2.53)

$$\partial^\nu(uu_x) = u\partial^\nu u_x + \sum_{|\nu_1|\leqslant|\nu_2|\leqslant l-1, |\nu_1|+|\nu_2|=l} c_{\nu_1,\nu_2}\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}u.$$

Используя неравенство (2.54) и индуктивное предположение, находим аналогично (2.55), что

$$\int_\delta^T \iint_{\Sigma_{L,x_0}} u^2(\partial^\nu u_x)^2 \frac{\psi_l^2(x)}{\psi_l'(x)}\,dxdy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sup_{(t,x)\in\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}} \big[(1+x)|u(t,x)|\big]\Big)^2 \int_\delta^T \iint_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{2\alpha-l}(\partial^\nu u_x)^2\,dxdy\,dt < +\infty.$$

Кроме того, аналогично (2.56), поскольку $2\alpha - l + 2 \leqslant 4\alpha - l - 1$

$$\int_\delta^T \iint_{\Sigma_{L,x_0}} (\partial^{\nu_1}u)^2(\partial^{\nu_2}u)^2 \frac{\psi_l^2(x)}{\psi_l'(x)}\,dxdy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant c\int_\delta^T \Big(\iint_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{4\alpha-2|\nu_1|-1}(\partial^{\nu_1}u)^4\,dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{4\alpha-2|\nu_2|-1}(\partial^{\nu_2}u)^4\,dxdy\Big)^{1/2}dt \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sup_{t\in(\delta,T)} \iint_{\Sigma_{L,x_0}} \big((1+x)^{2\alpha-|\nu_1|}(\partial^{\nu_1}u)^2 + \iint_{\Sigma_{L,x_0}} (1+x)^{2\alpha-|\nu_2|}(\partial^{\nu_2}u)^2\big)\,dxdy \times$$

$$\times \int_\delta^T \iint_{\Sigma_{L,x_0}} \big((1+x)^{2\alpha-|\nu_1|-1}|D\partial^{\nu_1}u|^2 + (1+x)^{2\alpha-|\nu_1|}(\partial^{\nu_1}u)^2 + (1+x)^{2\alpha-|\nu_2|-1}|D\partial^{\nu_2}u|^2 +$$

$$+ (1+x)^{2\alpha-|\nu_2|}(\partial^{\nu_2}u)^2\big)\,dxdy\,dt < +\infty.$$

Таким образом, $uu_x \in L_2(\delta, T; H^{l-1,\psi_l^2(x)/\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$.

Заметим, что

$$\partial_y^j(uu_x) = \sum_{k=0}^j c_{jk}\partial_y^k u \partial_y^{j-k}u_x.$$

Тогда так как в случае b) для нечетных значений $j < l-1$ либо $\partial_y^k u\big|_{y=0} = \partial_y^k u\big|_{y=L}$, либо $\partial_y^{j-k}u_x\big|_{y=0} = \partial_y^{j-k}u_x\big|_{y=L} = 0$, поэтому $\partial_y^j(uu_x)\big|_{y=0} = \partial_y^j(uu_x)\big|_{y=0} = 0$. В случае же d) очевидно, что $\partial_y^j(uu_x)\big|_{y=0} = \partial_y^j(uu_x)\big|_{y=0} = 0$ для всех $j < l-1$. Это означает, что $uu_x \in L_2(\delta, T; \widetilde{H}^{l-1,\psi_l^2(x)/\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$. Тогда из леммы 2.4 следует, что $u \in \widetilde{X}^{l,\alpha-l/2}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$.

Наконец для $l \geqslant 4$ рассмотрим случай краевых условий a) или c). Выберем мультииндекс $\nu = (n_1, n_2)$, такой что $|\nu| = l-1$, $n_2 \leqslant 2$. Тогда применяя индукцию по l и дословно повторяя выкладки, проведенные для случаев b) и d), находим, что $\partial_x^{l-3}(uu_x) \in L_2(\delta, T; H^{2,\psi_l^2(x)/\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$, что аналогично $l = 3$ означает, что $\partial_x^{l-3}(uu_x) \in L_2(\delta, T; \widetilde{H}^{2,\psi_l^2(x)/\psi_l'(x)}(\Sigma_{L,x_0}))$. Применение леммы 2.5 приводит к свойству $\partial_x^{l-3}u \in \widetilde{X}^{3,\alpha-l/2}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$. □

Доказательство теоремы 2.5. Воспользуемся индукцией по k. Докажем, что если $\partial_x^{j-k+1}\partial_y^{k-1}u \in X^{\alpha-j/2-k+4}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0,y_0})$ при $4 \leqslant j \leqslant l$, $4 \leqslant k \leqslant \min(j,m)$ для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 > 0$, $y_0 \in (0, L/2)$, то $\partial_x^{j-k}\partial_y^k u \in X^{\alpha-j/2-k+3}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0,y_0})$.

Воспользуемся леммой 2.6, в которой положим $\varkappa_{kj}(x) \equiv (1+x)^{2\alpha-j-2k+6}$ (заметим, что $2\alpha - j - 2k + 6 > 0$, $\varkappa_{3j}(x) = (1+x)^{2\alpha-j}$).

Пусть $\nu = (n_1, n_2)$ — мультииндекс, такой что $|\nu| \leqslant j$, $n_2 \leqslant k-1$. Тогда $\partial^\nu u \in X^{\alpha-j/2-k+4}$ и

$$\int_\delta^T \iint_{\Sigma_{L,x_0,y_0}} (1+x)^{4\alpha-2j-4k+15}(\partial^\nu u)^4\,dxdy\,dt \leqslant \sup_{t\in(\delta,T)} \iint_{\Sigma_{L,x_0,y_0}} (1+x)^{2\alpha-j-2k+8}(\partial^\nu u)^2\,dxdy\times$$
$$\times \int_\delta^T \iint_{\Sigma_{L,x_0,y_0}} \bigl(|D\partial^\nu u|^2(1+x)^{2\alpha-j-2k+7} + (\partial^\nu u)^2(1+x)^{2\alpha-j-2k+8}\bigr)\,dxdy\,dt < +\infty$$

Это свойство означает, что поскольку $\varkappa'_{(k-1)j}(x) \leqslant c(1+x)^{2\alpha-j-2k+7}$, а $2\alpha-j-2k+7 \leqslant 4\alpha-2j-4k+15$, то

$$\partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1}(uu_x) \in L_2(\delta,T;L_2^{\varkappa'_{(k-1)j}(x)}(\Sigma_{L,x_0,y_0})).$$

Тогда из леммы 2.6 следует требуемое свойство.

Осталось заметить, что при $k=4$

$$\partial_x^{j-3}\partial_y^3 u \in X^{\alpha-j/2}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$$

по теореме 2.4. □

Доказательство результатов с экспоненциальными весами существенно проще, поскольку если $\psi(x)\equiv e^{2\alpha x}$, то $\psi^{(j)}(x)\sim\psi(x)$ для любого j, в частности, $\psi^2(x)/\psi'(x)\sim\psi(x)$.

Доказательство теоремы 2.6. Искомое решение строим как предел при $h\to+0$ гладких решений $u_h(t,x,y)$ таких же, как в доказательстве теорем 2.1–2.3.

Оценка (2.34) не изменяется. Используя в качестве весовой функции $e^{2\alpha x}$ вместо $\rho_\alpha(x)$ аналогично (2.37) находим, что равномерно по h

$$\|u_h\|_{\widetilde{X}^{\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^+)} \leqslant c.$$

Эта оценка позволяет построить решение исходной задачи $u\in\widetilde{X}_w^{\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^+)$. Очевидно, что для него автоматически $\lambda^+(|Du|;T,L)<+\infty$. Кроме того, аналогично (2.39)

$$\int_0^T\iint u^4e^{4\alpha x}\,dxdy\,dt < +\infty,$$

а тогда из леммы 2.2 следует, что $u\in\widetilde{X}^{\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^+)$.

Если дополнительно известно, что $\mu\in\widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$, то аналогично (2.41) находим, что равномерно по h

$$\|u_h\|_{\widetilde{X}^{1,\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,+})} \leqslant c,$$

откуда следует, что $u\in\widetilde{X}_w^{1,\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,+})$. Кроме того, аналогично (2.43)

$$\int_\delta^T\iint u^2u_x^2e^{4\alpha x}\,dxdy\,dt < +\infty,$$

а тогда из леммы 2.3 следует, что $u\in\widetilde{X}^{1,\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,+})$. □

Доказательство теоремы 2.7. Сначала как и при доказательстве теоремы 2.3 устанавливаем аналогично (2.49), что равномерно по h

$$\|u_h\|_{\widetilde{X}^{2,\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})} \leqslant c,$$

и предельным переходом при $h\to+0$ получаем, что $u\in\widetilde{X}_w^{2,\alpha,exp}(\Pi_{T,L}^{\delta,x_0})$. Далее, аналогично (2.50) находим, что при $|\nu|=2$

$$\int_\delta^T\iint_{\Sigma_{L,x_0}} u^2(\partial^\nu u)^2e^{4\alpha x}\,dxdy\,dt < +\infty,$$

а при $|\nu|=1$, что аналогично (2.51)

$$\int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (\partial^\nu u)^4 e^{4\alpha x}\,dxdy\,dt < +\infty.$$

Это означает, в частности, что $uu_x \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{1,\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0}))$, а тогда из леммы 2.4 при $l=2$ следует, что $u\in \widetilde{X}^{2,\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$.

Далее, в случае $l=3$ используем равенство (2.53) и находим для мультииндекса ν, для которого $|\nu|=2$, что аналогично (2.55)

$$\int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} u^2(\partial^\nu u_x)^2 e^{4\alpha x}\,dxdy\,dt < +\infty,$$

а если $|\nu_1|=1$, $|\nu_2|=2$, то аналогично (2.56)

$$\int\limits_\delta^T \iint\limits_{\Sigma_{L,x_0}} (\partial^{\nu_1} u)^2(\partial^{\nu_2} u)^2 e^{4\alpha x}\,dxdy\,dt < +\infty.$$

В итоге, $uu_x\in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{2,\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0}))$ и из леммы 2.4 следует, что $u\in\widetilde{X}^{3,\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$.

Наконец, при $l\geqslant 4$ применяя индукцию по l, находим, что в случаях b) или d) $uu_x\in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{l-1,\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0}))$, а в случаях a) или c), что $\partial_x^{l-3}(uu_x)\in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{2,\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0}))$. Применяя соответственно лемму 2.4 или лемму 2.5, завершаем доказательство теоремы. □

Доказательство теоремы 2.8. Доказательство проводим аналогично теореме 2.5. Пусть $j\geqslant 4$, $4\leqslant k\leqslant j$. Воспользуемся индукцией по k. Уже известно, что $\partial_x^{j-3}\partial_y^3 u\in X^{\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0}_{T,L})$.

Предположим, что $\partial_x^{j-k+1}\partial_y^{k-1}u \in X^{\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0,y_0}_{T,L})$ для любых $\delta\in(0,T)$, $x_0>0$, $y_0\in(0,L/2)$. Воспользуемся леммой 2.6, в которой положим $\varkappa_{kj}(x)\equiv e^{2\alpha x}$. Тогда $\partial_x^{j-k}\partial_y^{k-1}(uu_x)\in L_2(\delta,T;L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0,y_0}))$ и в силу указанной леммы $\partial_x^{j-k}\partial_y^k u\in X^{\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0,y_0}_{T,L})$.

Так как j можно выбрать сколь угодно большим, получаем, что $\partial^\nu u\in X^{\alpha,exp}(\Pi^{\delta,x_0,y_0}_{T,L})$ для любого мультииндекса α, в частности, $\partial^\nu u\in C([\delta,T];L_2^{\alpha,exp}(\Sigma_{L,x_0,y_0}))$. Применяя само равенство (1.1), чтобы выразить производные решения по t, завершаем доказательство теоремы. □

Замечание 2.5. Первые результаты о существовании и единственности решений начально-краевой задачи для уравнения Захарова—Кузнецова на полуполосе $\Sigma_{L,+}$ были получены в статьях [37, 40]. В них рассматривалась задача с однородным краевым условием (2.2) и однородными условиями Дирихле при $y=0$ и $y=L$ (случай a) условия (2.3) в терминологии настоящей статьи). В обеих статьях применялись экспоненциальные веса на $+\infty$. В терминологии настоящей статьи можно сказать, что в [40] предполагалось, что $u_0\in\widetilde{H}^{2,\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})$ (и некоторые другие условия), было построено глобальное по времени решение из пространства $\widetilde{X}^{2,\alpha,exp}(\Pi^+_{T,L})$ и доказана его единственность. В [37] предполагалось, что $u_0\in\widetilde{H}^{1,\alpha,exp}(\Sigma_{L,+})$, было построено глобальное по времени решение из пространства $\widetilde{X}^{1,\alpha,exp}_w(\Pi^+_{T,L})$, под единственностью понималась единственность среди решений, которые являлись пределами регулярных решений.

В статье [22] были рассмотрены начально-краевые задачи для уравнения Захарова—Кузнецова в такой же постановке, что и в настоящей статье (а именно, с неоднородным краевым условием (2.2) и любым из четырех условий (2.3) для произвольных $T>0$, $L>0$). В качестве весов $\psi(x)$ могли быть использованы как степенные функции, так и экспоненты. Для начальных функций из пространства $L_{2,+}^{\psi(x)}$ были получены результаты о существовании и единственности слабых решений в пространствах $\widetilde{X}^{\psi(x)}_w(\Pi^+_{T,L})$, которые приведены в настоящей статье (см. теоремы 2.1 и 2.6). Кроме того, были получены результаты о существовании и единственности решений в пространствах $\widetilde{X}^{1,\psi(x)}_w(\Pi^+_{T,L})$ при $u_0\in\widetilde{H}^{1,\psi(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu\in\widetilde{H}^{2/3,2}(B_{T,L})$, $u_0(0,y)\equiv\mu(0,y)$ и $\widetilde{X}^{3,\psi(x)}(\Pi^+_{T,L})$ при $u_0\in\widetilde{H}^{3,\psi(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu\in\widetilde{H}^{4/3,4}(B_{T,L})$, $u_0(0,y)\equiv\mu(0,y)$.

В статье [23] изучались вопросы о дополнительной регулярности решений из пространства $\widetilde{X}^{3,\psi(x)}(\Pi^+_{T,L})$, построенных в [22]. В случаях краевых условий b) или d) при $u_0 \in \widetilde{H}^{k,\psi(x)}(\Sigma_{L,+})$, $\mu \in \widetilde{H}^{(k+1)/3,k+1}(B_{T,L})$ для $k = 3n$ или $k = 3n+1$, $n \in \mathbb{N}$, и выполнении соответствующих условий согласования граничных данных была установлена глобальная корректность в классах $\widetilde{X}^{k,\psi(x)}(\Pi^+_{T,L})$. В случаях краевых условий a) или c) были получены результаты о внутренней регулярности решений в духе теорем 2.4, 2.5, 2.7 и 2.8, но с регулярностью вплоть до $t=0$ (при соответствующей гладкости начальной функции).

3. Начально-краевая задача на полуплоскости

В данной части рассматривается начально-краевая задача для уравнения Захарова—Кузнецова в области $\Pi^+_T = (0,T)\times\mathbb{R}^2_+$ ($T>0$ — произвольно) с граничными условиями

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+, \tag{3.1}$$

$$u(t,0,y) = \mu(t,y), \qquad (t,y)\in B_T = (0,T)\times\mathbb{R}. \tag{3.2}$$

Проблема выполнения граничных условий типа (2.3) здесь, разумеется, не возникает. Основные результаты данной части получены при $b=0$.

Определение слабого решения данной задачи аналогично определению 2.1.

Определение 3.1. Пусть $u_0\in L_2(\mathbb{R}^2_+)$, $\mu\in L_2(B_T)$. Функция $u\in L_\infty(0,T;L_2(\mathbb{R}^2_+))$ называется *слабым решением* задачи (1.1), (3.1), (3.2), если для любой функции $\phi\in L_2(0,T;H^2(\mathbb{R}^2_+))$, для которой $\phi_t,\phi_{xxx},\phi_{xyy}\in L_2(\Pi^+_T)$, $\phi\big|_{t=T}=0$, $\phi\big|_{x=0}=\phi_x\big|_{x=0}=0$, справедливо равенство

$$\iiint_{\Pi^+_T}\Big[u(\phi_t+b\phi_x+\phi_{xxx}+\phi_{xyy})+\frac12 u^2\phi_x\Big]\,dxdydt+\iint\limits_{\mathbb{R}^2_+}u_0\phi\big|_{t=0}\,dxdy+\iint\limits_{B_T}\mu\phi_{xx}\big|_{x=0}\,dydt=0. \tag{3.3}$$

Положим для $x_0\geqslant 0$

$$\mathbb{R}^2_{x_0}=(x_0,+\infty)\times\mathbb{R}$$

(тогда $\mathbb{R}^2_+=\mathbb{R}^2_0$), для $\delta\in[0,T)$

$$\Pi^{\delta,x_0}_T=(\delta,T)\times\mathbb{R}^2_{x_0}, \qquad \Pi^{\delta,+}_T=\Pi^{\delta,0}_T$$

(тогда $\Pi^+_T=\Pi^{0,+}_T$).

Аналогично разделу 2 введем весовые пространства. Пусть $\psi(x)\not\equiv\mathrm{const}$ — некоторая допустимая весовая функция на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Положим для $x_0\geqslant 0$

$$L_2^{\psi(x)}(\mathbb{R}^2_{x_0})=\{\varphi(x,y):\varphi\psi^{1/2}\in L_2(\mathbb{R}^2_{x_0})\}$$

и снабдим это пространство естественной нормой. Для степенных и экспоненциальных весов будем использовать обозначения

$$L_2^\alpha(\mathbb{R}^2_{x_0})=L_2^{(1+x)^{2\alpha}}(\mathbb{R}^2_{x_0}), \qquad L_2^{\alpha,exp}(\mathbb{R}^2_{x_0})=L_2^{e^{2\alpha x}}(\mathbb{R}^2_{x_0}) \quad \forall\alpha>0,$$

$L_2^0(\mathbb{R}^2_{x_0})=L_2(\mathbb{R}^2_{x_0})$. Определим пространство

$$H^{k,\psi(x)}(\mathbb{R}^2_{x_0})=\{\varphi(x,y):\varphi\psi^{1/2}\in H^k(\mathbb{R}^2_{x_0})\}$$

и снабдим его естественной нормой.

Введем пространства функций, в которых будем рассматривать решения. Пусть производная $\psi'(x)$ также является допустимой весовой функцией. Положим

$$X^{k,\psi(x)}(\Pi^{\delta,x_0}_T)=\{u(t,x,y):\partial_t^j u\in C([\delta,T];H^{k-3j,\psi(x)}(\mathbb{R}^2_{x_0}))\cap \cap L_2(\delta,T;H^{k-3j+1,\psi'(x)}(\mathbb{R}^2_{x_0})),\quad j\leqslant k/3\},$$

$$X_w^{k,\psi(x)}(\Pi^{\delta,x_0}_T)=\{u(t,x,y):\partial_t^j u\in C_w([\delta,T];H^{k-3j,\psi(x)}(\mathbb{R}^2_{x_0}))\cap \cap L_2(\delta,T;H^{k-3j+1,\psi'(x)}(\mathbb{R}^2_{x_0})),\quad j\leqslant k/3\}.$$

Пусть

$$X^{k,\alpha}(\Pi^{\delta,x_0}_T)=X^{k,\rho_\alpha(x)}(\Pi^{\delta,x_0}_T), \quad X_w^{k,\alpha}(\Pi^{\delta,x_0}_T)=X_w^{k,\rho_\alpha(x)}(\Pi^{\delta,x_0}_T) \quad \forall\alpha\geqslant 0,$$

$$X^{k,\alpha,exp}(\Pi_T^{\delta,x_0}) = X^{k,e^{2\alpha x}}(\Pi_T^{\delta,x_0}) \quad \forall\alpha > 0.$$

Будем считать, что

$$X^{\psi(x)}(\Pi_T^{\delta,x_0}) = X^{0,\psi(x)}(\Pi_T^{\delta,x_0}), \quad X_w^{\psi(x)}(\Pi_T^{\delta,x_0}) = X_w^{0,\psi(x)}(\Pi_T^{\delta,x_0})$$

(с последующими аналогичными уточнениями обозначений $X^\alpha(\Pi_T^{\delta,x_0})$, $X_w^\alpha(\Pi_T^{\delta,x_0})$ и $X^{\alpha,exp}(\Pi_T^{\delta,x_0})$).

Положим для $\delta \in [0,T)$

$$\lambda^+(u;T,\delta) = \sup_{x_0\geqslant 0}\int\limits_\delta^T\int\limits_{x_0}^{x_0+1}\int\limits_{\mathbb{R}} u^2\,dydxdt, \qquad \lambda^+(u;T) = \lambda^+(u;T,0).$$

Как и в разделе 2, для описания свойств краевой функции μ будем использовать анизотропные пространства Соболева. Положим

$$H^{s/3,s}(\mathbb{R}^2) = \bigl\{\mu(t,y) : \mathcal{F}^{-1}\bigl[(1+|\theta|^{2/3}+\xi^2)^{s/2}\widehat{\mu}(\theta,\xi)\bigr] \in L_2(\mathbb{R}^2)\bigr\}$$

(здесь прямое и обратное преобразования Фурье производятся по обеим переменным). Известно, что пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ плотно в $H^{s/3,s}(\mathbb{R}^2)$ для любого s. Символ $H^{s/3,s}(B_T)$ как обычно используется для пространства сужений на B_T.

Как и в случае задачи на $\Sigma_{L,+}$ при исследовании данной задачи нам потребуется обнулять краевое условие (3.2). Для этого, следуя [2], рассмотрим алгебраическое уравнение аналогичное (2.8) при $b=0$:

$$r^3 - \xi^2 r + i\theta = 0. \tag{3.4}$$

При $(\theta,\xi)\neq(0,0)$ уравнение (3.4) имеет единственный корень $r_0 = r_0(\theta,\xi)$ с отрицательной действительной частью.

Для произвольной функции $\mu \in L_2(\mathbb{R}^2)$ положим при $x \geqslant 0$

$$J(t,x,y;\mu) \equiv \mathcal{F}_{t,y}^{-1}\left[e^{r_0(\theta,\xi)x}\widehat{\mu}(\theta,\xi)\right](t,y). \tag{3.5}$$

Как показано в [17, 18] свойства этой функции полностью аналогичны свойствам функции J, введенной формулой (2.9) в части 2 (с естественной заменой $\Sigma_{L,+}$ на $\mathbb{R}^2_+$). В частности, она бесконечно дифференцируема при $x>0$, удовлетворяет уравнению (2.6) при $b=0$, $f\equiv 0$, $J(t,0,y;\mu)\equiv\mu(t,y)$ и для нее справедливы соответствующие аналоги оценок (2.10)–(2.13).

Перейдем к результатам для рассматриваемой задачи для уравнения Захарова—Кузнецова. Сначала рассмотрим случай степенных весов.

Теорема 3.1. *Пусть* $u_0 \in L_2^\alpha(\mathbb{R}^2_+)$ *для некоторого* $\alpha \geqslant 0$, $\mu \in H^{s/3,s}(B_T)$ *для некоторого* $s > 3/2$. *Тогда существует слабое решение задачи* (1.1), (3.1), (3.2) $u \in X_w^\alpha(\Pi_T^+)$, *более того,* $\lambda^+(|Du|;T) < +\infty$. *Если* $\alpha \geqslant 1$, *то это решение единственно в пространстве* $X_w^\alpha(\Pi_T^+)$ *и, кроме того,* $u \in X^\alpha(\Pi_T^+)$.

Доказательство. Этот результат фактически был установлен в [18] в случае произвольного b. Рассмотрим некоторые из деталей доказательства существования слабого решения при $b=0$, в частности, вопрос о построении гладких решений, замыканием множества которых строится слабое решение. Ход доказательства будет отличаться от использованного в [18]. Доказательство же единственности здесь приводить не будем, как и в случае теоремы 2.1.

Без ограничения общности можно считать, что $\mu \in H^{s/3,s}(\mathbb{R}^2)$. Пусть функции $\mu_h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $h \in (0,1]$, сходятся к функции μ в $H^{s/3,s}(\mathbb{R}^2)$ при $h\to+0$. Положим $g_h(t,x,y) \equiv J(t,x,y;\mu_h)\eta(2-x)$.

Пусть функции $u_0^h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ приближают функцию u_0 в пространстве $L_2^\alpha(\mathbb{R}^2_+)$. Определим функции U_{0h} и u_{0h} по формулам (2.32)

Рассмотрим задачу для уравнения (2.33) с граничными условиями $U\big|_{t=0} = U_{0h}$, $U\big|_{x=0} = 0$. Тогда согласно [2] существует решение $U_h \in X^{k,\beta,\exp}(\Pi_{T,L}^+)$ для любых k и $\beta > 0$.

Дальнейшее доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 2.1. Для $\alpha \geqslant 1$ вместо леммы 2.2 следует воспользоваться соответствующим результатом из статьи [18]. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть* $b=0$, $u_0\in L_2^\alpha(\mathbb{R}^2_+)$ *для некоторого* $\alpha\geqslant 1/2$, $\mu\in H^{2/3,2}(B_T)$. *Тогда существует слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1), (3.1), (3.2), *обладающее теми же свойствами, что и решение, построенное в теореме* 3.1, *и такое, что*

$$u\in X_w^{1,\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,+}),\quad \lambda^+(|D^2u|;T,\delta)<+\infty\quad\forall\delta\in(0,T).$$

Если $\alpha>1/2$, *то* $u\in X^{\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,+})$ $\forall\delta\in(0,T)$; *если* $\alpha\geqslant 1$, *то* $u\in X^{1,\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,+})$ $\forall\delta\in(0,T)$.

Доказательство. Эта теорема была фактически установлена в [2]. Ее доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2. □

Теорема 3.3. *Пусть условия теоремы* 3.2 *выполнены при* $\alpha\geqslant 1$. *Тогда слабое решение задачи* (1.1), (3.1), (3.2) $u(t,x,y)$ *из пространства* $X_w^\alpha(\Pi_T^+)$ *обладает следующим свойством*:

$$u\in X_w^{2,\alpha-1}(\Pi_T^{\delta,x_0})\quad\forall\delta\in(0,T)\ \forall x_0>0.$$

Если $\alpha>1$, *то* $u\in X^{2,\alpha-1}(\Pi_T^{\delta,x_0})$ $\forall\delta\in(0,T)$ $\forall x_0>0$.

Доказательство. Эта теорема была фактически установлена в [2]. Ее доказательство во многом повторяет доказательство теоремы 2.3. Укажем на основное отличие ее доказательства от теоремы 2.3, которое позволяет распространить результат на случай $\alpha=1$.

Для этого введем дополнительное пространство

$$\begin{gathered}K_1(\Pi_T^+)=\{u\in C([0,T];H^1(\mathbb{R}^2_+))\cap L_2(0,T;C_b^1(\overline{\mathbb{R}}^2_+))\cap L_2(\mathbb{R}_+;C_b(\overline{B}_T)),\\ \partial_x^j u\in C_b(\overline{\mathbb{R}}^x_+;H^{(2-j)/3,2-j}(B_T)),\quad 0\leqslant j\leqslant 2\},\end{gathered}$$

(символ C_b обозначает пространство непрерывных ограниченных отображений).

В статье [16] (см. также [17]) было доказано, что если $b=0$, $u_0\in H^1(\mathbb{R}^2)$, $\mu\in H^{2/3,2}(B_T)$, $u_0(0,y)\equiv\mu(0,y)$, то задача (1.1), (3.1), (3.3) корректна в пространстве $K_1(\Pi_T^+)$.

В ходе доказательстве теоремы 3.2 устанавливается, что аналогично (2.41) равномерно по h справедлива следующая оценка:

$$\|u_h\|_{X^{1,\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,+})}\leqslant c. \tag{3.6}$$

В частности,

$$\|u_h(\delta,\cdot,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^2_+)}\leqslant c.$$

Перенеся начало отсчета времени в точку $t=\delta$, получим, что согласно [16] равномерно по h

$$\|u_h\|_{K_1(\Pi_T^{\delta,+})}\leqslant c,$$

в частности,

$$\int_\delta^T\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+}(u_h^2+|Du_h|^2)\,dt\leqslant c. \tag{3.7}$$

В аналоге равенства (2.44) (здесь интегрирование по пространственным переменным проводится по $\mathbb{R}^2_+$, и пределы интегрирования, как и в разделе 2, опущены) интеграл от нелинейного слагаемого преобразуем по-другому. Воспользуемся равенством (2.53). Имеем:

$$-2\iint u_h\partial^\nu u_{hx}\partial^\nu u_h\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy=\iint(\partial^\nu u_h)^2\big(u_{hx}\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}+u_h(\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0})'\big)\varphi_\delta\,dxdy.$$

Тогда если $|\nu_1|=1$, $|\nu_2|=2$, то в силу (3.6) и (3.7)

$$\begin{aligned}\iint|\partial^{\nu_1}u_h\partial^{\nu_2}u_h\partial^\nu u_h|\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy\leqslant\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}|Du_h|^2\iint(\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy+\\ +\iint(\partial^{\nu_2}u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy\equiv\gamma_{1h}(t)\iint(\partial^\nu u_h)^2\rho_{\alpha-1}\eta_{x_0}\varphi_\delta\,dxdy+\gamma_{2h}(t),\end{aligned}$$

где $\|\gamma_{jh}\|_{L_1(0,T)}\leqslant c$. Оставшаяся часть доказательства проводится аналогично теореме 2.3. □

Теорема 3.4. *Пусть условия теоремы* 2.2 *выполнены при* $\alpha \geqslant l/2$ *для некоторого* $l \geqslant 3$. *Тогда слабое решение задачи* (1.1), (3.1), (3.2) $u(t,x,y)$ *из пространства* $X_w^\alpha(\Pi_T^+)$ *обладает следующим свойством*:

$$u \in X^{l,\alpha-l/2}(\Pi_T^{\delta,x_0}) \quad \forall \delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0.$$

Доказательство. Теорема фактически доказана в [2], и ее доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 2.4 для случаев b) и d). □

В статье [2] на основе свойств фундаментального решения оператора $\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2$, установленных ранее в [1, 24], и идеи обращения линейной части уравнения, впервые примененной в [5] для уравнения Кортевега—де Фриза, доказан также следующий результат о существовании непрерывных производных слабого решения и их оценках в нормах Гельдера.

Теорема 3.5. *Пусть* $b = 0$, $u_0 \in L_2^\alpha(\mathbb{R}_+^2)$, $\mu \in H^{2/3,2}(B_T)$ *для некоторого* $\alpha > 3/4$ *такого, что* $(2\alpha - 1/2)$ — *нецелое,* $m = [2\alpha - 1/2]$. *Тогда существует непрерывное в* Π_T^+ *слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1), (3.1), (3.2) *из пространства* $X_w^\alpha(\Pi_T^+)$. *Это решение обладает в* Π_T^+ *непрерывными производными* $\partial^\nu u$ *до порядка* $|\nu| \leqslant m-1$. *При этом для любых* $\delta \in (0,T)$ *и* $x_0 > 0$

$$\sup_{(t,x,y)\in\overline{\Pi}_T^{\delta,x_0}} |\partial^\nu u(t,x,y)| < \infty, \quad 0 \leqslant |\nu| \leqslant m-1.$$

Более того, если $|\nu| = m-1$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2$, *то для любых* $x_1, x_2 \geqslant x_0$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ *и* $t \in [\delta, T]$

$$|\partial^\nu u(t,x_1,y_1) - \partial^\nu u(t,x_2,y_2)| \leqslant c(|x_1-x_2|^{\varepsilon-\sigma} + |y_1-y_2|^{\varepsilon-\sigma}) \qquad \forall \sigma \in (0,\varepsilon),$$

а если $|\nu| = m-1-j$, $j = 0,1,2$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2 + j$, *то для любых* $x \geqslant x_0$, $y \in \mathbb{R}$ *и* $t, \tau \in [\delta, T]$,

$$|\partial^\nu u(t,x,y) - \partial^\nu u(\tau,x,y)| \leqslant c|t-\tau|^{(\varepsilon-\sigma)/3} \qquad \forall \sigma \in (0,\varepsilon),$$

где константы зависят от x_0, δ, σ, α.

Перейдем к экспоненциальным весам.

Теорема 3.6. *Пусть* $u_0 \in L_2^{\alpha,exp}(\mathbb{R}_+^2)$ *для некоторого* $\alpha > 0$, $\mu \in H^{s/3,s}(B_T)$ *для некоторого* $s > 3/2$. *Тогда существует единственное слабое решение задачи* (1.1), (3.1), (3.2) $u \in X^{\alpha,exp}(\Pi_T^+)$. *Если дополнительно известно, что* $b = 0$, $\mu \in H^{2/3,2}(B_T)$, *то*

$$u \in X^{1,\alpha,exp}(\Pi_T^{\delta,+}) \quad \forall \delta \in (0,T).$$

Доказательство. Первая часть теоремы доказана в [18]. При дополнительном условии теорема доказывается полностью аналогично теореме 2.6. □

Теорема 3.7. *Пусть* $b = 0$, $u_0 \in L_2^{\alpha,exp}(\mathbb{R}_+^2)$ *для некоторого* $\alpha > 0$, $\mu \in H^{2/3,2}(B_T)$. *Тогда слабое решение задачи* (1.1), (3.1), (3.2) $u(t,x,y)$ *из пространства* $X^{\alpha,exp}(\Pi_T^+)$ *обладает следующим свойством*: *для любых* j *и мультииндексов* ν

$$\partial_t^j \partial^\nu u \in C([\delta,T]; L_2^{\alpha,exp}(\mathbb{R}_{x_0}^2)) \quad \forall \delta \in (0,T)\ \forall x_0 > 0.$$

Доказательство. Доказательство полностью аналогично теореме 2.7. □

Замечание 3.1. Первый результат о существовании и единственности слабого решения задачи (1.1), (3.1), (3.2) из пространства $X_w^\alpha(\Pi_T^+)$ при неоптимальных условиях на краевую функцию μ был получен в статье [15]. В виде теоремы 3.1 подобный результат содержится в статье [18]. Глобальная корректность данной задачи при $b = 0$ в классах более гладких функций установлена в [16, 17]. В частности, в статье [17] доказана корректность в классах аналогичных $K_1(\Pi_T^+)$, а именно, при $u_0 \in H^n(\mathbb{R}_2^+)$, $\mu \in H^{(n+1)/3,n+1}(B_T)$ для любого натурального n (и выполнении соответствующих условий согласования граничных данных на прямой $t = 0, x = 0$) в классе $K_n(\Pi_T^+)$:

$$\begin{aligned}
\partial_t^m u &\in C\big([0,T]; H^{n-3m}(\mathbb{R}_2^+)\big), && m \leqslant n/3, \\
\partial_x^l u &\in C_b\big(\overline{\mathbb{R}}_+; H^{(n-l+1)/3,n-l+1}(B_T)\big), && l \leqslant n+1, \\
\partial_t^m \partial_x^l \partial_y^j u &\in L_2\big(0,T; C_b(\overline{\mathbb{R}}_+^2)\big), && 3m+l+j \leqslant n, \\
\partial_t^m \partial_x^l \partial_y^j u &\in L_2\big(\mathbb{R}_+; C_b(\overline{B}_T)\big), && 3m+l+j \leqslant n-1.
\end{aligned}$$

4. Задача Коши

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.1) с начальным условием

$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.1}$$

в области $\Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}^2$ для произвольного $T > 0$. Наличие в данном случае в уравнении слагаемого bu_x не приводит к каким-либо принципиальным сложностям в силу возможности перехода в движущуюся систему координат. Определение слабого решения полностью аналогично определению 3.1 с естественной заменой $\mathbb{R}^2_+$, Π^+_T на $\mathbb{R}^2$, Π_T, отсутствием в аналоге интегрального тождества (3.3) слагаемого, связанного с μ, и отсутствием условий на пробную функцию ϕ при $x = 0$.

Обозначения из части 3 $\mathbb{R}^2_{x_0}$, Π^{δ,x_0}_T распространяются на любое значение $x_0 \in \mathbb{R}$. Положим для $\alpha \in \mathbb{R}$

$$L^\alpha_2(\mathbb{R}^2) = \{\varphi(x,y) : (1+x_+)^\alpha \varphi \in L_2(\mathbb{R}^2)\},$$
$$L^\alpha_2(\mathbb{R}^2_{x_0}) = \{\varphi(x,y) : (1+(x-x_0))^\alpha \varphi \in L_2(\mathbb{R}^2_{x_0})\},$$
$$H^{k,\alpha}(\mathbb{R}^2_{x_0}) = \{\varphi(x,y) : (1+(x-x_0))^\alpha \varphi \in H^k(\mathbb{R}^2_{x_0})\},$$
$$\lambda(u;T) = \sup_{x_0\in\mathbb{R}} \int\limits_0^T \int\limits_{x_0}^{x_0+1} \int\limits_{\mathbb{R}} u^2\,dydxdt, \quad \lambda^+(u;T,\delta,x_0) = \sup_{x_1\geqslant x_0} \int\limits_\delta^T \int\limits_{x_1}^{x_1+1} \int\limits_{\mathbb{R}} u^2\,dydxdt.$$

Из результатов статьи [9] (в которой рассматривались уравнения более общего вида) вытекает следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть* $u_0 \in L^\alpha_2(\mathbb{R}^2)$ *для некоторого* $\alpha \geqslant 0$, *тогда существует слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1), (4.1), *такое что*

$$u \in C_w([0,T]; L^\alpha_2(\mathbb{R}^2)), \quad \lambda(|Du|;T) < +\infty.$$

Если дополнительно известно, что $\alpha > 0$, *то для любого* $x_0 \in \mathbb{R}$

$$u \in L_2(0,T; H^{1,\alpha-1/2}(\mathbb{R}^2_{x_0})).$$

Вопрос о единственности подобных решений остается открытым.

В статье [24] был рассмотрен вопрос о внутренней регулярности этих решения и доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть условия теоремы* 4.1 *выполнены для* $\alpha \geqslant 1/2$. *Пусть* $k \leqslant 2\alpha$ *если* $\alpha \neq 1$, $k = 1$ *если* $\alpha = 1$. *Тогда слабое решение, построенное в теореме* 4.1, *обладает следующим свойством: для любых* $\delta \in (0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$u \in C_w([\delta,T]; H^{k,\alpha-k/2}(\mathbb{R}^2_{x_0})), \quad \lambda^+(|D^{k+1}u|;T,\delta,x_0) < +\infty.$$

Если дополнительно известно, что $k < 2\alpha$, *то*

$$u \in L_2(\delta,T; H^{k+1,\alpha-(k+1)/2}(\mathbb{R}^2_{x_0})).$$

Также в статьях [1, 24] был установлен следующий результат о существовании у слабых решений непрерывных производных и их оценках в нормах Гельдера.

Теорема 4.3. *Пусть условия теоремы* 4.1 *выполнены для* $\alpha > 3/4$ *такого, что* $(2\alpha - 1/2)$ — *нецелое,* $m = [2\alpha - 1/2]$. *Тогда слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1), (4.1), *построенное в теореме* 4.1, *является непрерывным в* Π_T (*возможно, после изменения на множестве нулевой меры*) *и обладает в* Π_T *непрерывными производными* $\partial^\nu u$ *до порядка* $|\nu| \leqslant m-1$. *При этом для любых* $\delta \in (0,T)$ *и* $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\sup_{(t,x,y)\in\overline{\Pi}^{\delta,x_0}_T} |\partial^\nu u(t,x,y)| < \infty, \quad 0 \leqslant |\nu| \leqslant m-1.$$

Более того, если $|\nu| = m-1$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2$, *то для любых* $x_1, x_2 \geqslant x_0$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ *и* $t \in [\delta,T]$

$$|\partial^\nu u(t,x_1,y_1) - \partial^\nu u(t,x_2,y_2)| \leqslant c(|x_1-x_2|^{\varepsilon-\sigma} + |y_1-y_2|^{\varepsilon-\sigma}) \qquad \forall \sigma \in (0,\varepsilon),$$

а если $|\nu| = m-1-j$, $j = 0,1,2$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2 + j$, *то для любых* $x \geqslant x_0$, $y \in \mathbb{R}$ *и* $t, \tau \in [\delta, T]$
$$|\partial^\nu u(t,x,y) - \partial^\nu u(\tau,x,y)| \leqslant c|t-\tau|^{(\varepsilon-\sigma)/3} \qquad \forall \sigma \in (0,\varepsilon),$$
где константы зависят от x_0, δ, σ, α.

Применение экспоненциальных весов приводит к следующему результату о существовании слабых решений, бесконечно гладких при $t > 0$, но вопрос единственности также остается открытым.

Теорема 4.4. *Пусть* $(1+e^{\alpha x})u_0 \in L_2(\mathbb{R}^2)$ *для некоторого* $\alpha > 0$, *тогда существует слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1), (4.1), *такое что*
$$(1+e^{\alpha x})u \in C_w([0,T]; L_2(\mathbb{R}^2)), \quad \lambda(|Du|; T) < +\infty,$$
для любого $x_0 \in \mathbb{R}$
$$e^{\alpha x} u \in L_2(0,T; H^1(\mathbb{R}^2_{x_0})),$$
для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, j *и мультииндексов* ν
$$e^{\alpha x} \partial_t^j \partial^\nu u \in C([\delta,T]; L_2(\mathbb{R}^2_{x_0})).$$

Доказательство. Доказательство теоремы полностью аналогично теоремам 4.1 и 4.2. □

Замечание 4.1. Первый результат о существовании глобального по времени решения задачи Коши для уравнения Захарова—Кузнецова при $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ (без единственности) был получен в статье [50] (на самом деле там рассматривались уравнения более общего вида). Существование слабого решения при начальной функции из пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$ с весом установлено в [9] (см. теорему 4.1). Далее в статье [10] (с помощью развития идей из [34] для уравнения Кортевега—де Фриза) были построены классы глобальной корректности задачи (1.1), (4.1) (формально при $b = 0$) $K_n(\Pi_T)$ при любом натуральном n (определение этих классов аналогично классам $K_n(\Pi_T^+)$, см. замечание 3.1) при $u_0 \in H^n(\mathbb{R}^2)$. В статье [42] этот результат был распространен на случай нецелых показателей гладкости $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^2)$, $s \geqslant 1$ (при $s \in (3/4, 1)$ была доказана корректность, локальная по времени). В работах [29, 47] локальная корректность была доказана при $s > 1/2$. В недавней статье [51] глобальная по времени корректность была установлена при $s > 11/13$. В весовых пространствах Соболева задача Коши для уравнения (1.1) изучалась в [13].

Вопрос о повышении внутренней гладкости решения задачи Коши для уравнения Захарова—Кузнецова был впервые рассмотрен в статье [41] (там рассматривались уравнения более общие, чем (1.1)). Изначально в [41] предполагалось, что $u_0 \in H^6(\mathbb{R}^2)$. Повышение внутренней гладкости решений задачи (1.1), (4.1) при меньшей гладкости начальной функции изучалось в [1, 24]. Наряду с описанными выше теоремами 4.2, 4.3 рассматривался случай $u_0 \in H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2)$. Тогда аналогичные результаты были получены для решений, входящих в класс корректности $K_1(\Pi_T)$.

Задача Коши для уравнения типа (1.1) с более высокой, чем квадратичная, степенью нелинейности изучалась в статьях [12, 25, 26, 28, 33, 42, 43, 49].

В случае 3-х пространственных переменных задача Коши для уравнения Захарова—Кузнецова рассматривалась в [21, 46–48]. В частности, в статье [47] установлена глобальная корректность при $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$ для $s > 1$. В работе [21] рассмотрена задача Коши для начальной функции из пространств $L_2(\mathbb{R}^3)$ и $H^1(\mathbb{R}^3)$ со степенными весами при $x \to +\infty$ и установлен ряд результатов о существовании и единственности слабых решений (последнее только для H^1).

Результаты о повышении внутренней регулярности решений задачи Коши для уравнения Захарова—Кузнецова в случае трех пространственных переменных (отличные от рассмотренных в настоящей статье) получены в [45]. Некоторые общие свойства регулярности решений задачи Коши для дисперсионных уравнений, в частности, для уравнения Захарова—Кузнецова, содержатся в [14, 35].

5. Начально-краевые задачи на полосе

В области $\Pi_{T,L} = (0,T) \times \Sigma_L$ рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1.1) с начальным условием
$$u(0,x,y) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in \Sigma_L, \tag{5.1}$$
и одним из 4-х краевых условий (2.3) при $(t,x) \in \Omega_T = (0,T) \times \mathbb{R}$.

Обозначения из раздела 2 Σ_{L,x_0}, $\Pi_{T,L}^{\delta,x_0}$ распространяются на любое значение $x_0 \in \mathbb{R}$. Положим для $\alpha \in \mathbb{R}$

$$L_2^\alpha(\Sigma_L) = \{\varphi(x,y) : (1+x_+)^\alpha \varphi \in L_2(\Sigma_L)\},$$
$$L_2^\alpha(\Sigma_{L,x_0}) = \{\varphi(x,y) : (1+(x-x_0))^\alpha \varphi \in L_2(\Sigma_{L,x_0})\},$$
$$\widetilde{H}^{k,\alpha}(\Sigma_{L,x_0}) = \{\varphi(x,y) : (1+(x-x_0))^\alpha \varphi \in \widetilde{H}^k(\Sigma_{L,x_0})\},$$
$$\lambda(u;T,L) = \sup_{x_0\in\mathbb{R}} \int\limits_0^T \int\limits_{x_0}^{x_0+1} \int\limits_0^L u^2\,dydxdt, \quad \lambda^+(u;T,L,\delta,x_0) = \sup_{x_1\geqslant x_0} \int\limits_\delta^T \int\limits_{x_1}^{x_1+1} \int\limits_0^L u^2\,dydxdt.$$

Понятие слабого решения рассматриваемой задачи полностью аналогично определению 2.1 с естественной заменой $\Sigma_{L,+}$, $\Pi_{T,L}^+$ на Σ_L, $\Pi_{T,L}$, отсутствием в аналоге интегрального тождества (2.4) слагаемого, связанного с μ, и отсутствием условий на пробную функцию ϕ при $x=0$.

В статье [11] был установлен следующий результат существования слабого решения.

Теорема 5.1. *Пусть $u_0 \in L_2^\alpha(\Sigma_L)$ для некоторого $\alpha \geqslant 0$, тогда существует слабое решение $u(t,x,y)$ задачи* (1.1), (5.1), (2.3), *такое что*

$$u \in C_w([0,T];L_2^\alpha(\Sigma_L)), \quad \lambda(|Du|;T,L) < +\infty.$$

Если дополнительно известно, что $\alpha > 0$, то для любого $x_0 \in \mathbb{R}$

$$u \in L_2(0,T;\widetilde{H}^{1,\alpha-1/2}(\Sigma_{L,x_0})).$$

Как и случае задачи Коши, единственность построенных решений остается открытой проблемой. Результаты о повышении внутренней гладкости этих решений наиболее скудны из всех рассмотренных в настоящей статье задач.

Теорема 5.2. *Пусть условия теоремы* 5.1 *выполнены для $\alpha \geqslant 1/2$. Тогда слабое решение, построенное в теореме* 5.1, *обладает следующим свойством: для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$*

$$u \in C_w([\delta,T];\widetilde{H}^{1,\alpha-1/2}(\Sigma_{L,x_0})), \quad \lambda^+(|D^2u|;T,L,\delta,x_0) < +\infty.$$

Если дополнительно известно, что $\alpha > 1/2$, то

$$u \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^{2,\alpha-1}(\Sigma_{L,x_0})).$$

Доказательство. Доказательство аналогично результату из [11], где рассматривался случай $u_0 \in \widetilde{H}^{1,\alpha}(\Sigma_L)$. □

Применение экспоненциальных весов не меняет ситуацию.

Теорема 5.3. *Пусть $(1+e^{\alpha x})u_0 \in L_2(\Sigma_L)$ для некоторого $\alpha > 0$, тогда существует слабое решение $u(t,x,y)$ задачи* (1.1), (5.1), (2.3), *такое что*

$$(1+e^{\alpha x})u \in C_w([0,T];L_2(\Sigma_L)), \quad \lambda(|Du|;T,L) < +\infty,$$

для любого $x_0 \in \mathbb{R}$

$$e^{\alpha x}u \in L_2(0,T;\widetilde{H}^1(\Sigma_{L,x_0})),$$

для любых $\delta \in (0,T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$e^{\alpha x}u \in L_2(\delta,T;\widetilde{H}^2(\Sigma_{L,x_0})).$$

Замечание 5.1. В статье [44] для случая периодических условий (2.3) была установлена локальная по времени корректность при $u_0 \in H^s(\Sigma_L)$, $s > 3/2$. Этот результат был развит в [47], где также в периодическом случае была доказана глобальная корректность при $u_0 \in H^1(\Sigma_L)$.

В работе [11] были рассмотрены любые из краевых условий (2.3) (см. теорему 5.1). Там же в случае $u_0 \in \widetilde{H}^{1,\alpha}(\Sigma_L)$, $\alpha \geqslant 0$, были построены глобальные решения в соответствующих классах, в которых при $\alpha \geqslant 1/2$ была доказана единственность. Случай экспоненциальных весов был рассмотрен в [19].

Начально-краевые задачи на полосе Σ_L для уравнения Захарова—Кузнецова с дополнительной параболической регуляризацией изучались в [19, 20, 38, 39].

В статье [21] начально-краевая задача с однородными краевыми условиями Дирихле для трехмерного уравнения Захарова—Кузнецова рассматривалась на слое $\mathbb{R} \times \Omega$ для некоторой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Были установлены результаты существования и единственности слабых решений в весовых пространствах (как степенных, так и экспоненциальных) при $x \to +\infty$, аналогичные упомянутым выше результатам для двумерного случая из [11, 19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонова А. П., Фаминский А. В.* О регулярности решений задачи Коши для уравнения Захарова—Кузнецова в нормах Гельдера// Мат. заметки. — 2015. — *97*, № 1. — С. 13–22.
2. *Антонова А. П., Фаминский А. В.* О регулярности решений начально-краевой задачи для уравнения Захарова—Кузнецова// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 5–21.
3. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1996.
4. *Захаров В. Е., Кузнецов Е. А.* О трехмерных солитонах// Журн. экспер. теорет. физ. — 1974. — *66*, № 2. — С. 594–597.
5. *Кружков С. Н., Фаминский А. В.* Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега—де Фриза// Мат. сб. — 1983. — *120*, № 3. — С. 396–425.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
7. *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Кортевега—де Фриза и его обобщений// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1988. — *13*. — С. 56–105.
8. *Фаминский А. В.* Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кортевега—де Фриза и его обобщений// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1988. — *51*. — С. 54–94.
9. *Фаминский А. В.* Задача Коши для квазилинейных уравнений нечетного порядка// Мат. сб. — 1989. — *180*, № 9. — С. 1183–1210.
10. *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Захарова—Кузнецова// Дифф. уравн. — 1995. — *31*, № 6. — С. 1070–1081.
11. *Baykova E. S., Faminskii A. V.* On initial-boundary-value problems in a strip for the generalized two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation// Adv. Differ. Equ. — 2013. — *18*, № 7-8. — С. 663–686.
12. *Biagioni H. A., Linares F.* Well-posedness for the modified Zakharov—Kuznetsov equation// Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2003. — *54*. — С. 181–189.
13. *Bustamante E., Jimenez Urrea J., Mejia J.* The Zakharov—Kuznetsov equation in weighted Sobolev spaces// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *433*, № 1. — С. 149–175.
14. *Constantin P., Saut J.-C.* Local smoothing properties of dispersive equations// J. Am. Math. Soc. — 1988. — *1*, № 2. — С. 413–446.
15. *Faminskii A. V.* On the mixed problem for quasilinear equations of the third order// J. Math. Sci. — 2002. — *110*, № 2. — С. 2476–2507.
16. *Faminskii A. V.* Nonlocal well-posedness of the mixed problem for the Zakharov—Kuznetsov equation// J. Math. Sci. — 2007. — *147*, № 1. — С. 6524–6537.
17. *Faminskii A. V.* Well posed initial-boundary value problems for the Zakharov—Kuznetsov equation// Electron. J. Differ. Equ. — 2008. — № 1. — С. 1–20.
18. *Faminskii A. V.* Weak solutions to initial-boundary-value problems for quasilinear equations of an odd order// Adv. Differ. Equ. — 2012. — *17*, № 5-6. — С. 421–470.
19. *Faminskii A. V.* An initial-boundary value problem in a strip for two-dimensional equations of Zakharov—Kuznetsov type// Contemp. Math. — 2015. — *653*. — С. 137–162.
20. *Faminskii A. V.* An initial-boundary value problem in a strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov—Burgers equation// Nonlinear Anal. — 2015. — *116*. — С. 132–144.
21. *Faminskii A. V.* An initial-boundary value problem for three-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation// J. Differ. Equ. — 2016. — *260*, № 3. — С. 3029–3055.
22. *Faminskii A. V.* Initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 2018. — *35*, № 5. — С. 1235–1265.
23. *Faminskii A. V.* Regular solutions to initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation// arXiv: 1901.04483 [math.AP], 14 Jan. 2019.
24. *Faminskii A. V., Antonova A. P.* On internal regularity of solutions to the initial value problem for the Zakharov—Kuznetsov equation// В сб.: «Progress in partial differential equations». — Cham: Springer, 2013. — С. 53–74.
25. *Farah L. G., Linares F., Pastor A.* A note on the 2D generalized Zakharov—Kuznetsov equation: local, global and scattering results// J. Differ. Equ. — 2012. — *253*, № 8. — С. 2558–2571.

26. *Fonseca G., Panchón M.* Well-posedness for the two dimensional generalized Zakharov—Kuznetsov equation in anisotropic weighted Sobolev spaces// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *443*, № 1. — С. 566–584.
27. *Grünrock A.* Remark on the modified Zakharov—Kuznetsov equation in three space dimensions// Math. Res. Lett. — 2014. — *21*, № 1. — С. 127–131.
28. *Grünrock A.* On the generalized Zakharov—Kuznetsov equation at critical regularity// arXiv: 1509.09146v1 [math.AP], 30 Sep. 2015.
29. *Grünrock A., Herr S.* The Fourier restriction norm method for the Zakharov—Kuznetsov equation// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2014. — *34*, № 5. — С. 2061–2068.
30. *Han-Kwan D.* From Vlasov—Poisson to Korteweg—de Vries and Zakharov—Kuznetsov// Commun. Math. Phys. — 2013. — *324*, № 3. — С. 961–993.
31. *Kato T.* The Cauchy problem for the Korteweg—de Vries equation// В сб.: «Nonlinear partial differential equations and their applications. College de France Seminar. Vol. I». — Boston—London—Melbourne: Pitman, 1981. — С. 293–307.
32. *Kato T.* On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg—de Vries equation// Stud. Appl. Math. — 1983. — *8*. — С. 93–128.
33. *Kato T.* Well-posedness for the generalized Zakharov—Kuznetsov equation in modulation spaces// J. Fourier Anal. Appl. — 2017. — *23*, № 3. — С. 612–655.
34. *Kenig C. E., Ponce G., Vega L.* Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg—de Vries equation// J. Am. Math. Soc. — 1991. — *4*, № 2. — С. 323–347.
35. *Kenig C. E., Ponce G., Vega L.* Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations// Indiana Univ. Math. J. — 1991. — *40*, № 1. — С. 33–69.
36. *Lannes D., Linares F., Saut J.-C.* The Cauchy problem for the Euler—Poisson system and derivation of the Zakharov—Kuznetsov equation// Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2013. — *84*. — С. 183–215.
37. *Larkin N. A.* Exponential decay of the H^1-norm for the 2D Zakharov—Kuznetsov equation on a half-strip// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *405*, № 1. — С. 326–335.
38. *Larkin N. A.* The 2D Zakharov—Kuznetsov—Burgers equation with variable dissipation on a strip// Electron. J. Differ. Equ. — 2015. — *60*. — С. 1–20.
39. *Larkin N. A.* The 2D Zakharov—Kuznetsov—Burgers equation on a strip// Bol. Soc. Parana Mat. (3). — 2016. — *34*, № 1. — С. 151–172.
40. *Larkin N. A., Tronco E.* Regular solutions of the 2D Zakharov—Kuznetsov equation on a half-strip// J. Differ. Equ. — 2013. — *254*, № 1. — С. 81–101.
41. *Levandosky J. L.* Smoothing properties of nonlinear dispersive equations in two spatial dimensions// J. Differ. Equ. — 2001. — *175*, № 2. — С. 275–301.
42. *Linares F., Pastor A.* Well-posedness for the two-dimensional modified Zakharov—Kuznetsov equation// SIAM J. Math. Anal. — 2009. — *41*, № 4. — С. 1323–1339.
43. *Linares F., Pastor A.* Local and global well-posedness for the 2D generalized Zakharov—Kuznetsov equation// J. Funct. Anal. — 2011. — *260*, № 4. — С. 1060–1085.
44. *Linares F., Pastor A., Saut J.-C.* Well-posedness for the Zakharov—Kuznetsov equation in a cylinder and on the background of a KdV soliton// Commun. Part. Differ. Equ. — 2010. — *35*, № 9. — С. 1674–1689.
45. *Linares F., Ponce G.* On special regularity properties of solutions of the Zakharov—Kuznetsov equation// Commun. Pure Appl. Anal. — 2018. — *17*, № 4. — С. 1561–1572.
46. *Linares F., Saut J. C.* The Cauchy problem for the 3D Zakharov—Kuznetsov equation// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2009. — *24*, № 2. — С. 547–565.
47. *Molinet L., Pilod D.* Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov—Kuznetsov equation and applications// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 2015. — *32*, № 2. — С. 347–371.
48. *Ribaud F., Vento S.* Well-posedness results for the 3D Zakharov—Kuznetsov equation// SIAM J. Math. Anal. — 2012. — *44*, № 4. — С. 2289–2304.
49. *Ribaud F., Vento S.* A note on the Cauchy problem for the 2D generalized Zakharov—Kuznetsov equation// C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2012. — *350*, № 9-10. — С. 499–503.
50. *Saut J.-C.* Sur quelques generalizations de l'equation de Korteweg—de Vries// J. Math. Pures Appl. (9). — 1979. — *58*, № 1. — С. 21–61.
51. *Shan M.* Well-posedness for the two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation// arXiv: 1807.10123v2 [math.AP], 15 Aug. 2018.

А. В. Фаминский
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-3-513-546 UDC 517.958

On Inner Regularity of Solutions of Two-Dimensional Zakharov–Kuznetsov Equation

© 2019 **A. V. Faminskii**

Abstract. In this paper, we consider questions of inner regularity of weak solutions of initial-boundary value problems for the Zakharov–Kuznetsov equation with two spatial variables. The initial function is assumed to be irregular, and the main parameter governing the regularity is the decay rate of the initial function at infinity. The main results of the paper are obtained for the problem on a semistrip. In this problem, different types of initial conditions (e. g., Dirichlet or Neumann conditions) influence the inner regularity. We also give a survey of earlier results for other types of areas: a plane, a half-plane, and a strip.

REFERENCES

1. A. P. Antonova and A. V. Faminskiy, "O regulyarnosti resheniy zadachi Koshi dlya uravneniya Zakharova—Kuznetsova v normakh Gel'dera" [On regularity of solutions of the Cauchy problems for the Zakharov–Kuznetsov equation in Hölder norms], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2015, **97**, No. 1, 13–22 (in Russian).
2. A. P. Antonova and A. V. Faminskiy, "O regulyarnosti resheniy nachal'no-kraevoy zadachi dlya uravneniya Zakharova—Kuznetsova" [On regularity of solutions for initial-boundary value problems for the Zakharov–Kuznetsov equation], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 5–21 (in Russian).
3. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skiy, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representation of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1996 (in Russian).
4. V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, "O trekhmernykh solitonakh" [On three-dimensional solitons], *Zhurn. eksper. teoret. fiz.* [J. Exper. Theor. Phys.], 1974, **66**, No. 2, 594–597 (in Russian).
5. S. N. Kruzhkov and A. V. Faminskiy, "Obobshchennye resheniya zadachi Koshi dlya uravneniya Kortevega—de Friza" [Generalized solutions of the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1983, **120**, No. 3, 396–425 (in Russian).
6. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equation of Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
7. A. V. Faminskiy, "Zadacha Koshi dlya uravneniya Kortevega—de Friza i ego obobshcheniy" [The Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation and its generalizations], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1988, **13**, 56–105 (in Russian).
8. A. V. Faminskiy, "Smeshannaya zadacha v polupolose dlya uravneniya Kortevega—de Friza i ego obobshcheniy" [Mixed problem in a half-strip for the Korteweg–de Vries equation and its generalizations], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1988, **51**, 54–94 (in Russian).
9. A. V. Faminskiy, "Zadacha Koshi dlya kvazilineynykh uravneniy nechetnogo poryadka" [The Cauchy problem for quasilinear equations of odd order], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1989, **180**, No. 9, 1183–1210 (in Russian).
10. A. V. Faminskiy, "Zadacha Koshi dlya uravneniya Zakharova—Kuznetsova" [The Cauchy problem for the Zakharov–Kuznetsov equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1995, **31**, No. 6, 1070–1081 (in Russian).
11. E. S. Baykova and A. V. Faminskii, "On initial-boundary-value problems in a strip for the generalized two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation," *Adv. Differ. Equ.*, 2013, **18**, No. 7-8, 663–686.
12. H. A. Biagioni and F. Linares, "Well-posedness for the modified Zakharov—Kuznetsov equation," *Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2003, **54**, 181–189.
13. E. Bustamante, J. Jimenez Urrea, and J. Mejia, "The Zakharov—Kuznetsov equation in weighted Sobolev spaces," *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **433**, No. 1, 149–175.
14. P. Constantin and J.-C. Saut, "Local smoothing properties of dispersive equations," *J. Am. Math. Soc.*, 1988, **1**, No. 2, 413–446.
15. A. V. Faminskii, "On the mixed problem for quasilinear equations of the third order," *J. Math. Sci.*, 2002, **110**, No. 2, 2476–2507.

16. A. V. Faminskii, “Nonlocal well-posedness of the mixed problem for the Zakharov—Kuznetsov equation,” *J. Math. Sci.*, 2007, **147**, No. 1, 6524–6537.
17. A. V. Faminskii, “Well posed initial-boundary value problems for the Zakharov—Kuznetsov equation,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2008, No. 1, 1–20.
18. A. V. Faminskii, “Weak solutions to initial-boundary-value problems for quasilinear equations of an odd order,” *Adv. Differ. Equ.*, 2012, **17**, No. 5-6, 421–470.
19. A. V. Faminskii, “An initial-boundary value problem in a strip for two-dimensional equations of Zakharov—Kuznetsov type,” *Contemp. Math.*, 2015, **653**, 137–162.
20. A. V. Faminskii, “An initial-boundary value problem in a strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov—Burgers equation,” *Nonlinear Anal.*, 2015, **116**, 132–144.
21. A. V. Faminskii, “An initial-boundary value problem for three-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation,” *J. Differ. Equ.*, 2016, **260**, No. 3, 3029–3055.
22. A. V. Faminskii, “Initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation,” *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2018, **35**, No. 5, 1235–1265.
23. A. V. Faminskii, “Regular solutions to initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation” [Regular solutions to initial-boundary value problems in a half-strip for two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation], *arXiv*, 1901.04483 [math.AP], 14 Jan. 2019.
24. A. V. Faminskii and A. P. Antonova, “On internal regularity of solutions to the initial value problem for the Zakharov—Kuznetsov equation,” In: *Progress in partial differential equations*, Springer, Cham, 2013, pp. 53–74.
25. L. G. Farah, F. Linares, and A. Pastor, “A note on the 2D generalized Zakharov—Kuznetsov equation: local, global and scattering results,” *J. Differ. Equ.*, 2012, **253**, No. 8, 2558–2571.
26. G. Fonseca and M. Panchón, “Well-posedness for the two dimensional generalized Zakharov—Kuznetsov equation in anisotropic weighted Sobolev spaces,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **443**, No. 1, 566–584.
27. A. Grünrock, “Remark on the modified Zakharov—Kuznetsov equation in three space dimensions,” *Math. Res. Lett.*, 2014, **21**, No. 1, 127–131.
28. A. Grünrock, “On the generalized Zakharov—Kuznetsov equation at critical regularity” [On the generalized Zakharov—Kuznetsov equation at critical regularity], *arXiv*, 1509.09146v1 [math.AP], 30 Sep. 2015.
29. A. Grünrock and S. Herr, “The Fourier restriction norm method for the Zakharov—Kuznetsov equation,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2014, **34**, No. 5, 2061–2068.
30. D. Han-Kwan, “From Vlasov—Poisson to Korteweg—de Vries and Zakharov—Kuznetsov,” *Commun. Math. Phys.*, 2013, **324**, No. 3, 961–993.
31. T. Kato, “The Cauchy problem for the Korteweg—de Vries equation,” In: *Nonlinear partial differential equations and their applications. College de France Seminar. Vol. I*, Pitman, Boston–London–Melbourne, 1981, pp. 293–307.
32. T. Kato, “On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg—de Vries equation,” *Stud. Appl. Math.*, 1983, **8**, 93–128.
33. T. Kato, “Well-posedness for the generalized Zakharov—Kuznetsov equation in modulation spaces,” *J. Fourier Anal. Appl.*, 2017, **23**, No. 3, 612–655.
34. C. E. Kenig, G. Ponce, L. Vega, “Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg—de Vries equation,” *J. Am. Math. Soc.*, 1991, **4**, No. 2, 323–347.
35. C. E. Kenig, G. Ponce, and L. Vega, “Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1991, **40**, No. 1, 33–69.
36. D. Lannes, F. Linares, and J.-C. Saut, “The Cauchy problem for the Euler—Poisson system and derivation of the Zakharov—Kuznetsov equation,” *Progr. Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2013, **84**, 183–215.
37. N. A. Larkin, “Exponential decay of the H^1-norm for the 2D Zakharov—Kuznetsov equation on a half-strip,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **405**, No. 1, 326–335.
38. N. A. Larkin, “The 2D Zakharov—Kuznetsov—Burgers equation with variable dissipation on a strip,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2015, **60**, 1–20.
39. N. A. Larkin, “The 2D Zakharov—Kuznetsov—Burgers equation on a strip,” *Bol. Soc. Parana Mat. (3)*, 2016, **34**, No. 1, 151–172.
40. N. A. Larkin and E. Tronco, “Regular solutions of the 2D Zakharov—Kuznetsov equation on a half-strip,” *J. Differ. Equ.*, 2013, **254**, No. 1, 81–101.
41. J. L. Levandosky, “Smoothing properties of nonlinear dispersive equations in two spatial dimensions,” *J. Differ. Equ.* , 2001, **175**, No. 2, 275–301.
42. F. Linares and A. Pastor, “Well-posedness for the two-dimensional modified Zakharov—Kuznetsov equation,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2009, **41**, No. 4, 1323–1339.

43. F. Linares and A. Pastor, "Local and global well-posedness for the 2D generalized Zakharov—Kuznetsov equation," *J. Funct. Anal.* , 2011, **260**, No. 4, 1060–1085.
44. F. Linares, A. Pastor, and J.-C. Saut, "Well-posedness for the Zakharov—Kuznetsov equation in a cylinder and on the background of a KdV soliton," *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2010, **35**, No. 9, 1674–1689.
45. F. Linares and G. Ponce, "On special regularity properties of solutions of the Zakharov—Kuznetsov equation," *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2018, **17**, No. 4, 1561–1572.
46. F. Linares and J. C. Saut, "The Cauchy problem for the 3D Zakharov—Kuznetsov equation," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2009, **24**, No. 2, 547–565.
47. L. Molinet and D. Pilod, "Bilinear Strichartz estimates for the Zakharov—Kuznetsov equation and applications," *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2015, **32**, No. 2, 347–371.
48. F. Ribaud and S. Vento, "Well-posedness results for the 3D Zakharov—Kuznetsov equation," *SIAM J. Math. Anal.*, 2012, **44**, No. 4, 2289–2304.
49. F. Ribaud and S. Vento, "A note on the Cauchy problem for the 2D generalized Zakharov—Kuznetsov equation," *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2012, **350**, No. 9-10, 499–503.
50. J.-C. Saut, "Sur quelques generalizations de l'equation de Korteweg—de Vries," *J. Math. Pures Appl. (9)*, 1979, **58**, No. 1, 21–61.
51. M. Shan, "Well-posedness for the two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation" [Well-posedness for the two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation], *arXiv*, 1807.10123v2 [math.AP], 15 Aug. 2018.

A. V. Faminskii

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

E-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru