РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 65, № 1, 2019

Современные проблемы математики и физики

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в международных базах данных научных публикаций *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты. Объем статьи, занимающий целый том, должен составлять 140–190 страниц в стиле нашего журнала.

Правила оформления статей, архив публикаций и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала на Общероссийском математическом портале: http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. М. Варфоломеев*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев, В. С. Кваченко*
Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com

Подписано в печать 08.04.2019. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 19,07. Тираж 150 экз. Заказ 680.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 65, No. 1, 2019
Contemporary Problems in Mathematics and Physics

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003
Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Reviewed in *MathSciNet* and *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results. Occupying the whole volume, an article should make up 140–190 pages in the format of the journal.

Guidelines for authors, archive of issues, and other information can be found at the journal's website at *All-Russian Mathematical Portal*: http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev, V. S. Kvachenko*
Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: journal.cmfd@gmail.com
Printing run 150 copies.
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia
Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 1–10

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-1-10 УДК 514.14

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ГЕОМЕТРИИ НА МНОГООБРАЗИЯХ КАК ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ С ПРОЕКТИВНЫМИ МЕТРИКАМИ

© 2019 г. **А. АРТИКБАЕВ, С. С. САИТОВА**

Аннотация. В этой статье мы приводим основные понятия геометрии трехмерных пространств в векторном изложении в аффинно-векторном пространстве A_n.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение: геометрия на трехмерных многообразиях

В работе [4] Уильям Пол Терстон — американский математик, лауреат Филдсовской премии 1982 года, приводит классификацию геометрий на трехмерных многообразиях.

Говорят, что многообразие M^n обладает *геометрической структурой*, если на нем существует полная локально-однородная метрика. Это означает, что универсальное накрывающее пространство $\widetilde{M}$ многообразия M обладает полной однородной метрикой, такой что группа изометрий многообразия $\widetilde{M}$ действует на нем транзитивно. Отсюда автоматически вытекает компактность стабилизатора точки в $\widetilde{M}$. Таким образом, получим геометрию $(\widetilde{M}, G)$, где G — группа изометрий многообразия $\widetilde{M}$.

Основной результат Терстона изложен в следующей теореме.

Теорема (Терстон). *Всякая максимальная односвязная трехмерная геометрия, допускающая компактную факторгеометрию, эквивалентна геометрии* $(\widetilde{M}, \operatorname{Isom}\widetilde{M})$, *где* $\widetilde{M}$ — *одно из многообразий* E^3, H^3, S^3, $S^2\times R$, $H^2\times R$, SL_2R, *Nil или Sol.*

Указанное в этой теореме E^3 — классическое евклидово пространство, H^3 — трехмерное гиперболическое пространство, т. е. пространство Лобачевского, а S^3 — трехмерное эллиптическое пространство.

К тому же, по Кэли—Клейну существует 3^n n-мерных пространств с проективными метриками, то есть пространств, метрики которых инвариантны при проективном преобразовании. Очевидно, что при $n = 3$ их 27.

При этом, упомянутые ранее пространства $S^2\times R, H^2\times R, SL_2R, Nil$ или Sol не имеют своих явных аналогов среди трехмерных пространств с проективными метриками.

Ранее были предприняты попытки описать подобные пространства как подпространства евклидового пространства высокой размерности, см. [2].

В данной статье исследуется решение задачи определения эквивалентных пространств при помощи проективных метрик.

Определим некоторые необходимые понятия о геометрии трехмерных пространств с проективными метриками.

2. Трехмерные пространства с проективными метриками

Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n. Пусть $O(0,0,\dots,0)$ — начало координат и $l_1(1,0,\dots,0)$, $l_2(0,1,0,\dots,0)$,... $l_n(0,0,\dots,1)$ — базис пространства A_n, где $\{x_1,x_2,,\dots,x_n\}$ — аффинные координаты вектора X.

Разобьем координаты $x_i, i=1,2,\dots,n$ вектора X на следующие группы:

$$x_{a_1}(m_0 = 1 \leqslant a_1 \leqslant m_1),$$

$$x_{a_2}(m_1 \leqslant a_2 \leqslant m_2),$$

$$x_{a_3}(m_2 \leqslant a_3 \leqslant m_3 = n).$$

Определение 2.1. *Пространством* ${}^{l_1l_2l_3}R_n^{m_1m_2}$ будем называть аффинное пространство A_n, в котором скалярное произведение векторов $X\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ и $Y\{y_1,y_2,\dots,y_3\}$ задано следующим образом:

$$(X,Y)_i = \sum_{a_i=a_{i-1}}^{m_i} \varepsilon_{a_i} x_{a_i} y_{a_j}, \tag{2.1}$$

где

$$\varepsilon_{a_i} = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad m_{i-1} < a_i \leqslant m_{i-1} + l_i, \\ 1, & \text{если} \quad m_{i-1} + l_i < a_i \leqslant m_i, \end{cases}$$

причем i-е скалярное произведение определяется только для тех векторов, для которых выполнено условие $x_1 = x_= \ldots = x_{i-1} = 0$.

Вектор называется *вектором i-го порядка*, если для него определен i-й скалярный квадрат вектора.

Таким образом, вектор i-го порядка есть вектор с координатами $x_1,x_2,\dots,x_{m_i-1}$, равными нулю, а среди координат $x_{m_{i-1}}+1, x_{m_{i-1}}+2,\dots,x_{m_i}$ есть отличные от нуля.

Норма вектора определяется по формуле

$$\mid \overline{X} \mid = \sqrt{(X,X)_i}. \tag{2.2}$$

Расстояние между точками определяется как норма вектора, определяющегося этими точками. Если $A(X)$ и $B(Y)$, то

$$\mid AB \mid = \sqrt{(Y-X,Y-X)_i}. \tag{2.3}$$

Норма вектора, как и расстояние между точками, может принимать действительные, мнимые и нулевые значения. Рассматриваемый вектор называется *действительным*, *мнимым* или же *изотропным*, соответственно.

2.1. Трехмерные пространства аффинной структуры.

Рассмотрим подробнее трехмерные пространства ${}^{l_1l_2l_3}R_3^{m_1m_2}$. Очевидно, что при этом m_i и l_i могут принимать значения $0,1,2$.

Рассмотрим всевозможные случаи:

1. Если $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = l_3 = 0$, тогда получим евклидово пространство $-R_3$. В этом случае метрика невырождена и положительно определена.
2. Если $m_1 = m_2 = l_1 = l_2 = 0$, а $l_3 = 1$ тогда скалярное произведение векторов имеет вид:

$$(X,Y) = +x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3.$$

Пространство ${}^1R_3$ называется *пространством Минковского*. Метрика этого пространства невырождена, хотя неположительно определена.

Похожая геометрия имеет место при $l_3 = 2$. Тогда скалярное произведение векторов определено как

$$(X,Y) = +x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3.$$

Координаты пространства ${}^2R_3$ отличаются от координат пространства ${}^1R_3$ на мнимый сомножитель. Следовательно, геометрия этих пространств одинакова и исследование пространства ${}^2R_3$ не представляет самостоятельного геометрического интереса.

3. Рассмотрим случай, когда $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, а $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, т. е. пространство R_3^1. Это пространство называется *галилеевым пространством*. Здесь скалярное произведение векторов определим следующим образом:
$$(X, Y)_1 = x_1 y_1. \tag{2.4a}$$
Когда оно равно нулю, положим:
$$(X, Y)_2 = x_2 y_2 + x_3 y_3. \tag{2.4b}$$
Расстояние между точками $A(x_1, x_2, x_3)$ и $B(y_1, y_2, y_3)$ определено как
$$\mid AB \mid_1 = \mid y_1 - x_1 \mid; \tag{2.5a}$$
когда $\mid AB \mid_1 = 0$, то
$$\mid AB \mid_2 = \sqrt{(y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2} \tag{2.5b}$$
4. Рассмотрим случай, когда $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, а $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, т. е. пространство R_3^2. Это пространство называется *изотропным пространством*. В этом случае скалярное произведение векторов и расстояние между точками определяется по формулам (2.4b), (2.4a) и (2.5b), (2.5a), соответственно. То есть меняется порядок исчисления.
5. Наконец, при изучении случая $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, а $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, т. е. в пространстве R_3^{12} мы получим три скалярных произведения и трижды вырожденную метрику. Это пространство называется *флаговым пространством*.

   Во флаговом пространстве скалярное произведение векторов определяется формулой
$$(X, Y)_1 = x_1 y_1;$$
если же $(X, Y)_1 = 0$, тогда
$$(X, Y)_2 = x_2 y_2;$$
если же $(X, Y)_2 = 0$, то
$$(X, Y)_3 = x_3 y_3.$$
Аналогично можно определить расстояние между точками:
$$|AB|_1 = |y_1 - x_1|,$$
$$|AB|_2 = |y_2 - x_2|,$$
$$|AB|_3 = |y_3 - x_3|.$$

Галилеево, изотропное и флагово пространства являются *полуевклидовыми пространствами*.

Пространство ${}^1R_3$ — трехмерное *псевдоевклидово пространство*. Аналогично полуевклидовым пространствам в псевдоевклидовом пространстве можно определить *полупсевдоевклидовы пространства*.

Трехмерные полупсевдоевклидовы пространства — это ${}^{01}R_3^1$ — *псевдогалилеево*, ${}^{10}R_3^2$ — *псевдоизотропное* пространство.

Таким образом, трехмерными пространствами аффинной структуры являются 7 пространств: R_3, R_3^1, R_3^2, R_3^{12}, ${}^1R_3$, ${}^{01}R_3^1$ и ${}^{10}R_3^2$.

2.2. О движении трехмерных пространств аффинной структуры. По Клейну, нам известно, что геометрии в рассматриваемом пространстве существует при существовании *движения* пространства, т. е. при наличии линейного преобразования пространства, сохраняющего расстояние между соответствующими точками.

Любое аффинное преобразование аффинного пространства A_3 можно выразить формулой
$$x' = Ax + B, \tag{*}$$
где B — вектор параллельного переноса, а матрица A — квадратичная матрица 3-го порядка.

В случае, когда эта матрица симметрична и $\det A = 1$, преобразование (*) определяет геометрию евклидового пространства. Аналогичным образом, в случае, когда матрица A симметрична и $\det A = -1$, преобразование (*) определяет геометрию пространства Минковского. Перечисленные матрицы, очевидно, образуют подгруппу группы всех невырожденных трехмерных матриц. То есть, для рассмотрения отличных от классических геометрий нужно более детально изучить другие подгруппы группы всех невырожденных трехмерных матриц. Так, например, движение галилеева пространства R_3^1 задается формулами

$$\begin{gathered} x' = x + a, \\ y' = Ax + y\cos\alpha - z\sin\alpha + b, \\ z' = Bx + y\sin\alpha + z\cos\alpha + c, \end{gathered}$$

где (a, b, c) — координаты направляющего вектора параллельного переноса. Вращения в этом пространстве задаются матрицей вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ B & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом, вращение в галилеевом пространстве представляет собой вращение на угол α вокруг оси Oz и скольжение, сохраняющее плоскости, параллельные координатной плоскости yOz. Также мы видим, что в этом случае матрица не симметрична.

Теперь в изотропном пространстве матрица движения имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ A & B & 1 \end{pmatrix}.$$

Движение во флаговой плоскости рассмотрим отдельно.

2.3. О сферах в пространствах с проективными метриками. В геометрических рассуждениях важное место имеет занимает понятие *сферы* рассматриваемого пространства. Под *сферой* мы понимаем геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки рассматриваемого пространства. Разумеется, равноудаленность понимается в смысле расстояния между точками изучаемого пространства.

Для наглядности рассмотрим сферы в галилеевом и изотропном пространстве в трехмерном случае.

В галилеевом пространстве расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ определяется формулой

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Тогда сфера с центром в начале координат $O(0, 0, 0)$ и радиусом r имеет уравнение

$$x^2 = r^2,$$

т. е.

$$x = \pm r.$$

Геометрическим местом точек, удовлетворяющих данному уравнению, является пара плоскостей, параллельных координатной плоскости yOz и проходящих через точки $(\pm r, 0, 0)$, соответственно.

Если аналогично рассмотреть сферу изотропного пространства R_3^2, то имеет место уравнение сферы следующего вида:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Следовательно, сфера изотропного пространства аффинно является цилиндром, направляющей которого является окружность на координатной плоскости xOy, а образующие есть прямые, параллельные оси Oz.

Интересен тот факт, что сферы в пространствах с проективными метриками, в частности, в галилеевом и изотропном пространствах, инвариантны относительно вращений с центром в начале координат в этих пространствах. Это свойство сфер в пространствах с проективными метриками — аналог свойства сфер евклидовых пространств. Следовательно, остальные свойства сфер евклидовых пространств также будут актуальны для сфер в пространствах с проективными метриками.

2.4. Трехмерное эллиптическое и гиперболическое пространства с проективными метриками. Известно, что 3-мерное эллиптическое пространство определяется как множество точек, изометричное множеству пар диаметрально противоположных точек сферы четырехмерного евклидова пространства [3].

Эллиптическое и гиперболическое пространство с проективными метриками определяются с помощью сферы S в пространстве ${}^{l_1 l_2 l_3}R_{n+1}^{m_1, m_2, m_2+1}$ и R_{n+1}. Сфера этого пространства определяется как геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки x_0, и задается уравнением

$$(x - x_0, x - x_0) = \pm r^2.$$

Если центр сферы в начале координат, то

$$(x, x) = \pm r^2.$$

Расстояние δ между точками A и B пространства S, представляемое векторами $X\{x_0, x_1, \dots x_n\}$ и $Y\{y_0, y_1, \dots y_n\}$ пространства R_{n+1}, определяется по формуле

$$\cos\delta = \frac{(X, Y)_1}{|X| \cdot |Y|}.$$

В случае, когда $\delta = 0$, определяется второе расстояние

$$d_2^2 = \sum_{a_1 = m_1+1}^{m_2} (y_{a_1} - x_{a_1})^2.$$

Если $\delta_1 = d_1 = 0$, то третье расстояние определяется по формуле

$$d_2^2 = \sum_{a_2 = m_2+1}^{n} (y_{a_2} - x_{a_2})^2.$$

Прямая, для точек которой $\delta \neq 0$, называется *эллиптической* (*гиперболической*); если $\delta = 0$, $d_i = 0$, то прямая называется *i-параболической*.

Когда $m_1 = 0$, сфера пространства R_{n+1} распадается на две n-мерные плоскости.

Рассмотрим всевозможные трехмерные эллиптические (гиперболические) пространства, получаемые как сферы 4-мерных пространств с проективными метриками аффинной структуры.

Здесь мы только перечислим всевозможные эллиптические (гиперболические) трехмерные пространства с проективными метриками, представляющие геометрический интерес. Изучение геометрии и интерпретации этих пространств по необходимости проведено далее.

Когда $n = 4$, $m_1 = 3$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, т. е. R_4 — евклидово пространство, на соответствующей сфере реализуется эллиптическое трехмерное пространство S_3. Аналогично, когда $n = 4$, $m_1 = 3$, $l_1 = 1$, $l_2 = l_2 = 0$, т. е. ${}^1R_4$ — псевдоизотропное, а геометрия на сфере будет гиперболической, ${}^1S_3$ называется *пространством Лобачевского* [3].

При $n = 4$, $m_1 = 0$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, т. е. R_4^1 — 4-мерное галилеево пространство. Сферой этого пространства являются два параллельных трехмерных евклидовых пространства R_3. Следовательно, $S_3^0 = R_3$. Когда $n = 4$, $m_1 = 1$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, получаем трехмерное полуэллиптическое пространство S_3^1. При $n = 4$, $m_1 = 2$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$, имеем полуэллиптическое пространство S_3^2 на сфере полуевклидова пространства R_4^3 — четырехмерного изотропного пространства. Тогда при $n = 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $l_1 = l_2 = l_3 = 0$ на сфере флагового пространства R_4^{23} — получаем геометрию с дважды вырожденной метрикой S_3^{12} — полуэллиптического пространства.

Во всех вышеприведенных вариантах $l_i = 0$. Если же $l_i \neq 0$, то аналогичным образом получаем геометрию полугиперболических пространств: ${}^{10}S_3^1$, ${}^{11}S_3^1$, ${}^{10}S_3^2$ и ${}^{100}S_3^{12}$, которые представляют геометрический интерес.

В остальных случаях геометрии полученных пространств отличаются от рассмотренных только лишь мнимым множителем при координатах.

Таким образом, мы имеем эллиптические $S_3, S_3^1, S_3^2, S_3^{12}$ и гиперболические ${}^1S_3, {}^{10}S_3^1$, ${}^{11}S_3^1$, ${}^{10}S_3^2$, ${}^{100}S_3^{12}, S_3^2, {}^{10}S_3^2$ пространства с проективными метриками, представляющие геометрический интерес.

Следовательно, число трехмерных пространств с проективными метриками, представляющих геометрический интерес, равно 18, при этом 7 из них обладают аффинной структурой.

3. Интерпретация пространства ${}^1S_3$

В предыдущем пункте мы выяснили, что пространство Лобачевского ${}^1S_3$ изометрично множеству диаметрально противоположных пар точек сферы мнимого радиуса пространства ${}^1R_4$. Пространство ${}^1R_4$ имеет аффинную структуру. Геометрию пространства ${}^1S_3$ построим с помощью векторов пространства.

Пусть $\{Oxyzt\}$ — ортогональная система координат пространства ${}^1R_4$. Тогда скалярное произведение векторов $X\{x_1, y_1, z_1, t_1\}$ и $Y\{x_2, y_2, z_2, t_2\}$ определяется по формуле

$$(X, Y) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2.$$

Уравнение сферы мнимого радиуса r пространства ${}^1R_4$ записывается в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -r^2. \tag{3.1}$$

Следовательно, точка пространства ${}^1S_3$ имеет координаты $\{x, y, z, t\}$ для точек пространства ${}^1R_4$, связанных с условием (2.1), т. е. при $r = 1$ имеем

$${}^1S_3 = \left\{ \begin{array}{c} (x, y, z, t) \in {}^1R_4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1 \end{array} \right\}.$$

Так как диаметрально противоположные точки считаются за одну, рассматриваем только часть сферы, удовлетворяющую условию $t > 0$.

Расстояние между точками $A\{x_1, y_1, z_1, t_1\}$ и $B\{x_2, y_2, z_2, t_2\}$ пространства ${}^1S_3$ вычисляются по формуле:

$$\operatorname{ch}\delta = \frac{t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2}{\sqrt{t_1^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2}\sqrt{t_2^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2}} \tag{3.2}$$

Сфера мнимого радиуса (3.1) пространства ${}^1R_3$ — это поверхность второго порядка, аффинно представляющая двуполостный гиперболоид. Она имеет предельный конус, заданный уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0.$$

Точка $C(0, 0, 0, 1)$ является вершиной сферы (3.1).

Рассмотрим касательную гиперплоскость сферы (3.1), проходящую через точку C, заданную уравнением $t = 1$. Это гиперплоскость трехмерного евклидова пространства $R_3\{x, y, z\}$, являющаяся подпространством $t = 1$ в ${}^1R_4$, т. е. $\{x, y, z, 1\} \in {}^1R_4$.

Обозначим через $\{l_0, i, j, k\}$ ортонормированный базис пространства ${}^1R_4$.

Каждой точке X из ${}^1S_3$ сопоставим точку TX на касательной плоскости $t = 1$.

Лемма 3.1. *Вектор, определяющий TX, связан с вектором X формулой*:

$$TX = \frac{X + l_0(l_0X)}{|(l_0X)|}.$$

Доказательство. Действительно, радиус вектор точки $X \in {}^1S_3$ — вектор пространства ${}^1R_4$.

Так как вектор X имеет координаты $X\{x, y, z, t\}$, то его точка пересечения с плоскостью $t = 1$ имеет координаты $\tilde{X} = \left\{\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}, 1\right\}$.

Учитывая, что $(l_0X) = -t$, получим

$$X + l_0(\tilde{X}) = xi + yj + zk + tl_0 - l_0(l_0X) = xi + yj + zk.$$

Следовательно,

$$\frac{X + l_0(l_0X)}{|(l_0X)|} = \frac{x}{t}i + \frac{y}{t}j + \frac{z}{t}k = \tilde{X}.$$

Отображение TX сопоставляет каждой точке пространства ${}^1S_3$ точку в трехмерном евклидовом пространстве R_3. □

Лемма 3.2. *Множество точек $\tilde{X}$, соответствующих точкам пространства ${}^1S_3$, содержится внутри сферы единичного радиуса евклидова пространства R_3.*

Доказательство. Действительно, координаты точки $\tilde{X}$ пространства ${}^1S_3$ связаны условием (3.1). Учитывая эту связь, в полупространстве $t > 0$ получим:

$$(\frac{x}{t})^2 + (\frac{y}{t})^2 + (\frac{z}{t})^2 = 1 - \frac{1}{t^2}.$$

Следовательно,

$$(\frac{x}{t})^2 + (\frac{y}{t})^2 + (\frac{z}{t})^2 < 1.$$

Отсюда следует, что $|\tilde{X}| < 1$, т. е. вектор содержится внутри шара радиусом 1. Что и доказывает лемму 3.2. □

Когда точки пространства Лобачевского ${}^1S_3$ интерпретируются точками сферы пространства ${}^1R_4$, прямые и плоскости также представлены подпространствами ${}^1R_4$.

Плоскость пространства ${}^1S_3$ определяется как пересечение трехмерной плоскости, проходящей через начало координат в ${}^1R_4$, со сферой мнимого радиуса [3].

Следовательно, плоскость пространства ${}^1S_3$ задается соотношениями

$$\pi := \left\{ \begin{array}{c} (x, y, z, t) \in^1 R_4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1 \\ Ax + By + Cz + Dt = 0 \end{array} \right\}, \tag{3.3}$$

а прямая как пересечение двух плоскостей пространства ${}^1S_3$ выражается в виде

$$l := \left\{ \begin{array}{c} (x, y, z, t) \in^1 R_4 \\ x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = -1 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1t = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2t = 0 \end{array} \right\}. \tag{3.4}$$

Лемма 3.3. *При отображении $TX(1)$ прямые и плоскости пространства ${}^1S_3$ изображаются как часть прямых и плоскостей, содержащихся внутри сферы единичного радиуса пространства ${}^1R_3$.*

Доказательство. В справедливости этой леммы можно убедиться, переходя к координатам вектора $\tilde{X}\{\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\}$ в формулах (3.3) и (3.4).

Также, нетрудно представить геометрически, что пересечение плоскости, проходящей через начало координат пространства ${}^1R_4$, со сферой и плоскостью $t = 1$ является центральной проекцией соответствующих точек из начала координат. □

Теорема 3.1. *Отображение TX является аналогом интерпретации Кэли—Клейна пространства Лобачевского.*

Доказательство этой теоремы следует из лемм 3.1, 3.2 и 3.3.

4. Интерпретация пространств ${}^{10}S_3^2$ и ${}^{10}S_3^2$

Итак, расстояние между точками в ${}^{10}R_4^3$ может быть мнимым, вещественным и равным нулю.

Если сферу $S \subset {}^{10}R_4^3$ определить как множество точек, равноудаленных от данной точки, то согласно этому определению будет существовать три вида сферы: сфера вещественного радиуса, изотропная сфера и сфера мнимого радиуса.

Сфера $S \subset {}^{10}R_4^3$ с мнимым радиусом определяется уравнением

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1.$$

Копсевдоевклидово пространство ${}^{10}S_3^2$ определяется как множество точек, изометричных множеству диаметрально противоположных точек сферы мнимого радиуса пространства ${}^{10}R_4^3$, см. [3]. Следовательно,

$${}^{10}S_3^2 = \left\{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in {}^{10}R_4^3; -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1\right\}.$$

Расстояние между двумя точками в ${}^{10}S_3^2$ равно углу между векторами пространства ${}^{10}R_4^3$, которые являются радиус-векторами этих точек. Формула расстояния имеет вид:

$$\cos\delta = \frac{-x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}\,\sqrt{-y_0^2 + y_1^2 + y_2^2}}.$$

Когда $\delta = 0$, то $d = |y_3 - x_3|$.

Очевидно, пространство ${}^{10}S_3^2$ имеет вырожденную метрику.

По аналогии пространству ${}^{10}S_3^2$ определяется *коевклидово пространство* S_3^2 на сфере полуевклидова пространства R_4^3.

В работе [1] определено отображение TX, которое является аналогом центральной проекции сферы на касательную плоскость в пространствах с проективными метриками. Если применить отображение TX к сфере мнимого радиуса пространства Минковского ${}^1R_3$, то получим аналог интерпретации Кэли—Клейна плоскости Лобачевского в круге. Применив это же отображение к сфере вещественного радиуса пространства ${}^1R_3$, получим интерпретацию гиперболической плоскости положительной кривизны.

С помощью отображения $TX = \dfrac{X + e_0(e_0, X)}{(e_0, X)}$ в пространстве ${}^{10}R_4^3$ получим интерпретацию пространства ${}^{10}S_3^2$ на касательную плоскость π, проходящую через точку $(1, 0, 0, 0)$. Рассмотрим сначала геометрию на касательной плоскости π.

Так как $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ — базис пространства ${}^{10}R_4^3$, то касательная плоскость к мнимоединичной сфере в точке $(1, 0, 0, 0)$ будет трехмерной гиперплоскостью, параллельной плоскости $x_0 = 0$. Следовательно, $\{e_1, e_2, e_3\}$ будет базисным вектором этой плоскости.

Учитывая, что $(e_1, e_1)_1 = (e_2, e_2)_1 = 1$ и $(e_3, e_3) = 1$, можно утверждать, что геометрия гиперплоскости π будет геометрией изотропного пространства R_3^2.

Пусть $X\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ — точка пространства ${}^{10}S_3^2$, тогда

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1.$$

Следовательно, вектор TX имеет координаты $\dfrac{x_1}{x_0}$, $\dfrac{x_2}{x_0}$, $\dfrac{x_3}{x_0}$. Вектор TX принадлежит касательной плоскости π, которая является изотропным пространством, причем

$$\frac{x_1^2}{x_0^2} + \frac{x_2^2}{x_0^2} = 1 - \frac{1}{x_0^2} < 1.$$

Пусть Ou, Ov, Ot — координатные оси в R_3^2. Тогда, обозначив $u = \dfrac{x_1}{x_0}$, $v = \dfrac{x_2}{x_0}$, $t = \dfrac{1}{x_0}$, получим следующее неравенство: $u^2 + v^2 < 1$. Равенство $u^2 + v^2 = 1$ определяет сферу единичного радиуса изотропного пространства R_3^2 с центром в начале координат. Очевидно, она аффинно является цилиндром, направляющая которого — единичная окружность, с образующими, параллельными оси Ot.

Лемма 4.1. *Пространство ${}^{10}S_3^2$ интерпретируется внутри сферы единичного радиуса пространства R_3^2.*

Так как отображение TX является центральной проекцией сферы на касательную плоскость, то при этом отображении точка, прямая и плоскость пространства ${}^{10}S_3^2$ переходят соответственно в точку, прямую и плоскость пространства R_3^2, содержащиеся внутри сферы единичного радиуса.

Тогда точки ${}^{10}S_3^2$ будут точками внутренности сферы единичного радиуса в R_3^2, т. е. цилиндра. Прямые выражаются хордами цилиндра или прямыми, параллельными оси Ot, содержащимися внутри цилиндра. Плоскости выражаются частями плоскостей пространства R_3^2, содержащимися внутри цилиндра.

Напомним, что ${}^{10}S_3^2$ — пространство с вырожденной метрикой. На всех плоскостях, однозначно проектирующихся на плоскость $x_3 = 0$, расстояние между точками определяется по первой метрике. Только на прямых, параллельных координатной прямой OX, расстояние вычисляется по второй метрике. Отображение TX сохраняет порядок метрики [1]. Следовательно, расстояние между точками $A(u_1, v_1, t_1)$ и $B(u_2, v_2, t_2)$ вычисляется по формуле

$$\operatorname{ch} \delta = \frac{1 - u_1 u_2 - v_1 v_2}{\sqrt{1 - u_1^2 - v_1^2}\sqrt{1 - u_2^2 - v_2^2}}. \tag{4.1}$$

Когда $\delta = 0$, получим $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$. Второе расстояние определяется следующим образом: $d = |t_2 - t_1|$. Очевидно, на плоскости $t = 0$ формула вычисления расстояния (4.1) дает метрики плоскости Лобачевского. Значит, на круге $u^2 + v^2 = 1$, принадлежащем плоскости $t = 0$, получаем интерпретацию плоскости Лобачевского.

Таким образом, справедливы следующие леммы.

Лемма 4.2. *Внутренность сферы единичного радиуса R_3^2 можно рассматривать как топологическое произведение диска $D\{u^2 + v^2 \leqslant 1\}$ и прямой R, параллельной оси Ot.*

Лемма 4.3. *На диске $D\{u^2 + v^2 \leqslant 1\}$ реализуется метрика плоскости Лобачевского.*

5. Основные результаты

Теорема 5.1. *Геометрия пространства ${}^{10}S_3^2$ эквивалентна геометрии $(L_2 \times R)$ на трехмерном многообразии.*

Доказательство теоремы следует из лемм 4.1, 4.2 и 4.3.

Коевклидово пространство S_3^2 множества точек, изометричных множеству диаметрально противоположных точек сферы единичного радиуса полуевклидова пространства R_4^3, с помощью отображения

$$PX = \frac{X - e_0(e_0, X)}{(e_0, X)}$$

интерпретируется в изотропном пространстве R_3^2. Вышеизложенным методом доказывается следующая

Теорема 5.2. *Геометрия пространства S_3^2 эквивалентна геометрии $(S_2 \times R)$ на трехмерном многообразии.*

Теперь изучим более подробно геометрию флагового пространства R_3^{12}. Как мы уже упомянули выше, расстояние между точками во флаговом пространстве измеряется следующим образом:

$$\begin{aligned} |AB|_1 &= |y_1 - x_1|, \\ |AB|_2 &= |y_2 - x_2|, \\ |AB|_3 &= |y_3 - x_3|. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что движение во флаговом пространстве задается следующем преобразованием:

$$\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= Ax + y + b, \\ z' &= Bx + Cy + z + c, \end{aligned}$$

где (a, b, c) — координаты направляющего вектора параллельного переноса. Вращения в этом пространстве задаются матрицей вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ A & 1 & 0 \\ B & C & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, это элемент группы Гейзенберга, что дает нам возможность сделать следующее

Заключение. *Геометрия многообразия Nil изоморфна геометрии флагового пространства.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Артыкбаев А.* Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в галилеевом пространстве// Мат. сб. — 1982. — *19*, № 2. — С. 204–224.
2. *Масальцев Л. А.* Непогружаемость нилмногообразий в виде гиперповерхностей в евклидово пространство// Мат. заметки. — 2004. — *76*, № 6. — С. 868–873.
3. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. — М.: Наука, 1969.
4. *Scott P.* The geometries of 3-monifolds// Bull. Lond. Math. Soc. — 1983. — *15*, № 5. — С. 401–487.

А. Артикбаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
математический факультет, кафедра геометрии и топологии,

Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: aartykbaev@mail.ru

С. С. Саитова
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
математический факультет, кафедра геометрии и топологии,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: sayo_ss1985@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-1-10 UDC 514.14

Interpretation of Geometry on Manifolds as a Geometry in a Space with Projective Metric

© 2019 **A. Artikbaev, S. S. Saitova**

Abstract. In this paper, we give essential concepts of geometry of three-dimensional spaces in vector formulation in an affine-vector space A_n.

REFERENCES

1. A. Artykbaev, “Vosstanovlenie vypuklykh poverkhnostey po vneshney krivizne v galileevom prostranstve” [Restoration of convex surfaces by outer curvature in the Galilei space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **19**, No. 2, 204–224 (in Russian).
2. L. A. Masal’tsev, “Nepogruzhaemost’ nilmnogoobraziy v vide giperpoverkhnostey v evklidovo prostranstvo” [Nil-manifolds cannot be immersed as hypersurfaces in Euclidean spaces], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2004, **76**, No. 6, 868–873 (in Russian).
3. B. A. Rozenfel’d, *Neevklidovy prostranstva* [Non-Euclidean Spaces], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
4. P. Scott, “The geometries of 3-monifolds,” *Bull. Lond. Math. Soc.*, 1983, **15**, No. 5, 401–487.

A. Artikbaev
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: aartykbaev@mail.ru

S. S. Saitova
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: sayo_ss1985@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 11–20

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-11-20 УДК 517.955, 517.956.3, 517.968.73

О ПОСТАНОВКЕ ВИДОИЗМЕНЕННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА—ДАРБУ В СЛУЧАЕ ПАРАМЕТРОВ, РАВНЫХ ПО МОДУЛЮ $\frac{1}{2}$

© 2019 г. **М. В. ДОЛГОПОЛОВ, И. Н. РОДИОНОВА**

Аннотация. Рассматривается уравнение Эйлера—Дарбу с параметрами, равными по модулю $\frac{1}{2}$. В силу того, что задача Коши в классической ее постановке является некорректной для таких значений параметров, авторы предлагают постановки и решения видоизмененных задач типа Коши при значениях параметров: а) $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, б) $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, в) $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$. В случае а) видоизмененная задача Коши решается методом Римана. Результат, полученный авторами, используется для постановки аналога задачи Δ_1 в первом квадранте с заданием граничных условий со смещением на координатных осях и нестандартными условиями сопряжения на линии сингулярности коэффициентов уравнения $y=x$. Первое из этих условий склеивает производные по нормали искомого решения, второе содержит предельные значения комбинации самого решения и его нормальных производных. Поставленная задача свелась к однозначно разрешимой системе интегральных уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Уравнение Эйлера—Дарбу—Пуассона

$$U_{xy}+\frac{\beta}{y-x}U_x-\frac{\alpha}{y-x}U_y=0 \tag{1.1}$$

имеет широкое применение в газовой динамике и гидродинамике, теории оболочек, в различных разделах механики сплошных сред [5, 12, 19–22].

В силу того, что вырождающиеся уравнения гиперболического типа в характеристических координатах сводятся к уравнению (1.1), исследованием краевых задач для уравнения Эйлера—Дарбу занимались многие советские и зарубежные математики. Подробная библиография по этому вопросу содержится в монографии М. М. Смирнова [17].

Наряду с классическими задачами (Коши, Коши—Гурса, Дарбу) для уравнения (1.1) ставились новые краевые задачи (Δ-задачи, со смещением, с интегральными условиями, с нестандартными условиями сопряжения, содержащими производные и интегралы дробного порядка) в областях, являющихся объединением нескольких характеристических треугольников [2–4, 6–11, 13–15, 23]. Значительный вклад в теорию краевых задач для уравнения Эйлера—Дарбу внесен самарскими математиками, в первую очередь, проф. В. Ф. Волкодавовым и его учениками. В работе [14] проведен подробный анализ основных результатов по постановке и решению как классических, так и новых видоизмененных краевых задач для уравнения (1.1), библиография ее содержит труды самарских математиков.

Основные результаты по постановке и исследованию краевых задач для уравнения (1.1) получены при начальных условиях, налагаемых на параметры уравнения: $0<|\alpha|,|\beta|,|\alpha+\beta|<1$.

Отметим, что задача Коши для уравнения (1.1) при $\alpha = \beta$, $0 < |\beta| < 1/2$ в классической постановке с условиями

$$\lim_{y\to x+0} U(x,y) = \tau(x), \qquad \lim_{y\to x+0} (y-x)^{2\beta}(U_y - U_x) = \nu(x), \quad y > x,$$

(τ, ν — заданные функции) является некорректной в силу того, что либо само решение, либо его производная по нормали (в зависимости от знака β) на линии сингулярности коэффициентов $y = x$ обращается в бесконечность.

В настоящей работе авторами предлагается постановка и решение видоизмененных задач типа Коши для уравнения (1.1) в случаях: а) $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$; б) $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$; в) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ (задачи C_1, C_2, C_3, соответственно).

На основе решения задачи C_1 получено решение видоизмененной задачи Δ_1 в области, представляющей первый квадрант, с краевыми условиями на координатных осях и сопряжением на линии $y = x$.

2. Задача C_1

На множестве $y > x > 0$ найти решение уравнения

$$U_{xy} + \frac{1}{2(y-x)}U_x - \frac{1}{2(y-x)}U_y = 0, \tag{2.1}$$

удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y\to x+0} (y-x)(U_y - U_x) = \nu_1(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty, \tag{2.2}$$

$$\lim_{y\to x+0} \left[U(x,y) - \nu_1(x)\left(\ln\sqrt{y-x} + \psi(\frac{1}{2}) - \psi(1)\right)\right] = \tau_1(x), \tag{2.3}$$

где ν_1 определено условием (2.2), $\psi(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ — логарифмическая производная Гамма-функции [1].

На заданные функции τ_1, ν_1 налагаются

Условия А. $\tau''(x) \in C[0,+\infty)$, $\nu''(x) \in C[0,+\infty)$.

Для решения задачи C_1 применим метод Римана. Функция Римана для уравнения (1.1) имеет вид [17]

$$V_0(x,y;x_0,y_0) = \frac{y-x}{(y_0-x)^{\frac{1}{2}}(y-x_0)^{\frac{1}{2}}} F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\sigma), \tag{2.4}$$

$$\sigma = \frac{(x-x_0)(y_0-y)}{(y_0-x)(y-x_0)}, \qquad F(\alpha,\beta,\gamma,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n$$

— гипергеометрическая функция Гаусса [1]. Согласно методу Римана, рассмотрим область, ограниченную отрезком прямой $y = x + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) и характеристиками уравнения (2.1) $x = x_0$, $y = y_0$. Пусть $P(x, x_0+\varepsilon) = Q(y_0-\varepsilon, y_0)$. Применяя формулу Римана [17], имеем

$$U(x_0,y_0) = \frac{U(P)V_0(P) + U(Q)V_0(Q)}{2} + \int_{x_0}^{y_0-\varepsilon} \left(\frac{V_0}{y-x} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial y}\right]\right) U\Big|_{y=x+\varepsilon} dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{y_0-\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) V_0\Big|_{y=x+\varepsilon} dx = \sum_{k=1}^{3} J_k. \tag{2.5}$$

где V_0 — функция Римана (2.4), $U_(x_0,y_0)$ — искомое решение уравнения (2.1).

Воспользуемся представлением функции Гаусса в формуле для случая $\gamma - \alpha - \beta = 0$ (см. [1]):

$$F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\sigma) = \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\left[2\psi(1) - 2\psi(\frac{1}{2}) - \ln\frac{(y-x)(y_0-x_0)}{(y_0-x)(y-x_0)}\right]. \tag{2.6}$$

В результате интеграл J_3 формулы (2.5) примет вид:

$$J_3 = \frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})} \int\limits_{x_0}^{y_0-\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) \frac{y-x}{(y_0-x)^{1/2}(y-x_0)^{1/2}} \ln \frac{(y_0-x)(y-x_0)}{(y_0-x_0)}\bigg|_{y=x+\varepsilon} dx+$$

$$+\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})} \int\limits_{x_0}^{y_0-\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial x}\right) \frac{y-x}{(y_0-x)^{1/2}(y-x_0)^{1/2}} \left[\psi(1) - \psi(\frac{1}{2}) - \ln\sqrt{y-x}\right]\bigg|_{y=x+\varepsilon} dx. \qquad (2.7)$$

Для вычисления производных $\dfrac{\partial V_0}{\partial x}$, $\dfrac{\partial V_0}{\partial y}$ в слагаемом J_2 формулы (2.5) представим функцию (2.4) в виде $V_0 = \sigma^{1/2} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma)\, \omega(x, y; x_0, y_0)$, где $\omega = \dfrac{y-x}{(y_0-y)^{1/2}(x-x_0)^{1/2}}$, и применим формулу дифференцирования функции Гаусса [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\sigma^a F(a, b, c; \sigma) = a\sigma^{a-1} F(a+1, b, c; \sigma){\sigma'}_x.$$

В результате имеем

$$\frac{\partial V_0}{\partial x} - \frac{\partial V_0}{\partial y} = \frac{1}{2}\sigma^{-1/2} F(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma)\, \omega(x, y; x_0, y_0)\left[{\sigma'}_x - {\sigma'}_y\right] +$$

$$+\sigma^{1/2} F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma)\, \left[{\omega'}_x - {\omega'}_y\right] = i_1 + i_2. \qquad (2.8)$$

К функции $F(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma)$ применим формулу автотрансформации [1]:

$$F(a, b, c; \sigma) = (1-\sigma)^{c-a-b} F(c-a, c-b, c; \sigma).$$

Получаем:

$$i_1 = \frac{1}{2}\frac{(y_0-y)(y-x_0)+(x-x_0)(y_0-x)}{(y-x_0)^{1/2}(y_0-x)^{1/2}(x-x_0)(y_0-y)} F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma), \qquad (2.9)$$

$$i_2 = \left[\frac{-2}{(y-x_0)^{1/2}(y-x_0)^{1/2}} - \frac{(y-x)(y_0-y+x-x_0)}{(y-x_0)^{1/2}(y_0-x)^{1/2}(x-x_0)(y_0-y)}\right] F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \sigma). \qquad (2.10)$$

Отметим, что первое слагаемое формулы (2.10) равно $\dfrac{-2V_0}{y-x}$.

Подставим результаты вычислений (2.7)–(2.10) в формулу (2.5), положим $y = x + \varepsilon$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$. С учетом условий (2.2), (2.3), а также того, что $F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1) = \dfrac{2}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}$ (см. [1]), после переобозначения переменных получаем функцию

$$U(x, y) = \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})} \int\limits_x^y \tau_1(t)(y-t)^{-1/2}(t-x)^{-1/2} dt+$$

$$+\frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})} \int\limits_x^y \nu_1(t)(y-t)^{-1/2}(t-x)^{-1/2} \ln\left[\frac{(y-t)(t-x)}{y-x}\right] dt. \qquad (2.11)$$

Единственность решения задачи C_1 следует из метода Римана, существование доказано проверкой.

Замечание. Данный результат можно получить также, воспользовавшись формулой общего решения уравнения (2.1), приведенной в работе М. М. Смирнова [18]

$$U(x, y) = \int\limits_0^1 \Phi(x+(y-x)t)t^{-1/2}(1-t)^{-1/2} dt + \int\limits_0^1 \Psi(x+(y-x)t)t^{-1/2}(1-t)^{-1/2} \ln[t(1-t)(y-x)] dt, \qquad (2.12)$$

где Φ, Ψ — произвольные дважды дифференцируемые функции.

Не приводя подробных вычислений, сформулируем основные результаты по постановке и решению задач C_2 и C_3.

2.1. Задача C_2**.** На множестве $y > x > 0$ найти решение уравнения

$$U_{xy} + \frac{1}{2(y-x)}U_x + \frac{1}{2(y-x)}U_y = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$\lim_{y\to x+0} U(x,y) = \tau_2(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty;$$

$$\lim_{y\to x+0}\left[(U_y - U_x) - \frac{d}{dx}U(x,x)\left(\ln(y-x) + 2\psi(\frac{1}{2}) - 2\psi(1) + 1\right)\right] = \nu_2(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty.$$

Формула решения задачи C_2 получена в виде

$$U(x,y) = \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y \nu_2(t)(t-x)^{1/2}(y-t)^{-1/2}dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y {\tau_2}'(t)(t-x)^{1/2}(y-t)^{-1/2}\ln\left[\frac{(t-x)(y-t)}{y-x}\right]dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y \tau_2(t)(t-x)^{-1/2}(y-t)^{-1/2}dt. \qquad (2.13)$$

2.2. Задача C_3**.** На множестве $y > x > 0$ найти решение уравнения

$$U_{xy} - \frac{1}{2(y-x)}U_x + \frac{1}{2(y-x)}U_y = 0,$$

с условиями:

$$\lim_{y\to x+0} U(x,y) = \tau_3(x), \qquad 0 \leqslant x < +\infty;$$

$$\lim_{y\to x+0}\left[(U_y - U_x)(y-x)^{-1} - \frac{d^2}{dx^2}U(x,x)\left(\ln(y-x) + \psi(\frac{3}{2}) - \psi(3)\right)\right] = \nu_3(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty.$$

Единственное решение задачи C_3 представлено формулой

$$U(x,y) = \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y \nu_3(t)(t-x)^{1/2}(y-t)^{1/2}dt+$$

$$+\frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y {\tau_3}'(t)(t-x)^{-1/2}(y-t)^{-1/2}\left[(t-x)-(y-t)\right]\ln\left[\frac{(t-x)(y-t)}{y-x}\right]dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_x^y \tau_3(t)(t-x)^{-1/2}(y-t)^{-1/2}dt. \qquad (2.14)$$

Отметим, что формулы (2.13), (2.14) могут быть получены как из общего решения уравнения Эйлера—Дарбу с соответствующими параметрами, которые получаются из формулы (2.12) с использованием основных свойств решений уравнения (1.1) [18], так и методом Римана.

3. Задача Δ_1^S

Воспользуемся результатами предыдущих пунктов для постановки и решения видоизмененной задачи Δ_1. Постановка задачи Δ_1 для уравнения Эйлера—Дарбу (1.1) в области, представляющей первый квадрант, предполагает задание граничных условий на координатных осях $x = 0$ $(y > 0)$ и $y = 0$ $(x > 0)$ и двух условий сопряжения на линии $y = x$ сингулярности коэффициентов уравнения (1.1), первое из которых содержит предельные значения самого решения, второе — его нормальных производных. В силу того, что решение уравнения (2.1) на линии $y = x$ обращается в бесконечность, первым задается условие разрывности Франкля $\dfrac{\partial U(x,x+0)}{\partial \overline{n}} = \dfrac{\partial U(x,x-0)}{\partial \overline{n}}$, второе склеивает предельные значения комбинации самого решения и его производных по нормали.

3.1. Постановка задачи. Подобно тому, как это было сделано в первом пункте для уравнения (2.1), на множестве $x > y > 0$ получено решение задачи C_1 с данными

$$\lim_{y\to x-0}(x-y)(U_x-U_y)=\nu_2(x), \qquad 0\leqslant x<+\infty, \tag{3.1}$$

$$\lim_{y\to x-0}\left[U(x,y)-\nu_2(x)\left(\ln\sqrt{x-y}+\psi(\frac{1}{2})-\psi(1)\right)\right]=\tau_2(x), \quad 0\leqslant x<+\infty. \tag{3.2}$$

Оно имеет вид:

$$U(x,y)=\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_y^x \tau_2(t)(x-t)^{-1/2}(t-y)^{-1/2}dt+$$

$$+\frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_y^x \nu_2(t)(x-t)^{-1/2}(t-y)^{-1/2}\ln\left[\frac{(x-t)(t-y)}{x-y}\right]dt. \tag{3.3}$$

Уравнение (2.1) рассмотрим на множестве $\mathtt{D}=D_1+D_2$,

$$D_1=\{(x,y)/0<x<y<+\infty\}, \qquad D_2=\{(x,y)/0<y<x<+\infty\}.$$

3.2. Задача Δ_2^S. На множестве $\mathtt{D}$ найти решение уравнения (2.1), удовлетворяющее условиям:

$$U(0,y)=\varphi_1(y), \qquad 0\leqslant y<+\infty, \tag{3.4}$$

$$U(x,0)-\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \nu_2(t)\,t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}\ln\frac{t}{x}dt=\varphi_2(x), \qquad 0\leqslant x<+\infty, \tag{3.5}$$

где $\nu_2(x)$ определена формулой (3.1).

На линии сингулярности коэффициентов уравнения (2.1) заданы условия сопряжения

$$\nu_1(x)=\lim_{y\to x+0}(y-x)(U_y-U_x)=-\lim_{y\to x-0}(x-y)(U_x-U_y)=-\nu_2(x), \tag{3.6}$$

$$\tau_1(x)=\lim_{y\to x+0}\left[U(x,y)-\nu_1(x)\left(\ln\sqrt{y-x}+\psi(\frac{1}{2})-\psi(1)\right)\right]=$$

$$=\lim_{y\to x-0}\left[U(x,y)-\nu_2(x)\left(\ln\sqrt{x-y}+\psi(2)-\psi(1)\right)\right]=\tau_2(x). \tag{3.7}$$

На заданные функции φ_k, $k=1,2$ налагаются

Условия B. $\varphi_k(0)=0$, $\varphi_k(x)\in C^{(3)}[0,+\infty)$, $k=1,2$.

За основу решения задачи ${\Delta^S}_1$ возьмем решение задачи C_1 в областях D_1 и D_2, определяемое, соответственно, равенствами (2.2), (2.3), (2.11) и (3.1)–(3.3). Функции (2.11), (3.3) подчиним условиям (3.4), (3.5), получим систему уравнений относительно неизвестных функций ν_k, τ_k, $k=1,2$:

$$\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^y \tau_1(t)t^{-1/2}(y-t)^{-1/2}dt+\frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^y \nu_1(t)t^{-1/2}(y-t)^{-1/2}\ln\frac{(y-t)t}{y}dt=\varphi_1(y), \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \tau_2(t)t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}dt+\frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \nu_2(t)t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}\ln(x-t)dt-$$

$$-\frac{1}{2\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \nu_2(t)\,t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}\ln\left[\frac{t}{x}\right]dt=\varphi_2(x). \tag{3.9}$$

Неизвестные функции ν_k, τ_k, $k=1,2$, ищем в классе функций непрерывных на полуинтервале $[0,+\infty)$ и дважды непрерывно дифференцируемых в интервале $(0,+\infty)$. В этом случае функции (2.11), (3.3) определяют классическое решение уравнения (2.1) в областях D_1 и D_2, соответственно, что установлено проверкой. Учитывая условия сопряжения (3.6), (3.7), а также одинаковое изменение переменных x и y, вычтем из уравнения (3.8) уравнение (3.9), обозначив при этом $\nu_1(t)\,t^{-1/2}=\nu(t)$, $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\Phi_1(x)$:

$$\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \nu(t)(x-t)^{-1/2}\ln(x-t)dt=\Phi_1(x). \tag{3.10}$$

Для решения уравнения (3.10) воспользуемся методами работы [16]. Для этого рассмотрим частный случай функции Вольтерры [16]

$$v_h(x-t)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{(x-t)^{z-1}e^{hz}}{\Gamma(z)}dz, \qquad z>0, \quad h=\mathrm{const}. \tag{3.11}$$

Имеем очевидное тождество

$$\int\limits_0^x \frac{(x-t)^{z-1}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(z)}dt=\frac{x^{\alpha+z-1}}{\Gamma(\alpha+z)}, \qquad \alpha>0,$$

обе части которого умножим на $e^{h(\alpha+z-1)}$ и применим к обеим частям полученного равенства оператор $\int\limits_z^{+\infty}\ldots d\tau$, заменив предварительно z на τ. После замены порядка интегрирования получаем

$$\int\limits_0^x \frac{t^{\alpha-1}e^{h\alpha}}{\Gamma(\alpha)}dt\int\limits_z^{+\infty}\frac{(x-t)^{\tau-1}e^{h(\tau-1)}}{\Gamma(\tau)}d\tau=\int\limits_z^{+\infty}\frac{x^{\alpha+\tau-1}e^{h(\alpha+\tau-1)}}{\Gamma(\alpha+\tau)}d\tau. \tag{3.12}$$

Учитывая, что $\dfrac{d}{dz}\int\limits_z^{+\infty}f(\alpha+\tau)d\tau=\dfrac{d}{d\alpha}\int\limits_\alpha^{+\infty}f(z+\tau)d\tau=-f(\alpha+z)$, продифференцируем по α обе части тождества (3.12):

$$\int\limits_0^x t^{\alpha-1}[\ln t+h-\psi(\alpha)]\frac{e^{h\alpha}}{\Gamma(\alpha)}dt\int\limits_z^{+\infty}\frac{(x-t)^{\tau-1}e^{h(\tau-1)}}{\Gamma(\tau)}d\tau=-\frac{x^{\alpha+z-1}e^{h(\alpha+z-1)}}{\Gamma(\alpha+z)}.$$

Положим $z=1$:

$$\int\limits_0^x t^{\alpha-1}[\ln t+h-\psi(\alpha)]dt\int\limits_1^{+\infty}\frac{(x-t)^{\tau-1}e^{h(\tau-1)}}{\Gamma(\tau)}d\tau=-\frac{x^{\alpha}}{\alpha}.$$

Сделаем замену $\tau-1=\sigma$:

$$\int\limits_0^x t^{\alpha-1}[\ln t+h-\psi(\alpha)]dt\int\limits_0^{+\infty}\frac{(x-t)^{\sigma}e^{h\sigma}}{\Gamma(\sigma+1)}d\tau=-\frac{x^{\alpha}}{\alpha}. \tag{3.13}$$

Продифференцируем обе части тождества (3.13) по x и с учетом функции (3.11) получим

$$\int\limits_0^x t^{\alpha-1}[\ln t+h-\psi(\alpha)]v_h(x-t)dt=-x^{\alpha-1}. \tag{3.14}$$

В предположении, что решение уравнения (3.10) существует, применим к обеим частям равенства (3.10) оператор $\int\limits_0^y v_h(y-x)\ldots dx$ и поменяем в левой части полученного выражения порядок интегрирования:

$$\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^y \nu(t)dt\int\limits_t^y (x-t)^{-1/2}\ln(x-t)v_h(y-x)dx = \int\limits_0^y \Phi_1(x)v_h(y-x)dx.$$

Во внутреннем интеграле делаем замену $x-t=z$:

$$\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^y \nu(t)dt\int\limits_0^{y-t} z^{-1/2}\ln z\, v_h(y-t-z)dz = \int\limits_0^y \Phi_1(x)v_h(y-x)dx. \tag{3.15}$$

В тождестве (3.14) положим $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $h=\psi(\dfrac{1}{2})$, в результате внутренний интеграл в левой части равенства (3.15) будет равен $-(y-t)^{\frac{1}{2}}$.

Уравнение (3.10) свелось к уравнению

$$-\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^y \nu(t)(y-t)^{-1/2}dt = \int\limits_0^y \Phi_1(t)v_\psi(y-t)dt, \tag{3.16}$$

где

$$v_\psi(y-x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{(y-x)^{z-1}e^{\psi(\frac{1}{2})z}}{\Gamma(z)}dz. \tag{3.17}$$

Решая уравнение Абеля (3.16), получаем, с учетом условий **B**,

$$\nu(x) = -\Gamma(\frac{1}{2})\int\limits_0^x {\Phi_1}'(t)dt\int\limits_0^{+\infty}\frac{(x-t)^{z-\frac{1}{2}}e^{\psi(\frac{1}{2})z}}{\Gamma(\frac{1}{2}+z)}dz. \tag{3.18}$$

Проверкой доказано, что функция (3.18) является решением уравнения (3.10).

Для нахождения равенства $\tau_1=\tau_2$ сложим равенства (3.9), (3.8) с учетом условий сопряжения (3.6), (3.7):

$$\frac{2}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \tau_1(t)\,t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}dt = \varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{2})}\int\limits_0^x \nu_1(t)\,t^{-1/2}(x-t)^{-1/2}\ln\frac{t}{x}dt.$$

Решая относительно τ_1 уравнение Абеля, после ряда преобразований приходим к результату

$$\tau_1=\tau_2=\frac{1}{2}x\int\limits_0^1\left[{\varphi_1}'(\mu x)+{\varphi_2}'(\mu x)\right](1-\mu)^{-1/2}d\mu-\frac{1}{2}\nu_1(x)\ln x+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\nu_1(x\mu)d\mu}{\sqrt{\mu}(1+\sqrt{\mu})}, \tag{3.19}$$

где

$$\nu_1(x)=-\nu_2(x)=-\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^1\left[{\varphi_1}'(\mu x)-{\varphi_2}'(\mu x)\right]d\mu\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{z+1}(1-\mu)^{z-\frac{1}{2}}e^{\psi(\frac{1}{2})z}}{\Gamma(\frac{1}{2}+z)}dz. \tag{3.20}$$

Отметим, что $\nu_k(0)=0$ $(k=1,2)$ [16].

Из формул (3.9), (3.8) следует, что при выполнении условий функции τ_k, ν_k, $k=1,2$, принадлежат указанному выше классу (доказано вычислением).

Окончательное выражение для τ_1 и τ_2 получаем, подставив в формулу (3.19) вместо ν_1 ее представление формулой (3.20).

Единственность решения задачи Δ_1^S следует из единственности, полученной методом Римана, решения видоизмененной задачи Коши, взятого за основу, и однозначной разрешимости интегральных уравнений, получаемых в процессе решения задачи. Существование решения доказано проверкой.

Благодарности. Авторы выражают искреннюю признательность организаторам международной конференции Uzbek–Israel Scientific Conference «Contemporary Problems in Mathematics and Physics» (6–10 октября 2017 г.) за возможность представить результаты исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I. — М.: Наука, 1973.
2. *Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я.* О новой задаче со смещением в неограниченной области для уравнения Эйлера—Дарбу с положительными параметрами// В сб.: «Математическая физика». — Куйбышев: КПтИ, 1979. — С. 3–9.
3. *Волкодавов В. Ф., Репин О. А.* Решение краевой задачи со смещением для гиперболического уравнения// В сб.: «Дифференциальные уравнения и их приложения». — Куйбышев: КПтИ, 1975. — С. 15–21.
4. *Волкодавов В. Ф., Родионова И. Н., Бушков С. В.* Решение видоизмененной задачи Коши методом Римана для одного пространственного аналога уравнения Эйлера—Дарбу с отрицательным параметром// Дифф. уравн. — 2000. — *36*, № 4. — С. 616–619.
5. *Волкодавов В. Ф., Спицын В. А., Федоров Ю. И.* Краевые задачи для одной системы уравнений в жесткопластических средах// В сб.: «Дифференциальные уравнения (математическая физика)». — Куйбышев: Пед. ин-т, 1980. — *236*. — С. 36–45.
6. *Долгополов В. М., Долгополов М. В., Родионова И. Н.* Построение специальных классов решений некоторых дифференциальных уравнений гиперболического типа// Докл. РАН. — 2009. — *429*, № 5. — С. 583–589.
7. *Долгополов В. М., Долгополов М. В., Родионова И. Н.* О дельта-задачах для обобщенного уравнения Эйлера—Дарбу// Abstracts of the Uzbek–Israel Int. Conf. Contemporary Problems in Mathematics and Physics. — Tashkent: Nat. Univ. Uzbekistan, 2017. — С. 203–204.
8. *Долгополов В. М., Родионова И. Н.* Видоизмененная задача Коши для одного гиперболического уравнения третьего порядка в трехмерном пространстве// Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2009. — *1*, № 18. — С. 41–46.
9. *Долгополов М. В., Родионова И. Н.* Задачи для уравнений гиперболического типа на плоскости и в трехмерном пространстве с условиями сопряжения на характеристике// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2011. — *75*, № 4. — С. 21–28.
10. *Долгополов В. М., Родионова И. Н.* Экстремальные свойства решений специальных классов одного уравнения гиперболического типа// Мат. заметки. — 2012. — *92*, № 4. — С. 533–540.
11. *Долгополов М. В., Родионова И. Н., Долгополов В. М.* Об одной нелокальной задаче для уравнения Эйлера—Дарбу// Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2016. — *20*, № 2. — С. 259–275.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1953.
13. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения// Докл. АН СССР. — 1969. — *187*, № 4. — С. 736–739.
14. *Нахушев А. М.* О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа// Дифф. уравн. — 1969. — *5*, № 1. — С. 44–59.
15. *Нахушева З. А.* Нелокальные краевые задачи для основных и смешанного типов дифференциальных уравнений. — Нальчик: Кабардино-Балкарский научный центр РАН, 2012.
16. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
17. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения. — Минск: Вышэйшая школа, 1977.
18. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. — М.: Высшая школа, 1985.
19. *Соколовский В. В.* Механика сплошных сред. — М.: Физматгиз, 1960.
20. *Станюкович К. П.* Теория неустановившихся движений газа. — М.: Бюро новой техники, 1948.
21. *Чаплыгин С. А.* О газовых струях. Собрание соч. Т. 2. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
22. *Франкль Ф. И.* Избранные труды по газовой динамике. — М.: Наука, 1973.
23. *Rodionova I. N., Dolgopolov V. M., Dolgopolov M. V.* Delta-problems for the generalized Euler-Darboux equation// Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2017. — *21*, № 3. — С. 417–422.

М. В. Долгополов
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева,
лаборатория математической физики,
443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, д. 1
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com
http://orcid.org/0000-0002-8725-7831

И. Н. Родионова
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева,
лаборатория математической физики,
443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, д. 1
E-mail: mvdolg@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-11-20 UDC 517.955, 517.956.3, 517.968.73

On Formulation of Modified Problems for the Euler—Darboux Equation with Parameters Equal to $\frac{1}{2}$ in Absolute Value

© 2019 **M. V. Dolgopolov, I. N. Rodionova**

Abstract. We consider the Euler–Darboux equation with parameters equal to $\frac{1}{2}$ in absolute value. Since the Cauchy problem in the classical formulation in ill-posed for such values of parameters, we propose formulations and solutions of modified Cauchy-type problems with the following values of parameters: a) $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, b) $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, c) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. In the case a), the modified Cauchy problem is solved by the Riemann method. We use the obtained result to formulate the analog of the problem Δ_1 in the first quadrant with shifted boundary-value conditions on axes and nonstandard conjunction conditions on the singularity line of the coefficients of the equation $y = x$. The first condition is gluing normal derivatives of the solution and the second one contains limiting values of combination of the solution and its normal derivatives. The problem is reduced to a uniquely solvable system of integral equations.

REFERENCES

1. H. Bateman and A. Erdélyi, *Vysshie transtsendentnye funktsii. T. I* [Higher Transcendental Functions. Vol. I], Nauka, Moscow, 1973 (Russian translation).
2. V. F. Volkodavov and N. Ya. Nikolaev, "O novoy zadache so smeshcheniem v neogranichennoy oblasti dlya uravneniya Eylera—Darbu s polozhitel'nymi parametrami" [On a new problem with shift in unbounded domain for the Euler–Darboux equation with positive parameters], In: *Matematicheskaya fizika* [Mathematical Physics], KPtI, Kuybyshev, 1979, pp. 3–9 (in Russian).
3. V. F. Volkodavov and O. A. Repin, "Reshenie kraevoy zadachi so smeshcheniem dlya giperbolicheskogo uravneniya" [Solution of a boundary-value problem with shift for a hyperbolic equation], In: *Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya* [Differential Equations and Their Applications], KPtI, Kuybyshev, 1975, pp. 15–21 (in Russian).
4. V. F. Volkodavov, I. N. Rodionova, and S. V. Bushkov, "Reshenie vidoizmenennoy zadachi Koshi metodom Rimana dlya odnogo prostranstvennogo analoga uravneniya Eylera—Darbu s otritsatel'nym parametrom" [Solution of a modified Cauchy problem by the Riemann method for one spatial analog of the Euler–Darboux equation with negative parameter], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2000, **36**, No. 4, 616–619 (in Russian).
5. V. F. Volkodavov, V. A. Spitsyn, and Yu. I. Fedorov, "Kraevye zadachi dlya odnoy sistemy uravneniy v zhestkoplasticheskikh sredakh" [Boundary-value problems for one system of equations in rigid-plastic media], In: *Differentsial'nye uravneniya (matematicheskaya fizika)* [Differential Equations (Mathematical Physics)], Ped. Univ., Kuybyshev, 1980, **236**, 36–45 (in Russian).
6. V. M. Dolgopolov, M. V. Dolgopolov, and I. N. Rodionova, "Postroenie spetsial'nykh klassov resheniy nekotorykh differentsial'nykh uravneniy giperbolicheskogo tipa" [Construction of special classes of solutions for some hyperbolic differential equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **429**, No. 5, 583–589 (in Russian).
7. V. M. Dolgopolov, M. V. Dolgopolov, and I. N. Rodionova, "O del'ta-zadachakh dlya obobshchennogo uravneniya Eylera—Darbu" [On delta-problems for generalized Euler–Darboux equation], *Abstracts of the Uzbek–Israel Int. Conf. Contemporary Problems in Mathematics and Physics*, Nat. Univ. Uzbekistan, Tashkent, 2017, pp. 203–204 (in Russian).

8. V. M. Dolgopolov and I. N. Rodionova, "Vidoizmenennaya zadacha Koshi dlya odnogo giperbolicheskogo uravneniya tret'ego poryadka v trekhmernom prostranstve" [Modified Cauchy problem for one third-order hyperbolic problem in three-dimensional space], *Vestn. Samar. gos. tekh. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki* [Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2009, **1**, No. 18, 41–46 (in Russian).
9. M. V. Dolgopolov and I. N. Rodionova, "Zadachi dlya uravneniy giperbolicheskogo tipa na ploskosti i v trekhmernom prostranstve s usloviyami sopryazheniya na kharakteristike" [Problems for equations of hyperbolic type on a plane and in a three-dimensional space with conjugation conditions on a characteristic], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2011, **75**, No. 4, 21–28 (in Russian).
10. V. M. Dolgopolov and I. N. Rodionova, "Ekstremal'nye svoystva resheniy spetsial'nykh klassov odnogo uravneniya giperbolicheskogo tipa" [Extremal properties of special classes of solutions for one equation of hyperbolic type], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2012, **92**, No. 4, 533–540 (in Russian).
11. M. V. Dolgopolov, I. N. Rodionova, and V. M. Dolgopolov, "Ob odnoy nelokal'noy zadache dlya uravneniya Eylera—Darbu" [On one nonlocal problem for the Euler–Darboux equation], *Vestn. Samar. gos. tekh. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki* [Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2016, **20**, No. 2, 259–275 (in Russian).
12. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Mekhanika sploshnykh sred* [Mechanics of Continua], Gostekhizdat, Moscow, 1953 (in Russian).
13. A. M. Nakhushev, "Novaya kraevaya zadacha dlya odnogo vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya" [New boundary-value problem for one degenerating hyperbolic equation], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **187**, No. 4, 736–739 (in Russian).
14. A. M. Nakhushev, "O nekotorykh novykh kraevykh zadachakh dlya giperbolicheskikh uravneniy i uravneniy smeshannogo tipa" [On some new boundary-value problems for hyperbolic equations and mixed-type equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1969, **5**, No. 1, 44–59 (in Russian).
15. Z. A. Nakhusheva, *Nelokal'nye kraevye zadachi dlya osnovnykh i smeshannogo tipov differentsial'nykh uravneniy* [Nonlocal Boundary-Value Problems for Differential Equation of Main Types and Mixed Type], Kabardino-Balkarskiy nauchnyy tsentr RAN, Nal'chik, 2012 (in Russian).
16. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some Their Applications], Nauka i tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
17. M. M. Smirnov, *Vyrozhdayushchiesya giperbolicheskie uravneniya* [Degenerating Hyperbolic Equations], Vysheyshaya shkola, Minsk, 1977 (in Russian).
18. M. M. Smirnov, *Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of Mixed Type], Vysshaya shkola, Moscow, 1985 (in Russian).
19. V. V. Sokolovskiy, *Mekhanika sploshnykh sred* [Mechanics of Continua], Fizmatgiz, Moscow, 1960 (in Russian).
20. K. P. Stanyukovich, *Teoriya neustanovivshikhsya dvizheniy gaza* [Theory of Unsteady Motions of a Gas], Byuro novoy tekhniki, Moscow, 1948 (in Russian).
21. S. A. Chaplygin, *O gazovykh struyakh. Sobranie soch. T. 2* [On Gas Jets. Collected Works. Vol. 2], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1948 (in Russian).
22. F. I. Frankl', *Izbrannye trudy po gazovoy dinamike* [Selected Works on Gas Dynamics], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
23. I. N. Rodionova, V. M. Dolgopolov, and M. V. Dolgopolov, "Delta-problems for the generalized Euler–Darboux equation," *Вестн. Самар. гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки* [Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2017, **21**, No. 3, 417–422.

M. V. Dolgopolov
Samara National Research University, Samara, Russia
E-mail: mikhaildolgopolov68@gmail.com
http://orcid.org/0000-0002-8725-7831

I. N. Rodionova
Samara National Research University, Samara, Russia
E-mail: mvdolg@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 21–32

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-21-32 УДК 515.12

КОВАРИАНТНЫЕ ФУНКТОРЫ И ШЕЙПЫ В КАТЕГОРИИ КОМПАКТОВ

© 2019 г. Т. Ф. ЖУРАЕВ, З. О. ТУРСУНОВА, К. Р. ЖУВОНОВ

Аннотация. В данной заметке рассматриваются ковариантные функторы $F : Comp \to Comp$, действующие в категории компактов, сохраняющих шейп [2], бесконечные компакты и шейповая эквивалентность [9]. Также изучается действие ковариантных функторов, шейповые свойства компактного пространства X, состоящего из компонентов связности $\Box X$ этого компакта X, и равенство шейпов $ShX = ShY$ бесконечных компактов X и Y для пространства $P(X)$ вероятностных мер и его подпространств.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Для компактов X через $P(X)$ обозначаются пространства вероятностных мер. Известно, что для бесконечного компакта X это пространство $P(X)$ гомеоморфно гильбертову кубу Q (см. [5]). Для натурального числа $n \in N$ через $P_n(X)$ обозначается множество всех вероятностных мер не более чем с n носителями, т. е. $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\operatorname{supp}\mu| \leqslant n\}$. Множество $P_n(X)$ состоит из выпуклых линейными комбинациями мер Дирака вида:

$$\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \dots + m_n\delta_{x_n}, \ \sum_{i=1}^{n} m_i = 1,$$

где $m_i \geqslant 0$, $x_i \in X$, δ_{x_i} — мера Дирака в точке x_i. Через $\delta(X)$ обозначается множество всех мер Дирака. Напомним, что пространство $P_f(X) \subset P(X)$ состоит из всех вероятностных мер вида $\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \ldots + m_k\delta_{x_k}$ с конечными носителями, для каждой из которых $m_i \geqslant \dfrac{k}{k+1}$ при некотором i (см. [3,6]). Для натурального числа n положим $P_{f,n} \equiv P_f \cap P_n$. Для компакта X имеет место

$$P_{f,n}(X) = \mu\epsilon P_f(X) : |\operatorname{supp}\mu| \leqslant n; \quad P_f^c \equiv P_f \cap P^c, \ P_{f,n}^c \equiv P_f \cap P_n \cap P^c, \quad P_n^c \equiv P^c \cap P.$$

Для компакта X через $P^c(X)$ обозначается множество всех мер $\mu \in P(X)$, носитель каждой из которых лежит в одном из компонентов связности компакта X (см. [5]).

Напомним определение и некоторые свойства нормальности ковариантного функтора $F : Comp \to Comp$, действующего в категории компактов. Говорят, что функтор F:

1. *Сохраняет пустое множество и точку*, если $F(\varnothing) = \varnothing$ и $F(\{1\}) = \{1\}$, где через $\{k\}$, $k \geqslant 0$ мы обозначаем множество неотрицательных целых чисел — $\{0, 1, \ldots, k-1\}$, меньших k. В этой терминологии $\{0\} = \varnothing$.
2. *Мономорфен*, если для всякого (топологического) вложения $f : A \to X$ отображение $F(f) : F(A) \to F(X)$ является вложением.
3. *Эпиморфен*, если для всякого отображения $f : X \to Y$ на Y отображение $F(f) : F(X) \to F(Y)$ является также отображением «на».

Работа поддержана грантом ОТ-Ф-4-42 РУз.

4. *Сохраняет пересечения*, если для любого семейства $\{A_\alpha : \alpha \in \mathscr{A}\}$ замкнутых подмножеств компакта X и тождественных вложений $i_\alpha : A_\alpha \to X$ отображение $F(i) : \bigcap \{F(A_\alpha) : \alpha \in \mathscr{A}\} \to X$, определяемое равенством $F(i)(a) = F(i_\alpha)(a)$, является вложением для всякого $a \in \mathscr{A}$.
5. *Сохраняет прообразы*, если для всякого отображения $f : X \to Y$ и всякого замкнутого множества $A \subset Y$ отображение $F\left(f|_{f^{-1}(A)}\right)\left(f^{-1}(A)\right) \to F(A)$ является гомеоморфизмом.
6. *Сохраняет вес*, если $\omega(F(X)) = \omega(X)$ для бесконечного компакта X.
7. *Непрерывен*, если для всякого обратного спектра $S = \{X_\alpha; \pi^\alpha_\beta : \alpha \in A\}$ из компактов отображение $f : F(\lim S) \to \lim F(S)$ является гомеоморфизмом, который есть предел отображений $F(\pi_\alpha)$, где $\pi_\alpha : \lim S \to X_\alpha$ — сквозные проекции спектра S.

В дальнейшем мы предполагаем, что все рассматриваемые функторы мономорфны и сохраняют пересечения. Мы предполагаем также, что все функторы сохраняют непустые пространства. Это ограничение несущественно, поскольку этим мы исключаем из рассмотрения только пустой функтор, т. е. функтор F, который переводит всякое пространство в пустое множество.

В самом деле, пусть $F(X) = \varnothing$ для какого нибудь непустого компакта X. Тогда $F(\varnothing) = F(1) = \varnothing$ в силу мономорфности F. Пусть теперь Y — произвольный непустой компакт. Рассмотрим постоянное отображение $f : Y \to 1$. Тогда $F(f)(F(Y)) \subset F(1) = \varnothing$. Следовательно, пространство $F(Y)$ пусто, поскольку оно отображается в пустое множество. Итак, мы доказали, что существует единственный мономорфный функтор, сохраняющий непустые множества.

Пусть $F : Comp \to Comp$ — функтор. Через $C(X,Y)$ обозначается пространство непрерывных отображений из X в Y в компактно-открытой топологии. В частности, $C(\{k\}, Y)$ естественно гомеоморфно k-ой степени Y^k пространства Y.

Отображению $\xi : \{k\} \to Y$ ставится в соответствие точка $(\xi(0), \ldots, \xi(k-1)) \in Y^k$.

Для функтора F, бикомпакта X натурального числа k определим отображение

$$\pi_{F,X,k} : C(\{k\}, X) \times F(\{k\}) \to F(X)$$

равенством

$$\pi_{F,X,k}(\xi, a) = F(\xi)(a),$$

где

$$\xi \in C(\{k\}, X),\ a \in F(\{k\}).$$

Когда ясно, о каком функторе и каком компакте Y идет речь, мы будем отображение $\pi_{F,X,k}$ обозначать через $\pi_{X,k}$ или π_k.

По теореме Е. В. Щепина [6], отображение

$$F : C(Z,Y) \to F(F(Z), F(Y))$$

непрерывно для всякого непрерывного функтора F и компактов Z и Y.

Поэтому имеет место

Предложение 1.1 (см. [6]). *Для непрерывного функтора F, компакта X и натурального числа k отображение $\pi_{F,X,k}$ непрерывно.*

Определим подфунктор F_k функтора F следующим образом: для компакта X пространство $F_k(X)$ есть образ отображения, т. е. $\pi_{F,X,k}(X^k \times F(k)) = F_k(X)$, а для отображения $f : X \to Y$ отображение $F_k(f)$ есть сужение отображения $F(f)$ на $F_k(X)$. Из легко проверяемой коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} C(\{k\}) \times F(\{k\}) & \overset{\overline{f}\times id}{\to} & C(\{k\}, Y) \times F(\{k\}) \\ \pi_{X,k} \downarrow & & \downarrow \pi_{X,k} \\ F(X) & \overset{F(f)}{\longrightarrow} & F(Y), \end{array} \tag{1.1}$$

где $\overline{f}(\xi) = f \circ \xi$, вытекает вложение $F(f)(F_k(X)) \subset F_k(Y)$ и, следовательно, функториальность конструкции F_k.

Функтор F называется *функтором степени* n, если $F_n(X) = F(X)$ для всякого компакта X, но $F_{n-1}(X) \neq F(X)$ для некоторого X.

Для функтора F определен *носитель* элемента $a \in F(X)$, т. е. пересечение всех замкнутых множеств $A \subset X$ таких, что $a \in F(A)$. Это множество обозначается через $\operatorname{supp}_{F(X)}(a)$. Если ясно, о каком функторе и пространстве идет речь, то носитель a обозначается через $\operatorname{supp}(a)$.

Из определений функтора и носителя вытекает, что

$$f(\operatorname{supp}(a)) \supset \operatorname{supp}(F(f)(a)) \tag{1.2}$$

для непрерывного отображения $f : X \to Y$ и $a \in F(X)$. Ясно также, что

$$a \in F(\operatorname{supp}(a)). \tag{1.3}$$

Если функтор F сохраняет прообразы, то F сохраняет носители, т. е.

$$f(\operatorname{supp}(a)) = \operatorname{supp}(F(f)(a)). \tag{1.4}$$

Заметим, что в силу предложения 1.1 (см. [6]) для нормального функтора $F : Comp \to Comp$ имеется всюду естественное вложение $Id \subset F$. Поэтому всякий компакт X будем считать подпространством пространства $F(X)$.

2. О топологии на подпространстве пространства вероятностных мер

Пусть X — некоторое топологическое пространство. Через $C(X)$ обозначается кольцо всех непрерывных вещественных функций на пространстве X с компактно-открытой топологией. Диагональное произведение $\triangle(X) = \triangle g_\alpha$, где $g_\alpha \in C(X)$, всех отображений на $C(X)$ определяет вложение X в $R^{C(X)}$.

Если X — компакт, то замкнутая оболочка его образа в $R^{C(X)}$ является выпуклым компактом, обозначаемым $P(X)$ (см. [6]). С другой стороны, функтор P вероятностных мер является ковариантным функтором, действующим из категории компактов и непрерывных отображений в себя. $P(X)$ — это выпуклое подпространство линейного пространства $M(X)$, сопряженного с пространством $C(X)$ непрерывных функции на X и взятого в слабой топологии, состоящее из всех неотрицательных функционалов μ (т. е. $\mu(\varphi) \geqslant 0$ для всякой неотрицательной $\varphi \in C(X)$) единичной нормы [5, 6]. Для непрерывного отображения $f : X \to Y$ отображение

$$P(f) : P(X) \to P(Y)$$

определяется равенством

$$(P(f)(\mu))\varphi = \mu(\varphi \circ f).$$

Пространство $P(X)$ естественно вложено в $R^{C(X)}$. Поэтому базу окрестностей меры $\mu \in P(X)$ образуют всевозможные множества вида

$$O(\mu_1, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \varepsilon) = \bigl\{\mu' \in P(X) : \bigl|\mu(\varphi_i) - \mu'(\varphi_i)\bigr| \leqslant \varepsilon, i = \overline{1,k}\bigr\},$$

где $\varepsilon > 0$, а $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in C(X)$ — произвольные функции.

Пусть F — подфунктор функтора P, имеющий конечные носители. Тогда базу окрестностей меры

$$\mu_0 = m_1^0 \cdot \delta(x_1) + \ldots + m_S^0 \cdot \delta(x_S) \in \overline{f(X)}$$

образуют множества вида:

$$O{<}\mu_0, U_1, \ldots, U_S{>} = \{\mu \in F(X) : \mu = \sum_{i=1}^{s+1} \mu_i\},$$

где $\mu_i \in M^+(X)$ — множество всех неотрицательных функционалов, $\|\mu_{i+1}\| < \varepsilon$, $\operatorname{supp}\mu_i \subset U_i$, $\bigl|\|\mu_i\| - m_i^0\bigr| < \varepsilon$ для $i = 1, \ldots, S$, где $U_1, \ldots, U_S$ — окрестности точек $x_1, \ldots, x_S$ с дизъюнктными замыканиями.

В самом деле, сначала покажем, что множество $0{<}\mu_0, U_1, \ldots, U_S, \varepsilon{>}$ содержит окрестность меры μ_0 в слабой топологии. Для каждого $i = 1, \ldots, S$ возьмем функцию $\varphi_i : X \to I$, удовлетворяющую условиям:

$$\varphi_i([U_i]) = 1, \quad \varphi_i(\bigcup_{j \neq 1} [U_j]) = 0.$$

Кроме того, возьмем функцию $\varphi_{S+1} : X \to I$ так, чтобы

$$\varphi_{S+1}(X \backslash U_1 \cup \ldots \cup U_S) = 1 \quad \text{и} \quad \varphi_{S+1}(\{x_1, \ldots, x_S\}) = 0.$$

Теперь проверим включение

$$O\left(\mu, \varphi_1, \ldots, \varphi_S, \varphi_{S+1}, \varepsilon/2\right) \subset O < \left(\mu_0, U_1, \ldots, U_s, \varepsilon\right). \tag{2.1}$$

Меру $\mu \in O\left(\mu_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_S, \varphi_{S+1}, \varepsilon/2\right)$ представляем в виде $\mu = \mu_1 + \ldots + \mu_S + \mu_{S+1}$, где $\operatorname{supp} \mu_i \subset U_i$ для $i = 1, \ldots, S$ и $\operatorname{supp} \mu_i \subset X \backslash \left(U_1 \cup \ldots \cup U_S\right)$. Тогда $\dfrac{\varepsilon}{2} > \left|\mu_0\left(\varphi_{S+1}\right) - \mu\left(\varphi_{S+1}\right)\right| = \left|\mu\left(\varphi_{S+1}\right)\right|$. Но $\mu_{S+1} \leqslant \mu$, откуда $\mu_{S+1}\left(\varphi_{S+1}\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. В то же время по определению функции φ_{S+1} имеем $\mu_{S+1}\left(\varphi_{S+1}\right) = \mu_{S+1}\left(1_x\right) = \left\|\mu_{S+1}\right\|$. Итак, $\left\|\mu_{S+1}\right\| < \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Для проверки включения (2.1) осталось показать, что $\left|\|\mu_i\| - m_i^0\right| < \varepsilon$. Имеем

$$\frac{\varepsilon}{2} > \left|\mu_0\left(\varphi_i\right) - \mu\left(\varphi_i\right)\right| \geqslant \left|\mu_0\left(\varphi_i\right)\right| - \left|\mu\left(\varphi_i\right)\right| = m_i^0 - \left|\left(\mu_1 + \ldots + \mu_S + \mu_{S+1}\right)\left(\varphi_i\right)\right| =$$

$$\text{(по определению функции } \varphi_i)$$

$$= m_i^0 - \left(\mu_i + \mu_{S+1}\right)\left(\varphi_i\right) = m_i^0 - \mu_i\left(\varphi_i\right) - \mu_{S+1}\left(\varphi_i\right) = m_i^0 - \|\mu_i\| - \mu_{S+1}\left(\varphi_i\right).$$

Следовательно,

$$m_i^0 - \|\mu_i\| < \frac{\varepsilon}{2} + \mu_{S+1}\left(\varphi_i\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \mu_{S+1}\left(1_x\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \left\|\mu_{S+1}\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

С другой стороны,

$$\frac{\varepsilon}{2} > \mu_i\left(\varphi_i\right) + \mu_{S+1}\left(\varphi_i\right) - m_i^0 = \|\mu_i\| - m_i^0 + \mu_{S+1}\left(\varphi_i\right),$$

откуда $\|\mu_i\| - m_i^0 < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Неравенство $\left|\|\mu_i\| - m_i^0\right| < \varepsilon$, а в месте с ним и включение (2.1) доказаны. Теперь покажем, что во всякой базисной окрестности $O\left(\mu_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \varepsilon\right)$ содержится окрестность вида $O{<}\mu_0, U_1, \ldots, U_S, \delta{>}$. Для этого достаточно рассмотреть окрестность вида $O\left(\mu_0, \varphi, \varepsilon\right)$, поскольку семейство окрестностей меры μ_0 вида $O{<}\mu_0, U_1, \ldots, U_S, \delta{>}$ направлено вниз по включению (пересечение конечного числа окрестностей такого вида содержит окрестность такого вида). Это вытекает из справедливости включения

$$O{<}\mu_0, U_1^1 \cap U_1^2 \cap \ldots \cap U_S^1 \cap U_S^2, \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2\}{>} \subset$$

$$\subset O < U_0, U_1^1, \ldots, U_S^1, \delta_1 > \cap O < \mu_0, U_1^2, \ldots, U_S^2, \delta_2 > \tag{2.2}$$

Основная часть проверки включения (2.2) состоит в следующем:

$$\mu(U_i^j) = \mu(U_i^1 \cap U_i^2) + \mu(U_i^j \backslash U_i^1 \cap U_i^2) \leqslant \mu(U_i^1 \cap U_i^2) + \mu(X \backslash \bigcup_{e=1}^{s}(U_e^1 \cap U_e^2)) <$$

$$< \mu(U_i^1 \cap U_i^2) + \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2\} \leqslant \mu(U_i^1 \cap U_i^2) + \frac{1}{2}\delta_j.$$

Поэтому для меры μ, принадлежащей левой части доказанного включения (2.2), имеем

$$\mu_0(U_i^j) - \mu(U_i^j) \leqslant \mu_0(U_i^j) - \mu(U_i^1 \cap U_i^2) = m_i^0 - \mu(U_i^1 \cap U_i^2) \leqslant \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2\} < \delta_j,$$

а с другой стороны,

$$\mu(U_i^j) - \mu_0(U_i^j) < \mu(U_i^1 \cap U_i^2) + \frac{1}{2}\delta_j - m_i^0 < \frac{1}{2}\min\{\delta_1, \delta_2\} + \frac{1}{2}\delta_j \leqslant \delta_j.$$

Осталось в окрестности $O\left(\mu_0, \varphi, \varepsilon\right)$ найти окрестность вида $O{<}\mu_0, U_1, \ldots, U_S, \delta{>}$. Поскольку $O\left(\mu_0, \lambda\varphi, \lambda\varepsilon\right) = O\left(\mu_0, \varphi, \varepsilon\right)$ для $\lambda > 0$, можно считать, что $\|\varphi\| \leqslant 1$. Кроме того, можно считать, что $\varphi \geqslant 0$. Для $\delta > 0$ возьмем непересекающиеся окрестности U_i точек x_i так, чтобы колебания функции φ на U_i были меньше δ. Тогда

$$|\mu_0(\varphi) - \mu(\varphi)| \leqslant |m_1^0\varphi(x_1) - \int\limits_{u_1}\varphi d\mu| + \ldots + |m_S^0\varphi(x_S) - \int\limits_{u_S}\varphi d\mu| + |\int\limits_{X \backslash U_1 \cup \ldots \cup U_s}\varphi d\mu|.$$

Далее

$$|m_i^0\varphi(x_i) - \int\limits_{u_i}\varphi d\mu| = |m_i^0\varphi(x_i) - \int\limits_{u_i}\varphi(x_i)d\mu + \int\limits_{u_i}\varphi(x_i)d\mu - \int\limits_{u_i}\varphi d\mu| \leqslant$$

$$\leqslant m_i^0\varphi(x_i) - \int\limits_{u_i}\varphi(x_i)d\mu + |\int\limits_{u_i}[\varphi(x_i)-\varphi]d\mu| \leqslant \varphi(x_i)\cdot|m_i^0 - \|\mu_i\|| + \int\limits_{u_i}|\varphi(x_i)-\varphi|d\mu \leqslant$$

$$\leqslant \varphi\left(x_i\right)\delta + \delta\|\mu_i\| \leqslant 2\cdot\delta.$$

Поэтому для $\delta < \dfrac{\varepsilon}{(2S+1)}$ выполняется включение

$$O{<}\mu_0, U_1, \ldots, U_S, \delta{>} \subset O\left(\mu_0, \varphi, \varepsilon\right).$$

Известно, что в бесконечном компакте X пространство $P(X)$ гомеоморфно гильбертову кубу Q (см. [3,5]), где $Q = \prod\limits_{i=1}^{\infty}[-1,1]_i$, $[-1,1]_i$ — отрезок в $\mathbb{R}$ — вещественная прямая. Для натурального числа $n \in \mathbb{N}$ через $P_n(X)$ обозначается множество всех вероятностных мер не более чем с n носителями, т. е. $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\mathrm{supp}\,\mu| \leqslant n\}$. Компакт $P_n(X)$ является выпуклыми линейными комбинациями мер Дирака вида: $\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \ldots + m_n\delta_{x_n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = 1$, $m_i \geqslant 0$, $x_i \in X$, δ_{x_i} — мера Дирака в точке x_i. Через $\delta(X)$ обозначается множество всех мер Дирака, и $P_\omega\left(X\right) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n\left(X\right)$. Напомним, что пространство $P_f(X) \subset P(X)$ состоит из всех вероятностных мер вида $\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \ldots + m_k\delta_{x_k}$ с конечными носителями, для каждой из которых $m_i \geqslant \dfrac{k}{k+1}$ при некотором i (см. [3,5]). Для натурального числа n положим $P_{f,n} \equiv P_f \cap P_n$.

Для компакта X имеет место $P_{f,n}(X) = \{\mu \in P_f(X) : |\mathrm{supp}\,\mu| \leqslant n\}$; $P_f^c \equiv P_f \cap P^c$, $P_{f,n}^c \equiv P_f \cap P_n \cap P^c$, $P_n^c = P^c \cap P$. Для компакта X через $P^c(X)$ обозначается множество всех мер $\mu \in P(X)$, носитель каждой из которых лежит в одном из компонентов связности компакта X (см. [5]).

Определение. Система $\underline{X} = \{X_\alpha, P_\alpha^\beta, L\}$ состоящая из пространств $X_\alpha \in ANR$, является *обратной системой* [9], если для каждых индексов $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in L$, имеется проекция $P_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$, где L — индексное множество.

Система $\underline{X}$ называется *подвижной* [9], если для каждого $\alpha \in L$ имеется $\beta \in L, \beta \geqslant \alpha$, и каждого $\gamma \in L$, $\gamma \geqslant \alpha$, имеется отображение $r : X_\beta \to X_\gamma$. Имеет место следующее равенство: $P_\alpha^\gamma \circ r \simeq P_\alpha^\beta$.

Компакт X называется *подвижным компактом*, если X является обратным пределом обратной подвижной системы.

3. Основная часть

Теорема 3.1. *Если функтор $F : Comp \to Comp$ — непрерывный, сохраняющий пустые множества, точку, ANR-компакты и прообразы отображений, тогда F сохраняет подвижные компакты.*

Доказательство. Пусть $\underline{X} = \left\{X_\alpha, P_\alpha^\beta, L\right\}$ — обратная система из $X_\alpha \in ANR$, где $P_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in L$ — направление индексного множества. Семейство $\underline{X}$ называется *подвижным*, если для каждого $\alpha \in L$ имеется малое $\beta \in L$, $\beta \geqslant \alpha$, $\gamma \in L, \gamma \geqslant \alpha$, и существует отображение $r : X_\beta \to X_\gamma$ такое, что имеет место следующее равенство:

$$P_\alpha^\gamma \circ r \simeq P_\alpha^\beta. \tag{3.1}$$

Рассмотрим обратную систему $F\left(\underline{X}\right) = \left\{F\left(X_\alpha\right) : F\left(\pi_\beta^\alpha\right), L\right\}$. В силу непрерывности функтора система $F\left(\underline{X}\right)$ является обратным пределом системы $\left\{F\left(X_\alpha\right) : F\left(\pi_\beta^\alpha\right), L\right\}$. Из того, что функтор F сохраняет ANR пространства, система $\left\{F\left(X_\alpha\right), F\left(\pi_\beta^\alpha\right) : L\right\}$ является ANR-системой. Это означает, что $F\left(\underline{X}\right)$, и следовательно, $F\left(X\right)$ подвижно. Теорема доказана. □

Лемма 3.1. *Если функтор $F : Comp \to Comp$ — непрерывный, сохраняющий пустое множество и точку мономорфный, тогда F сохраняет гомотопные отображения.*

Доказательство. Пусть X и Y — топологические пространства и $H : X \times I \to Y$ — непрерывная гомотопия, соединяющая отображения $h_0 = H(x,0)$ и $h_1 = H(x,1)$. Рассмотрим вложение $i_t : X \times \{t\} \to X \times I$, где $I = [0,1]$ — отрезок. Это вложение по предложению 1.1 (см. [6]) определяет вложение $F(i_t) : F(X \times \{t\}) \to F(X \times I)$. Но пространство (компакт) $F(X \times \{t\})$ естественно гомеоморфно пространству $F(X \times \{t\})$. Поэтому определено естественное (отображение) вложение $F(X \times I) \to F(X \times I)$. Тогда отображение $F(H)|_{F(X \times I)}$ является непрерывной гомотопией, соединяющей отображения $F(h_0)$ и $F(h_1)$, т. е. $F(H)$ есть гомотопия между компактами $F(X)$ и $F(Y)$. Лемма 3.1 доказана. □

Пусть $\alpha \in L$. Если семейство $\underline{X}$ подвижно, то имеется $\beta \in L$, $\beta \geqslant \alpha$ и для любого $\gamma \geqslant \alpha$ существует отображение $r : X_\beta \to X_\gamma$ удовлетворяющее равенству (3.1). Рассмотрим отображение $F(r) : F(X_\beta) \to F(X_\gamma)$, которое в силу ковариантности функтора F и в силу леммы 3.1 удовлетворяет равенству $F(\pi_\alpha^\gamma) \circ F(r) \simeq F\left(\pi_\alpha^\beta\right)$.

а) Если непрерывная гомотетия h_t стягивает пространство X в точку x, то непрерывная гомотопия $F(h_t)$ стягивает пространство $F(X)$ в множество $F(\{x\})$, которое стягиваемо, так как функтор F сохраняет точку.

б) Известно, что произвольный ANR-компакт имеет гомотопический тип конечного полиэдра. В силу непрерывности функтора F из гомотопической эквивалентности пространств X и Y следует, что пространства $F(X)$ и $F(Y)$ гомотопически эквивалентны.

Абсолютные ретракты — в точности стягиваемые абсолютные окрестностные ретракты. Поэтому необходимо проверить, что функтор F сохраняет стягиваемость топологических пространств.

Говорят, что хаусдорфово компактное пространство X *ассоциировано* с ANR-системой $\underline{X}$ (см. [9]), если X является обратным пределом этой системы, т. е. $X = Inv \lim \underline{X}$.

В работе [9] показано, что каждое компактное метрическое пространство X ассоциировано с некоторой ANR-последовательностью $\underline{X}$.

Теорема 3.2. *Пусть функтор $F : Comp \to Comp$ — непрерывный, сохраняющий ANR-компакты, точку и пустое множество. Тогда*:

а) *если $Sh(X) \leqslant Sh(Y)$, то $ShF(X) \leqslant ShF(Y)$;*

б) *если $Sh(X) = Sh(Y)$, то $ShF(X) = ShF(Y)$.*

Доказательство. Пусть $\underline{X} = \left\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Omega\right\}$ и $\underline{Y} = \left\{Y_\alpha, \mu_\alpha^\delta, \pounds\right\}$ — ANR-системы, состоящие из конечномерных ANR-компактов X_α и Y_γ, ассоциирующие соответственно компакты X и Y. Допустим, $Sh(X) \leqslant Sh(Y)$. Тогда имеются такие отображения $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$ и $\underline{g} : Y \to \underline{X}$, что $\underline{g\,f} \approx \underline{1_{\times}x}$ (см. [5]). Пусть $\underline{f} = \{f_\gamma, \pounds\}$ и $\underline{g} = \{g_\alpha, \Omega\}$. Для каждого $a \in \Omega$ имеется индекс $a' \in \Omega$ такой, что $a' > f\,g\,(a)$ и выполнено условие

$$g_x \cdot f_{g(a)} \cdot \pi_{fg(a)}^{a'} \simeq \pi_a^a : X_{a'} \to X_a. \tag{3.2}$$

Рассмотрим системы $\underline{F(X)} = \left\{F(X_a), F\left(\pi_a^\beta\right), \Omega\right\}$ и $\underline{F(Y)} = \left\{F(Y_\gamma), F\left(\mu_a^\delta\right), \pounds\right\}$. Заметим, что в силу эпиморфности функтора F имеет место равенство $F\left(\pi_\alpha^\beta\right)(F(X_p)) = F(X_\alpha)$. В силу непрерывности функтора F и конечности степени функтора $\underline{F(X)}$ и $\underline{F(Y)}$ являются конечномерными ANR-системами, ассоциирующими соответственно компакты $\overline{F(X)}$ и $F(Y)$.

Для каждого $\gamma \in \pounds$ определяем отображение $f_\gamma(F) = F(f_\gamma) : F\left(X_{f(\alpha)}\right) \to F(Y_\gamma)$, полагая $F_\gamma(\gamma_\gamma) = F\left(f_{f(\nu)}\right)$. Также определяем отображение $F(g_\alpha) : F\left(Y_{g(\alpha)}\right) \to F(X_\alpha)$, $\alpha \in \Omega$. В силу равенства (3.2) и леммы 3.1 имеет место следующее равенство:

$$\pi_\alpha^{fg(\alpha)} \cdot F\left(\pi_{fg(\alpha)}^{\alpha'}\right) \simeq F\left(\pi_\alpha^{\alpha'}\right) : F(X_{\alpha'}) \to F(X_\alpha). \tag{3.3}$$

В силу леммы 3.1 и непрерывности функтора имеем: система отображений $F(f) = \{F(f_\gamma), \pounds\}$, $\underline{F(g)} = \{F(g_\alpha) : \Omega\}$ отображает соответственно систему $\underline{F(X)}$ в систему $\underline{F(Y)}$ и $\underline{F(Y)}$ в $\underline{F(X)}$. В силу равенства (3.1) имеем $\underline{F(g)} \circ \underline{F(f)} \simeq \underline{1_X}$. Отсюда $ShF(X) \leqslant ShF(Y)$. Так же доказывается, что из равенства $Sh(X) = Sh(Y)$ вытекает равенство $ShF(X) = ShF(Y)$. Теорема 3.2 доказана. □

Напомним [2], что компактное хаусдорфово пространство X называется *абсолютным шейповым ретрактом* (сокращенно, *ASR-компактом*), если для произвольного хаусдорфова компакта Y, $X \subset Y$, компакт X является шейповым ретрактом для Y, т. е. существует шейповое отображение $r : Y \to X$ такое, что $r \circ i \simeq 1_X$.

Компактное хаусдорфово пространство X называется *абсолютным окрестностным шейповым ретрактом* (сокращенно, *ANSR-компактом*), если для каждого компактного хаусдорфова Z, $X \subset Z$, существует замкнутая окрестность Y компакта X в Z такая, что X является шейповым ретрактом для Y.

Следствие 3.1. *Пусть функтор F удовлетворяет условию теоремы* 3.2. *Тогда имеет место*:

а) *если X есть ASR, тогда $F(X)$ тоже ASR*;
б) *если X есть $ANSR$, тогда $F(X)$ тоже $ANSR$*;
в) *если X подвижно, тогда $F(X)$ тоже подвижно.*

Для компакта X определяется *фундаментальная размерность* FdX (см. [2]) как минимальная из размерностей $\dim X$ всех таких компактов X', что $ShX' \geqslant ShX$, т. е. $FdX = \min\{\dim X' : ShX' \geqslant ShX\}$. *Шейповой размерностью* компакта X называется число $SdX = \min\{\dim Y : ShX \leqslant ShY\}$, где под $\dim Y$ мы понимаем размерность, определенную при помощи открытых локально-конечных нормальных покрытий пространства X.

Теорема 3.3. *Пусть $F : Comp \to Comp$ — непрерывный, сохраняющий ANR-компакты, точку и пустое множество функтор степени $\leqslant n$. Тогда имеет место*:

а) *если $Fd(X) \leqslant Fd(Y)$, то $Fd(F(X)) \leqslant Fd(F(Y))$*;
б) *если $Sd(X) \leqslant Sd(Y)$, то $Sd(F(X)) \leqslant Sd(F(Y))$*;
в) *для компакта X выполнено $Sd(F(X)) \leqslant nSdX + \dim F(\widetilde{n})$.*

Доказательство. Пусть $X = \lim\left\{X_\alpha,\, P_\alpha^\beta,\, L\right\}$, где $X_\alpha \in ANR$ и $\dim X_\alpha \leqslant k$ для каждого $\alpha \in L$. В силу непрерывности функтора $F : Comp \to Comp$ имеем $F(X) = \varprojlim\left\{ F(X_\alpha),\ F\left(P_\alpha^\beta\right), L \right\}$. В силу условия теоремы

$$\dim X_\alpha \leqslant k, \quad \text{тогда} \quad \dim F(X_\alpha) \leqslant nk + \dim F(\widetilde{n}) = nk + n = n(k+1)$$

(см. [3, 5]).

Следовательно, $\dim F(X) \leqslant n \dim X + \dim F(\widetilde{n}) = nk + n = n(k+1)$.

Пункты а) и б) теоремы доказываются аналогично. Теорема 3.3 доказана. □

Пространства X и Y называют *гомотопически эквивалентными*, если существуют такие два отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, что gf гомотопно id_X и gf гомотопно id_Y, т. е. $gf \simeq id_X$ и $gf \simeq id_Y$. В данном случае пишем $X \simeq Y$ и говорим, что X и Y имеют один тот же *гомотопический тип*. Если X и Y — компакты, то в силу леммы 3.1, с использованием необходимых свойств функторов, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.4. *Эпиморфный, сохраняющий точку, пустое множество и ANR-компакты непрерывный функтор $F : Comp \to Comp$ сохраняет*:

а) *категорию ANR-системы компактов*;
б) *гомотопически эквивалентные ANR-системы компактов*;
в) *ассоциированные с ANR-системами хаусдорфовы компакты*;
г) *гомотопические типы ANR-компактов.*

Теорема 3.5. *Для любого компакта X и ковариантного функтора $F : Comp \to Comp$ — непрерывного, сохраняющего пересечение, пустое множество и точку, имеет место*:

$$Sh(X) \leqslant ShF(X).$$

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.5, *если компакт X есть деформационный ретракт пространства $F(X)$, то*

$$Sh(X) = ShF(X).$$

В работах [5, 11] приведено равенство шейпов компактов X и Y, лежащих в гильбертовом кубе Q, дополнения которых удовлетворяют некоторым эквивалентностям. С помощью этих результатов получается следующая теорема.

Теорема 3.6. *Пусть $F : Comp \to Comp$ — нормальный функтор такой, что для компактов X и Y имеет место: $F(X) = Q$, $F(Y) = Q$, $\eta(X)$ и $\eta(Y)$ суть Z-множества в $F(X)$ и $F(Y)$ соответственно. Тогда $ShX = ShY$ тогда и только тогда, когда подпространства $F(X)\backslash X$ и $F(Y)\backslash Y$ $uch\,(U_{ANR})$ эквивалентны.*

Для пространства X через $\Box X$ обозначим разложение (разбиение) пространства X, состоящее из всех компонентов связности [7]. Если $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, то непрерывное отображение $\Box f : \Box X \to \Box \mathrm{Y}$ однозначно определяется в силу условия $\pi_Y \circ f = \Box \mathrm{f} \cdot \pi_X$, где $\pi_Y : Y \to \Box \mathrm{Y}$ и $\pi_X : X \to \Box \mathrm{X}$ — факторные отображения, т. е. имеет место следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_X \downarrow & \Box f & \downarrow \pi_Y \\ \Box X & \to & \Box Y \end{array} \tag{3.4}$$

Лемма 3.2. *Если X — компактное ANR-пространство, тогда отображение $P^c(\pi_X)$ является гомотопической эквивалентностью.*

Доказательство. Пусть X есть ANR-компакт, тогда пространство $P^c(X)$ является конечным множеством или $P^c(X)$ является конечным объединением гильбертовых кубов и точек. Пространство $P^c(\Box X)$ — конечное число точек, так как пространство X есть ANR-компакт. Для любого $\mu \in P^c(\Box X)$ преобразование $(P^c(f))^{-1}(\mu)$ есть гильбертов куб или одна точка, т. е. $Sh((P^c(f))^{-1}(\mu))$ тривиально. Тогда по теореме 3.7 (см. [7]) отображение $P^c(f)$ есть шейповая эквивалентность. Следовательно, имеет место гомотопическая эквивалентность. Лемма 3.2 доказана. $\Box$

Теорема 3.7. *Пусть X — компакт и $\pi_X : X \to \Box \mathrm{X}$ — факторное отображение. Тогда отображение $P^c(\pi_X)$ порождает шейповую эквивалентность, т. е. $Sh(P^c(X)) = Sh(\Box X)$.*

Доказательство. Пусть X компактно, $\Box X$ также компакт, и по теореме В.И. Пономарева [4] $\dim \Box X = 0$. Отсюда $\dim P^c(X) = 0$ и $P^c(\Box \mathrm{X}) = 0$. По теореме 3.2 (см. [7]) отображение $P^c(\pi_X)$ является шейповой эквивалентностью, это означает, что $Sh(P^c(X)) = Sh\ P^c(\Box \mathrm{X})$ и $|\Box P^c(\Box \mathrm{X})| = |\Box X|$. Теорема доказана. $\Box$

Определение (см. [5]). Нормальный подфунктор F функтора P_n называется *локально выпуклым*, если множество $F(\tilde{n})$ локально выпукло.

Скажем, что функтор F_1 является *подфунктором* (соответственно, *надфунктором*) функтора F_2, если существует такое естественное преобразование $h : F_1 \to F_2$, что для всякого объекта X отображение $h(X) : F_1(X) \to F_2(X)$ является мономорфизмом (эпиморфизмом). Через exp обозначается известный функтор гиперпространств замкнутых подмножеств. Так, например, тождественный функтор Id является подфунктором функтора exp_n, где $exp_n X = \{F \in expX : |F| \leqslant n\}$, а функтор n-й степени P^n является надфунктором exp_n и SP^n_G. Нормальный подфунктор F функтора P_n однозначно определяется своим значением $F(\tilde{n})$ на $\tilde{n}$, где через $\{\widetilde{n}\}$ обозначается n-точечное множество $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Заметим, что $P_n(n)$ — это $(n-1)$-мерный симплекс. Всякое подмножество $(n-1)$-мерного симплекса σ^{n-1} определяет нормальный подфунктор функтора P_n, если оно инвариантно относительно симплициальных отображений в себя.

Примером не нормального подфунктора функтора P_n является функтор P^c_n вероятностных мер, носители которых лежат в одном компоненте связности пространства. Одним из примеров локально выпуклых подфункторов P_n является функтор $SP^n \equiv SP^n_{S_n}$, где S_n — группа гомеоморфизмов (группа перестановок) n-элементного множества.

Следствие 3.3. *Если для компактов X и Y имеет место равенство $|\Box X| = |\Box Y| = \aleph_0$, то $Sh(P^c(X)) = Sh(P^c(Y))$ и $Sh\ P(X) = Sh\ P(Y)$, где $|Z|$ — мощность множества Z.*

Доказательство. Пусть множества $|\Box X|$ и $|\Box Y|$ счетны. В этом случае по результату А.В. Архангельского [1] пространства $|\Box X|$ и $|\Box Y|$ компактны и метризуемы. Заметим, что $|\Box X|$ и $|\Box Y|$

имеют всюду плотное множество изолированных точек. Тогда компакты $P(X)$ и $P(Y)$ гомеоморфны гильбертову кубу Q. С другой стороны, $P^c[X] = \square X$ и $P^c[\square Y] = \square Y$. Следовательно, $Sh\ P^c[\square X] = Sh\ P^c[\square Y]$. Следствие 3.3 доказано. $\square$

Через $M_\square$ обозначим класс таких всех компактов X, что $\square X$ метризуемо. Из следствия 3.3 вытекает, что если $X, Y \in M_\square$, то $\square X$ и $\square Y$ имеют счетное всюду плотное множество изолированных точек [12].

Следствие 3.4. *Если $X, Y \in M_\square$, то $Sh\,(P^c(X)) \geqslant Sh\,(P^c(Y))$ или $Sh(P^c(X)) \leqslant Sh\,(P^c(Y))$. Следовательно, если $\square X$ и $\square Y$ бесконечны, тогда $Sh\,(P^c(X)) = Sh\,(P^c(Y))$, т. е. $Sh\,(P^c(X)) \geqslant Sh\,(P^c(Y))$ и $Sh\,(P^c(X)) \leqslant Sh\,(P^c(Y))$.*

Доказательство. Пусть X и Y суть элементы семейства $M_\square$. Тогда $\square X$ и $\square Y$ — нульмерные компакты. В частном случае, если $\square X$ и $\square Y$ — конечные множества, то из одной теоремы [2] получаем искомую.

Если $|\square X| \geqslant \aleph_0$, тогда $\square X$ содержит канторов дисконтиниум. В этом случае $\square Y$ можно вложить в $\square X$, тогда компакт $\square Y$ является ретрактом для $\square X$ (см. [10]). Тогда $Sh(\square \mathrm{X}) \geqslant \mathrm{Sh}(\square \mathrm{Y})$ и $Sh\ P^c[\square X] \geqslant Sh\ P^c[\square Y]$.

Следовательно, по теореме 3.7 имеем $Sh\ P^c[\square X] \geqslant Sh\ P^c[\square Y]$. Если $\square X \leqslant \aleph_0$ и $\square Y \leqslant \aleph_0$, тогда компакты $\square X$ и $\square Y$ гомеоморфны порядковому компакту Мазуркевича—Серпинского [10]. Последнее, пусть $\square X$ и $\square Y$ — бесконечные множества, тогда $Sh\,(\square \mathrm{X}) = \mathrm{Sh}(\square \mathrm{Y})$ тогда и только тогда, когда $\square X$ и $\square Y$ гомеоморфны [8]. Если $|\square X| > |\square Y|$ или $|\square X| < |\square Y|$, тогда $\square Y$ или $\square X$ является ретрактом для $\square X$ и $\square Y$ соответственно. Отсюда по теореме 3.1 имеем $Sh\,(P^c(X)) \geqslant Sh\,(P^c(Y))$. Следствие 3.4 доказано. $\square$

Лемма 3.3. *Для любого компакта X имеет место равенство $|\square P_f(X)| = |\square X|$.*

Доказательство. Пусть X — произвольный компакт, $\square X$ — его множество компонентов связности т. е. $\square X = \{x_i' \in X : \pi_X^{-1}(x_i')$ — связная компонента точки $x_i'\}$. Очевидно, что $\square X$ компактно и $\square X \subset X$. Отсюда $Sh\ (\square \mathrm{X}) \leqslant \mathrm{Sh}\ (\mathrm{X})$. С другой стороны, из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{rcl} \pi_X : X & \to & \square X \\ \pi_f^X \ \uparrow & & \uparrow \ \delta_X \\ P_f\,(\pi_X) : P_f\,(X) & \to & \delta\,(\square X) \end{array} \tag{3.5}$$

$|\square Sh\ P_f(X)| = |\square X|$. Из (3.5) равенство имеет место, т. е. $|\square P_f(X)| = |\square X|$. Лемма 3.3 доказана. $\square$

Заметим, что для любых $x \in X$ и $y \in X$ между множествами $(r_f^{-1})(x)$ и $(r_f^{-1})(y)$ имеется взаимно однозначное соответствие, т. е. произвольной точке $\mu_x \in (P_f^{-1})(X)$ ставим в соответствие

$$\mu_y \in (P_f^x)^{-1}, \quad \text{где} \quad \mu_x = m_0\delta_{x_0} + m_1\delta_{x_1} + \cdots + m_k\delta_{x_k}, \quad \mu_y = m_0\delta_{y_0} + \cdots + m_k\delta_{x_k}.$$

В случае бесконечных компактов X и Y пространства $P\,(X)$ и $P\,(Y)$ гомеоморфны гильбертову кубу Q. Если A и B, лежащие в компактах $P\,(X)$ и $P\,(Y)$, суть Z-множества, то в силу теоремы Чепмэна [2] $ShA = ShB$ тогда и только тогда, когда $P(X)\backslash A$ гомеоморфно $P(Y)\backslash B$. В работах [3,5] было показано, что подпространства $F\,(X)$ и $F\,(Y)$ суть Z-множества в компактах $P\,(X)$ и $P\,(Y)$, где $F = P_f\ (X)$, $P_{f,n}\ (X)$, $P_{f,n}^C(X)$, $P_f^C(X)$. Еще было отмечено, что эти пространства X являются сильными деформационными ретрактами для $F\,(X)$. Значит, имеет место следующий результат.

Теорема 3.8. *Для бесконечных компактов X и Y следующие условия эквивалентны*:

а) $Sh\ X = Sh\ Y$;
б) $P(X)\backslash P_f(X) \simeq P(Y)\backslash P_f(Y)$;
в) $P(X)\backslash \delta(X) \simeq P(Y)\backslash \delta(Y)$;
г) $P(X)\backslash F(X) \simeq P(Y)\backslash F(Y)$, *где* $F = P_{f,n}^c,\ P_f^c,\ P_{f,n}$.

Теорема 3.9. *Пусть X и Y есть элементы $M_\square$, т. е. $X \in M_\square$ и $Y \in M_\square$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

а) $Sh\ (\square \mathrm{X}) = Sh(\square Y)$;
б) $P\,(X)\setminus P^c\,(X) \simeq P\,(Y)\setminus P^c\,(Y)$.

Теорема 3.10. *Пусть X и Y суть элементы множества $M_\square$. Тогда отношение $Sh(\square \mathrm{X}) = Sh(\square Y)$ тогда и только тогда, когда $Sh\ \mathrm{X} = Sh(\square \mathrm{X})$.*

Известно, что из $Sh\ \mathrm{X} \leqslant Sh\ Y$ вытекает неравенство $Sh(\square \mathrm{X}) \leqslant Sh(\square Y)$. В частном случае равенство $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$ дает нам равенство $Sh(\square \mathrm{X}) = Sh(\square Y)$.

Пусть теперь $Sh(\square \mathrm{X}) = Sh(\square Y)$. Из нульмерности и метризуемости компактов $\square X$ и $\square Y$ по теореме Мардешича—Сегала [8] $\square X$ и $\square Y$ гомеоморфны. Пусть для любого $y \in \square X$ множество $\pi_y^{-1}(y)$ имеет тривиальный шейп. Тогда по теореме 3.7 (см. [7]) имеем $Sh\ Y = Sh(\square X)$. В силу нульмерности этих пространств и из равенств $Sh\ Y = Sh\,(\square X)$ вытекает, что $Y \simeq \square X \simeq \square Y$.

Заметим, что в этом случае $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$ и $X \simeq Y$, т. е. $Sh\ \mathrm{X} = Sh(\square X)$ эквивалентно равенству $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$.

Следствие 3.5.

а) *Пространство $P^c(X)$ есть ASR тогда и только тогда, когда X связно*;
б) *$P^c(X)$ есть $ANSR$ тогда и только тогда, когда X имеет конечное число компонент связности.*

Теорема 3.11. *Для любых бесконечных нульмерных компактов X и Y верно*:

а) *если $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$, тогда $P_n(X) \simeq P_n(Y)$*;
б) *если $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$, тогда $P\,(X)\setminus P_n(X) \simeq P\,(Y)\setminus P_n(Y)$*;
в) *$Sh\ P_n(X) = Sh\ P_n(Y)$ тогда и только тогда, когда $P\,(X)\setminus P_n(X) \simeq P\,(Y)\setminus P_n(Y)$*;
г) *$Sh\ F\,(\mathrm{X}) = Sh\ F\,(Y)$ тогда и только тогда, когда $P\,(X)\setminus F\,(X) \simeq P\,(Y)\setminus F(Y)$, где F — локально выпуклые подфункторы функтора P_n*;
д) *$Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$ тогда и только тогда, когда $P\,(X)\setminus\delta(X) \simeq P(Y)\setminus\delta(Y)$.*

Теорема 3.12. *Для любых бесконечных нульмерных компактов X и Y следующие условия эквивалентны*:

а) *$Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$*;
б) *$Sh\ F\,(\mathrm{X}) = Sh\ F(Y)$, где $F = P_{f,n},\ P^c_{f,n},\ P_f, P^c_f$*;
в) *$X \simeq Y$*;
г) *$P\,(X)\setminus F(X) \simeq P\,(Y)\setminus F(Y)$.*

Теорема 3.13. *Для любых бесконечных компактов X и Y имеет место*:

а) *если $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$, тогда $P\,(X)\setminus P_n(X) \simeq P\,(Y)\setminus P_n(Y)$ для любого $n \in N$*;
б) *если $Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$, тогда $P\,(X)\setminus F(X) \simeq P\,(Y)\setminus F(Y)$, где F — локально выпуклые подфункторы функтора P_n.*

Теорема 3.14. *Для любых бесконечных компактов $X \in M_\square$ и $Y \in M_\square$ имеет место*:

а) *$Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$ тогда и только тогда, когда $Sh(\square \mathrm{X}) = Sh(\square Y)$*;
б) *$Sh\ \mathrm{X} = Sh\ Y$ тогда и только тогда, когда $ShP_n(\square \mathrm{X}) = ShP_n(\square Y)$.*

В работе [11] приведено равенство шейпов компактов X и Y, лежащих в гильбертовом кубе Q, дополнения которых удовлетворяют некоторым эквивалентностям. С помощью приведенных фактов в конкретных случаях получается следующий результат.

Теорема 3.15. *Для любых бесконечных компактов X и Y имеет место*: *$ShP_n(\mathrm{X}) = ShP_n(Y)$ тогда и только тогда, когда пространства $P\,(X)\setminus P_n\,(X)$ и $P\,(Y)\setminus P_n(Y)$ $uch(U_{ANR})$ эквивалентны.*

Следствие 3.6. *Для бесконечных компактов X и Y пространства $P_n\,(X)$ и $P_n(Y)$ $hse(Z)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $P\,(X)\setminus P_n\,(X)$ и $P\,(Y)\setminus P_n(Y)$ $cps\ (Z^*)$ — эквивалентны.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архангельский А. В.* Аддиционная теорема для веса множеств, лежащих в бикомпактах// Докл. АН СССР. — 1959. — *126*, № 2. — С. 239–241.
2. *Борсук К.* Теория шейпов. — М.: Мир, 1976.
3. *Жураев Т. Ф.* Некоторые геометрические свойства функтора P вероятностных мер и его подфункторов// Дисс. к.ф.-м.н. — М.: МГУ, 1989.
4. *Пономарев В. И.* О непрерывных разбиениях бикомпактов// Усп. мат. наук. — 1957. — *12*. — С. 335–340.
5. *Федорчук В. В.* Вероятностные меры в топологии// Усп. мат. наук. — 1991. — *46*, № 1. — С. 41–80.
6. *Шепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 3. — С. 3–62.
7. *Kodama Y., Spiez S., Watanabe T.* On shapes of hyperspaces// Fund. Math. — 1978. — *11*. — С. 59–67.
8. *Mardešić S., Segal J.* Shapes of compacta and ANR-systems// Fund. Math. — 1971. — *72*. — С. 41–59.
9. *Mardešić S., Segal J.* Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes// Fund. Math. — 1971. — *72*. — С. 61–66.
10. *Mazurkiewicz S., Sierpiński W.* Contribution à la topologie des ensembles dénombrables// Fund. Math. — 1920. — *1*, № 1. — С. 17–27.
11. *Mrozik P.* Hereditary shape equivalences and complement theorems// Top. Appl. — 1986. — *22*, № 1. — С. 131–137.
12. *Pelczyński A.* A remark on spaces 2^* for zerodimensional X// Bull. Acad. Polon. Scr. Sci. Math. Astronom. Phys. — 1965. — *19*. — С. 85–89.

Жураев Турсунбой Файзиевич
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами,
кафедра общей математики,
Узбекистан, 100070, г. Ташкент, ул. Бунедкор, д. 27
E-mail: `tursunzhuraev@mail.ru`

Турсунова Зулайхо Омонуллаевна
Ташкентский государственный педагогический университет им. Низами,
кафедра общей математики
Узбекистан, 100070, г. Ташкент, ул. Бунедкор, д. 27
E-mail: `zulayhotursunova@mail.ru`

Жувонов Камариддин Ризокулович
Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства,
кафедра высшей математики,
Узбекистан, 100000, г. Ташкент, ул. Кари Ниязий, д. 39
E-mail: `qamariddin.j@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-21-32 UDC 515.12

Covariant Functors and Shapes in the Category of Compacts

© 2019 **T. F. Zhuraev, Z. O. Tursunova, K. R. Zhuvonov**

Abstract. In this paper, we consider covariant functors $F : Comp \to Comp$ acting in category of shape-preserving compact sets [2], infinite compact sets, and shape equivalence [9]. Also we study action of compact functors and shape properties of the compact space X consisting of connected components $\square X$ of the compact X as well as shape identity $ShX = ShY$ of infinite compacts X and Y for the space $P(X)$ of probability measures and its subspaces.

REFERENCES

1. A. B. Arkhangel'skiy, "Additsionnaya teorema dlya vesa mnozhestv, lezhashchikh v bikompaktakh" [An addition theorem for the weight of sets lying in bicompacts], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1959, **126**, No. 2, 239–241 (in Russian).
2. K. Borsuk, *Teoriya sheypov* [Theory of Shape], Mir, Moscow, 1976 (in Russian).
3. T. F. Zhuraev, "Nekotorye geometricheskie svoystva funktora P veroyatnostnykh mer i ego podfunktorov" [Some geometric properties of the functor P of probability measures and its subfunctors], *PhD Thesis*, MGU, Moscow, 1989 (in Russian).
4. V. I. Ponomarev, "O nepreryvnykh razbieniyakh bikompaktov" [On continuous partitions of bicompacts], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1957, **12**, 335–340 (in Russian).
5. V. V. Fedorchuk, "Veroyatnostnye mery v topologii" [Probability measures in topology], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1991, **46**, No. 1, 41–80 (in Russian).
6. E. V. Shepin, "Funktory i neschetnye stepeni kompaktov" [Functors and uncountable powers of compacts], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1981, **36**, No. 3, 3–62 (in Russian).
7. Y. Kodama, S. Spiez, and Watanabe T., "On shapes of hyperspaces," *Fund. Math.*, 1978, **11**, 59–67.
8. S. Mardešić and J. Segal, "Shapes of compacta and ANR-systems," *Fund. Math.*, 1971, **72**, 41–59.
9. S. Mardešić and J. Segal, "Equivalence of the Borsuk and the ANR-system approach to shapes," *Fund. Math.*, 1971, **72**, 61–66.
10. S. Mazurkiewicz and W. Sierpiński, "Contribution à la topologie des ensembles dénombrables," *Fund. Math.*, 1920, **1**, No. 1, 17–27.
11. P. Mrozik, "Hereditary shape equivalences and complement theorems," *Top. Appl.*, 1986, **22**, No. 1, 131–137.
12. A. Pelczyński, "A remark on spaces 2^* for zerodimensional X," *Bull. Acad. Polon. Scr. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 1965, **19**, 85–89.

T. F. Zhuraev
Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `tursunzhuraev@mail.ru`

Z. O. Tursunova
Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `zulayhotursunova@mail.ru`

K. R. Zhuvonov
Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `qamariddin.j@mail.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 33–43

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-33-43 УДК 517.958

ПРИМЕНЕНИЕ A-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ПОРОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ

© 2019 г. **Х. Х. ИМОМНАЗАРОВ, Н. М. ЖАББОРОВ**

Аннотация. В этой работе нами была получена замкнутая система динамических уравнений второго порядка относительно вектора смещения упругого пористого тела и порового давления в обратимом гидродинамическом приближении. Также была рассмотрена задача Коши для полученной системы пороупругих уравнений в стационарном случае; в том числе для рассматриваемой задачи была построена формула Карлемана.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Теория пороупругости широко используется в геомеханике, биофизике и других областях науки и технологий. Теория Френкеля—Био являет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно векторов смещения упругих пористых тел и вытеснения жидкости [12, 15]. Такая система описывает распространение сейсмических волн в пористой среде и в изотропном случае содержит четыре независимых параметра упругости. Линеаризованная теория В. Н. Доровского являет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно векторов скорости смещения упругих пористых тел и скорости потока жидкости [17, 19]. Как и теория Френкеля—Био, линеаризованная теория описывает распространение сейсмических волн в пористой среде, однако в отличие от системы из теории Френкеля—Био в изотропном случае описывается тремя независимыми параметрами упругости. В [18] была получена замкнутая система дифференциальных уравнений второго порядка относительно вектора смещений упругого пористого тела и порового давления во временной области. Для частотной области такая система была описана в [21]. В нашей же работе мы получаем замкнутую систему динамических уравнений второго порядка относительно вектора смещения упругого пористого тела и порового давления в случае, когда в системе не происходит потерь энергии. Далее мы рассматриваем задачу Коши для стационарной пороупругой системы на плоскости, а затем строим формулу Карлемана для данной задачи.

2. Задачи Коши для эллиптической системы на плоскости

Пусть Ω — это произвольная ограниченная односвязная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с границей класса C^∞, а $M \subset \partial\Omega$ — объединение конечного числа замкнутых дуг. Рассмотрим

Данная работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-01-00729).

задачу Коши для эллиптической системы второго порядка в Ω:

$$\mathcal{A}\frac{\partial^2}{\partial x^2}V + 2\mathcal{B}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}V + \mathcal{C}\frac{\partial^2}{\partial y^2}V = 0, \qquad V : \Omega \to \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

$$V\left(x,y\right)|_M = G\left(x,y\right), P_\partial V\left(x,y\right)|_M = H\left(x,y\right), \tag{2.2}$$

где $G(x,y)$, $F(x,y) \in C(\Omega;\mathbb{R}^n)$ — заданные функции, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ — матрицы постоянных элементов размера $n \times n$, а P_∂ — некоторый дифференциальный оператор первого порядка (например, оператор напряжения для системы уравнений Ламе или производная по нормали). Система является эллиптической, т. е. матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ обратимы, а характеристический многочлен

$$\det\left\|\mathcal{A} + 2\mathcal{B}\lambda + \mathcal{C}\lambda^2\right\| = 0$$

не имеет вещественных корней.

Известны два классических метода исследования подобных эллиптических краевых задач: метод потенциалов и теоретически-функциональный метод. Фундаментальные результаты относительно решения эллиптических задач общего вида методом потенциалов были получены в [20].

Второй метод основывается на представлении решений эллиптических уравнений через аналитические функции, что делает возможным сведение нашей задачи к изучению краевых задач с точки зрения теории функций. Для эллиптических уравнений на плоскости с вещественными аналитическими коэффициентами такой метод был предложен И. Н. Векуа [5]; для эллиптических систем с постоянными коэффициентами — А. В. Бицадзе [16] (см. также [8, 11]).

Метод, предложенный Бицадзе, основывается на выражении регулярных решений системы (2.1) через аналитические векторнозначные функции и их производные с точностью до определенного порядка [3]. Такое представление существенно упрощается [9], если аналитические функции заменяются на решения канонических эллиптических систем первого порядка.

Для случая эллиптических систем первого порядка (с двумя неизвестными функциями, $s = 2$) данная теория была описана в работах И. Н. Векуа [6] и Л. Берса [14] и теперь известна как теория обобщенных аналитических функций. В свою очередь, А. П. Солдатов [10] показал, что вышеописанное представление может быть записано в виде

$$V = \operatorname{Re}\Theta u, \tag{2.3}$$

где $u : \Omega \to \mathbb{C}^n$ — A-аналитическая функция переменного $z_\lambda = x + \lambda y$, где λ — это корень характеристического уравнения, элементы матрицы A и Θ выражаются через коэффициенты системы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, а A — нильпотентная матрица: $A^n = 0$.

Определение 2.1 (см. [13]). Пусть A — квадратная матрица размерности n. Вектор-функция $u\left(z\right) \in C^1\left(\Omega, \mathbb{C}^n\right)$ называется *A-аналитической функцией* в Ω, если

$$\bar{\partial}_A u(z) := \partial_{\bar{z}} u\left(z\right) - A\partial_z u\left(z\right) = 0, \ z = x + iy \in \Omega. \tag{2.4}$$

Таким образом, задача (2.1) становится эквивалентной задаче определения A-аналитической функции, заданной на части границы.

В [10] для определения матрицы Θ система (2.1) была представлена в виде эквивалентной ей системы дифференциальных уравнений первого порядка, где затем матрица итоговой системы была сведена к жордановой форме.

В [2] для случая $n = 2$ было показано, что аналогичный результат можно получить с помощью свойств A-аналитических функций.

3. Система дифференциальных уравнений в смысле смещений упругого пористого тела и порового давления

Линеаризованная система уравнений для континуальной теории фильтрации в обратимом приближении имеет вид [17, 19]:

$$\rho_s \frac{\partial u_i}{\partial t} + \partial_k h_{ik} + \frac{\rho_s}{\rho}\partial_i P = 0,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\partial_i P = 0,$$

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial t}+\mu\left(\partial_k u_i+\partial_i u_k\right)+\left(\lambda-\frac{\rho_s}{\rho}K\right)\delta_{ik}\mathrm{div}\mathbf{u}-\frac{\rho_l}{\rho}K\delta_{ik}\mathrm{div}\mathbf{v}=0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}-\left(K-\alpha\rho\rho_s\right)\mathrm{div}\mathbf{u}+\alpha\rho\rho_l\mathrm{div}\mathbf{v}=0$$

В формулах (3.1) $\rho=\rho_s+\rho_l$, а $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ и $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ — векторы смещения упругого пористого тела и жидкости с соответствующими парциальными плотностями $\rho_s=\rho_s^f(1-d_0)$ и $\rho_l=\rho_l^f d_0$, где d_0 — это пористость, P — поровое давление, h_{ik} — тензор напряжения, ρ_s^f и ρ_l^f — физические плотности упругого пористого тела и жидкости, соответственно, λ, μ — константы Ламе, $\alpha=\rho\alpha_3+K/\rho^2$ (см. [17,19]), $K=\lambda+2\mu/3$, $\rho^3\cdot\alpha_3>0$ — модуль объемного сжатия жидкого компонента гетерофазной среды, δ_{ik} — символ Кронекера, $\partial_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Упругие константы К, μ, α_3 выражаются через скорость распределения поперечной волны c_s и две скорости продольных волн c_{p_1}, c_{p_2} по следующим формулам [22]:

$$\mu=\rho_s c_s^2,$$

$$K=\frac{\rho}{2}\frac{\rho_s}{\rho_l}\left(c_{p_1}^2+c_{p_2}^2-\frac{8}{3}\frac{\rho_l}{\rho}c_s^2-\sqrt{\left(c_{p_1}^2-c_{p_2}^2\right)^2-\frac{64}{9}\frac{\rho_l\rho_s}{\rho^2}c_s^4}\right),$$

$$\alpha_3=\frac{1}{2\rho^2}\left(c_{p_1}^2+c_{p_2}^2-\frac{8}{3}\frac{\rho_l}{\rho}c_s^2+\sqrt{\left(c_{p_1}^2-c_{p_2}^2\right)^2-\frac{64}{9}\frac{\rho_l\rho_s}{\rho^2}c_s^4}\right).$$

Далее для простоты рассмотрим систему (3.1) с нулевыми начальными условиями. Из второго уравнения системы (3.1) получим формулу:

$$\frac{\partial\mathrm{div}\mathbf{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\Delta P.$$

Исключая дивергенцию смещения жидкости из третьего уравнения системы (3.1) и учитывая четвертое, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial t}+\mu\left(\partial_k u_i+\partial_i u_k\right)+\left(\lambda-\frac{K^2}{\alpha\rho^2}\right)\delta_{ik}\mathrm{div}\mathbf{u}+\frac{K^2}{\alpha\rho^2}\delta_{ik}\frac{\partial P}{\partial t}=0. \tag{3.2}$$

Избавимся от смещения жидкости в четвертом уравнении системы (3.1) с помощью второго. В итоге будем иметь дифференциальное уравнение второго порядка относительно порового давления P и смещения упругого пористого тела u:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}-\alpha\rho_l\Delta P-\left(K-\alpha\rho\rho_s\right)\mathrm{div}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}=0. \tag{3.3}$$

Теперь исключим тензор напряжения из уравнения (3.1), для чего продифференцируем первое уравнение системы (3.1) по времени:

$$\rho_s\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\partial_k\frac{\partial h_{ik}}{\partial t}+\frac{\rho_s}{\rho}\partial_i\frac{\partial P}{\partial t}=0.$$

Исходя из этого и принимая во внимание (3.2), получаем следующее уравнение относительно смещений упругого пористого тела u:

$$\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}-\frac{\mu}{\rho_s}\Delta\mathbf{u}-\frac{\lambda+\mu-K^2/(\alpha\rho^2)}{\rho_s}\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}-\frac{K-\alpha\rho\rho_s}{\alpha\rho^2\rho_s}\nabla\frac{\partial P}{\partial t}=0. \tag{3.4}$$

Система (3.3)-(3.4) будет замкнутой относительно смещения упругого пористого тела u и порового давления P. Последнее описывает распространение сейсмических волн в пористой насыщенной жидкостью среде в обратимом гидродинамическом приближении.

4. Задача Коши для стационарной системы пороупругих уравнений

Система уравнений пористости (3.3)-(3.4) в стационарном смысле удовлетворяет

$$\mu\Delta\mathbf{u}+\left(\tilde{\lambda}+\mu\right)\nabla\mathrm{div}\mathbf{u}=0, \tag{4.1}$$

$$\Delta P=0, \tag{4.2}$$

где $\tilde{\lambda}=\lambda-K^2/(\alpha\rho^2)$.

Рассмотрим задачу Коши для заданной стационарной системы пороупругих уравнений относительно $(\mathbf{u},\, p)$, описывая положение плоской изотропной упруго-деформируемой среды в некоторой области $\Omega=\{z|\,Imz>0\}\subset\mathbb{C}$: предположим, что на части границы $M\subset\partial\Omega$ заданы вектор смещения упругого пористого тела, тензор напряжения и поровое давление:

$$\mathbf{u}\,|_M=\mathbf{G}\,(x)\,,\quad T_\partial\mathbf{u}\,|_M=\mathbf{H}\,(x)\,,\quad \frac{\rho_l}{\rho}P\,|_M=P_0\,(x)\,,\quad \left.\frac{\partial P}{\partial\nu}\right|_M=0, \tag{4.3}$$

где $H_j\,(x)=\tilde{H}_j\,(x)-\nu_j\dfrac{\rho K-\rho_s\alpha}{\rho_s\alpha}P_0(x),\ j=1,2,\ \mathbf{G}\,(x)\,,\ \mathbf{H}\,(x)\,,\ P_0\,(x)$ — это заданные функции, а $\nu=(\nu_1,\nu_2)$ — вектор внешней нормали.

Необходимо определить функции $\mathbf{u}(x,y)\in C^3(\Omega;\mathbb{R}^2)\cap C^2(\Omega;\mathbb{R}^2)$ и $P(x,y)\in C^2(\Omega;\mathbb{R}^n)\cap C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Оператор напряжения определяется как

$$T_\partial\mathbf{V}\,|_M=\sigma\mathbf{u}\,|_m\,,$$

где σ — это оператор напряжения, элементы которого связаны с вектором смещения $\mathbf{u}$ посредством законов Гука:

$$\sigma_{xx}=\tilde{\lambda}\left(\partial_x u_1+\partial_y u_2\right)+2\mu\partial_x u_1,$$
$$\sigma_{yy}=\tilde{\lambda}\left(\partial_x u_1+\partial_y u_2\right)+2\mu\partial_y u_2,$$
$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\mu\left(\partial_y u_1+\partial_x u_2\right).$$

Легко показать, что

$$T_\partial=\begin{pmatrix}\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)\upsilon_1 & \mu\upsilon_2\\ \tilde{\lambda}\upsilon_2 & \mu\upsilon_1\end{pmatrix}\partial_x+\begin{pmatrix}\mu\upsilon_2 & \tilde{\lambda}\upsilon_1\\ \mu\upsilon_1 & \left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)\upsilon_2\end{pmatrix}\partial_y.$$

Переходя от вектора нормали к вектору касательной $\tau=(\tau_1,\tau_2)$, можем записать оператор T_∂ в виде

$$\begin{aligned}T_\partial=\tau_1\begin{pmatrix}0 & -\mu\\ -\tilde{\lambda} & 0\end{pmatrix}\partial_x+\tau_1\begin{pmatrix}-\mu & 0\\ 0 & -\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)\end{pmatrix}\partial_y+\\ +\tau_2\begin{pmatrix}\tilde{\lambda}+2\mu & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\partial_x+\tau_2\begin{pmatrix}0 & \tilde{\lambda}\\ \mu & 0\end{pmatrix}\partial_y=\\ =T_{11}\tau_1\partial_x+T_{12}\tau_1\partial_y+T_{21}\tau_2\partial_x+T_{22}\tau_2\partial_y.\end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть функции* $\mathbf{u}\,(x,y)\in C^2\left(\Omega;\mathbb{R}^2\right)\cap C^1\left(\bar{\Omega};\mathbb{R}^2\right),\ P(x,y)\in C^2(\Omega;\mathbb{R}^2)\cap C^1(\bar{\Omega};\mathbb{R}^2)$ *являются решением задачи* (4.1)–(4.3). *Тогда* $\mathbf{u}\,(x,y)\,,\ P(x,y)$ *могут быть найдены по формуле*

$$\mathbf{u}=\mathrm{Re}\,\Theta\tilde{\mathbf{u}},\quad P=\mathrm{Re}\,\tilde{P}$$

где

$$\Theta=\begin{pmatrix}i & i\\ -1 & 2k-1\end{pmatrix},\quad k=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu},$$

при этом $\tilde{P}(z)$ — *аналитическая функция, а* $\tilde{\mathbf{u}}\,(z)$ — A*-аналитическая для* $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, *принимающая на множестве* M *значения* $\tilde{u}\,|_M=\mathbf{f}=\mathbf{g}+i\mathbf{h}$. *В таком случае функции* $\mathbf{g}\,(z)\,,$ $\mathbf{h}\,(z)$ *выражаются из системы*

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Re}\,\Theta & -\mathrm{Im}\,\Theta\\ \mathrm{Re}\,\Theta' & -\mathrm{Im}\,\Theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{g}\,(x)\\ \mathbf{h}\,(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{G}\,(x)\\ \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\mathbf{H}\,(x,y)\,ds\end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

где

$$\Theta' = 2\mu \begin{pmatrix} 1 & 2-k \\ i & -ik \end{pmatrix}.$$

Значения функции $\tilde{\mathbf{u}}(z)$, $z = x + iy \in \Omega$, *вычисляются по формулам Карлемановского типа*:

$$\tilde{\mathbf{u}}(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \times$$

$$\times \left(\int\limits_M \left(e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} (\zeta) + \left(N \left(\partial\phi_0(\zeta)\,\bar{\zeta} - \partial\phi_0(z)\,\bar{z} \right) + \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} \right) \begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix} (\zeta) \right) \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))} \begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix} (\zeta) \frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \right),$$

$$\tilde{P}(z) = \frac{\rho}{2\pi\rho_l i} \lim_{N\to\infty} \int\limits_M P_0(\tau) \left[\frac{(\zeta - z_2)(z - z_1)}{(\zeta - z_1)(z - z_2)} \right]^{\frac{N}{\pi i}} \frac{d\tau}{\zeta - z}.$$

Доказательство. Запишем систему для u в развернутой форме:

$$\mu\left(\partial_{xx}u_1 + \partial_{yy}u_1\right) + \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)\partial_x\left(\partial_x u_1 + \partial_y u_2\right) = 0,$$

$$\mu\left(\partial_{xx}u_2 + \partial_{yy}u_2\right) + \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)\partial_y\left(\partial_x u_1 + \partial_y u_2\right) = 0.$$

Отсюда выпишем матричные коэффициенты системы:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} + 2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \qquad 2\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\lambda} + \mu \\ \tilde{\lambda} + \mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \tilde{\lambda} + 2\mu \end{pmatrix}.$$

Найдем корни характеристического многочлена:

$$\det\left\|\mathcal{A} + 2\mathcal{B}\lambda_0 + \mathcal{C}\lambda_0^2\right\| = \begin{vmatrix} \tilde{\lambda} + 2\mu + \mu\lambda_0^2 & \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)\lambda_0 \\ \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)\lambda_0 & \mu + \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\lambda_0^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\tilde{\lambda} + 2\mu + \mu\lambda_0^2\right)\left(\mu + \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\lambda_0^2\right) - \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)^2\lambda_0^2 =$$

$$= \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\mu + \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)^2\lambda_0^2 + \mu^2\lambda_0^2 + \mu + \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\lambda_0^4 - \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)^2\lambda_0^2 =$$

$$= \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\mu + \left(\left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)^2 + \mu^2 - \left(\tilde{\lambda} + \mu\right)^2\right)\lambda_0^2 + \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\mu\lambda_0^4 =$$

$$= \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\mu + \left(2\tilde{\lambda}\mu + 4\mu^2\right)\lambda_0^2 + \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\mu\lambda_0^4 =$$

$$= \left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right)\mu\left(1 + 2\lambda_0^2 + \lambda_0^4\right) = 0.$$

Так как система является эллиптической, матрицы $\mathcal{A}, \mathcal{C}$ обратимы, следовательно,

$$\left(\tilde{\lambda} + 2\mu\right) \neq 0, \qquad \mu \neq 0,$$

иначе говоря, корни находятся из уравнения

$$1 + 2\lambda_0^2 + \lambda_0^4 = \left(1 + \lambda_0^2\right)^2 = 0.$$

Тем самым в верхней полуплоскости будем иметь корень кратности 2.

Решение системы (4.1), (4.3) находится из [2]:

$$u = \operatorname{Re}\Theta\tilde{u},$$

где функция $\tilde{u}(z)$ — это решение уравнения

$$\left(\partial_x - \frac{1}{\lambda_0}\partial_y\right)\tilde{u}(z) - A\left(\partial_x + \frac{1}{\lambda_0}\partial_y\right)\tilde{u}(z) = 0$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{i-i}{2i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

или

$$\bar{\partial}\tilde{u}\,(z) = A\partial\tilde{u}\,(z)\,.$$

Столбцы матрицы Θ определяются из системы [2], которая в данном случае имеет вид

$$(\lambda+\mu)\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}\Theta_1 = 0, \qquad (\lambda+\mu)\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}\Theta_2 + 2\,(\lambda+3\mu)\,\Theta_1 = 0.$$

Таким образом, если мы возьмем

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}\Theta_2 = -2\frac{\tilde{\lambda}+3\mu}{\tilde{\lambda}+\mu}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = -2k\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}$$

и

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} i \\ -2k-1 \end{pmatrix}.$$

Как было показано в [10], решение системы (4.1) представимо в виде $u = \operatorname{Re}\Theta' u'$, где $u'\,(z)$ есть A'-аналитическая функция:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta' = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -k-1 & i \end{pmatrix}, \qquad k = \frac{\tilde{\lambda}+3\mu}{\tilde{\lambda}+\mu}.$$

Если мы возьмем функцию $u = Du'$, то

$$\bar{\partial}u = D\bar{\partial}u' = DA'\partial u' = DA'D^{-1}\partial u,$$

что означает, что функция $u = Du'$ является A-аналитической функцией с $A = DA'D^{-1}$.

Если

$$D = \begin{pmatrix} 1/2 & -i \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

будем иметь

$$A = DA'D^{-1} = -2i\begin{pmatrix} 1/2 & -i \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= -2i\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В таком случае решение системы Ламе задается формулой

$$u = \operatorname{Re}\Theta' D^{-1}Du' = \Theta\tilde{u},$$

где

$$\Theta = \Theta' D^{-1} = -2i\begin{pmatrix} i & 1 \\ -k-1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & -2k-1 \end{pmatrix},$$

При этом $\tilde{u}\,(z)$ — это A-аналитическая функция с вещественной матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; получили тот же результат, как и в методе, описанном в [10].

Однако при решении задачи Коши для системы уравнений Ламе, в которой оператор напряжения находится в краевом условии, удобнее будет перейти к A-аналитическим функциям с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае при вычислении краевых значений A-аналитической функции [2] мы можем использовать матрицы T_{ij}, определенные в операторе напряжения.

Действительно, если $u = \operatorname{Re}\Theta\tilde{u}$, где

$$\Theta = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & -2k-1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\partial}\tilde{u}(z) = A\partial\tilde{u}(z), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$V = \operatorname{Re}\Theta^{-}u^{-} = \operatorname{Re}\Theta D^{-1}Du$$

с матрицей

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\bar{\partial}u^{-}(z) = A^{-}\partial u^{-}(z),$$

$$A^{-} = DAD^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\Theta^{-} = \Theta D^{-1} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & -2k-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2k-1 \end{pmatrix}.$$

Для определения краевых значений A-аналитической функции $\tilde{u}(z)$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ вычислим матрицу Θ' из [2]. Имеем

$$A_0(E-A)^{-1}(E+A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$T_{11}\Theta + iT_{12}\Theta A_0^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ -\tilde{\lambda} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & -2k-1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2k-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu & -\mu(2k-1) \\ -i\tilde{\lambda} & -i\tilde{\lambda} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 3i \\ -1 & 2k-3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu & -\mu(2k-1) \\ -i\tilde{\lambda} & -i\tilde{\lambda} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -i\mu & -i3\mu \\ \tilde{\lambda}+2\mu & -\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)(2k-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\mu & 2\mu(2-k) \\ i2\mu & -i\left(\tilde{\lambda}+\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)(2k-3)\right) \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\tilde{\lambda}+\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)(2k-3) = \tilde{\lambda}+\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)\left(2\frac{\tilde{\lambda}+3\mu}{\tilde{\lambda}+\mu}-3\right) = \tilde{\lambda}+\left(\tilde{\lambda}+2\mu\right)\frac{-\tilde{\lambda}+3\mu}{\tilde{\lambda}+\mu} == \frac{2\tilde{\lambda}\mu+6\mu^2}{\tilde{\lambda}+\mu} = 2\mu k,$$

то

$$T_{11} + iT_{12}\Theta A_0^{-1} = 2\mu\begin{pmatrix} 1 & 2-k \\ i & -ik \end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$T_{22}\Theta - iT_{21}\Theta A_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\lambda} \\ \mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2k-1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} \tilde{\lambda}+2\mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 2k-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\mu\begin{pmatrix} 1 & 2-k \\ i & -ik \end{pmatrix} = \Theta'.$$

Теперь найдем $\det\tilde{\Theta} = \det\begin{pmatrix} \operatorname{Re}\Theta & -\operatorname{Im}\Theta \\ \operatorname{Re}\Theta' & -\operatorname{Im}\Theta' \end{pmatrix}$; тогда будем иметь

$$\tilde{\Theta} = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}-1\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}-1\end{smallmatrix} \\ -1 & 2k-1 & 0 & 0 \\ 2\mu & 2\mu\,(2-k) & 0 & 0 \\ \begin{smallmatrix}0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}0\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}-2\mu\end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix}2\mu k\end{smallmatrix} \end{pmatrix}.$$

Из этого следует, что

$$\det\tilde{\Theta} = 4\mu\,(1+k)^2 \neq 0,$$

и краевые значения функции $f(z)$ определяются однозначным образом из начального условия (4.1), (4.3). Следовательно, задача Коши для системы уравнений Ламе эквивалентна задаче A-аналитического продолжения с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя полученные значения функций $g(x), h(x)$ на множестве M из начальных условий $G(x), H(x)$, можем восстановить функцию $\tilde{u}\,(z)$ по формулам карлемановского типа из [2]. Тогда с помощью $\tilde{u}\,(z)$ найдем решение исходной задачи.

Вычислив функцию $\Phi_N(z)$ из [2] для конкретной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

получим

$$\phi\,(z) = \phi_0\,(z) + \partial\phi_0\,(z)\,\bar{z}A = \begin{pmatrix} \phi_0\,(z) & -\partial\phi_0\,(z)\,\bar{z} \\ 0 & \phi_0\,(z) \end{pmatrix}$$

и

$$\Phi_N^{-1}\,(z)\,\Phi_N\,(\zeta) = e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\begin{pmatrix} 1 & N\left(\partial\phi_0\,(\zeta)\,\bar{\zeta} - \partial\phi_0\,(z)\,\bar{z}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подставив это значение в формулу Карлемана [13], придем к следующей формуле, которая даст нам решение задачи A-аналитического продолжения:

$$\tilde{\mathbf{u}}\,(z) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\left(\int_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\left(\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(\zeta) + \left(N\left(\partial\phi_0\,(\zeta)\,\bar{\zeta} - \partial\phi_0\,(z)\,\bar{z}\right) + \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}\right)\begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_M e^{N(\phi_0(\zeta)-\phi_0(z))}\begin{pmatrix} f_2 \\ 0 \end{pmatrix}(\zeta)\,\frac{d\bar{\zeta}}{\zeta - z}\right).$$

Решение задачи Коши для уравнения Лапласа было получено в [1, 23].

Таким образом, теорема доказана.

В таком случае, оценивая интеграл по $\partial\Omega\backslash M$, нетрудно показать, что его можно сделать меньше, чем ε при $N > N_\varepsilon$, где

$$N_\varepsilon = \frac{2e}{(1-e)\,\psi\,(z)}\ln\left(\frac{\pi\rho_{\partial\Omega\backslash M}\,(z)\,\psi^2\,(z)\,\varepsilon}{16\omega\,|\partial\Omega\backslash M|\,\|f\|_{\partial\Omega\backslash M}}\right),$$

здесь $\omega = 2\sup\limits_{z\in\partial\Omega}|\partial\phi_0\,(z)\,\bar{z}|$, $|\partial\Omega\backslash M|$ — это длина дуги $\Omega\backslash M$, $\rho_{\partial\Omega\backslash M}\,(z)$ — расстояние от точки z до множества $\Omega\backslash M$.

Из ранее полученных формул Карлемановского типа следует оценка условной устойчивости [4]:

$$\|u\,(x,y)\| \leqslant \varepsilon l\,(f\,(z)) + c\,(\varepsilon)\,\|f\,(z)\|_M\,,$$

где $f\,(z)$ — это краевое значение функции $\tilde{u}\,(z)$,

$$l\,(f\,(z)) = \|f\,(z)\|_{(\partial\Omega\backslash M;\mathbb{C}^2)}\,, \qquad c\,(\varepsilon) = C\varepsilon^{1-\frac{c}{\psi(z)(e-1)}},$$

а $\psi\,(z)$ — гармоническая мера множества M.

Если, используя формулу Карлемана, мы приближенно вычислим значение функции $\mathbf{u}_N(x,y)$ для $N > N_\varepsilon$, то ошибка будет оцениваться следующей величиной:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\| \leqslant \|\Theta\|\,\varepsilon;$$

если же начальные условия $G(z), H(z)$ определены с ошибкой, не превышающей ε_0, то

$$\varepsilon_0 \leqslant C_1 \varepsilon^{\frac{2e}{(e-1)\psi(x)}},$$

$$C_1 = \frac{\rho_M(z)}{|M|} \left(\frac{|\partial\Omega \backslash M|}{\rho_{\partial\Omega\backslash M}(z)} \|f\| \right)^{1-\frac{2e}{(e-1)\psi(z)}} \left(\frac{\pi\psi^2(z)}{8\omega} \right)^{\frac{2e}{(e-1)\psi(z)}} \left\|\tilde{\Theta}\right\|.$$

В [7] при помощи формул Карлемана было получено решение задачи Коши для системы уравнений Ламе в областях специального вида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. — Новосибирск: Наука, 1990.
2. *Арбузов Э. В.* Задача Коши для эллиптических систем второго порядка на плоскости// Сиб. мат. ж. — 2003. — *44*, № 1. — С. 3–20.
3. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981.
4. *Бухгейм А. Л.* Введение в теорию обратных задач. — Новосибирск: Наука, 1988.
5. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. — М.: ОГИЗ, 1948.
6. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988.
7. *Ниезов И. Э.* Задача Коши для системы теории упругости на плоскости// Узб. мат. ж. — 1996. — № 1. — С. 27–34.
8. *Сакс Р. С.* Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений. — Новосибирск: НГУ, 1975.
9. *Солдатов А. П.* Эллиптические системы высокого порядка// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 1. — С. 136–144.
10. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. — М.: Высшая школа, 1991.
11. *Товмасян Н. Е.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами// Дифф. уравн. — 1966. — *2*, № 2. — С. 163–171.
12. *Френкель Я. И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве// Изв. АН СССР. Сер. географ. геофиз. — 1944. — *8*, № 4. — С. 133–150.
13. *Arbuzov E. V., Bukhgeim A. L.* Carleman's formulas for A-analytic functions in a half-plane// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 1997. — *5*, № 6. — С. 491–505.
14. *Bers L.* Theory of pseudo-analytic functions. — N.Y.: Lecture Notes, 1953.
15. *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range// J. Acoust. Soc. Am. — 1956. — *28*, № 2. — С. 168–178.
16. *Bitsadze A. V.* Boundary value problems for second-order elliptic equations. — Amsterdam: North-Holland, 1968.
17. *Blokhin A. M., Dorovsky V. N.* Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. — New York: Nova Science, 1995.
18. *Bonnet G.* Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range// J. Acoust. Soc. Am. — 1987. — *82*. — С. 1758–1762.
19. *Dorovsky V. N., Perepechko Yu. V., Romensky E. I.* Wave processes in saturated porous elastically deformed media// Combustion, Explosion and Shock Waves. — 1993. — *29*, № 1. — С. 93–103.
20. *Giraud G.* Nouvelles methode pour traiter certaines problemes relatifs aux equations du type elliptique// J. de Math. — 1939. — *18*. — С. 111–143.
21. *Gorog S., Panneton R., Atalla N.* Mixed displacement-pressure formulation for acoustic anisotropic open porous media// J. Appl. Phys. — 1997. — *82*. — С. 4192–4196.
22. *Imomnazarov Kh. Kh.* Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium// Appl. Math. Lett. — 2000. — *13*, № 3. — С. 33–35.
23. *Lavrentiev M. M.* Some improperly posed problems in mathematical physics. — Berlin: Springer, 1967.

Х. Х. Имомназаров
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
630090, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 6
E-mail: imom@omzg.sscc.ru

Н. М. Жабборов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, кафедра математики,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: jabborov61@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-33-43 UDC 517.958

Application of A-analytic Functions to the Investigation of the Cauchy Problem for a Stationary Poroelasticity System

© 2019 **Kh. Kh. Imomnazarov, N. M. Jabborov**

Abstract. In a reversible hydrodynamic approximation, a closed system of second-order dynamic equations with respect to the displacement vector of an elastic porous body and pore pressure has been obtained. The Cauchy problem for the obtained system of poroelasticity equations in the stationary case is considered. The Carleman formula for the Cauchy problem under consideration has been constructed.

REFERENCES

1. L. A. Aizenberg, *Formuly Karlemana v kompleksnom analize* [Formuly Karlemana v kompleksnom analize], Nauka, Novosibirsk, 1990 (in Russian).
2. E. V. Arbuzov, "Zadacha Koshi dlya ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka na ploskosti" [The Cauchy problem for second-order elliptic systems on a plane], *Cib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2003, **44**, No. 1, 3–20 (in Russian).
3. A. V. Bitsadze, *Nekotorye klassy uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Some Classes of Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
4. A. L. Bukhgeym, *Vvedenie v teoriyu obratnykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Problems], Nauka, Novosibirsk, 1988 (in Russian).
5. I. N. Vekua, *Novye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* [New Methods for Solving of Elliptic Equations], OGIZ, Moscow, 1948 (in Russian).
6. I. N. Vekua, *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
7. I. E. Niezov, "Zadacha Koshi dlya sistemy teorii uprugosti na ploskosti" [The Cauchy problem for a system of the elasticity theory on a plane], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek Math. J.], 1996, No. 1, 27–34 (in Russian).
8. R. S. Saks, *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh sistem differentsial'nykh uravneniy* [Boundary-Value Problems for Systems of Elliptic Equations], NGU, Novosibirsk, 1975 (in Russian).
9. A. P. Soldatov, "Ellipticheskie sistemy vysokogo poryadka" [Higher-order elliptic systems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 1, 136–144 (in Russian).
10. A. P. Soldatov, *Odnomernye singulyarnye operatory i kraevye zadachi teorii funktsiy* [One-Dimensional Singular Operators and Boundary-Value Problems of the Elasticity Theory], Vysshaya shkola, Moscow, 1991 (in Russian).
11. N. E. Tovmasyan, "Obshchaya kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka s postoyannymi koeffitsientami" [General boundary-value problem for second-order elliptic systems with constant coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1966, **2**, No. 2, 163–171 (in Russian).
12. Ya. I. Frenkel', "K teorii seysmicheskikh i seysmoelektricheskikh yavleniy vo vlazhnoy pochve" [To the theory of seismic and seismoelectrical phenomena in a moist soil], *Izv. AN SSSR. Ser. geograf. geofiz.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Geograph. Geophys.], 1944, **8**, No. 4, 133–150 (in Russian).
13. E. V. Arbuzov and A. L. Bukhgeim, "Carleman's formulas for A-analytic functions in a half-plane," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 1997, **5**, No. 6, 491–505.
14. L. Bers, *Theory of pseudo-analytic functions*, Lecture Notes, N.Y., 1953.
15. M. A. Biot, "Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range," *J. Acoust. Soc. Am.*, 1956, **28**, No. 2, 168–178.

16. A. V. Bitsadze, *Boundary value problems for second-order elliptic equations*, North-Holland, Amsterdam, 1968.
17. A. M. Blokhin and V. N. Dorovsky, *Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum*, Nova Science, New York, 1995.
18. G. Bonnet, "Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range," *J. Acoust. Soc. Am.*, 1987, **82**, 1758–1762.
19. V. N. Dorovsky, Yu. V. Perepechko, and E. I. Romensky, "Wave processes in saturated porous elastically deformed media," *Combust. Explos. Shock Waves*, 1993, **29**, No. 1, 93–103.
20. G. Giraud, "Nouvelles methode pour traiter certaines problemes relatifs aux equations du type elliptique," *J. de Math.*, 1939, **18**, 111–143.
21. S. Gorog, R. Panneton, and N. Atalla, "Mixed displacement-pressure formulation for acoustic anisotropic open porous media," *J. Appl. Phys.*, 1997, **82**, 4192–4196.
22. Kh. Kh. Imomnazarov, "Some remarks on the Biot system of equations describing wave propagation in a porous medium," *Appl. Math. Lett.*, 2000, **13**, No. 3, 33–35.
23. M. M. Lavrentiev, *Some improperly posed problems in mathematical physics*, Springer, Berlin, 1967.

Kh. Kh. Imomnazarov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia
E-mail: imom@omzg.sscc.ru

N. M. Jabborov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: jabborov61@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 44–53

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-44-53 УДК 517.55

НЕЧЕТКИЙ MLP-ПОДХОД ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© 2019 г. **А. Р. МАРАХИМОВ, К. К. ХУДАЙБЕРГЕНОВ**

Аннотация. В рассмотрении задач принятия решения распознавание нелинейных систем играет огромную роль. Распознавание нелинейных систем с помощью многослойного персептрона (MLP), обученного по алгоритму обратного распространения, становится значительно более сложным с увеличением количества входных данных, слоев, узлов и количества итераций в процессе вычисления. В этой работе мы предприняли попытку использования нечеткого MLP и его обучающего алгоритма для распознавания нелинейных систем. Предложили подход нечеткого MLP и его обучающего алгоритма, который позволяет ускорить процесс обучения, превышающего скорость такового в случае классического MLP. Результаты показывают значительное упрощение при поиске оптимальных параметров для нейронной нечеткой модели в сравнении с классическим MLP. Также было проведено сравнение показателей работы обучения классического MLP и предложенной нечеткой MLP-модели. Нами были проанализированы временная и пространственная сложности алгоритма. Также мы выяснили, что серьезно сократилось количество моментов, а показатели работы выросли в сравнении с классическим MLP.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Распознавание нелинейных закономерностей, т. е. построение их моделей по результатам исследований, является одной из важных задач в технике, экономике, медицине и прочих прикладных областях [5]. В работах [2, 13] был описан метод распознавания нелинейных закономерностей с использованием нечеткой базы знаний. Распознавание нелинейных закономерностей с использованием нечеткой базы знаний — это конструкция нечеткой базы знаний, которая, грубо говоря, представляет собой отношение между входными и выходными данными, используя лингвистические правила «ЕСЛИ—ТО» [3]. Эти правила были выработаны экспертами (также могут быть получены в результате выделения нечеткого знания из экспериментальных данных). Затем параметрическое распознавание переходит в изучение закономерностей путем нахождения таких весов лингвистических правил и таких функций принадлежности от нечетких параметров, что колебания результатов моделирования обучающих образов сводятся к минимуму.

В последние годы был достигнут существенный прогресс в области искусственных нейронных сетей (ANN). Упреждающие многослойные персептроны (MLP) наиболее широко изучены в работах [5, 6]. Комбинированная техника нечеткой базы знаний и нейронных сетей, названная нечеткими нейросетями, применяется для моделей в реальных задачах, например, при постановке медицинского диагноза [11]. В частности, данная техника была применена для задач распознавания образов. Новая модель была разработана А. П. Ротштейном и С. Д. Штовбой [13] для распознавания нелинейных закономерностей с нечеткими обучающими образами. Это управляемая нейросеть, названная нечеткой нейросетью и имеющая один скрытый слой в своей архитектуре. Кроме того, концепция нечеткого MLP была представлена в работах [7, 9, 10], в которых был успешно применен метод для распознавания многомерных закономерностей. Эта же работа сосредотачивает свое внимание на развитии нечеткой MLP-модели для распознавания многомерных закономерностей с различной архитектурой. Работа этой модели сравнивается с работой классической MLP-модели, разработанной для тех же задач. Следует отметить, что и классическая, и нечеткая MLP-нейросети построены на основе обучения по алгоритму обратного распространения. Проблемы, освещенные в этой работе, также относятся и к другим нечетким нейросетевым моделям. Далее опишем общее содержание нашей работы: сводка предварительных сведений содержится в разделе 2, описывающем концепцию классического MLP; раздел 3 знакомит читателя с ранее предложенной нечеткой MLP-моделью и соответствующим алгоритмом; в разделе 4 представлены детальные вычислительные результаты; выводы содержатся в разделе 5. В самом конце работы находится список литературы, относящейся к данной работе.

2. Архитектура MLP

Архитектура многослойного персептрона состоит из нескольких слоев нейронов [8,16]. Входные данные подаются на первый слой (входной слой-0), после чего эти входные данные передаются на входы слоя-1. В слое-0 не проводится никаких вычислений, и его можно считать сенсорным слоем. Последний слой — выходной — выводит обработанные данные. Количество скрытых слоев, находящихся между входным и выходным слоями, может быть увеличено или, наоборот, уменьшено в зависимости от задачи, для которой предназначается модель. Если строить сеть с большим количеством слоев, то после ее обучения модель будет построена чрезвычайно точно. Однако такие модели считаются переобученными и непригодными для использования. Мы же рассмотрим сеть с 3 слоями: входным слоем, скрытым слоем и выходным слоем (рис. 1).

Следующие формулы описывают структуру архитектуры многослойного персептрона, изображенного на рис. 1:

$$net_j = \sum_{i=1}^{n} x_i w_{ji}^{(1)} + b_j, \tag{2.1}$$

где $w_{ji}^{(1)}$ — веса входного слоя, b_j — смещения входного слоя,

$$z_j = f(net_j), \tag{2.2}$$

$$net^* = \sum_{j=1}^{m} z_j w_j^{(2)} + b_0, \tag{2.3}$$

где $w_{ji}^{(2)}$ — веса выходного слоя, b_0 — смещения выходного слоя,

$$y = f(net^*) \tag{2.4}$$

$$\Delta w_j^{(2)} = \eta E f(net^*) y,\ \Delta b_0 = \eta E f(net^*) \tag{2.5}$$

$$\Delta w_{ji}^{(1)} = \eta E f'(net_j) x^{(i)} f'(net^*) w_j^{(2)},\ \Delta b_i = \eta E f'(net_j) f'(net^*) w_j^{(2)} \tag{2.6}$$

где $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $f(\cdot)$ — одна из функций активации. Для многослойного персептрона мы используем функцию активации сигмоидального типа:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp^{-x}}.$$

Псевдо-код для обучения MLP:

Инициализация
веса $w(1), w(2)$
смещения b, b_0,
скорость обучения
момент $t = 0$
Задание среднеквадратичной ошибки MSE=0 и критерия сходимости
do
for размера итерационного образа
// прямое распространение

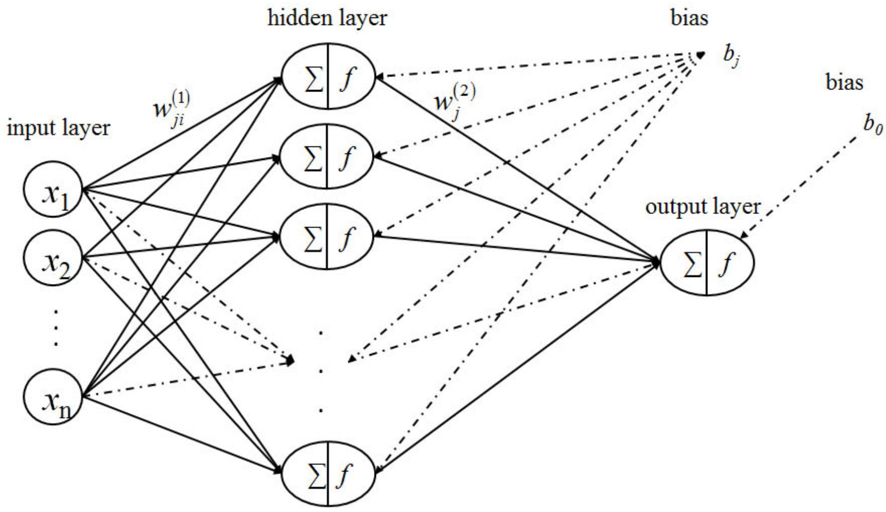


Рис. 1. Архитектура многослойного персептрона

$x \leftarrow$ произвольно выбирается обучающий образ
for каждого скрытого нейрона
Вычисление net_j (формула (2.1))
Вычисление активации z_j (формула (2.2))
end for
Вычисление net^* (формула (2.3))
Вычисление активации net^* (формула (2.4))
Расчет ошибки, $ERROR = Target - y$;
// обратное распространение ошибки для обновления весов и смещений
Вычисление $\Delta w_j^{(2)}$ и обновление выходных весов (формула (2.5))
Вычисление Δb_0 и обновление выходного смещения (формула (2.5))
для каждого скрытого нейрона
Вычисление $\Delta w_{ji}^{(1)}$ и обновление входных весов (формула (2.6))
Вычисление Δb_i и обновление входных смещений (формула (2.6))
end for
end for
while (критерий окончания)
где *Target* — это соответствующая цель.

3. Нечеткие MLP для распознавания нелинейных систем

Рассматриваемая нами архитектура нечеткого MLP довольно схожа с архитектурой классического MLP, и состоит из так называемых нечетких (*fuzzy*) принадлежностей наподобие фаззификации, дефаззификации и многослойного персептрона (рис. 3). В этой модели мы используем колоколообразную функцию принадлежности (рис. 2). Следует отметить, что мы рассматриваем функцию принадлежности именно такого типа в силу ее простоты. Однако для архитектуры нечеткого MLP можно применять и другие типы функций принадлежности.

3.1. Колоколообразная функция принадлежности. Мы используем колоколообразную функцию принадлежности, как показано ниже. Главными преимуществами функции принадлежности данного типа являются простота и удобство в корректировке.

$$\mu\,(x; a, c) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-c}{a}\right)^2}$$

где a и c — заданные параметры: a — это коэффициент концентрационного расширения функции, а c — это координата максимума функции (рис. 2).

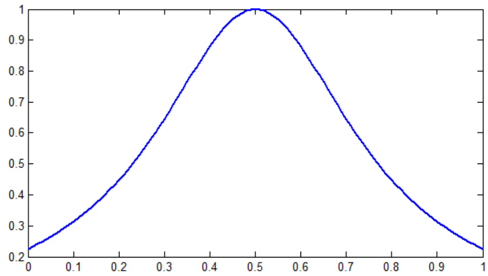


Рис. 2. График колоколообразной функции принадлежности

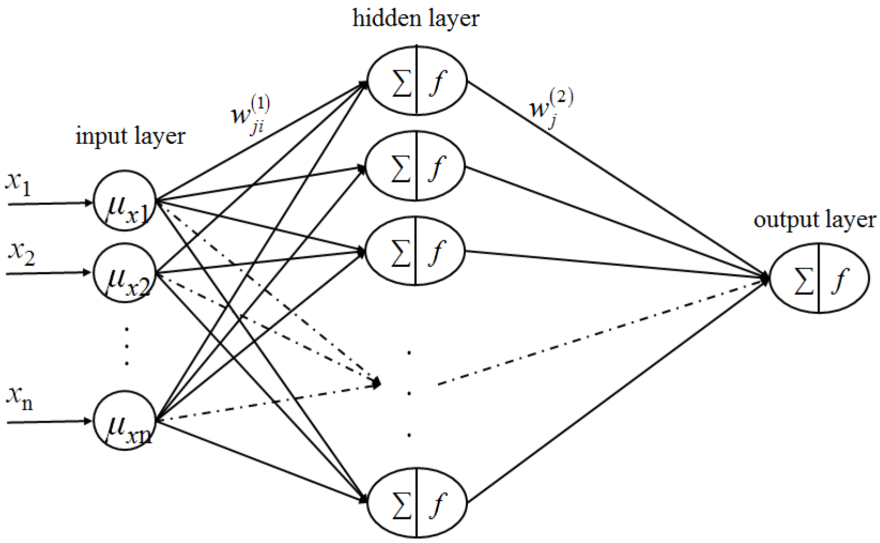


Рис. 3. Архитектура нечеткого MLP

3.2. Архитектура сети нечеткого MLP. Предлагаемая архитектура сходна с архитектурой классического многослойного персептрона; она показана на рис. 3. Процесс обучения нечеткой нейросети схож с процедурой обучения традиционных нейросетей, использующих правило «обратного распространения». Обучение этому алгоритму также состоит из двух этапов — прямого и обратного. Ввиду этого, здесь мы приводим только формулы, относящиеся к нечеткому MLP, в то время как остальные формулы содержатся в (2.1)–(2.6).

Степени принадлежности входных значений вычисляются по формуле (3.1):

$$\mu^j(x_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x_i - c_i^j}{a_i^j}\right)^2}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{3.1}$$

Таким образом, коэффициенты a_i и c_i обновляются по дельта-правилу (Δ-правило) [13]. На выходе ядро метода гравитационной дефаззификации состоит в нахождении четкого значения. Считается, что этот метод дефаззификации обеспечивает наибольшую точность и скорость регулировки нечеткой модели [15].

Псевдо-код для обучения нечеткого MLP:
Инициализация
веса $w(1), w(2)$
скорость обучения α
момент $t = 0$
Задание среднеквадратичной ошибки $MSE = 0$ *и критерия сходимости* ε
фаззификация (введение нечеткости) исходного образа обучения с помощью колоколообразной ФП
do

// прямое распространение
for размера итерационного образа $\leftarrow$
$x \leftarrow$ *произвольно выбирается обучающий образ*
для каждого скрытого нейрона
Вычисление net_j (*формула* (2.1))
Вычисление активации z_j (*формула* (2.2))
end for
Вычисление net^* (*формула* (2.3))
Вычисление активации net^* (*формула* (2.4))
$y =$ *дефаззификация нечеткого умозаключения* $\mu_y(y)$
Расчет ошибки, $ERROR = Target - y$;
// обратное распространение ошибки для обновления весов
Вычисление $\Delta w_j^{(2)}$ *и обновление выходных весов* (*формула* (2.5))
для каждого скрытого нейрона
Вычисление $\Delta w_{ji}^{(1)}$ *и обновление входных весов* (*формула* (2.6))
end for
для каждого из параметров функции принадлежности
Вычисление Δa_i *и обновление коэффициента ФП*
Вычисление Δc_i *и обновление коэффициента ФП*
end for
end for
while (*критерий окончания*)
где *Target* — это соответствующая цель.

Временная и пространственная сложности одинаковы для предложенных алгоритмов. В модели для нечеткого MLP используется одна вспомогательная матрица, в которой хранятся нечеткие входные данные (образы). Следует отметить, что эта область памяти не влияет на скорость обучения описанных алгоритмов, а для современных компьютеров пространство памяти ($O(n \times m)$) и вовсе не является проблемой. В обеих моделях размер входных нейронов равен n; размер скрытых нейронов равен m, а размер выходных нейронов равен 1. Вычисление требует прямого и обратного распространения. В процессе прямого расчета вычисление ведется с входного (слой-0) к скрытому слою (слой-1) и требует $O(n \times m)$ вычислений. Следующее прямое вычисление идет из скрытого слоя к выходному (слой-2) и требует $O(m)$ времени. Схожим образом идет и процесс обратного распространения — вычисления от выходного к скрытому слою и от скрытого ко входному слою требуют $O(m)$ и $O(m \times n)$ времени, соответственно. И, наконец, чтобы получить выходное значение, требуется лишь $O(1)$ времени для обоих алгоритмов. Из этого следует, что временная сложность алгоритма может быть вычислена по следующей форме:

$$T(n, m) = 2O(n \times m) + 2O(m) + O(1),$$

следовательно,

$$T(n, m) = O(n \times m).$$

4. Детали эксперимента и результаты

Мы рассматриваем объект с двумя входными $x_1, x_2 \in [-2, 2]$ и одной выходной y закономерностями, приведенными ниже:

$$y = x_1 \times \mathrm{e}^{(-x_1^2 - x_2^2)} \tag{4.1}$$

Необходимо провести обучение, основанное на вышеизложенных моделях, синтезировать нечеткую модель и отрегулировать ее в соответствии с нечетким обучающим образом. Пригодность нечеткой модели проверяется в следующем критерии:

$$MSE = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^r - y_i^d \right)^2$$

где y^r — соответствующий выход обучающего образа, а y^d — это желаемый выход модели. Сравним результаты распознавания с четким и нечетким обучающими образами. Обучающие образы

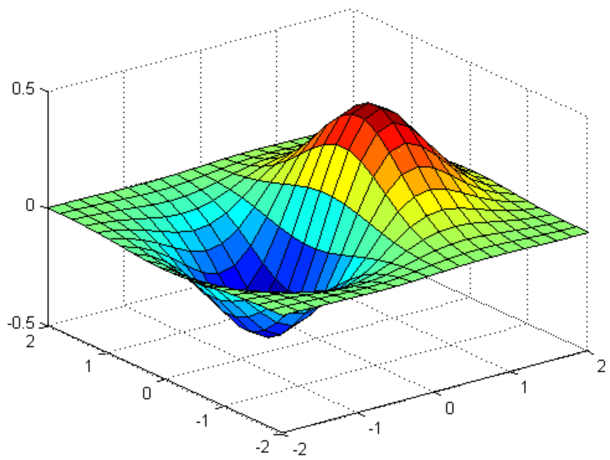


Рис. 4. Эталонная закономерность (4.1)

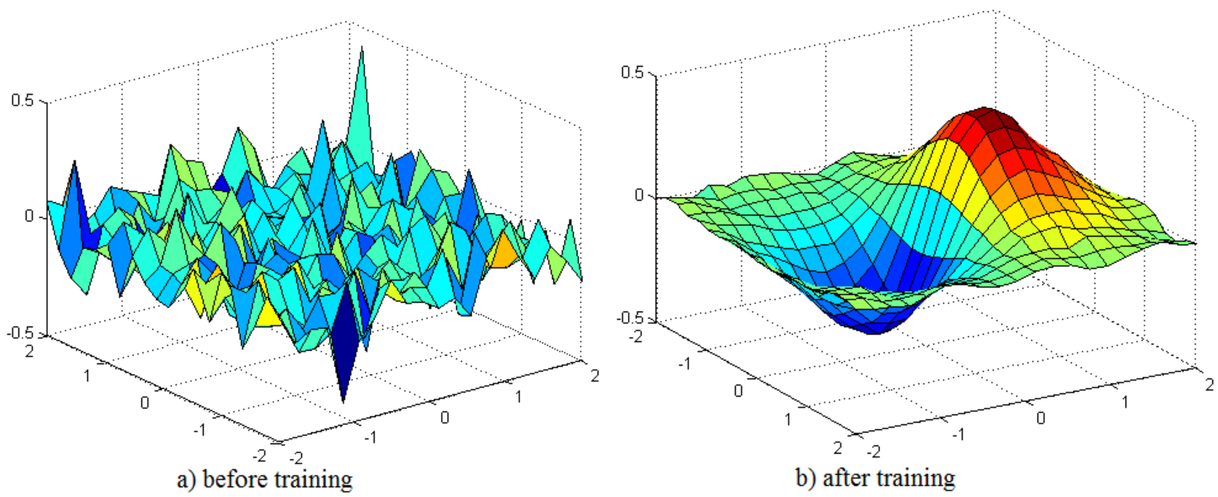


Рис. 5. Геометрические изображения объекта (4.1)

показаны формулой (4.1) и на рис. 4. Прежде чем обучать предложенную модель, ее веса должны быть произвольно определены. В связи с этим предварительно приведена исходная форма модели (рис. 5a). После обучения нейросети получаем модель, геометрическое изображение характеристик которой в сравнении с ее эталоном приведено на рис. 5b. Графики функций принадлежности для нечетких членов входных переменных до и после корректировки показаны на рис. 7, а значения их параметров a и c приведены в табл. 2 и табл. 3, соответственно.

Испытание четкой (рис. 6a) и нечеткой (рис. 6b) моделей указывает на приемлемое распознавание нелинейной закономерности (4.1). В табл. 1 показаны данные о сходимости для различных значений скорости обучения α. Из рис. 6b видно, что среднеквадратичная ошибка, полученная с помощью алгоритма для нечеткого MLP, достигает соответствующего минимума после 600–700 моментов.

Исходя из результатов эксперимента, можно заключить, что предложенная нечеткая модель обладает лучшей сходимостью, чем четкая модель.

5. Заключение

Был разработан нечеткий MLP для распознавания нелинейных систем. Входные данные фаззифицируются с помощью колоколообразной функции принадлежности, а затем подаются в нечеткую MLP модель. После дефаззификации выход предложенного нечеткого MLP дает четкое значение.

Таблица 1. Показатели работы моделей

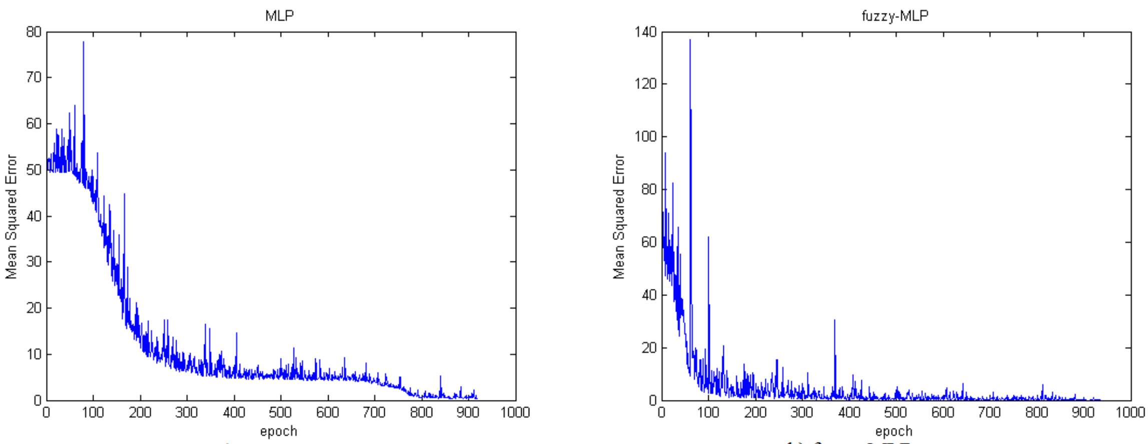
α	Минимальная MSE		Время (сек)	
	MLP	Fuzzy-MLP	MLP	Fuzzy-MLP
0,30	1,0161	0,0234	26,71	24,10
0,40	1,0145	0,0207	25,74	22,42
0,45	1,0754	0,0159	25,97	21,53
0,50	1,2273	0,0268	23,68	20,04
0,55	1,3205	0,0272	23,55	20,19

Таблица 2. Параметры функций принадлежности для членов от переменной x_1

Terms		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
до обучения	a	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
	c	-1,9600	-1,2000	-0,4000	0,4000	1,2000	2,0000
после обучения	a	0,4203	0,2297	0,4620	0,4519	0,2225	0,4247
	c	-1,9947	-1,1667	-0,4678	0,4538	1,2048	1,9823

Таблица 3. Параметры функций принадлежности для членов от переменной x_2

Terms		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
до обучения	a	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
	c	-1,9600	-1,2000	-0,4000	0,4000	1,2000	2,0000
после обучения	a	0,2281	0,4192	0,1911	0,1907	0,4293	0,2350
	c	-1,9941	-0,6719	-0,0760	0,0801	0,6851	2,0225



a) MLP b) fuzzy-MLP

Рис. 6. Графики сходимости MLP (слева) и нечеткого MLP (справа)

Полученные результаты показывают, что предложенная модель сходится к своей минимальной среднеквадратичной ошибке (MSE) при 600–700 моментах и достигает коэффициента сходимости в 93–95%. Из результатов проведенных вычислительных экспериментов можно сделать вывод, что предложенная нечеткая модель значительно опережает классическую MLP модель в смысле скорости обучения и точности. Также вычислительные эксперименты демонстрируют, что нечеткость в опытных данных не является препятствием для распознавания нелинейных закономерностей.

Нечеткие обучающие образы и нечеткие нейромодели могут быть применены в системах управления, медицине и многих других областях, в которых опытные данные для распознавания исследуемых «входных—выходных» закономерностей построены на субъективной основе.

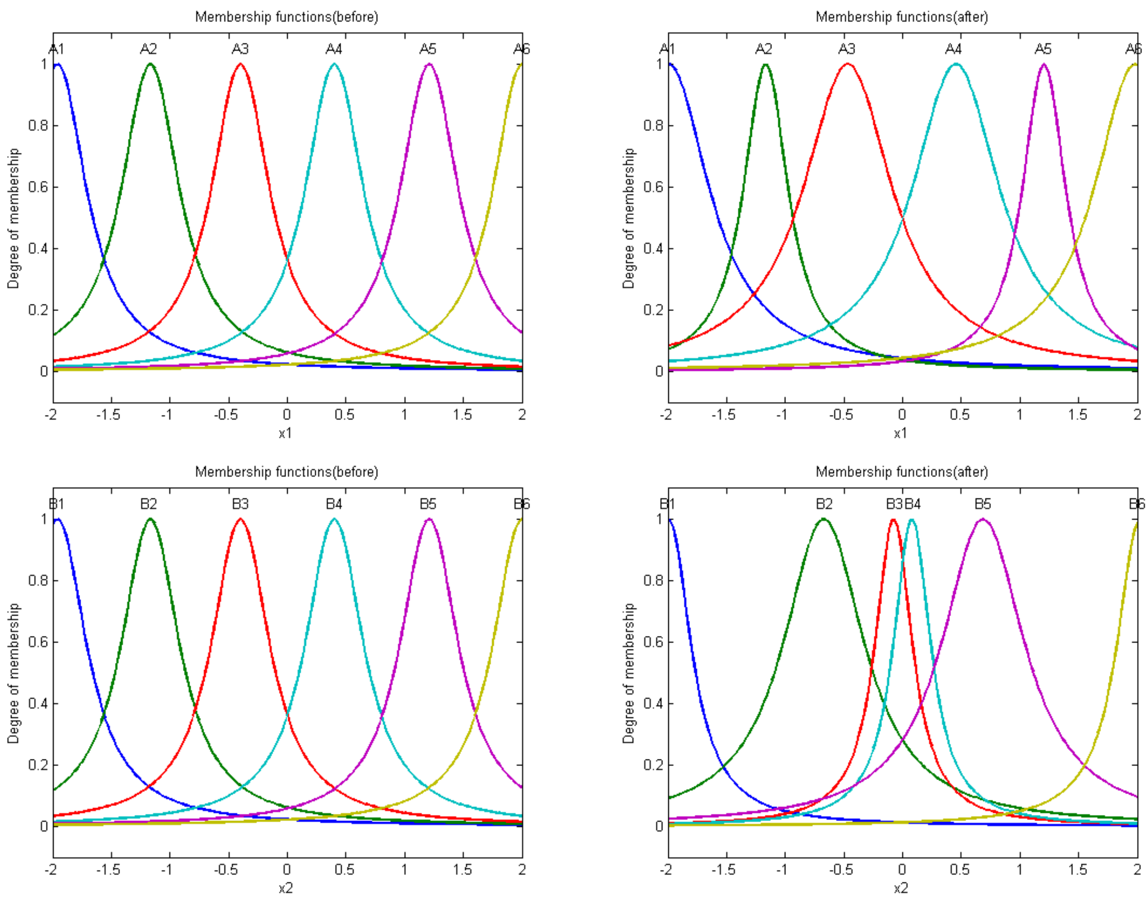


Рис. 7. Графики функций принадлежности

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов В. В., Круглов В. В., Федулов А. С.* Нечеткие модели и сети. 2-е изд. — М.: «Горячая линия – Телеком», 2012.
2. *Митюшкин Ю. И., Мокин Б. И., Ротштейн А. П.* Soft Computing: идентификация закономерностей нечеткими базами знаний. — Вінниця: Універсум, 2002.
3. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.
4. *Штовба С. Д.* Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. — М.: «Горячая линия – Телеком», 2007.
5. *Galushkin A. I.* Neural networks theory. — Berlin—Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
6. *Haykin S.* Neural networks. A comprehensive foundation. 2nd ed. — New York: IEEE, 1999.
7. *Jose K. M., Fabio M. A.* Nonlinear system identification based on modified ANFIS// Proc. 2015 12th Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), Colmar, France, 21–23 July 2015. — Colmar, 2015. — С. 588–595.
8. *Nikov A., Georgiev T.* A fuzzy neural network and its matlab simulation// Proc. ITI99 21st Int. Conf. on Information Technology Interfaces, Pula, Croatia, June 15–18. — Pula, 1999. — С. 413–418.
9. *Qing-Song M.* Approximation ability of regular fuzzy neural networks to fuzzy-valued functions in MS convergence structure// Proc. 32nd Chinese Control Conf., Xian, China, 26–28 July 2013. — Xian, 2013. — INSPEC Acc. Num. 13862419.
10. *Rakesh B. P., Satish K. Sh.* Identification of nonlinear system using computational paradigms// Proc. Int. Conf. on Automatic Control and Artificial Intelligence, Xiamen, China, 3–5 March 2012. — Xiamen, 2012. — С. 1156–1159.
11. *Rotshtein A. P.* Design and tuning of fuzzy if-then rules for medical diagnosis// В сб.: «Fuzzy and neural-fuzzy systems in medical and biomedical engineering». — Boca-Raton: CRC Press, 1998. — С. 243–289.
12. *Rotshtein A. P., Mityushkin Y. I.* Extraction of fuzzy rules from experimental data using genetic algorithms// Cybernet. Systems Anal. — 2001. — № 3. — С. 45–53.

13. *Rotshtein A. P., Shtovba S. D.* Identification of non-linear dependencies of fuzzy knowledge bases with fuzzy learning inputs// Cybernet. Systems Anal. — 2006. — № 2. — С. 17–24.
14. *Rumelhart D. E., Hinton G. E., Williams R. J.* Learning internal representations by back-propagating errors// Nature. — 1986. — *323*. — С. 533–536.
15. *Zimmermann H. J.* Fuzzy set theory and its applications. — Dordrecht–Boston: Kluwer, 1991.
16. *Zongyuan Z., Shuxiang X., Byeong H. K., Mir M., Yunling L., Rainer W.* Investigation and improvement of multi-layer perceptron neural networks for credit scoring// Expert Syst. Appl. — 2015. — *42*, № 7. — С. 3508–3516.

А. Р. Марахимов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: avaz.marakhimov@yandex.ru

К. К. Худайбергенов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: kabul85@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-44-53 UDC 517.55

A Fuzzy MLP Approach for Identification of Nonlinear Systems

© 2019 **A. R. Marakhimov, K. K. Khudaybergenov**

Abstract. In case of decision making problems, identification of non-linear systems is an important issue. Identification of non-linear systems using a multilayer perceptron (MLP) trained with back propagation becomes much complex with an increase in number of input data, number of layers, number of nodes, and number of iterations in computation. In this paper, an attempt has been made to use fuzzy MLP and its learning algorithm for identification of non-linear system. The fuzzy MLP and its training algorithm which allows to accelerate a process of training, which exceeds in comparing with classical MLP is proposed. Results show a sharp reduction in search for optimal parameters of a neuro fuzzy model as compared to the classical MLP. A training performance comparison has been carried out between MLP and the proposed fuzzy-MLP model. The time and space complexities of the algorithms have been analyzed. It is observed, that number of epochs has sharply reduced and performance increased compared with classical MLP.

REFERENCES

1. V. V. Borisov, V. V. Kruglov, and A. S. Fedulov, *Nechetkie modeli i seti. 2-e izd* [Fuzzy Models and Nets. 2nd ed.], Goryachaya liniya – Telekom, Moscow, 2012 (in Russian).
2. Yu. I. Mityushkin, B. I. Mokin, and A. P. Rotshteyn, *Soft Computing: identifikatsiya zakonomernostey nechetkimi bazami znaniy* [Soft Computing: Identification of Regularities by Fuzzy Knowledge Bases], Un?versum, V?nnitsya, 2002 (in Russian).
3. A. Pegat, *Nechetkoe modelirovanie i upravlenie* [Fuzzy Modelling and Control], BINOM. Laboratoriya znaniy, Moscow, 2013 (in Russian).
4. S. D. Shtovba, *Proektirovanie nechetkikh sistem sredstvami MATLAB* [Design of Fussy Systems by Means of MATLAB], Goryachaya liniya – Telekom, Moscow, 2007 (in Russian).
5. A. I. Galushkin, *Neural networks theory*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, 2007.
6. S. Haykin, *Neural networks. A comprehensive foundation. 2nd ed*, IEEE, New York, 1999.
7. K. M. Jose and M. A. Fabio, “Nonlinear system identification based on modified ANFIS,” *Proc. 2015 12th Int. Conf. on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), Colmar, France, 21–23 July 2015*, Colmar, 2015, pp. 588–595.
8. A. Nikov and T. Georgiev, “A fuzzy neural network and its matlab simulation,” *Proc. ITI99 21st Int. Conf. on Information Technology Interfaces, Pula, Croatia, June 15–18*, Pula, 1999, pp. 413–418.

9. M. Qing-Song, "Approximation ability of regular fuzzy neural networks to fuzzy-valued functions in MS convergence structure," *Proc. 32nd Chinese Control Conf., Xian, China, 26–28 July 2013*, Xian, 2013, INSPEC Acc. Num. 13862419.
10. B. P. Rakesh and K. Sh. Satish, "Identification of nonlinear system using computational paradigms," *Proc. Int. Conf. on Automatic Control and Artificial Intelligence, Xiamen, China, 3–5 March 2012*, Xiamen, 2012, pp. 1156–1159.
11. A. P. Rotshtein, "Design and tuning of fuzzy if-then rules for medical diagnosis," In: *Fuzzy and neural-fuzzy systems in medical and biomedical engineering*, CRC Press, Boca-Raton, 1998, pp. 243–289.
12. A. P. Rotshtein and Y. I. Mityushkin, "Extraction of fuzzy rules from experimental data using genetic algorithms," *Cybernet. Systems Anal.*, 2001, No. 3, 45–53.
13. A. P. Rotshtein and S. D. Shtovba, "Identification of non-linear dependencies of fuzzy knowledge bases with fuzzy learning inputs," *Cybernet. Systems Anal.*, 2006, No. 2, 17–24.
14. D. E. Rumelhart, G. E. Hinton, and R. J. Williams, "Learning internal representations by back-propagating errors," *Nature*, 1986, **323**, 533–536.
15. H. J. Zimmermann, *Fuzzy set theory and its applications*, Kluwer, Dordrecht–Boston, 1991.
16. Z. Zongyuan, X. Shuxiang, H. K. Byeong, M. Mir, L. Yunling, and W. Rainer, "Investigation and improvement of multi-layer perceptron neural networks for credit scoring," *Expert Syst. Appl.*, 2015, **42**, No. 7, 3508–3516.

A. R. Marakhimov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: avaz.marakhimov@yandex.ru

K. K. Khudaybergenov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: kabul85@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 54–71

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-54-71 УДК 517.936+517.925.53

ГЕОМЕТРИЯ ОРБИТ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И СИНГУЛЯРНЫЕ СЛОЕНИЯ

© 2019 г. **А. Я. НАРМАНОВ**

Аннотация. Предметом настоящей работы является геометрия орбит семейства гладких векторных полей, заданных на гладком многообразии, и сингулярные слоения, порожденные орбитами. Как известно, геометрия орбиты векторных полей является одним из основных объектов исследования в геометрии и теории управления. В настоящей работе излагаются некоторые результаты автора по этому вопросу. Гладкость всюду в работе будет означать гладкость класса C^∞.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Изучению структуры орбиты семейства гладких векторных полей посвящены исследования многих математиков в связи с ее важностью в приложениях, в теории оптимального управления, динамических системах, в геометрии и в теории слоений [1, 10, 13, 18, 28, 29].

В качественной теории управления множество управляемости (или множество достижимости) системы управления на гладком многообразии в классе кусочно-постоянных управлений совпадает с отрицательной (положительной) орбитой семейства векторных полей, которое определяется системой управления однозначно. В случае симметричных систем множество управляемости (и также множество достижимости) совпадает с орбитой.

С другой стороны, любое семейство векторных полей определяет некоторую динамическую полисистему. Таким образом, изучение структуры множества управляемости тесно связано с изучением структуры орбиты семейства векторных полей. Хорошо известно, что множество управляемости является одним из основных объектов качественной теории оптимального управления [20].

Начиная с второй половины 20 века появилось много работ о структуре орбит и множества управляемости нелинейных систем управления. Большой вклад в этом направлении внесли Р. Брокетт [14], Суссман [19], В. Джарджевич [18], К. Лобри [20] и многие другие.

Пусть M — гладкое (класса C^∞) многообразие размерности n, $V(M)$ — множество всех гладких (класса C^∞) векторных полей, определенных на M. Обозначим через $[X, Y]$ скобку Ли векторных полей $X, Y \in V(M)$. Относительно скобки Ли множество $V(M)$ является алгеброй Ли.

Рассмотрим множество $D \subset V(M)$, через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли, содержащую множество D, через $L(x)$— орбиту семейства D, содержащую точку $x \in M$.

Обозначим через $P(x)$ линейную оболочку множества векторов $D(x) = \{X(x) : X \in D\}$ и введем подпространство $A_x(D) = \{X(x) : X \in A(D)\}$ касательного пространства T_xM в точке x.

Рассмотрим отображения $P : x \to P(x)$ и $P_D : x \to A_x(D)$, соотносящие точке x подпространства $P(x)$ и $A_x(D)$ касательного пространства T_xM соответственно. Такие отображения называются *распределениями*.

Связное подмногообразие N многообразия M называется *интегральным подмногообразием* для распределения P (или P_D), если для каждой точки $x \in N$ имеет место $T_xN = P(x)$ (соответственно $T_xN = A_x(D)$).

Р. Германн в своей работе [17] «О проблеме достижимости в теории управления», доложенной на международной конференции по нелинейным дифференциальным уравнениям и нелинейной механике в 1961 году, первым указал на важность следующего результата Чжоу в теории управления [16] (этот результат почти одновременно был доказан П. Рашевским в [12]):

Если размерности $\dim P(x)$ и $\dim A_x(D)$ не зависят от x, то для каждой точки x множество $L(x)$ является интегральным подмногообразием распределения P_D.

В случае, когда размерность линейного пространства $A_x(D)$ не постоянна, Р. Германн получил достаточные условия, при выполнении которых для каждой точки $x \in M$ орбита $L(x)$ является интегральным подмногообразием вполне интегрируемого распределения $x \to A_x(D)$.

Джарджевич и Сусманн, изучая орбиты и положительные орбиты произвольного семейства аналитических векторных полей на аналитическом многообразии [28, 30], показали, что:

- для каждой точки $x \in M$ положительная орбита $L^+(x)$ имеет непустую внутренность в M тогда и только тогда, когда $\dim A_x(D) = n$ для всех $x \in M$;
- для каждой точки $x \in M$ орбита $L(x)$ является областью тогда и только тогда, когда $\dim A_x(D) = n$ для всех $x \in M$.

В случае гладкости класса C^∞ К. Лобри показал, что если $\dim A_x(D) = n$, то внутренность положительной орбиты $L^+(x)$ всюду плотна в $L^+(x)$ (см. [4]).

Фундаментальным результатом в этом направлении стала теорема Сусманна, которая утверждает, что если многообразие M и векторные поля из D класса C^∞, то для каждого $x \in M$ орбита $L(x)$ является погруженным подмногообразием класса C^∞ многообразия M (см. [28]).

Более точно этот результат формулируется таким образом: существует вполне интегрируемое распределение P^* на M такое, что для каждой точки $x \in M$ орбита $L(x)$ совпадает с максимальным интегральным подмногообразием P^*, проходящим через точку x.

П. Стефан этот результат доказал в случае, когда M и векторные поля из D имеют гладкость класса $C^r, r \geqslant 1$ (см. [27]). Известно, что если векторные поля из D класса C^0, то орбита не является многообразием. Примером может служить непрерывное векторное поле, когда нет единственности решения соответствующего дифференциального уравнения.

Из результатов Нагано [23] следует, что если M и векторные поля из D аналитичны, то распределение $P_D : x \to A_x(D)$ вполне интегрируемо, причем каждая орбита является интегральным подмногообразием для P_D. Таким образом в этом случае размерность орбиты $L(x)$ равна $\dim A_x(D)$ для всех $x \in M$. В общем случае имеет место $\dim A_x(D) \leqslant \dim L(x)$ для всех $x \in M$.

П. Стефан ввел понятие *слоения с особенностями*, которое является обобщением понятия слоения из дифференциальной геометрии, и показал, что орбиты являются слоями некоторого слоения с особенностями [27].

В случае, когда все орбиты имеют одинаковую размерность, разбиение M на орбиты является слоением, что позволяет привлечь методы теории слоений для изучения свойств орбит и множества управляемости гладких систем. Таким образом, с одной стороны, теория слоений, имеющая приложения во многих разделах математики, находит свое применение в теории систем управления. С другой стороны, орбиты систем управления порождают структуру слоения с особенностями, изучение которой включает в себя и изучение теории слоений.

2. Предварительные сведения

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, T_xM — касательное пространство к M в точке x, TM — касательное расслоение многообразия M. Отображение $\pi : TM \to M$ при котором $\pi(X, x) = x$, где $X \in T_xM$ (и, следовательно, $\pi(T_xM) = x$), называется *проекцией*.

Определение 2.1. Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Отображение $X{:}M \to TM$, при котором $\pi \circ X(x) = x$, называется *векторным полем* на M.

Таким образом, векторное поле — такое отображение, которое каждой точке $x \in M$ сопоставляет касательный вектор $X(x) \in T_xM$. Если при этом векторное поле $X : M \to TM$ как отображение двух гладких многообразий M, TM является гладким, то оно называется *гладким векторным полем*. По теореме о существовании и единственности решения дифференциального уравнения через каждую неособую точку многообразия M проходит единственная интегральная кривая. Если точка p является особой, то сама точка является интегральной кривой, проходящей через точку p.

Для точки $x \in M$ через $t \to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t = 0$. Отображение $t \to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x)$, которая в общем случае зависит не только от поля X, но и от начальной точки x.

В дальнейшем, всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t \in I(x)$. Если для всех точек $x \in M$ область определения $I(x)$ кривой $t \to X^t(x)$ совпадает с числовой осью, то векторное поле X называется *полным векторным полем*. В этом случае поток векторного поля порождает динамическую систему.

Известно, что гладкое векторное поле на компактном многообразии M является полным и, следовательно, порождает гладкую динамическую систему.

Пример 2.1. На евклидовой плоскости $M = \mathbb{R}^2$, векторное поле $X(x,y) = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ является полным векторным полем, а векторное поле $X(x,y) = x^2\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$ является неполным. Интегральные кривые второго поля определяются следующими уравнениями:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \quad y(t) = y_0 e^t. \tag{2.1}$$

Векторное поле X неполное, так как область определения переменной t зависит от x_0, и в точке $t = \dfrac{1}{x_0}$ решение не определено.

Пример 2.2. Пусть отображение евклидовой плоскости на двумерный тор $\varphi : \mathbb{R}^2 \to T^2 \subset \mathbb{R}^3$ задается формулой

$$\varphi(u,v) = ((2 + \cos 2\pi v)\cos 2\pi u, (2 + \cos 2\pi v)\sin 2\pi v, \sin 2v).$$

Очевидно, что φ — локальный диффеоморфизм, который отображает горизонтальные прямые из $\mathbb{R}^2$ в параллели на торе, вертикальные прямые в меридианы, и квадрат $[0;1] \times [0;1]$ на весь тор T^2. Равенство $\varphi(u,v) = \varphi(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ выполняется тогда и только тогда, когда $u - \widetilde{u} = m$ и $v - -\widetilde{v} = n$ для некоторых целых m и n. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ рассмотрим векторное поле в $\mathbb{R}^2$, заданное формулой $X^\lambda(u,v) = \{1, \lambda\}$. Легко видеть, что $Y^\lambda = d\varphi(X^\lambda)$ — векторное поле на торе T^2 класса C^∞. Траектории Y^λ — это образы траекторий X^λ при отображении φ, которые являются прямыми в $\mathbb{R}^2$ с угловым коэффициентом λ. При рациональном λ каждая траектория векторного поля Y^λ замкнута, а при иррациональном λ каждая траектория векторного поля Y^λ всюду плотна в торе T^2. Векторное поле Y^λ называется *рациональным* или *иррациональным полем* на торе T^2 соответственно тому, рационально λ или нет. Если λ рационально, то ω — предельное множество всякой траектории — эта сама траектория. Если λ иррационально, то ω — предельное множество всякой траектории — это весь тор T^2.

Множество $V(M)$ гладких векторных полей класса C^∞, заданных на гладком многообразии M, является алгеброй Ли над полем действительных чисел, в которой произведением векторных полей X и Y служит их скобка Ли $[X,Y]$. Если векторные поля X и Y рассмотреть как операцию дифференцирования гладких функций, то скобка Ли $[X,Y]$ определяется как отображение $[X,Y] : F(M) \to F(M,)$, $[X,Y](f) = Y(X(f)) - X(Y(f))$, где $F(M)$ — множество гладких функций.

Следующее свойство скобки Ли хорошо известно [2].

Теорема 2.1. *Если векторные поля X и Y всюду касаются подмногообразия $N \subset M$, то векторное поле $[X,Y]$ также всюду касается подмногообразия N.*

3. Орбиты семейства векторных полей

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, D — семейство гладких векторных полей, заданных на многообразии M. Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Определение 3.1. *Положительная* (*отрицательная*) *полуорбита* $L^+(x)$ (соответственно, $L^-(x)$) семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется (см. в [1]) как множество таких точек y из M, для которых существуют неотрицательные (соответственно, неположительные) действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ из D (где k — произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_{i_k}^{t_k}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}(\ldots(X_{i_1}^{t_1}(x))\ldots)).$$

Определение 3.2. *Орбита* $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M, для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и векторные поля $X_{i_1} X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ из D (где k — произвольное натуральное число) такие, что

$$y = X_{i_k}^{t_k}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}(\ldots(X_{i_1}^{t_1}(x))\ldots)).$$

Ясно, что орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием), если D состоит из одного векторного поля.

Пример 3.1. Рассмотрим на двумерной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x, y) семейство D, состоящее из полей $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}$. Для произвольной точки p с координатами (x_0, y_0) положительная полуорбита, проходящая через эту точку, состоит из точек $\{(x, y) : x \geqslant x_0, y \geqslant y_0\}$, а отрицательная полуорбита состоит из точек $\{(x, y) : x \leqslant x_0, y \leqslant y_0\}$.

Орбита, проходящая через произвольную точку, совпадает со всей плоскостью. Этот пример показывает, что в общем случае объединение положительных и отрицательных полуорбит не совпадает с орбитой.

Пример 3.2. Рассмотрим семейство векторных полей

$$D = \{\frac{\partial}{\partial x}; \varphi(x)\frac{\partial}{\partial y}\},$$

где функция $\varphi(x)$ из класса C^∞ определена следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ e^{\frac{1}{-x^2}}, & x > 0. \end{cases}$$

Положительная полуорбита $L^+(O)$ начала координат является двумерным многобразием, а отрицательная полуорбита $L^-(O)$ является одномерным многобразием. Орбита L начала координат семейства векторных полей D совпадает со всей плоскостью.

Вышеприведенные примеры показывают, что полуорбиты в общем случае не являются подмногообразиями.

Топология орбиты $L(x)$ (топология Суссмана) вводится как сильнейшая топология, для которой все отображения вида

$$(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k \to X_k^{t_k}(X_{k-1}^{t_{k-1}}(\ldots(X_1^{t_1}(x))\ldots))$$

являются непрерывными, где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — действительные числа, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — векторные поля из семейства D.

Как отмечено выше, в работах [27, 28] доказано, что каждая орбита семейства векторных полей (класса $C^r, r \geqslant 1$) с топологией Суссманна обладает дифференциальной структурой, по отношению которым она является гладким многообразием класса C^r, гладко погруженным в M.

Напомним, что подмногообразие $N \subset M$ называется *погруженным* в M, если каноническая инъекция $i : N \to M$ является дифференцируемым отображением максимального ранга.

На каждой орбите возникают две топологии: ее собственная топология как погруженного подмногообразия и индуцированная топология из M. Собственная топология орбиты является более сильной, чем топология, индуцированная из M.

Действительно, если $x \in L(x_0)$, где $x \in M$, $V(x)$ — открытое множество в M, содержащее x, то $L(x_0) \cap V(x)$ является открытым множеством в индуцированной топологии $L(x_0)$. Для каждой точки $y \in L(x_0) \cap V(x)$ образ точки y при $i : L(x) \to M$ содержится в $V(x)$, и в силу непрерывности отображения i существует окрестность $U(y)$ точки в топологии $L(x_0)$ такая, что $U(y) \subset V(x)$. Отсюда следует, что $L(x_0) \cap V(x)$ открыто в топологии $L(x_0)$.

Как показывают примеры, даже когда D состоит из одного векторного поля, эти две топологии не всегда совпадают.

Например, для иррациональной обмотки тора для всех траекторий эти топологии различны.

Определение 3.3. Орбита L называется *собственной*, если каноническая инъекция $i : L \to M$ является вложением, т. е. когда топология слоя совпадает с индуцированной топологией из M.

Определение 3.4. Точка $x \in M$ называется *предельной* для орбиты $L(x_0)$, если существует последовательность точек x_m из $L(x_0)$, которая сходится к x в топологии M и не сходится к этой точке в топологии $L(x_0)$.

Множество всех предельных точек орбиты $L_0 = L(x_0)$ обозначим через $\Omega(L_0)$. Если D содержит только одно векторное поле X, то для незамкнутой траектории $\gamma_{x_0} = \{X^t(x_0) : t \in I(x_0, X)\}$ множество $\Omega(\gamma_{x_0})$ состоит из α и ω — предельных точек γ_{x_0}.

Нетрудно показать, что множество $\Omega(L_0)$ состоит из целых орбит, т. е. $x \in \Omega(L_0)$ влечет за собой $L(x) \subset \Omega(L_0)$.

Следующие утверждения доказаны в работе [1].

Утверждение 3.1.

I. *Орбита L_0 является собственной тогда и только тогда, когда $L_0 \cap \Omega(L_0) = \varnothing$.*

II. *Орбита L_0 является несобственной тогда и только тогда, когда $\Omega(L_0) = \overline{L}_0$, где $\overline{L}_0$ — замыкание орбиты L_0 в M.*

Утверждение 3.2. *Если орбита L является замкнутым подмножеством M, то она является собственной.*

Из утверждения 3.1 вытекает, что предельное множество $\Omega(L)$ пусто для каждого замкнутого слоя L. Если слой L является незамкнутым подмножеством многообразия M, то его предельное множество $\Omega(L)$ может быть пустым или может даже совпадать со всем многообразием.

Определение 3.5. Пусть $x, y \in M$. Точка $y \in L(x)$ называется *T-достижимой* из точки $x \in M$, если

$$y = X_{i_k}^{t_k}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}(\ldots(X_{i_1}^{t_1}(x))\ldots)) \quad \text{и} \quad \sum t_i = T.$$

Обозначим через $A_x(T)$ множество точек, которые T-достижимы из точки x.

С использованием идей Сусманна, в работе [11] доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Множество $A_x(T)$ для каждого $x \in M$ при любом T является подмногообразием $L(x)$ коразмерности единица или ноль.*

Для симметричных систем имеет место более сильное утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть система D симметрична и содержит полное векторное поле. Тогда для каждого $T \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $A_x(T) = A_x(0) = L(x)$.*

Заметим,что система векторных полей D называется *симметричной*, если из $X \in D$ вытекает, что $-X \in D$.

В работе [19] доказана следующая теорема.

Теорема 3.3. *Пусть M — гладкое связное многообразие размерности $n \geqslant 2$. Существует система D, состоящая из двух векторных полей такая, что $L(x) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

С использованием этой теоремы нами доказана следующая теорема.

Теорема 3.4. *Пусть M — гладкое связное многообразие размерности $n \geqslant 2$. Существует система D, состоящая из трех векторных полей такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

Для многообразий с ненулевой эйлеровой характеристикой получен следующий результат [11].

Теорема 3.5. *Пусть M — гладкое компактное связное многообразие размерности $n \geqslant 2$, эйлерова характеристика которого отлична от нуля. Существует система D, состоящая из двух векторных полей такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.*

Следующий пример показывает, что на компактном связном многообразии M с нулевой эйлеровой характеристикой также может существовать система D, состоящая из двух векторных полей такая, что $A_x(0) = M$ для каждой точки $x \in M$.

Пусть трехмерная сфера $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ задана уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$, где x, y, z, w — декартовы координаты в $\mathbb{R}^4$.

Рассмотрим систему на S^3, состоящую их двух векторных полей:

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = -z\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Скобка Ли $[X, Y]$ векторных полей X, Y имеет следующий вид:

$$[X, Y] = -w\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial w}.$$

Векторные поля X, Y, $[X, Y]$ принадлежат подалгебре Ли $A(D)$, которая является минимальной подалгеброй Ли алгебры Ли $V(M)$, содержащей множество D.

В точке $p(1, 0, 0, 0) \in S^3$ векторы $X(p), Y(p), [X, Y](p)$ линейно независимы, т. е. подпространство $A_p(D) = \{X(p) : X \in A(D)\}$ трехмерно. Поэтому орбита $L(p)$ является трехмерной. В силу того, что X, Y являются векторными полями Киллинга, орбита $L(p)$ является замкнутым подмножеством $\mathbb{R}^4$ (следовательно, в S^3) [10]. С другой стороны, в силу максимальности размерности, орбита $L(p)$ является открытым подмножеством S^3. Следовательно, орбита совпадает с S^3.

Теперь рассмотрим множества $A_q(0)$ для $q \in S^3$. Если множества A_q являются подмногообразиями коразмерности один, то в силу того, что векторные поля X, Y являются векторными полями Киллинга, они порождают двумерное риманово слоение на S^3 (см. [10]). Как следует из результатов работы [9], на трехмерной сфере не существуют двумерных римановых слоений. Следовательно, множество $A_q(0)$ совпадает с S^3 для всех $q \in S^3$.

Определение 3.6. Пусть M — гладкое многообразие размерности n, T_xM — касательное пространство в точке $x \in M$. Отображение P, ставящее каждое точке $x \in M$ некоторое подпространство $P(x) \subset T_xM$, называется *распределением*. Если $\dim P(x) = k$ для всех $x \in M$, то P называется *k-мерным распределением*.

Определение 3.7. Распределение P называется *гладким*, если для каждой точки $x \in M$ существует окрестность этой точки $U(x)$, и гладкие векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_m$, заданные на $U(x)$, такие, что векторы $X_1(y), X_2(y), \ldots, X_m(y)$, образуют базис для подпространства $P(y)$ для каждого $y \in U(x$.

Определение 3.8. Распределение P называется *вполне интегрируемым*, если для каждой точки $x \in M$ существует связное подмногообразие N_x многообразия M, содержащее точку x такое, что $T_yN_x = P(y)$ для всех $y \in N_x$.

Подмногообразие N_x называется *интегральным подмногообразием* распределения P.

Если дано семейство D гладких векторных полей, то естественным образом возникает гладкое распределение. Действительно, если D состоит из гладких векторных полей, то для каждой точки $x \in M$ множество векторов $D(x) = \{X(x) : X \in D\}$ порождает некоторое подпространство $P_D(x)$ касательного пространства T_xM. Разумеется, размерности подпространств $P(x)$ могут меняться от точки к точке. Это распределение обозначим через P_D.

Говорят, что векторное поле X *принадлежит распределению* P, если $X(x) \in P(x)$ для всех $x \in M$.

Напомним, что распределение P на многообразии M называется *инволютивным*, если для $X, Y \in P$ имеет место $[X, Y] \in P$.

Необходимое и достаточное условие вполне интегрируемости распределения постоянной размерности дано в теореме Фробениуса [21].

Теорема 3.6 (Фробениус). *Для того, чтобы распределение P было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы оно было инволютивным.*

Замечание 3.1. Пусть $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ — вполне интегрируемое семейство векторных полей такое, что размерность линейной оболочки в T_xM векторов $\{X_1(x), X_2(x), \dots, X_k(x)\}$ постоянна и равна s независимо от x. Тогда, как следует из доказательства теоремы Фробениуса, для каждой точки $x_0 \in M$ существует локальная система координат $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ в некоторой окрестности V_0 точки x_0 такая, что компоненты связности пересечения интегрального подмногообразия с V_0 описываются уравнениями $y_{k+1} = c_{k+1}, y_{k+2} = c_{k+2}, \dots, y_n = c_n$, где $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ — постоянные.

Одномерное гладкое распределение всегда интегрируемо в силу локальной теоремы существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, одномерное распределение всегда порождает одномерное слоение.

Определение 3.9. Семейство векторных полей D называется *вполне интегрируемым*, если соответствующее распределение P_D, порожденное D, является вполне интегрируемым.

Отметим, что если семейство D состоит из одного векторного поля, то оно всегда вполне интегрируемо, так как по теореме о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений через каждую точку проходит единственная интегральная кривая векторного поля. Если семейство состоит из более чем одного векторного поля, то оно не всегда вполне интегрируемо.

Теорема Фробениуса, обобщенная Херманном для распределений непостоянной размерности, дает необходимое и достаточное условие для вполне интегрируемости семейства векторных полей, состоящего из конечного числа векторных полей.

Теорема 3.7 (Херманн). *Пусть $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ — семейство конечного числа векторных полей на многообразии M. Семейство D вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда оно инволютивно.*

Инволютивность семейства векторных полей $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ означает следующее: для любых векторных полей $X, Y \in D$ существуют гладкие функции $f^i(x), x \in M$, $l = 1, \dots, k$ такие, что

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{k} f^i(x) X_i.$$

В случае, когда семейство состоит из бесконечного числа векторных полей, как показывает следующий пример, эта теорема неверна.

Пример 3.3. Пусть $M = \mathbb{R}^2$. Рассмотрим семейство векторных полей D, порожденное полем $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и всеми векторными полями вида $f(x)\dfrac{\partial}{\partial y}$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная гладкая функция, все производные которой в нуле равны нулю: $f^i(0) = 0, i = 0, 1, 2, \dots$. Нетрудно проверить, что это семейство инволютивно. Несмотря на это, нет интегральных подмногообразий, проходящих через точки вида $(0; y)$.

Заметим, что если N — интегральное подмногообразие системы векторных полей $D = \{X_1, X_2, \dots, X_k\}$, то размерность подпространства пространства T_yM, порожденного векторами $X_1(y), X_2(y), \dots, X_k(y)$, равна размерности подмногообразия N в каждой точке $y \in N$. Это не исключает возможности, что размерность подпространства, порожденного векторами $X_1(y), X_2(y), \dots, X_k(y)$, меняется от точки к точке. Это означает только то, что данное семейство векторных полей может иметь интегральные подмногообразия различных размерностей.

Пример 3.4. Рассмотрим семейство векторных полей

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = 2xz\frac{\partial}{\partial y} + 2yz\frac{\partial}{\partial y} + (z^2 + 1 - x^2 - y)$$

на $\mathbb{R}^3$. Легко проверить, что $[X, Y] = 0$, так что по теореме Фробениуса система $\{X, Y\}$ интегрируема. Для данной точки (x, y, z) подпространство пространства $T\mathbb{R}^3|_{(x,y,z)}$, порожденное векторами $X|_{(x,y,z)}$ и $Y|_{(x,y,z)}$, является двумерным, исключая точки оси Oz и окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, где оно одномерно. Нетрудно проверить, что и окружность, и ось Oz являются одномерными интегральными подмногообразиями системы X, Y. Все другие интегральные подмногообразия — двумерные торы, которые заданы уравнениями $\varphi(x,y,z)=c$, где $\varphi(x,y,z)=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+y^2+z^2+1)$, определенные при $c>0$. В самом деле, $d\varphi(X)=X(\varphi)=0$, $d\varphi(Y)=Y(\varphi)=0$ всюду, так как оба поля касаются каждого множества уровня функции φ.

Отметим, что если семейство векторных полей вполне интегрируемо, то орбита является интегральным подмногообразием распределения P_D (см. [29]).

Теорема 3.8. *Пусть семейство D гладких векторных полей вполне интегрируемо. Тогда каждая орбита семейства D является интегральным подмногообразием распределения P_D.*

Теперь перейдем к изучению геометрии векторных полей Киллинга. В этой части излагаются результаты, полученные в работе [10].

Напомним, что векторное поле X на M называется *векторным полем Киллинга*, если однопараметрическая группа локальных преобразований $x \to X^t(x)$, порожденная полем X, состоит из изометрий.

Отметим, что скобка Ли двух полей Киллинга дает опять поле Киллинга и линейная комбинация полей Киллинга над полем действительных чисел тоже является полем Киллинга. Поэтому множество всех векторных полей Киллинга на многообразии M, обозначаемое $K(M)$, образует алгебру Ли над полем действительных чисел. Кроме того, известно, что алгебра Ли $K(M)$ векторных полей Киллинга связного риманова многообразия M имеет размерность не более чем $\dfrac{1}{2}n(n+1)$, где $n=\dim M$. Если $\dim K(M)=\dfrac{1}{2}n(n+1)$, то M есть многообразие постоянный кривизны.

Теперь через $A(D)$ обозначим наименьшую подалгебру Ли алгебры $K(M)$, содержащую множество D.

Так как алгебра $K(M)$ конечномерна, то существуют такие векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_m$ из $A(D)$, что векторы $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_m(x)$ образуют базис для подпространства $A_x(D)$ для каждого $x \in M$.

Таким образом, в случае, когда семейство D состоит из векторных полей Киллинга, из теоремы 3.8 мы получим следующую теорему.

Теорема 3.9. *Каждая орбита семейства D является интегральным подмногообразием вполне интегрируемого распределения $P_D : x \to A_x(D)$.*

Теорема 3.10. *Пусть $M=\mathbb{R}^n$ и множество D состоит из векторных полей Киллинга. Тогда каждая орбита семейства D является замкнутым подмножеством.*

Пусть $f : M \longrightarrow N$ — дифференцируемое отображение максимального ранга, где M — гладкое риманово многообразие размерности n, N — гладкое риманово многообразие размерности m, где $n>m$. Тогда для каждой точки $q \in N$ множество $L_q = p \in M : f(p)=q$ является многообразием размерности $n-m$.

Пусть L — слой слоения F (орбита семейства D), $x \in L$, T_xL — касательное пространство L в точке x, $H(x)$ — ортогональное дополнение T_xL. Возникают два подрасслоения $TF : x \longrightarrow T_xL$, $H : x \longrightarrow H(x)$ касательного расслоения TM многообразия M. В этом случае каждое векторное поле $X \in V(M)$ можно представить в виде $X = X_F + X_H$, где X_F, X_H — ортогональные проекции X на TF, H соответственно. Если $X_H=0$, то оно называется *вертикальным полем* (касательным к F), а если $X_F=0$, то X называется *горизонтальным полем*.

Отображение $f : M \longrightarrow N$ называется *римановой субмерсией*, если дифференциал df отображения f сохраняет длину горизонтальных векторов [25].

Обозначим через $B=M/F$ множество слоев F, наделенное фактор-топологией. Рассмотрим отображение $\pi : M \to F$, при котором $\pi(x)=L(x)$, где $L(x)$ — слой, содержащий точку x. Следующая теорема показывают, что орбиты являются слоями римановой субмерсии.

Теорема 3.11. *Пусть $M=\mathbb{R}^n$, множество D состоит из векторных полей Киллинга и $\dim V_x(D)=k$ для всех $x \in M$, где $0<k<n$. Тогда множество слоев $B=M/F$, наделенное фактор-топологией, обладает такой дифференциальной структурой гладкого $(n-k)$-мерного многообразия, что отображение $\pi : M \to B$ является гладкой римановой субмерсией.*

Следствие 3.1. *Многообразие B является многообразием неотрицательной кривизны.*

Теорема 3.12. *В условиях теоремы 4.5 орбиты семейства D являются параллельными плоскостями тогда и только тогда, когда многообразие $B = M/F$ является многообразием нулевой кривизны.*

Рассмотрим векторное поле

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$

в $M = \mathbb{R}^3$. Это поле является векторным полем Киллинга, и его интегральными кривыми являются винтовые линии.

Ортогональное распределение $H : p \longrightarrow H(p)$ в каждой точке задается горизонтальными векторными полями

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z},$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Рассмотрим векторные поля $Y_* = d\pi(Y), Z_* = d\pi(Z)$ на $B = M/F$. В силу того, что отображение $\pi : M \longrightarrow B$ имеет максимальный ранг, векторные поля Y_*, Z_* линейно независимы в каждой точке многообразия $B = M/F$.

Вычислим секционную кривизну многообразия $B = M/F$ в двумерном направлении, определенном векторами $Y_*(q), Z_*(q)$ в точке $q \in B$. По формуле О'Нейла, если (x, y, z) — декартовы координаты точки $p \in \pi^{-1}(q)$, то для вертикальной компоненты $[Y, Z]^v$ скобки Ли $[Y, Z]$ векторных полей имеет место равенство $[Y, Z]^v(p) = \lambda X(p)$, где $\lambda = (x^2 + y^2 + 1)^{-1}$. Отсюда получим следующее выражение для кривизны:

$$K_*(Y_*, Z_*)(q) = \frac{3}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Таким образом, в этом случае многообразие $B = M/F$ является двумерным многообразием строго положительной кривизны. В этом примере все интегральные кривые (орбиты), кроме одной, проходящей через начало координат, не являются одномерными плоскостями.

Теорема 3.13. *Пусть $M = \mathbb{R}^n$, D состоит из векторных полей Киллинга, и для точки $p \in M$ орбита $L(p)$ является k-мерной плоскостью, где $0 \leqslant k \leqslant n$. Тогда для всех точек $q \in L(p)$ множества $A_q(0)$ либо совпадают с $L(p)$, либо являются параллельными гиперплоскостями в $L(p)$.*

4. Сингулярные слоения

Пусть M — гладкое многообразие размерности n, A — максимальный атлас, определяющий на M структуру гладкого многообразия класса C^r, где $r \geqslant 0$. Многообразие M является также многообразием класса C^s, если $0 \leqslant s \leqslant r$. Систему локальных криволинейных координат на C^s-многообразии M обозначим через A^s.

Пусть теперь целое k удовлетворяет неравенствам $0 < k < n$.

Определение 4.1. Семейство $F = \{L_\alpha; \alpha \in B\}$ линейно связных подмножеств M называется *k-мерным C^s-слоением*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

(F_I) : $\bigcup_{\alpha \in B} L_\alpha = M$;

(F_{II}) : для всех $\alpha, \beta \in B$ если $\alpha \neq \beta$, то обязательно $L_\alpha \cap L_\beta = \varnothing$;

(F_{III}) : для всякой точки $p \in M$ можно выбрать локальные координаты $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^{(s)}, p \in U_\lambda$ так, что если $U_\lambda \cap L_\alpha \neq \varnothing$ для некоторого $\alpha \in B$, то компоненты линейной связности множества $\varphi_\lambda(U_\lambda \cap L_\alpha)$ имеют вид

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \varphi_\lambda(U_\lambda) : x_{k+1} = c_{k+1}, x_{k+2} = c_{k+2}, \ldots, x_n = c_n\},$$

где числа $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n$ постоянны на компонентах линейной связности.

Множество L_α называется *слоем* слоения F. В описанной ситуации k-мерное C^s-слоение называется также *C^s-слоением коразмерности* $q = n - k$. Наличие слоения F в многообразии M выражается символом (M, F). Условия $(F_1), (F_{11})$ означают, что M состоит из взаимно непересекающихся слоев. Условие (F_{111}) означает, что локально слои устроены как параллельные плоскости. Если выполняется условие (F_{III}), то координатные окрестности $(U_\lambda, \varphi_\lambda) \in A^{(s)}$, называются *расслоенными*, а совокупность всех расслоенных координатных окрестностей обозначается через A_F^s и называется *системой расслоенных координатных окрестностей*.

Пример 4.1. Пусть X — векторное поле на M без особых точек, т. е. $X(x) \neq 0$ для всех $x \in M$. Тогда по теореме о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (2.1) вида $\dot{x} = X(x)$ через каждую точку $x_0 \in M$ проходит единственная интегральная кривая $\gamma(t, x_0)$ векторного поля X. Поэтому многообразие M является объединением интегральных кривых векторного поля X.

Разбиение M на интегральные кривые векторного поля X является одномерным слоением. Условие (F_{III}) определения 4.1 вытекает из теоремы о выпрямлении векторного поля. Действительно, по этой теореме для каждой точки $x_0 \in X$ такой, что $X(x_0) \neq 0$ существуют окрестность U и локальная криволинейная система координат $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ на U такие, что в этих координатах уравнение запишется в виде:

$$\begin{gathered} \dot{y}_1 = 1, \\ \dot{y}_2 = 0, \\ \dots \\ \dot{y}_n = 0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Пример 4.2. Как вытекает из теоремы Фробениуса, если k-мерное распределение P класса C^r вполне интегрируемо, то интегральные подмногообразия P образуют k-мерное слоение класса C^r (где $r = s$ или $r = s + 1$).

Пример 4.3. Пусть $f : M \to N$ — дифференцируемое отображение максимального ранга, где M — гладкое многообразие размерности n, N — гладкое многообразие размерности m. При $n > m$ отображение f называется *субмерсией*, а при $n < m$ отображение f называется *погружением*.

Следующая теорема показывает, что дифференцируемые субмерсии порождают гладкие слоения.

Теорема 4.1. *Пусть $f : M \to N$ — субмерсия. Тогда для каждой точки $q \in N$ множество $L_q = \{p \in M : f(q) = q\}$ является многообразием размерности $(n - m)$ и разбиение M на многообразия L_q является $k = (n - m)$-мерным слоением.*

Пусть $(L_\alpha : A_\alpha) \to M^n$ — отображение включения из (L_α, A_α) в M^n. В силу условия (F_{III}) взаимно однозначное отображение l_α является C^r-погружением. Если l_α является C^r-вложением, то говорят, что L_α — *собственный слой*. Легко проверить, что всякий компактный слой является собственным. Если $Int\overline{L}_\beta \neq \oslash$, то слой l_β называется локально плотным. Слой, не являющийся ни собственным, ни локально плотным, называется *исключительным*.

С геометрической точки зрения важными классами слоений являются римановы и вполне геодезические слоения. Пусть M — гладкое связное риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g.

Определение 4.2. Слоение F называется *вполне геодезическим*, если каждый слой слоения является вполне геодезическим подмногообразием.

Вполне геодезические слоения изучены многими авторами, в частности, в работах [15, 31].

Пусть M — гладкое связное риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g. Риманова метрика g единственным образом определяет риманову связность ∇ без кручения (связность Леви-Чивита). Связность ∇ называется *римановой*, если для каждой гладкой кривой $\gamma : [a, b] \to M$ и любых двух параллельных векторных полей X, Y вдоль γ (т. е. $\nabla_{\dot\gamma} X = 0, \nabla_{\dot\gamma} Y = 0$, где $\dot\gamma$ — поле касательных векторов γ) функция $g(X, Y)$ постоянна вдоль γ. При этих условиях параллельный перенос вектора из $T_{\gamma(a)}M$ в $T_{\gamma(b)}M$ является изометрическим отображением. Известно, что связность ∇ на M является римановой тогда и только тогда, когда для любых векторных полей X, Y, Z имеет место

$$Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

Связность ∇ является связностью без кручения тогда и только тогда, когда

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \quad \text{для любых векторных полей } X, Y.$$

Пусть $x \in M, C(x)$ — множество петель в точке x, т. е. множество всех замкнутых кусочно-гладких кривых с началом и концом в точке x. Для каждой кривой $\tau \in C(x)$ параллельный перенос вдоль τ, как отметили выше, есть изометрия касательного пространства T_xM на себя. Множество таких изометрий образуют группу $\psi(x)$. Эта группа называется *группой голономии* для связности ∇ в точке x (см. [3, с. 75]). Если группа $\psi(x)$ приводима, то многообразие M называется *приводимым*. В этом случае существует нетривиальное подпространство $P(x)$ касательного пространства T_xM, которое инвариантно под действием $\psi(x)$, т. е. для каждого вектора $v \in P(x)$ и для каждой изометрии $h \in \psi(x)$ имеет место $h(v) \in P(x)$.

Известно, что если M приводимо, то на M возникают два распределения P и H, взаимно дополнительные по ортогональности, т. е. $T_xM = P(x) \oplus H(x)$ для всех $x \in M$. Причем, оба распределения P и H являются параллельными относительно ∇, вследствие чего и вполне интегрируемыми. Параллельность относительно ∇ означает следующее: если $\gamma : [a,b] \to M$ — произвольная кусочно-гладкая кривая, а $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$, $v \in P(x)$ (или $v \in H(x)$), то в результате параллельного переноса вдоль γ вектор v переходит в вектор из $P(y)$ (соответственно, из $H(y)$).

Возникшие слоения (в силу вполне интегрируемости P и H) являются вполне геодезическими римановыми слоениями. При этом, если M полно и односвязно, то, как утверждает теорема де Рама, многообразие M изометрично прямому произведению любых двух слоев из разных слоений [3, с. 180].

В работе [8] изучена геометрия слоения F на M, которое является римановым вполне геодезическим слоением. Вполне интегрируемость распределения, дополнительного по ортогональности, не предполагается.

Пусть F — гладкое слоение размерности k на M. Обозначим через $L(p)$ — слой слоения F, проходящий через точку p, $F(p)$ — касательное пространство слоя $L(p)$ в точке p, $H(p)$ — ортогональное дополнение $F(p)$ в T_pM, $p \in M$. Возникают два подрасслоения (гладкие распределения) $TF = \{F(p) : p \in M\}$, $H = \{H(p) : p \in M\}$ касательного расслоения TM такие, что $TM = TF \oplus H$, где H является ортогональным дополнением TF.

Пусть $\pi_1 : TM \to TF, \pi_2 : TM \to H$ — ортогональные проекции, $V(M), V(F), V(H)$ — множества гладких сечений расслоений TM, TF, H соответственно.

Если $X \in V(F)$ $(X \in V(H))$, то X назовем *вертикальным* (*горизонтальным*) *полем*.

Предположим, что каждый слой F является вполне геодезическим подмногообразием M. Это эквивалентно тому, что $\nabla_X Y \in V(F)$ для всех $X, Y \in V(F)$.

Тогда на расслоениях TF и H определены метрические связности ∇^1 и ∇^2 следующим образом. Если $X \in V(F), Y \in V(H), Z \in V(M)$, тогда

$$\nabla^1_Z X = \pi_1(\nabla_Z X), \nabla^2_Z Y = \pi_2[Z_1, \tilde{Y}] + \pi_2 \nabla_{Z_2} Y,$$

где $Z = Z_1 \oplus Z_2$, $Z_1 \in V(F), Z_2 \in V(H)$, $\tilde{Y} \in V(M), \pi_2 \tilde{Y} = Y$; здесь $[Z_1, \tilde{Y}]$ — скобка Ли векторных полей Z_1 и Y.

Полагая $\tilde{\nabla}_Z X = \nabla^1_Z X_1 \oplus \nabla^2_Z X_2$, где $X, Z \in V(M), X_i = \pi_i(X), i = 1,2$, получим связность $\tilde{\nabla}$ на TM. Как доказано в работе [8], если слоение F является римановым слоением, слои которого являются вполне геодезическими подмногообразиями M, то связность $\tilde{\nabla}$ является метрической.

Теперь предположим, что многообразие M односвязно. Тогда имеет место следующая теорема [8].

Теорема 4.2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. *Распределение H вполне интегрируемо.*
2. *$\tilde{\nabla}$ является связностью без кручения (т. е. $\tilde{\nabla} = \nabla$).*

Замечание 4.1. В общем случае распределение H не всегда вполне интегрируемо. Примером может служить хорошо известное расслоение Хопфа на трехмерной сфере S^3. Трехмерную сферу S^3 зададим как множество пар (z_1, z_2) комплексных чисел z_1, z_2, удовлетворяющих уравнению $z_1^2 + z_2^2 = 1$. Тогда расслоение Хопфа задается субмерсией $h : S^3 \to S^2$, при которой $h(z_1, z_2) = \dfrac{z_1}{z_2}$. Здесь двумерная сфера S^2 рассматривается как расширенная комплексная плоскость $C \cup \{\infty\}$.

Для каждого $\lambda \in S^2$ слой $h^{-1}(\lambda)$ слоения Хопфа есть окружность в S^3, которая является геодезической. Действительно, $h^{-1}(\lambda)$ является пересечением сферы S^3 и двумерной плоскости $z_1 = \lambda z_2$, проходящей через начало координат. Поэтому для каждого $\lambda \in S^2$ слой $h^{-1}(\lambda)$ является вполне геодезическим подмногообразием S^3. С другой стороны, расслоение Хопфа можно задать с помощью действия одномерной сферы S^1 на S^3.

Одномерная сфера S^1 рассматривается как множество комплексных чисел вида $e^{i\phi}$, и действие S^1 на S^3 задается по формуле $(z_1, z_2) \to (z_1 e^{i\phi}, z_2 e^{i\phi})$. Это действие является свободным, и поэтому каждая орбита диффеоморфна S^1. Если $\lambda = \dfrac{z_1^0}{z_2^0}$, то орбита, содержащая точку (z_1^0, z_2^0), описывается уравнением $z_1 = \lambda z_2$. Следовательно, каждая орбита есть слой расслоения $h : S^3 \to S^1$.

Пусть $p, q \in S^3$, $L(p), L(q)$ — слои расслоения Хопфа, проходящие через точки p и q, и пусть $r = \rho(p, L(q))$ — расстояние от точки p до слоя $L(q)$. Из того, что расслоение Хопфа определяется действием S^1, вытекает, что $\rho(p', L(q)) = r$ для всех $p' \in L(p)$. Следовательно, слоение F, определяемое слоями расслоения Хопфа, является римановым слоением. Пусть TF — распределение, касательное к F, а H — его ортогональное дополнение. Распределение H не является вполне интегрируемым. Действительно, если H вполне интегрируемо, то по теореме 4.2 связность $\tilde{\nabla}$ совпадает с ∇ и следовательно, распределения TF и H удовлетворяют условиям теоремы де Рама. Тогда S^3 должна быть изометричной прямому произведению $S^1 \times S^2$, что невозможно.

Теперь рассмотрим вполне интегрируемые распределения и связанные с ними слоения с особенностями. Ясно, что если распределение P вполне интегрируемо, то многообразие M распадается на интегральные многообразия этого распределения. Если распределение P вполне интегрируемо и размерность подпространства $k = \dim P(x)$ не зависит от x, то интегральные многообразия порождают k-мерное слоение. В общем случае, поскольку размерности интегральных многообразий различны, на M не возникает слоение. Однако это разбиение приводит к понятию слоения с особенностями (к сингулярным слоениям). Поэтому сейчас перейдем к описанию слоений с особенностями. Во избежания недоразумений, для обычных слоений в случае необходимости будем употреблять термин «регулярное слоение».

Определение 4.3. Подмножество L многообразия M называется *k-мерным слоем*, если существует дифференциальная структура σ на L такая, что:

1. (L, σ) есть связное k-мерное погруженное многообразие M;
2. если N — произвольное локально связное топологическое пространство и $f : N \to M$ — непрерывное отображение такое, что $f(N) \subset L$, то $f : N \to (L, \sigma)$ непрерывно.

Из определения погружений следует, что если $f : N \to M$ — дифференцируемое отображение и $f(N) \subset L$, тогда $f : N \to (L, \sigma)$ также дифференцируемо. Поэтому, в частности, σ является единственной дифференциальной структурой, по отношению к которой L является k-мерным подмногообразием.

Определение 4.4 (см. [27]). Пусть $1 \leqslant q \leqslant \infty$ или $q = \omega$ (аналитичность). Будем говорить, что разбиение F многообразия M на C^q-слои является *сингулярным слоением* (*слоением с особенностями*) класса C^q, если для каждой точки $x \in M$:

а) существует локальная C^q-карта ψ с областью определения $U \times V$, где U — окрестность нуля в $\mathbb{R}^k, V$ — окрестность нуля в $\mathbb{R}^{n-k}$, и k есть размерность слоя, проходящего через точки x;
б) $\psi(0, 0) = x$;
в) если L слой F, тогда имеет место равенство $L \cap \psi(U \times V) = \psi(U \times l)$, где $l = \{v \in V : \psi(0, v) \in L\}$.

В дальнейшем, как и в случае слоений постоянной размерности, слой слоения F, проходящий через точку x, обозначим через $L(x)$.

Пример 4.4. Каждое регулярное слоение является слоением с особенностями. В этом случае каждая компонента связности множества l является точкой.

Пример 4.5. Пусть S — замкнутое подмножество многообразия M, $M\backslash S = \bigcup_{\alpha} M_\alpha$ — разбиение дополнения $M\backslash S$ на компоненты связности M_α, F_α — регулярное слоение на M_α. Тогда семейство $F = \bigcup_{\alpha} F_\alpha \cup \{x : x \in S\}$ определяет слоение с особенностями на M.

Пример 4.6. Орбиты семейства векторных полей класса C^r определяют слоение с особенностями класса C^r. Это вытекает из следующей теоремы, принадлежащей Г. Суссманну [28] и П. Стефану [27], которая является фундаментальной при исследовании орбит системы векторных полей.

Теорема 4.3. *Пусть M — гладкое (класса C^{r+1}) многообразие размерности n, D — система векторных полей класса $C^r, r \geqslant 1$. Тогда орбиты системы D векторных полей определяют сингулярное слоение класса C^r.*

В дальнейшем всюду орбиту системы D будем рассматривать как слой слоения F с особенностями.

Отметим, что функция $x \to \dim L(x)$ является полунепрерывной снизу. Действительно, если $x \in M$, $(U \times V, \psi)$ — локальная карта в окрестности точки x, описанная в определении, и $L \cap \psi(U \times V) \neq \oslash$, где L — слой F, то $\dim(L \cap \psi(U \times V)) = \dim(U \times l) \geqslant \dim U = \dim L(x)$.

Как и в случае регулярных слоений, слой L слоения F с особенностями называется *собственным*, если каноническая инъекция $i : L \to M$ является вложением.

Обозначим через M/F множество слоев слоения F. Введем отношение на множестве M/F, определим понятия глубины слоя и слоения, следуя [24].

Пусть $L^1, L^2 \in M/F$. Пишем $L^1 \leqslant L^2$ тогда и только тогда, когда $L^1 \subset \overline{L^2}$. Запись $L^1 < L^2$ означает, что $L^1 \leqslant L^2$ и $L^1 \neq L^2$.

Обозначим через $(M/F, \leqslant)$ множество слоев с введенным отношением на нем. Очевидно, что это отношение $\leqslant$ рефлексивно, но во многих случаях это отношение не является антисимметричным (например, для иррациональной обмотки тора), поэтому в общем случае множество $(M/F, \leqslant)$ не является частично упорядоченным множеством.

Глубина слоя L и глубина слоения F определяются следующим образом: $dL = Sup(k$: существует k слоев, удовлетворяющие условию: $L^0 < L^1 < L^2 < \ldots < L^k = L)$, $dF = Sup(dL : L \in M/F)$.

Если $\dim A_x(D) = n - 1$ для всех $x \in M$, то, как было отмечено выше, F является слоением коразмерности один. В работе [24] для слоений коразмерности один компактных многообразий получен следующий результат.

Теорема 4.4 (Нисимори). *Если $dF < \infty$ или все слои слоения F собственные, то множество $(M/F, \leqslant)$ частично упорядочено.*

Нисимори, изучая свойства слоений коразмерности один, поставил следующие вопросы, которые представляют интерес и для слоений с особенностями [24]:

1. Может ли слоение F иметь несобственные слои, если множество $(M/F, \leqslant)$ частично упорядочено?
2. Можно ли утверждать, что слой L — собственный, если $dL < \infty$?
3. Существует ли такое слоение F, что множество $(M/F, \leqslant)$ частично упорядочено и $dF = \infty$?

Следующая теорема решает вопросы 1,2 [5].

Теорема 4.5. *Для того чтобы множество $(M/F, \leqslant)$ было частично упорядоченным, необходимо и достаточно, чтобы все слои слоения f были собственными.*

Следствие 4.1. *В замыкании каждого несобственного слоя L содержатся несчетное число несобственных слоев, замыкание которых совпадает с L.*

Из этого следствия вытекает, что если слоение с особенностями имеет несобственный слой, то оно имеет несчетное число несобственных слоев. Заметим, что число собственных слоев может быть конечным или счетным.

Следствие 4.2. *Если $dL < \infty$, то L — собственный слой.*

Действительно, если L — несобственный слой, то согласно следствию 4.2 имеет место $dL = \infty$. Заметим, что этот факт для слоений коразмерности один компактных многообразий доказан в работе [24].

В общем случае собственный слой может иметь бесконечную глубину. Известны примеры слоений коразмерности один, когда замыкание собственного слоя содержит несобственные слои. Нетрудно построить слоение с особенностями, в котором собственный слой имеет бесконечную глубину.

Теперь перейдем к сингулярным римановым слоениям.

Определение 4.5. Слоение F называется *римановым*, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F, остается ортогональной ко всем слоям F во всех своих точках.

Регулярные римановы слоения введены Рейнхартом в [25] и изучались многими авторами, в частности, в работах [21, 31]. Сингулярные римановы слоения были введены Молино в своей монографии [21].

Пусть ω — дифференциальная форма степени 1 на M и $P(x) = \{v \in T_xM : \omega_x(v) = 0\}$ для всех $x \in M$. Возникает распределение $P : x \to P(x)$, где $\dim P(x) = n - 1$. Это распределение вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда $\omega \bigwedge d\omega = 0$ (теореме Фробениуса). Поэтому если ω — замкнутая дифференциальная форма ($d\omega = 0$), то распределение $P : x \to P(x)$ вполне интегрируемо. Возникает слоение F размерности $n - 1$. Известно, что если многообразие M компактно и слоение F задано замкнутой дифференциальной формой, то существует такая риманова метрика $\tilde{g}$ на M, что слоение F является римановым по отношению к римановой метрике $\tilde{g}$ (см. [26]).

Например, для одномерного слоения F на двумерном торе T^2, определенного замкнутой формой $\omega = \omega_1 d\varphi_1 + \omega_2 d\varphi_2$, существует риманова метрика $\tilde{g}$ на T^2, по отношению к которой слоение F является римановым.

Пусть $f : M \to \mathbb{R}^1$ — гладкая функция без критических точек, т. е. ранг f всюду равен 1. Тогда f является субмерсией, и потому на M возникает слоение коразмерности один, слоями которого служат поверхности уровня функции f. В [31] доказано, чтобы это слоение было римановым, необходимо и достаточно, чтобы $X(|\nabla f|^2) = 0$ для всех векторных полей X, касательных к этому слоению, где ∇f — градиент функции f. Это означает, что вдоль слоев длина вектора-градиента ∇f функции f должна быть постоянной.

Пусть F является регулярным k-мерным слоением и $P : x \to P(x)$, где $x \in M$, и пусть $P(x) \subset T_xM$ для всех $x \in M$ — вполне интегрируемое распределение, максимальными подмногообразиями которого являются слои слоения F, а также $H : x \to H(x)$ — распределение, которое является ортогональным дополнением P, т. е. $T_xM = P(x) \oplus H(x)$ для всех $x \in M$. В этом случае каждое векторное поле $X \in V(M)$ можно представить в виде $X = X_v + X_h$, где X_v, X_h — ортогональные проекции X на P, H соответственно. Здесь для удобства P, H рассматриваются как подрасслоения касательного расслоения TM.

Пусть D^* — множество гладких векторных полей, касательных к слоению. Если $X_h = 0$, то $X \in D^*$ и оно называется *вертикальным*, а если $X_v = 0$, то X называется *горизонтальным* полем. Для векторных полей X, Y, полагая $g_t(X, Y) = g(X_h, Y_h)$, получим билинейную симметричную форму на $V(M)$, ядро которой совпадает с D^*.

Изучим свойства этой формы. Напомним, что если $x \in M$, то по определению слоения существует окрестность V точки x и локальная система координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ на V такая, что $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dfrac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^k}$ образуют базис для сечения $P|_v$. Покажем, что базис $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ для сечений $H|_V$ можно выбрать таким образом, что скобка Ли $[X, v_j]$ для каждого $X \in D^*$, где $j = k+1, k+2, \ldots, n$, является вертикальным полем.

Пусть

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} v_j^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad j = k+1, k+2, \ldots, n$$

— координатное выражение векторного поля v_j на V. В силу того, что векторные поля $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ линейно независимы, ранг матрицы v_j^i в точке x равен $n - k$. Не ограничивая общности, можем считать, что матрица $\{v_j^i\}$ невырождена в точке x, а следовательно, в некоторой окрестности x, где $k+1 \leqslant i,j \leqslant n$.

Обозначим через (ω_i^j), $k+1 \leqslant i,j \leqslant n$, обратную матрицу к (v_j^i), $k+1 \leqslant i,j \leqslant n$. Тогда, если положим $Y_j = \sum\limits_{k+1}^{n} \omega_j^i v_i$, $j = k+1, k+2, \ldots, n$ то $Y_{k+1}, Y_{k+2}, \ldots, Y_n$ является базисом для сечений $H|_V$. Кроме того, скобка Ли $[X, Y_j]$ для $X \in D^*$ выражается через $\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \dfrac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^k}$, что проверяется непосредственным вычислением $[X, Y], j = k+1, k+2, \ldots, n$.

Предположим, что F является k-мерным римановым слоением по отношению к римановой метрике g. Тогда, как следует из [21, с. 78], для каждого вертикального поля $X \in D^*$ верно $Xg(v_i, v_j) = 0$ для всех $i,j = k+1, \ldots, n$. Учитывая этот факт, нетрудно доказать, что $Xg(Y,Z) = g_t([X,Y],Z) + g_t(Y,[X,Z])$, где $Y, Z \in V(M)$.

В этом случае g_t называется *трансверсальной метрикой* для слоения F, определенной римановой метрикой g (см. [21, с. 77]). Как следует из [22], верно и обратное, т. е. если задано k-мерное слоение F на римановом многообразии с римановой метрикой g, и если g_t является трансверсальной метрикой, тогда F является римановым слоением.

В работе [6] доказано, что аналогичный факт верен и для слоения с особенностями на полном римановом многообразии (M, g).

Пусть F — слоение с особенностями, L — слой слоения F, Q — нормальное расслоение слоя L. Тогда риманова метрика g определяет послойную метрику g_t^L на Q следующим образом: если $\nu_1, \nu_2 :\to Q$ — гладкие (класса C^∞) сечения расслоения Q, то положим $g_t^L(\nu_1, \nu_2) = g(X, Y)$, где $X, Y \in V(M)$, ν_1, ν_2 — сужения X, Y на L соответственно (заметим, что $g_t^L(\nu_1, \nu_2$ определена в точках слоя L).

Метрика g_T^L называется *трансверсальной метрикой* на L для F, если для каждого $X \in D^*$ в точках слоя L имеет место:

$$Xg_t^L(Y,Z) = g_t^L([X,Y],Z) + g_t^L(Y,[X,Z]),$$

где $g_t^L(Y,Z) = g(\pi Y, \pi Z)$, $Y, Z \in V(M)$, $\pi : TM \to Q$ — ортогональная проекция, определенная над L, а Q рассматривается как расслоение, ортогональное к расслоению TL.

Из результатов монографии [21, с. 199] вытекает, что если F является римановым слоением, то метрика g_T^L на каждом слое L слоения F является трансверсальной метрикой. Кроме того, в [21, с. 201] имеется гипотеза, что если полная риманова метрика g определяет на каждом слое слоения F трансверсальную метрику, то слоение F является римановым. Заметим, что риманово слоение с особенностями не имеет n-мерных слоев. Следующая теорема решает гипотезу Молино положительно.

Теорема 4.6. *Пусть M — полное риманово C^∞-многообразие с римановой метрикой g, а слоение F не имеет n-мерных слоев. Тогда для того, чтобы слоение F было римановым, необходимо и достаточно, чтобы риманова метрика g определяла на каждом слое слоения F трансверсальную метрику.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азамов А. А., Нарманов А. Я.* О предельных множествах орбит систем векторных полей// Дифф. уравн. — 2004. — *40*, № 2. — С. 257–260.
2. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* Киллинговы векторные поля постоянной длины на римановых многообразиях// Сиб. мат. ж. — 2008. — *49*, № 3. — С. 497–514.
3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.
4. *Лобри К.* Динамические полисистемы и теория управления// В сб.: «Математические методы в теории систем». — М.: Мир, 1979. — С. 134–173.
5. *Нарманов А. Я.* О структуре множества управляемости непрерывно уравновешенных систем управления// Вестн. Ленинград. ун-та. — 1981. — *13*. — С. 50–55.
6. *Нарманов А. Я.* О трансверсальной структуре множества управляемости симметричных систем управления// Дифф. уравн. — 1996. — *32*, № 6. — С. 780–783.
7. *Нарманов А. Я.* О зависимости множества управляемости от целевой точки// Дифф. уравн. — 1997. — *33*, № 10. — С. 1334–1338.

8. *Нарманов А. Я.* О геометрии вполне геодезических римановых слоений// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1999. — № 9. — С. 26–31.
9. *Нарманов А. Я., Косимов О.* О геометрии римановых слоений сфер малых размерностей// Докл. АН Респ. Узбекистан. — 2013. — № 2. — С. 96–105.
10. *Нарманов А. Я., Саитова С.* О геометрии орбит векторных полей Киллинга// Дифф. уравн. — 2014. — *50*, № 12. — С. 1582–1589.
11. *Нарманов А. Я., Саитова С.* О геометрии множества достижимости векторных полей// Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 3. — С. 321–326.
12. *Рашевский П. К.* О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией// Уч. зап. МПИ им. К. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук. — 1938. — № 2. — С. 83–94.
13. *Agrachev A. A., Sachkov Y.* Control theory from the geometric viewpoint. — Berlin: Springer, 2004.
14. *Brockett R. W.* Lie algebras and Lie groups in control theory// В сб.: «Geometric Methods in System Theory». — Dordrecht: Springer, 1973. — С. 43–82.
15. *Cairns G.* A general description of totally geodesic foliations// Tohoku Math. J. — 1986. — *38*. — С. 37–55.
16. *Chow W. L.* Uber systeme von linearen partiellen differential-gleinchangen ester ordmung// Math. Ann. — 1939. — *117*. — С. 98–105.
17. *Hermann R.* On the accessibility problem in control theory// В сб.: «International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics». — N. Y.: Acad. Press, 1963. — С. 325–332.
18. *Jurdjevic V.* Geometric control theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2008.
19. *Levitt N., Sussmann H.* On controllability by means of two vector fields// SIAM J. Control. — 1975. — *13*, № 6. — С. 1271–1281.
20. *Lobry C.* Controllability of nonlinear control dynamical systems// Control Theory Topol. Funct. Anal. — 1976. — *1*. — С. 361–383.
21. *Molino P.* Riemaninan foliations. — Boston—Basel: Birkhauser, 1988.
22. *Morgan A.* Holonomy and metric properties of foliations in higher codimension// Proc. Am. Math. Soc. — 1960. — *11*. — С. 236–242.
23. *Nagano T.* Linear differential systems with singularities and application to transitive Lie algebras// J. Math. Soc. Japan. — 1968. — *18*. — С. 338–404.
24. *Nishimori T.* Behavior of leaves of codimension one foliations// Tohoku Math. J. — 1977. — *29*. — С. 255–273.
25. *Reinhart B.* Foliated manifolds with bundle-like metrics// Ann. Math. — 1959. — *69*, № 1. — С. 119–132.
26. *Sacksteder R.* Foliations and pseudogroups// Am. J. Math. — 1965. — 87. — С. 79–102.
27. *Stefan P.* Accessible sets, orbits, and foliations with singularities// Proc. Lond. Math. Soc. — 1974. — *29*. — С. 694–713.
28. *Sussmann H.* Orbits of family of vector fields and integrability of distribution// Trans. Am. Math. Soc. — 1973. — *180*. — С. 171–188.
29. *Sussmann H.* Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities// Bull. Am. Math. Soc. — 1973. — *79*. — С. 197–199.
30. *Sussmann H., Jurdjevich V.* Controllability of nonlinear systems// J. Differ. Equ. — 1972. — *12*. — С. 95–116.
31. *Tondeur Ph.* Foliations on Riemannian manifolds. — N. Y.: Springer, 1988.

Нарманов Абдигаппар Якубович
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: `narmanov@yandex.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-54-71 UDC 517.936+517.925.53

Geometry of Orbits of Vector Fields and Singular Foliations

© 2019 **A. Ya. Narmanov**

Abstract. The subject of this paper is the geometry of orbits of a family of smooth vector fields defined on a smooth manifold and singular foliations generated by the orbits. As is well known, the geometry of orbits of vector fields is one of the main subjects of investigation in geometry and control theory. Here we propose some author's results on this problem. Throughout this paper, the smoothness means C^∞-smoothness.

REFERENCES

1. A. A. Azamov and A. Ya. Narmanov, "O predel'nykh mnozhestvakh orbit sistem vektornykh poley" [On limit sets of orbits of systems of vector fields], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2004, **40**, No. 2, 257–260 (in Russian).
2. V. N. Berestovskiy and Yu. G. Nikonorov, "Killingovy vektornye polya postoyannoy dliny na rimanovykh mnogoobraziyakh" [Killing vector fields of constant length on Riemannian manifolds], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2008, **49**, No. 3, 497–514 (in Russian).
3. Sh. Kobayashi and K. Nomizu, *Osnovy differentsial'noy geometrii. T. 1* [Foundations of Differential Geometry. Vol. 1], Nauka, Moscow, 1981 (Russian translation).
4. C. Lobry, "Dinamicheskie polisistemy i teoriya upravleniya" [Dynamical polysystems and control theory], In: *Matematicheskie metody v teorii sistem* [Mathematical Methods in the Theory of Systems], Mir, Moscow, 1979, pp. 134–173 (Russian translation).
5. A. Ya. Narmanov, "O strukture mnozhestva upravlyaemosti nepreryvno uravnoveshennykh sistem upravleniya" [On the structure of the controllability set of continuously balanced control systems], *Vestn. Leningrad. un-ta* [Bull. Leningrad Univ.], 1981, **13**, 50–55 (in Russian).
6. A. Ya. Narmanov, "O transversal'noy strukture mnozhestva upravlyaemosti simmetrichnykh sistem upravleniya" [On the transversal structure of the controllability set of symmetric control systems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1996, **32**, No. 6, 780–783 (in Russian).
7. A. Ya. Narmanov, "O zavisimosti mnozhestva upravlyaemosti ot tselevoy tochki" [On the dependence of the controllability set on the goal point], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1997, **33**, No. 10, 1334–1338 (in Russian).
8. A. Ya. Narmanov, "O geometrii vpolne geodezicheskikh rimanovykh sloeniy" [On the geometry of completely geodesic Riemannian foliations], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1999, No. 9, 26–31 (in Russian).
9. A. Ya. Narmanov and O. Kosimov, "O geometrii rimanovykh sloeniy sfer malykh razmernostey" [On the geometry of Riemannian foliations of low-dimensional spheres], *Dokl. AN Resp. Uzbekistan* [Rep. Uzbek. Acad. Sci.], 2013, No. 2, 96–105 (in Russian).
10. A. Ya. Narmanov and S. Saitova, "O geometrii orbit vektornykh poley Killinga" [On the geometry of orbits of Killing vector fields], *Diff. uravn.* [Diff. uravn.], 2014, **50**, No. 12, 1582–1589 (in Russian).
11. A. Ya. Narmanov and S. Saitova, "O geometrii mnozhestva dostizhimosti vektornykh poley" [O geometrii mnozhestva dostizhimosti vektornykh poley], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 3, 321–326 (in Russian).
12. P. K. Rashevskiy, "O soedinimosti lyubykh dvukh tochek vpolne negolonomnogo prostranstva dopustimoy liniey" [On connectability of any two points of a completely nonholonomic space by an admissible line], *Uch. zap. MPI im. K. Libknekhta. Ser. fiz.-mat. nauk* [Sci. Notes Moscow Pedagog. Inst. Ser. Phys.-Math. Sci.], 1938, No. 2, 83–94 (in Russian).
13. A. A. Agrachev and Y. Sachkov, *Control theory from the geometric viewpoint*, Springer, Berlin, 2004.
14. R. W. Brockett, "Lie algebras and Lie groups in control theory," In: *Geometric Methods in System Theory*, Springer, Dordrecht, 1973, pp. 43–82.
15. G. Cairns, "A general description of totally geodesic foliations," *Tohoku Math. J.*, 1986, **38**, 37–55.
16. W. L. Chow, "Uber systeme von linearen partiellen differential-gleinchangen ester ordmung," *Math. Ann.*, 1939, **117**, 98–105.

17. R. Hermann, “On the accessibility problem in control theory,” In: *International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics*, Acad. Press, N. Y., 1963, pp. 325–332.
18. V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
19. N. Levitt and H. Sussmann, “On controllability by means of two vector fields,” *SIAM J. Control.*, 1975, **13**, No. 6, 1271–1281.
20. C. Lobry, “Controllability of nonlinear control dynamical systems,” *Control Theory Topol. Funct. Anal.*, 1976, **1**, 361–383.
21. P. Molino, *Riemaninan foliations*, Birkhauser, Boston—Basel, 1988.
22. A. Morgan, “Holonomy and metric properties of foliations in higher codimension,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 1960, **11**, 236–242.
23. T. Nagano, “Linear differential systems with singularities and application to transitive Lie algebras,” *J. Math. Soc. Japan.*, 1968, **18**, 338–404.
24. T. Nishimori, “Behavior of leaves of codimension one foliations,” *Tohoku Math. J.*, 1977, **29**, 255–273.
25. B. Reinhart, “Foliated manifolds with bundle-like metrics,” *Ann. Math.*, 1959, **69**, No. 1, 119–132.
26. R. Sacksteder, “Foliations and pseudogroups,” *Am. J. Math.*, 1965, 87, 79–102.
27. P. Stefan, “Accessible sets, orbits, and foliations with singularities,” *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1974, **29**, 694–713.
28. H. Sussmann, “Orbits of family of vector fields and integrability of distribution,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1973, **180**, 171–188.
29. H. Sussmann, “Orbits of family of vector fields and integrability of systems with singularities,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1973, **79**, 197–199.
30. H. Sussmann and V. Jurdjevich, “Controllability of nonlinear systems,” *J. Differ. Equ.*, 1972, **12**, 95–116.
31. Ph. Tondeur, *Foliations on Riemannian manifolds*, Springer, N. Y., 1988.

A. Ya. Narmanov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `narmanov@yandex.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 72–82

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-72-82 УДК 517.988.67

РЕДУКЦИОННЫЙ МЕТОД В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ Э. ШМИДТА

© 2019 г. **Д. Г. РАХИМОВ**

Аннотация. В данной работе рассматриваются возмущения кратных собственных значений спектральных задач Э. Шмидта. С помощью редукционного метода, предложенного в работах [10, 11], исследование кратных возмущенных собственных значений Э. Шмидта сводится к исследованию возмущений некратных собственных значений. Напоследок в качестве приложения к полученным результатам рассматривается задача о краевом возмущении для системы, состоящей из двух задач Штурма—Лиувилля со спектральным параметром Э. Шмидта.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В начале XX века в цикле работ, посвященных линейным и нелинейным интегральным уравнениям, Э. Шмидт ввел понятия [16] собственных значений λ_k оператора $B : H \to H$ в гильбертовом пространстве H с учетом их кратности и собственных элементов $\{u_k\}_1^\infty, \{v_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих соотношениям

$$Bu_k = \lambda_k v_k, \;\; B^* v_k = \lambda_k u_k.$$

Это позволило расширить теорию Гильберта—Шмидта о несимметричных вполне непрерывных операторах в произвольных сепарабельных гильбертовых пространствах [13, 17–19]. В работе [9] упомянуты некоторые физические приложения спектральных задач Э. Шмидта; в публикации [7] представлена модификация двух версий теорем Гамильтона—Кэли—Аржаных [1, 2, 14] о матричных спектральных задачах Э. Шмидта, полиномиально зависящих от спектрального параметра, с модификацией соответствующих характеристических многочленов. В монографиях [3,6] были изучены нелинейные задачи о распространении электромагнитных волн в волноводах и резонаторах в нелинейной среде, по сути являющиеся после линеаризации спектральными задачами Э. Шмидта.

Пусть E_1, E_2 — это вещественные банаховы пространства с плотным вложением $E_1 \subset E_2 \subset H$, H — гильбертово пространство, а $B \in L(E_1, E_2)$ — замкнутый линейный оператор. Пусть также $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ — это n-кратная фредгольмова точка следующей невозмущенной спектральной задачи Э. Шмидта с соответствующими собственными элементами $(\varphi_{i0}, \psi_{i0})$:

$$B\varphi_{i0} = A(\lambda_0, 0)\psi_{i0},$$

$$B^*\psi_{i0} = A^*(\lambda_0, 0)\varphi_{i0}.$$

Это можно переписать в матричном виде в случае прямой суммы двух гильбертовых пространств $\mathcal{H} = H \dot{+} H$:

$$\mathcal{B}\left(\lambda_0, 0\right) \Phi_{i0} = \begin{pmatrix} B & -A(\lambda_0, 0) \\ -A^*(\lambda_0, 0) & B^* \end{pmatrix} \Phi_{i0},$$

где $\Phi_{i0} = (\varphi_{i0}, \psi_{i0})^{\mathrm{T}}$, а $(\varphi_{i0}, \psi_{i0})^{\mathrm{T}}$ — транспонированный вектор-столбец. Здесь рассматривается следующая возмущенная спектральная задача Э. Шмидта:

$$B\varphi(\varepsilon) = A(\lambda(\varepsilon), \varepsilon)\,\psi(\varepsilon),$$

$$B^*\psi(\varepsilon) = A^*(\lambda(\varepsilon), \varepsilon)\,\psi(\varepsilon),$$

т. е. необходимо определить бифуркационные собственные значения Э. Шмидта $\lambda = \lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \mu(\varepsilon)$ с соответствующими собственными векторами $(\varphi(\varepsilon), \psi(\varepsilon))^{\mathrm{T}} = \Phi(\varepsilon)$, где $\mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а $[A(\lambda_0 + \mu, \varepsilon) - A(\lambda_0, 0)] = \sum\limits_{i+j\geqslant 1} A_{ij}\mu^i\varepsilon^j$ аналитически зависит от двух малых параметров μ и ε в виде ряда по степеням малого параметра ε. В прямой сумме $\mathcal{H} = H\dot{+}H$ со скалярным произведением

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \varphi_1, \psi_1 \rangle + \langle \varphi_2, \psi_2 \rangle$$

поставленная задача может быть переписана в следующей матричной форме:

$$\mathbf{B}(\lambda, \varepsilon)\,\Phi \equiv [\mathcal{B}(\lambda_0, 0) - \mathcal{A}(\mu(\varepsilon), \varepsilon)]\,\Phi \equiv \left[\mathcal{B}(\lambda_0, 0) - \sum_{i+j\geqslant 1} \mu^i\varepsilon^j \mathcal{A}_{ij}\right]\Phi \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} B & -A(\lambda_0, 0) \\ -A^*(\lambda_0, 0) & B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(\varepsilon) \\ \psi(\varepsilon) \end{pmatrix} - \sum_{i+j\geqslant 1} \mu^i\varepsilon^j \begin{pmatrix} 0 & A_{ij} \\ A^*_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(\varepsilon) \\ \psi(\varepsilon) \end{pmatrix} = 0 \qquad (1.1)$$

с сопряженной задачей

$$\mathbf{B}^*(\lambda, \varepsilon)\,\Psi \equiv [\mathcal{B}^*(\lambda_0, 0) - \mathcal{A}(\mu, \varepsilon)]\,\Psi \equiv \left[\mathcal{B}^*(\lambda_0, 0) - \sum_{i+j\geqslant 1} \mu^i\varepsilon^j \mathcal{A}^*_{ij}\right]\Psi \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} B^* & -A(\lambda_0, 0) \\ -A^*(\lambda_0, 0) & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(\varepsilon) \\ \overline{\psi}(\varepsilon) \end{pmatrix} - \sum_{i+j\geqslant 1} \mu^i\varepsilon^j \begin{pmatrix} 0 & A_{ij} \\ A^*_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(\varepsilon) \\ \overline{\psi}(\varepsilon) \end{pmatrix} = 0. \qquad (1.2)$$

Важно отметить самосопряженность исходной задачи Э. Шмидта, т. е. $A(\lambda_0) = \lambda_0 I$.

В этой работе с помощью редукционного метода, предложенного в работах [10, 11], исследование кратных возмущенных собственных значений Э. Шмидта сводится к изучению возмущения некратных собственных значений.

В качестве приложения к полученным результатам в разделе 4 будет рассмотрена задача о краевом возмущении для системы из двух задач Штурма—Лиувилля со спектральным параметром Э. Шмидта.

Всюду далее будут использованы терминология, обозначения и определения, схожие с таковыми в монографиях [4, 15] и работах [8, 12, 20].

2. Возмущение собственных значений и редукционные методы

Введение понятия биортогональных систем для элементов нуль-пространства и подпространства дефекта $N(\mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda_0, 0)) = span\,\{\Phi_{k0}\}_{k=1}^n$, $\langle \Phi_{k0}, \Gamma_{s0} \rangle = \delta_{ks}$, $N^*(\mathcal{B}^* - \mathcal{A}^*(\lambda_0, 0)) = span\,\{\Psi_{k0}\}_{k=1}^n$, $\langle \mathrm{Z}_{k0}, \Psi_{s0} \rangle = \delta_{ks}$ на основании обобщенной леммы Шмидта [15] позволяет определить регуляризатор

$$\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda_0, 0) = \mathbf{B}(\lambda_0, 0) + \sum_{k=1}^n \left\langle \cdot, \Gamma_{k0}^{(1)} \right\rangle \mathrm{Z}_{k0}^{(1)},\ \Gamma_{k0}^{(1)} = \Gamma_{k0},\ \mathrm{Z}_{k0}^{(1)} = \mathrm{Z}_{k0},$$

который непрерывно обратим, а $\boldsymbol{\Gamma} = \left[\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda_0, 0)\right]^{-1}$ — замкнут [15]. Заметим, что $\boldsymbol{\Gamma}\mathrm{Z}_{k0}^{(1)} = \Phi_{k0}^{(1)}$, $\boldsymbol{\Gamma}^*\boldsymbol{\Gamma}_{k0}^{(1)} = \Psi_{k0}^{(1)}$, $\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{s0}^{(1)} = \mathrm{Z}_{s0}^{(1)}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^*\Psi_{s0}^{(1)} = \boldsymbol{\Gamma}_{s0}^{(1)}$. Выбором этой биортогональной системы можно расширить пространство $\mathcal{H}$ в прямых суммах $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1^n \dot{+} \mathcal{H}_1^{\infty-n}$, $H_1^n = N(\mathcal{B} - \mathcal{A}(\lambda_0, 0))$ и $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{2,n} \dot{+} \mathcal{H}_{2,\infty-n}$, $\mathcal{H}_{2,n} = span\left\{\mathrm{Z}_{k0}^{(1)}\right\}_{k=1}^n$.

Пусть элементы нуль-пространства и подпространства дефекта отвечают полным биканоническим $\mathcal{A}(\mu,0)$- и $\mathcal{A}^*(\mu,0)$-жордановым множествам с цепочками Жордана с длинами $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$. Это означает, что справедливы соотношения

$$\mathbf{B}(\lambda_0,0)\Phi_{k0}^{(\sigma)} = \sum_{s=1}^{\sigma-1} \mathcal{A}_{s0}\Phi_{k0}{}^{(\sigma-s)}, \mathcal{A}_{s0} = \frac{1}{s!}\frac{d}{d\mu^s}\mathcal{A}(\mu,0), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{B}^*(\lambda_0,0)\Psi_{j0}^{(\sigma)} = \sum_{s=1}^{\sigma-1} \mathcal{A}_{s0}^*\Psi_{j0}^{(\sigma-s)}, \sigma = \overline{1,p_j}, j = \overline{1,n} \tag{2.2}$$

и равенства

$$\det\left[\left\langle \sum_{s=1}^{p_k} \mathcal{A}_{s0}\Phi_{k0}{}^{(p_k+1-s)}, \Psi_{j0}^{(1)} \right\rangle\right] = \delta_{kj}, k,j = \overline{1,n}, \tag{2.3}$$

$$\det\left[\left\langle \Phi_{k0}, \sum_{s=0}^{p_s} \mathcal{A}_{s0}^*\Psi_{s0}^{(p_s+1-\delta)} \right\rangle\right] = \delta_{ks}, \tag{2.4}$$

без ограничения общности. Здесь δ_{ks} — это символ Кронекера.

Жордановы цепочки определяются однозначно из условия принадлежности их элементов дополнительным подпространствам $\Phi_{k0}^{(s)} \in \mathcal{H}_1^{\infty-k}, \Psi_{k0}^{(s)} \in \mathcal{H}_{2,\infty-n}, s = \overline{2,p_k}, k = \overline{1,n}$.

Жордановы множества, удовлетворяющие соотношениям (2.1)–(2.4), называются *биканоническими* [8]. Более того, если предположить, что построенные жордановы множества удовлетворяют условиям биортогональности

$$\left\langle \Phi_{k0}^{(1)}, \Gamma_s^{(l)} \right\rangle = \delta_{ks}\cdot\delta_{jl}, \left\langle \mathrm{Z}_{k0}^{(1)}, \Psi_{s0}^{(l)} \right\rangle = \delta_{il}\cdot\delta_{ks}, \widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{s0}^{(l)} = \sum_{s=1}^{p_0} \mathcal{A}_{s0}\mathrm{Z}_{s0}^{(p_0+1-s)},$$

то биортогональные системы (2.1) можно выбрать в таком виде, что

$$\Gamma_{s0}^{(l)} = \sum_{k=1}^{p_s+l} \mathcal{A}_{k0}^*\Psi_s^{(p_s+2-l+k)}, \mathrm{Z}_{k0}^{(j)} = \sum_{s=1} \mathcal{A}_{so}\Phi_{k0}^{(p_k+2-j-s)}. \tag{2.5}$$

Определение 2.1. Условие, при котором у операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}(\lambda_0,0)$ отсутствуют общие нули, далее будет называться *устранением вырожденности* (условие УВ).

Согласно редукционному методу для разрешения поставленной задачи (1.1) для всех $i = \overline{1,n}$ необходимо ввести регуляризации

$$\overline{\mathbf{B}}_i(\lambda,\varepsilon) = \mathbf{B}(\lambda,\varepsilon) + \sum_{j\neq i} \left\langle \cdot, \Gamma_{j0}^{(1)} \right\rangle \mathrm{Z}_{j0}^{(1)}. \tag{2.6}$$

Для этих регуляризаций справедлив следующий результат [10, 11].

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие УВ. Если собственные значения* $\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_0 + \mu_i(\varepsilon)$ *задачи* (1.2) *имеют соответствующие собственные элементы* $\Phi_i(\varepsilon) = (\varphi_i(\varepsilon), \psi_i(\varepsilon))^{\mathrm{T}}$ *и элементы дефекта* $\Psi_i(\varepsilon) = \left(\overline{\varphi_i}(\varepsilon), \overline{\psi}_i(\varepsilon)\right)^{\mathrm{T}}$, *то для всех* $i = \overline{1,n}$ *и достаточно малого* ε *собственное значение* $\lambda_i(\varepsilon)$ *является простым* (*некратным*) *собственным значением регуляризованной задачи* (2.6) *с соответствующими собственным вектором и функционалом дефекта вида*

$$\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \Phi_i(\varepsilon) + \sum_{s\neq i} c_{is}\Phi_s(\varepsilon), \quad \tilde{\Psi}_i(\varepsilon) = \Psi_i(\varepsilon) + \sum_{s\neq i} d_{is}\Psi_s(\varepsilon). \tag{2.7}$$

Доказательство этой теоремы известно [10] и приведено здесь для полноты картины.

Доказательство. Если $\lambda_i(\varepsilon)$ — это собственное значение регуляризации (2.6), то для соответствующего собственного элемента вида (2.7) будем иметь

$$0 = \overline{\mathbf{B}}_i(\lambda,\varepsilon)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \left[\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon) + \sum_{j\neq i}\left\langle \cdot, \Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)}\right]\left[\Phi_i(\varepsilon) + \sum_{s\neq i} c_{is}\Phi_s(\varepsilon)\right] =$$

$$= \mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_i(\varepsilon) + \sum_{j\neq i} c_{ij}\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_j(\varepsilon) +$$

$$+ \sum_{j\neq i}\left\langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)} + \sum_{j\neq i}\sum_{s\neq i} c_{is}\left\langle \Phi_s(\varepsilon), \Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)} =$$

$$= \sum_{j\neq i} c_{ij}\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_j(\varepsilon) + \sum_{j\neq i}\left\langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)} + \sum_{j\neq i}\sum_{s\neq i} c_{is}\left\langle \Phi_s(\varepsilon), \Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)},$$

или

$$0 = \sum_{j\neq i} c_{ij}\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_j(\varepsilon) + \sum_{j\neq i}\left\langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)} + \sum_{j\neq i}\sum_{s\neq i} c_{is}\left\langle \Phi_s(\varepsilon), \Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)}.$$

После применения функционалов ψ_{k0}, $k \neq i$, получим

$$\sum_{s\neq i} c_{is}\left[\left\langle \Phi_s(\varepsilon), \Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)} + \langle \mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_s(\varepsilon), \Psi_{k0}\rangle\right] = -\left\langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{j0}^{(1)}\right\rangle Z_{j0}^{(1)},\ k\neq i. \tag{2.8}$$

Здесь

$$\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_s = \mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\Phi_i + \mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)(\Phi_s - \varphi_i) = \mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)(\Phi_s - \Phi_i).$$

Затем в силу расширений $\Phi_s(\varepsilon) = \Phi_{s0} + \varepsilon\Phi_{s1} + \varepsilon^2\Phi_{s2} + \cdots$ и $\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon) = \mathbf{B}(\lambda_0;0) + O(\varepsilon)$ из [16] будем иметь

$$\mathbf{B}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)(\Phi_s - \Phi_i) = (\mathbf{B}(\lambda_0;0) + O(\varepsilon))(\Phi_{s0} - \Phi_{i0} + O(\varepsilon)) = O(\varepsilon).$$

Так как $\left\langle \Phi_i, \Gamma_{k0}^{(1)}\right\rangle = 1 + O(\varepsilon)$, определитель системы (2.8) не равен нулю, следовательно, она имеет единственное решение.

Воспользуемся той же схемой для сопряженного уравнения

$$0 = \overline{\mathbf{B}}_i^*(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\widetilde{\Psi}_i(\varepsilon). \tag{2.9}$$

Тогда

$$0 = \left[\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon) + \sum_{j\neq i}\left\langle Z_{j0}^{(1)}, \cdot\right\rangle \Gamma_{j0}^{(1)}\right]\left[\Psi_i(\varepsilon) + \sum_{s\neq i} d_{is}\Psi_s(\varepsilon)\right] =$$

$$= \overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\Psi_i(\varepsilon) + \sum_{s\neq i} d_{is}\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\Psi_s(\varepsilon) +$$

$$+ \sum_{j\neq i}\left\langle Z_{j0}^{(1)}, \Psi_i(\varepsilon)\right\rangle \Gamma_{j0}^{(1)} + \sum_{j\neq i}\sum_{s\neq i} d_{is}\left\langle Z_{j0}^{(1)}, \Psi_s(\varepsilon)\right\rangle \Gamma_{j0}^{(1)} =$$

$$= \sum_{s\neq i} d_{is}\left[\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\Psi_s(\varepsilon) + \sum_{j\neq i}\left\langle Z_{j0}^{(1)}, \Psi_s(\varepsilon)\right\rangle \Gamma_{j0}^{(1)}\right] + \sum_{j\neq i}\left\langle Z_{j0}^{(1)}, \Psi_i(\varepsilon)\right\rangle \Gamma_{j0}^{(1)}.$$

Применяя элементы $\Phi_{k0}, k\neq i$ к обеим частям последнего равенства, получаем

$$\sum_{s\neq i} d_{is}\left[\left\langle Z_{j0}^{(1)}, \Psi_s(\varepsilon)\right\rangle + \left\langle \Phi_{k0}, \overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\Psi_s(\varepsilon)\right\rangle\right] = -\left\langle Z_{k0}^{(1)}, \Psi_i(\varepsilon)\right\rangle,\ k\neq i. \tag{2.10}$$

Здесь в силу расширений $\Psi_s(\varepsilon) = \Psi_{s0} + \mathrm{O}(\varepsilon)$ и $\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon) = \overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i, 0) + \mathrm{O}(\varepsilon)$ будем иметь

$$\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)(\Psi_s - \Psi_i) = \left(\overline{\mathbf{B}}^*(\lambda_0;0) + O(\varepsilon)\right)(\Psi_{s0} - \Psi_{i0} + O(\varepsilon)) = O(\varepsilon),$$

откуда следует, что определитель системы не равен нулю, что доказывает единственность ее решения. □

Замечание 2.1. Аналогично доказывается, что все собственные значения операторов (2.6) также являются собственными значениями оператора $A(t;\varepsilon)$.

3. Возмущение собственных значений и собственных элементов

3.1. Пример отсутствия обобщенных жордановых цепочек $\det[\mathcal{A}_{j0}\Phi_{i0},\Psi_{j0}]\neq 0, i=\overline{1,n}$**.** В данном случае, не ограничивая общности, можно предположить $\langle\mathcal{A}_{j0}\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle\neq 0$. Пусть $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ — это собственный элемент оператора $\mathcal{B}-\mathcal{A}(\lambda_0+\mu_i(\varepsilon),\varepsilon)$, отвечающий собственному значению λ_i. Тогда регуляризованное $[\mathcal{B}-\mathcal{A}(\mu,\varepsilon)]\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)=0$ уравнение $\overline{\mathbf{B}}_i(\lambda,\varepsilon)\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)=0$ дает

$$[\mathcal{B}-\mathcal{A}(\lambda_0,0)]\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\overline{\mathcal{A}}(\mu_i(\varepsilon),\varepsilon)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)+\mathrm{H}_i(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)-\sum_{j\neq i}\langle\tilde{\Phi}_i(\varepsilon),\Gamma_{j0}\rangle\mathcal{Z}_{j0},\tag{3.1}$$

где $\overline{\mathcal{A}}(\mu_i(\varepsilon),\varepsilon)=\mathcal{A}(\lambda_0)-\mathcal{A}(\mu_i(\varepsilon),\varepsilon), \mathrm{H}_i(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)=\mathcal{A}(\lambda_i(\varepsilon),0)-\mathcal{A}(\lambda_i(\varepsilon),\varepsilon)$. После применения оператора Шмидта $\mathbf{\Gamma}=\left[\widetilde{\mathbf{B}}(\lambda_0,0)\right]^{-1}$ последнее уравнение (3.1) сводится к эквивалентной системе

$$\tilde{\mathbf{B}}(\lambda_0)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\overline{\mathcal{A}}(\mu_i(\varepsilon))\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)+\mathrm{H}_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)+\xi_i\mathcal{Z}_{i0},\ \xi_i=\langle\tilde{\Phi}_i(\varepsilon),\Gamma_{i0}\rangle,\tag{3.2}$$

откуда следует

$$\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\xi_i\left[I-\mathbf{\Gamma}\overline{\mathcal{A}}(\mu_i(\varepsilon))-\mathbf{\Gamma}\mathrm{H}_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\right]^{-1}\Phi_{i0}.\tag{3.3}$$

Подстановка $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ во второе уравнение (3.2) дает i-ое *уравнение ветвления* (УрВ) для собственного значения λ_0:

$$\langle\left[\overline{\mathcal{A}}(\mu_i(\varepsilon))+\mathrm{H}_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\right]\left[I-\mathbf{\Gamma}\overline{\mathcal{A}}(\mu_i(\varepsilon))-\mathbf{\Gamma}\mathrm{H}_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\right]^{-1}\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle=0.\tag{3.4}$$

В силу аналитической зависимости оператора $\mathcal{A}(\lambda_0+\mu_i(\varepsilon),\varepsilon)-\mathcal{A}(\lambda_0,0)$ от μ и ε в окрестности точки $(\lambda_0,0)$ после расширения (3.3) в степенном ряде будем иметь

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}L_{sli}\mu_i^s\varepsilon^l=0,\tag{3.5}$$

где

$$L_{sli}=\sum_{(s,l)=(s_1,l_1)+\dots+(s_k,l_k)}\langle\mathcal{A}_{s_1l_1}\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}_{s_2l_2}\dots\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}_{s_kl_k}\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle.$$

Коэффициент $L_{10}=\langle\mathcal{A}_{10}\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle$ отличен от нуля. Следовательно, $\{\mu_i(\varepsilon),i=\overline{1,n}\}$ выражаются из уравнения (3.5) в виде ряда по целым степеням ε. Подстановка $\mu_i(\varepsilon)$ в (3.3) дает соответствующие собственные элементы $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ также в виде ряда по целым степеням ε. Тем самым нами доказан следующий результат:

Теорема 3.1. *Если* $\dim N(\mathcal{B}-\mathcal{A}(\lambda_0,0))=\dim N(\mathcal{B}^*-\mathcal{A}^*(\lambda_0,0))=n$ *и* $\langle\mathcal{A}_{10}\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle\neq 0$ *для всех* $i=1,2,\dots,n,$*, то при достаточно малом* ε *существует ровно* n *геометрически простых собственных значений* $\lambda_i(\varepsilon)=\lambda_0+\mu_i(\varepsilon)$, $\lambda_i(0)=\lambda_0$, *с соответствующими собственными элементами* $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ *и функционалами дефекта* $\tilde{\Psi}_i(\varepsilon)$, *аналитически зависимыми от* ε.

3.2. Пример существования биканонических жордановых множеств. Доказательство теоремы 2.1, приведенное в [10,11], может быть преобразовано в случае существования биканонических $\mathcal{A}(\mu,0)$-жордановых множеств для завершения *полного устранения вырожденности* в терминологии В. А. Треногина [4], т. е. для описания появления $K=\sum_{s=1}^{n}p_s$ собственных значений и соответствующих им собственных векторов возмущенной системы (1.1) или (1.2). Говоря конкретно, в таком случае верны следующие соотношения: $\|\Phi_s(\varepsilon)-\Phi_s(\varepsilon)\|=\|\Phi_{s0}-\Phi_{s0}\|+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{1/p_s}\right)$, где $\|\Phi\|=\sqrt{\langle\Phi,\Phi\rangle}$ — это норма в пространстве $\mathcal{H}=H\dot{+}H$.

Теорема 3.2. *Допустим существование биканонических жордановых множеств, и пусть* $L_{p_i0}=\left\langle\sum_{k=1}^{p_i}\mathcal{A}_{k0}\Phi_{i0}^{(p_i+1-k)},\Psi_{i0}\right\rangle\neq 0$ *для всех* $i=\overline{1,n}$. *Если* $L_{0j}=0$, $j=\overline{1,\infty}$ *и* $L_{11}\neq 0$, *то* *существует K простых собственных значений с соответствующими им собственными элементами, представляющихся в виде ряда по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. Если $L_{0j}=0$, $j=\overline{1,q_i-1}$, $L_{0q_i}\neq 0$, $L_{11}\neq 0$, то существует ровно K собственных значений, из которых n (с соответствующими им собственными элементами) представляются в виде ряда по целым степеням ε в зависимости от первого ненулевого коэффициента из последовательности $\{L_{1j}\}$, остальные же $K-n$ собственных значений со своими собственными элементами представляются в виде ряда по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы мы применим метод диаграмм Ньютона [4].

Допустим существование биканонических жордановых множеств, и пусть

$$\left\langle \sum_{k=1}^{p_i} \mathcal{A}_{k0}\Phi_{i0}^{(p_i+1-k)}, \Psi_{i0} \right\rangle \neq 0$$

для всех $i=\overline{1,n}$. Тогда в уравнении (3.5), согласно определению биканонических жордановых множеств, для всех $i=\overline{1,n}$

$$L_{p_i0}=\langle \sum_{k=1}^{p_i} \mathcal{A}_{k0}\Phi_{i0}^{(p_i+1-k)}, \Psi_{i0}\rangle \neq 0, \left\langle \sum_{k=1}^{p_i} \mathcal{A}_{k0}\Phi_{i}^{(p_i+1-k)}, \Psi_{s0} \right\rangle = 0,\ s\neq i. \tag{3.6}$$

Убывающая часть диаграммы Ньютона, построенной для УрВ (3.5), состоит либо из отрезка, соединяющего точки $(1;1)$ и $(p_i;0)$ (это будет так, если все L_{0j} равны нулю, а $L_{11}\neq 0$), либо из двух отрезков: указанного выше и того, что соединяет точки $(1;1)$ и $(0;q_i)$, где q_i — это номер первого ненулевого члена последовательности $\{L_{0j}\}$. Первому отрезку отвечает показатель $\dfrac{1}{p_i-1}$, а второму, в любом случае, целый показатель. Следовательно, задача (1.1) при достаточно малом ε имеет ровно $K=\sum\limits_{i=1}^{n} p_i$ собственных значений $\lambda_i(\varepsilon)=\lambda_0+\mu_i(\varepsilon), \lambda_i(0)=\lambda_0$, где n собственных значений представляются в виде сходящегося ряда по целым степеням ε, а $K-n$ собственных значений — по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. Каждому $\lambda_i(\varepsilon)$ отвечает собственный элемент $\Phi_i(\varepsilon)$, представленный в виде сходящегося ряда с той же степенью ε, что и у соответствующих $\lambda_i(\varepsilon)$. □

4. Приложение к задаче о краевом возмущении

В качестве приложения рассмотрим задачу о краевом возмущении в следующей системе Штурма—Лиувилля:

$$\begin{gathered} y''+[\lambda a(x)-p(x)]\,z=0,\\ z''+[\lambda a(x)-p(x)]\,y=0, \end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\begin{gathered} \alpha_{11}y(0)+\alpha_{12}y'(0)=0,\ \alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2\neq 0,\\ \alpha_{21}y(T)+\alpha_{22}y'(T)=0,\ \alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2\neq 0,\\ \beta_{11}z(0)+\beta_{12}z'(0)=0,\ \beta_{11}^2+\beta_{12}^2\neq 0,\\ \beta_{21}z(T)+\beta_{22}z'(T)=0,\ \beta_{21}^2+\beta_{22}^2\neq 0, \end{gathered} \tag{4.2}$$

где $x\in[0,T]$, $a(x),p(x)\in A(\mathbb{R}_+)$, $T=1+\varepsilon$ ($A(\mathbb{R}_+)$ — это пространство все аналитических на $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$ функций.

Заменой переменных $x=T\tau, y(x)=y(\tau+\varepsilon\tau)=\varphi(\tau)$, $z(x)=z(\tau+\varepsilon\tau)=\psi(\tau)$ задача (4.1)-(4.2) сводится к системе

$$(1+\varepsilon)^{-2}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}-\rho(\tau)\right)\varphi(\tau)-(1+\varepsilon)^{-2}\sum_{l=2}^{\infty}\varepsilon^l\frac{\tau^{l-2}}{(l-2)!}\times$$

$$\times\left[p^{(l-2)}(\tau)+\frac{2\tau}{l-1}p^{(l-1)}(\tau)+\frac{\tau^2}{l(l-1)}p^{(l)}(\tau)\right]\varphi(\tau)+\lambda\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\frac{\tau^l}{l!}a^{(l)}(\tau)\psi(\tau)=0,$$

$$(1+\varepsilon)^{-2}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}-\rho(\tau)\right)\psi(\tau)-(1+\varepsilon)^{-2}\sum_{l=2}^{\infty}\varepsilon^l\frac{\tau^{l-2}}{(l-2)!}\times$$

$$\times\left[p^{(l-2)}(\tau)+\frac{2\tau}{l-1}p^{(l-1)}(\tau)+\frac{\tau^2}{l(l-1)}p^{(l)}(\tau)\right]\psi(\tau)+\lambda\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon^l\frac{\tau^l}{l!}a^{(l)}(\tau)\varphi(\tau)=0 \qquad (4.3)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}\varphi(0)+\alpha_{12}\varphi'(0)=0,\\&\alpha_{21}\varphi(1)+\alpha_{22}\varphi'(1)=0,\\&\beta_{11}\psi(0)+\beta_{12}\psi'(0)=0,\\&\beta_{21}\psi(1)+\beta_{22}\psi'(1)=0.\end{aligned} \qquad (4.4)$$

Оператор, отвечающий задаче (4.3)-(4.4), может быть записан в следующей форме:

$$A_0\varphi=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^jA_j\varphi+(1+\varepsilon)^{-2}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^mB_m\psi,A_0^*\psi=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^jA_j^*\psi+(1+\varepsilon)^{-2}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^mB_m^*\varphi,$$

где

$$A_0=\tfrac{d^2}{d\tau^2}-\rho(\tau),B_1\varphi=(-2\rho(\tau)-\tau\rho'(\tau))\varphi,$$

$$B_k\varphi=-\tfrac{\tau^{k-2}}{(k-2)!}\left[\rho^{(k-2)}(\tau)+\tfrac{2\tau}{k-1}\rho^{(k-1)}(\tau)+\tfrac{\tau^2}{k(k-1)}\rho^{(k)}(\tau)\right]\varphi(\tau)=a_k(\tau)\varphi(\tau,)$$

$$B_0\psi=B(0)\psi=-a(\tau)\psi(\tau),A_l\varphi=-\tfrac{\tau^l}{l!}a^{(l)}(\tau)\varphi(\tau)=b_l(\tau)\varphi(\tau).$$

Эти соотношения можно переписать в следующем матричном виде:

$$\begin{pmatrix}A_0&0\\0&A_0^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j+\begin{pmatrix}A_m&0\\0&A_m^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}+$$

$$+\lambda\sum_{j=1}^{\infty}(1+\varepsilon)^2\varepsilon^m\begin{pmatrix}0&B_m\\B_m^*&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\\psi\end{pmatrix}, \qquad (4.5)$$

или

$$\mathcal{A}_0\Phi=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^j\mathcal{A}_j\Phi+\lambda\sum_{m=0}^{\infty}(1+\varepsilon)^2\varepsilon^m\mathcal{B}_m\Phi. \qquad (4.6)$$

Пусть λ_0 — это изолированная фредгольмова точка такая, что $N(\mathcal{A}_0-\lambda_0\mathcal{A}_0)=\{\Phi_{io}\}_1^2$, $N^*(\mathcal{A}_0-\lambda_0\mathcal{A}_0)=\{\Psi_{io}\}_1^2$. Пусть $\{\Gamma_{i0}\}_1^2$ и $\{\mathrm{Z}_{i0}\}_1^2$ — это соответствующие биортогональные элементы для $\{\Phi_{io}\}_1^2$ и $\{\Psi_{io}\}_1^2$.

Для каждого $i=\overline{1,n}$ введем регуляризованные операторы

$$\overline{[\mathcal{A}(\varepsilon)-\lambda\mathcal{B}(\varepsilon)]_i}\Phi=(\mathcal{A}(\varepsilon)-\lambda\mathcal{B}(\varepsilon))\Phi+\sum_{i\neq j}\langle\Phi,\Gamma_{j0}\rangle\,\mathrm{Z}_{j0} \qquad (4.7)$$

Исходя из теоремы 2.1, искомое собственное значение $\lambda_i(\varepsilon)$ является простым собственным значением оператора (4.7). Если $\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ — это соответствующая собственная функция, то

$$\overline{[\mathcal{A}(\varepsilon)-\lambda\mathcal{B}(\varepsilon)]_i}\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)=0,$$

или

$$(\mathcal{A}(\varepsilon)-\lambda\mathcal{B}(\varepsilon))\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+\sum_{i\neq j}\left\langle\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon),\Gamma_{j0}\right\rangle\mathrm{Z}_{j0}=0,$$

откуда следует

$$(\mathcal{A}_0(\varepsilon)-\lambda_0\mathcal{B}_0)\widetilde{\Phi}(\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\mathcal{A}_m\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+(2\varepsilon+\varepsilon^2)\lambda_0B_0\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+$$

$$+(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\cdot\mu_i\mathcal{B}_0\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)(\lambda_0+\mu_i)\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\mathcal{B}_l\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)-\sum_{i\neq j}\left\langle\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon),\Gamma_{j0}\right\rangle\mathrm{Z}_{j0}. \qquad (4.8)$$

С помощью регуляризатора Э. Шмидта

$$(\mathcal{A}_0-\lambda_0\mathcal{B}_0)\Phi=(\mathcal{A}_0-\lambda_0\mathcal{B}_0)\Phi+\sum_{i=1}^{n}\langle\Phi,\Gamma_{j0}\rangle \mathrm{Z}_{j0}$$

равенство (4.8) может быть переписано в виде

$$\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\Gamma\mathcal{B}_m\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+(2\varepsilon+\varepsilon^2)\lambda_0\Gamma\mathcal{B}_0\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\cdot\mu_i\Gamma\mathcal{B}_0\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+$$

$$+(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\cdot(\lambda_0+\mu_i)\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\Gamma\mathcal{B}_l\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)+\left\langle\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon),\Gamma_{i0}\right\rangle\Phi_{i0},$$

где $\Gamma=\left(\widetilde{A_0-\lambda_0B_0}\right)^{-1}$, или же в форме системы:

$$\Bigg[I-\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\Gamma\mathcal{A}_m-(2\varepsilon+\varepsilon^2)\lambda_0\Gamma\mathcal{B}_0-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\mu_i\Gamma\mathcal{B}_0-$$

$$-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)(\lambda_0+\mu_i)\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\Gamma\mathcal{B}_l\Bigg]\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\xi_i\Phi_{i0},$$

$$\xi_i=\left\langle\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon),\Gamma_{i0}\right\rangle.$$

После того, как мы выразили $\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ из первого уравнения

$$\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)=\xi_i\Bigg[I-\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\Gamma\mathcal{A}_m-(2\varepsilon+\varepsilon^2)\lambda_0\Gamma\mathcal{B}_0-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\mu_i\Gamma\mathcal{B}_0-$$

$$-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)(\lambda_0+\mu_i)\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\Gamma\mathcal{B}_l\Bigg]^{-1}\Phi_i(\varepsilon),$$

подставим ее во второе, что даст нам i-е уравнение ветвления для нахождения $\mu_i(\varepsilon)$:

$$\sum_{k+s\geqslant 1}L_{ks}^{(i)}\mu_i^k\varepsilon^s\equiv 1-\Bigg\langle\Bigg[I-\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^m\Gamma\mathcal{A}_m-(2\varepsilon+\varepsilon^2)\lambda_0\Gamma\mathcal{B}_0-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)\mu_i\Gamma\mathcal{B}_0-$$

$$-(1+2\varepsilon+\varepsilon^2)(\lambda_0+\mu_i)\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\Gamma\mathcal{B}_l\Bigg]^{-1}\Phi_{i0},\Gamma_{i0}\Bigg\rangle=0,\quad i=1,2. \tag{4.9}$$

Здесь $L_{10}^{(i)}=\langle\mathcal{B}_0\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle$, $L_{01}^{(i)}=\langle(\mathcal{A}_1-2\lambda_0\mathcal{B}_0-\lambda_0\mathcal{B}_1)\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle$,

$$L_{0j}^{(i)}=\Bigg\langle\sum_{j_1\alpha_1+j_2\alpha_2+\ldots+j_k\alpha_k=j}[\Gamma(\mathcal{A}_{j1}-\lambda_0\mathcal{B}_{j1-2}-2\lambda_0\mathcal{B}_{j1-1}-\lambda_0\mathcal{B}_{j1})]^{\alpha_1}\ldots$$

$$\ldots[\Gamma(\mathcal{A}_{jk}-\lambda_0\mathcal{B}_{jk-2}-2\lambda_0\mathcal{B}_{jk-1}-\lambda_0\mathcal{B}_{jk})]^{\alpha_k}\Phi_{i0},\Gamma_{i0}\Bigg\rangle,\quad j\geqslant 2.$$

Если, например, $\langle\mathcal{B}_0\Phi_{i0},\Psi_{i0}\rangle=\int\limits_0^1 a(\tau)\left[\varphi(\tau)\overline{\psi}(\tau)+\overline{\varphi}(\tau)\psi(\tau)\right]d\tau\neq 0$, $i=1,2$, то из УрВ (4.9) будет следовать, что $L_{10}^{(i)}\neq 0$ и $\lambda_i(\varepsilon)$ представляются в виде рядов по целым степеням ε. Более того, эти ряды начинаются с ε^j, где j — это первый такой номер, при котором $L_{0j}^{(i)}\neq 0$.

Собственные функции $\widetilde{\Phi}_i(\varepsilon)$, $i=1,2$ также содержат лишь целые степени ε. Последующие коэффициенты в разложениях $\lambda_i(\varepsilon)$ и $\widetilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ могут быть определены методом неопределенных коэффициентов (см. [4, § 31]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аржаных И. С.* Обобщение теоремы Гамильтона—Кэли// Докл. АН УзССР. — 1951. — № 7. — С. 3–5.
2. *Аржаных И. С., Гугнина В. И.* Распространение методов Крылова, Леверрье и Фаддеева на полиномиальные матрицы// Тр. Ин-та матем. им. В. И. Романовского. — 1962. — *24*. — С. 33–67.
3. *Аржаных И. С., Гугнина В. И.* О развертывании характеристического уравнения// Тр. Ин-та матем. им. В. И. Романовского. — 1962. — *26*. — С. 3–12.
4. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
5. *Валовик Д. В., Смирнов Ю. Г.* Распространение электромагнитных волн в нелинейных слоистых средах. — Пенза: ПГУ, 2010.
6. *Ильинский А. С., Слепян Г. Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. — М.: МГУ, 1983.
7. *Логинов Б. В., Поспеев В. Е.* О собственных числах и векторах возмущенного оператора// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1967. — № 6. — С. 29–35.
8. *Логинов Б. В., Русак Ю. Б.* Обобщенная жорданова структура в теории ветвления// В сб.: «Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными». — Ташкент: Изд-во «Фан», 1978. — С. 133–148.
9. *Могилевский Ш. И.* О представлении вполне непрерывного оператора в абстрактном гильбертовом сепарабельном пространстве// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1958. — № 3. — С. 183–186.
10. *Рахимов Д. Г.* О возмущении фредгольмовых собственных значений линейных операторов// СВМО. — 2015. — *17*, № 3. — С. 37–43.
11. *Рахимов Д. Г.* О возмущении фредгольмовых собственных значений линейных операторов// Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 5. — С. 607–616.
12. *Русак Ю. Б.* Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и сопряженной к ней// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1978. — № 2. — С. 15–19.
13. *Goursat E.* Course d’Analyse Mathematique. — Paris: Gautier-Villars, 1933.
14. *Kuvshinova A. N., Loginov B. V.* Some concequences of the generalized Hamilton—Cayley theorem for matrices polynomially dependent on E. Schmidt spectral parameter// ROMAI J. — 2014. — *10*, № 1. — С. 81–92.
15. *Loginov B. V., Rakhimov D. G.* On spectral problem for Laplace operator in domain with perturbed boundaries// ROMAI J. — 2013. — *9*, № 2. — С. 129–141.
16. *Rellich F.* Storungstheory der Spektalzerlegung, I// Math. Ann. — 1936. — *113*. — С. 600–619.
17. *Schmidt E.* Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I// Math. Ann. — 1907. — *63*. — С. 433–476.
18. *Schmidt E.* Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II// Math. Ann. — 1907. — *64*. — С. 161–174.
19. *Schmidt E.* Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III// Math. Ann. — 1908. — *65*. — С. 370–399.
20. *Sidorov N. V., Sinitsyn A. V., Falaleev M. V.* Lyapunov—Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. — Dordrecht: Kluwer, 2002.

Д. Г. Рахимов
Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в Ташкенте,
Узбекистан, 100060, г. Ташкент, пр-т А. Темура, д. 22
E-mail: davranaka@yandex.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-72-82 UDC 517.988.67

Reductional Method in Perturbation Theory of Generalized Spectral E. Schmidt Problem

© 2019 **D. G. Rakhimov**

Abstract. In this a paper perturbations of multiple eigenvalues of E. Schmidt spectral problems is considered. At the usage of the reductional method suggested in the articles [10, 11] the investigation of the multiple E. Schmidt perturbation eigenvalues is reduced to the investigation of perturbation of simple ones. At the end, as application of the obtained results the problem about the boundary perturbation for the system of two Sturm–Liouville problems with E. Schmidt spectral parameter is considered.

REFERENCES

1. I. S. Arzhanykh, "Obobshchenie teoremy Gamil'tona—Keli" [Generalization of the Hamilton–Cayley theorem], *Dokl. AN UzSSR* [Rep. Acad. Sci. Uzbek SSR], 1951, No. 7, 3–5 (in Russian).
2. I. S. Arzhanykh and V. I. Gugnina, "Rasprostranenie metodov Krylova, Leverr'e i Faddeeva na polinomial'nye matritsy" [Extension of the Krylov, LeVerrier, and Faddeev methods to polynomial matrices], *Tr. In-ta matem. im. V. I. Romanovskogo* [Proc. Romanovskii Math. Univ.], 1962, **24**, 33–67 (in Russian).
3. I. S. Arzhanykh and V. I. Gugnina, "O razvertyvanii kharakteristicheskogo uravneniya" [On expansion of the characteristic equation], *Tr. In-ta matem. im. V. I. Romanovskogo* [Proc. Romanovskii Math. Univ.], 1962, **26**, 3–12 (in Russian).
4. M. M. Vainberg and V. A. Trenogin, *Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy* [Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
5. D. V. Valovik and Yu. G. Smirnov, *Rasprostranenie elektromagnitnykh voln v nelineynykh sloistykh sredakh* [Propagation of Electromagnetic Waves in Nonlinear Foliated Media], PGU, Penza, 2010 (in Russian).
6. A. S. Il'inskiy and G. Ya. Slepyan, *Kolebaniya i volny v elektrodinamicheskikh sistemakh s poteryami* [Oscillations and Waves in Electrodynamic Systems with Dissipation], MGU, Moscow, 1983 (in Russian).
7. B. V. Loginov and V. E. Pospeev, "O sobstvennykh chislakh i vektorakh vozmushchennogo operatora" [On eigenvalues and eigenvectors of a perturbed operator], *Izv. AN UzSSR. Ser. fiz.-mat. nauk* [Bull. Acad. Sci. Uzbek SSR. Ser. Phys.-Math. Sci.], 1967, No. 6, 29–35 (in Russian).
8. B. V. Loginov and Yu. B. Rusak, "Obobshchennaya zhordanova struktura v teorii vetvleniya" [Generalized Jordan structure in the branching theory], In: *Pryamye i obratnye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi* [Direct and Inverse Problems for Partial Differential Equations], Fan, Tashkent, 1978, pp. 133–148 (in Russian).
9. Sh. I. Mogilevskiy, "O predstavlenii vpolne nepreryvnogo operatora v abstraktnom gil'bertovom separabel'nom prostranstve" [On representation of a completely continuous operator in the abstract Hilbert separable space], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1958, No. 3, 183–186 (in Russian).
10. D. G. Rakhimov, "O vozmushchenii fredgol'movykh sobstvennykh znacheniy lineynykh operatorov" [On perturbation of Fredholm eigenvalues of linear operators], *SVMO* [SVMO], 2015, **17**, No. 3, 37–43 (in Russian).
11. D. G. Rakhimov, "O vozmushchenii fredgol'movykh sobstvennykh znacheniy lineynykh operatorov" [On perturbation of Fredholm eigenvalues of linear operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 5, 607–616 (in Russian).
12. Yu. B. Rusak, "Obobshchennaya zhordanova struktura analiticheskoy operator-funktsii i sopryazhennoy k ney" [Generalized Jordan structure of an analytic operator-function and its conjugate one], *Izv. AN UzSSR. Ser. fiz.-mat. nauk* [Bull. Acad. Sci. Uzbek SSR. Ser. Phys.-Math. Sci.], 1978, No. 2, 15–19 (in Russian).
13. E. Goursat, *Course d'Analyse Mathematique*, Gautier-Villars, Paris, 1933.
14. A. N. Kuvshinova and B. V. Loginov, "Some concequences of the generalized Hamilton—Cayley theorem for matrices polynomially dependent on E. Schmidt spectral parameter," *ROMAI J.*, 2014, **10**, No. 1, 81–92.

15. B. V. Loginov and D. G. Rakhimov, “On spectral problem for Laplace operator in domain with perturbed boundaries,” *ROMAI J.*, 2013, **9**, No. 2, 129–141.
16. F. Rellich, “Storungstheory der Spektalzerlegung, I,” *Math. Ann.*, 1936, **113**, 600–619.
17. E. Schmidt, “Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. I,” *Math. Ann.*, 1907, **63**, 433–476.
18. E. Schmidt, “Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. II,” *Math. Ann.*, 1907, **64**, 161–174.
19. E. Schmidt, “Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III,” *Math. Ann.*, 1908, **65**, 370–399.
20. N. V. Sidorov, A. V. Sinitsyn, and M. V. Falaleev, *Lyapunov—Schmidt methods in nonlinear analysis and applications*, Kluwer, Dordrecht, 2002.

D. G. Rakhimov
Branch of the Lomonosov Moscow State University in Tashkent, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: davranaka@yandex.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 83–94

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-83-94 УДК 517.55+517.559

ПРОДОЛЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ И ПЛЮРИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ЗАДАННОМУ НАПРАВЛЕНИЮ МЕТОДОМ Е. М. ЧИРКИ (ОБЗОР)

© 2019 г. **А. САДУЛЛАЕВ**

Аннотация. В работе приводится обзор результатов по аналитическим и плюрисубгармоническим продолжениям функций, имеющих тонкое множество особенностей вдоль фиксированного направления. Демонстрируются возможности применения теории плюрипотенциала и рядов Якоби—Хартогса в описании особого множества рассматриваемых функций.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Начнем со следующей теоремы, опубликованной в совместной с Е. М. Чиркой работе [18].

Теорема 1.1. *Пусть функция f голоморфна в поликруге $U = {}'U \times U_n \subset \mathbb{C}^{n-1}_{'z} \times \mathbb{C}_{z_n}$ и при каждом фиксированном $'a$ из некоторого не плюриполярного множества $E \subset' U$ функция $f('a, z_n)$ переменного z_n продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости за исключением некоторого полярного (дискретного) множества особенностей $S_{'a}$. Тогда f голоморфно продолжается в $('U \times \mathbb{C}) \setminus S$, где S — замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество $'U \times \mathbb{C}$.*

Трудный момент доказательства теоремы — это описание особого множества вне U; априори $\bigcup\limits_{'a \in' U} S_{'a}$ может быть всюду плотным в $'U \times [\mathbb{C} \setminus U_n]$. Эти трудности преодолевается следующим путем:

1). С использованием следующего критерия принадлежности ростка f классу R^0 А. А. Гончара в терминах тейлоровских коэффициентов, устанавливается, что $f('a, z_n)$ принадлежит R^0 для всех фиксированных $'a \in' U$: пусть

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{1.1}$$

— росток голоморфной в точке $0 \in \mathbb{C}$ функции. Рассматривая $f(rz)$ вместо $f(z)$, мы можем считать, что в (1.1) радиус сходимости ряда $R > 1$. Тогда определены величины

$$V_m = \max_{j_1, j_2, \dots, j_m} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} a_{j_1} & a_{j_1+1} & \dots & a_{j_1+m-1} \\ a_{j_2} & a_{j_2+1} & \dots & a_{j_2+m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j_m} & a_{j_m+1} & \dots & a_{j_m+m-1} \end{vmatrix}, \tag{1.2}$$

где $\operatorname{mod}|\cdot|$ обозначает модуль соответствующего определителя.

Теорема 1.2 (см. [10]). *Функция $f \in \mathcal{O}(\{|z| \leqslant 1\})$ принадлежит классу R^0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{m\to\infty} V_m^{1/m^2} = 0$.*

Отметим, что величина V_m в (1.2) по содержанию близка к модулю определителя Ганкеля

$$A_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & a_{m+1} & \dots & a_{2m-1} \end{vmatrix}, \ \operatorname{mod} A_m = |A_m| \leqslant V_m.$$

Вполне вероятно, что сформулированная теорема 1.2 справедлива и в терминах определителей Ганкеля в следующем виде, что функция $f \in \mathcal{O}(\{|z| \leqslant 1\})$ принадлежит классу R^0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{m\to\infty} |A_m|^{1/m^2} = 0$. Однако доказательство этого утверждения пока не представляется нам возможным. Напомним, что функция $f \in \mathcal{O}(\{|z| \leqslant 1\})$ является рациональной функцией степени m тогда и только тогда, когда $A_{m+1} = A_{m+2} = \ldots = 0$ или, что то же самое, $V_{m+1} = V_{m+2} = \ldots = 0$ (теорема Кронекера).

2). Поскольку множество $E \subset' U$ не является плюриполярным, то из теоремы 1.2 вытекает, что $f('a, z_n) \in R^0$, $\forall 'a \in' U$. Тогда по теореме Гончара [4, 5] $f('z, z_n)$ не имеет многозначного продолжения, т. е. ее естественная область существования $W_{(f,U)}$ однолистна, $W_{(f,U)} \subset \mathbb{C}^n$.

3). Далее в доказательстве теоремы 1.1, чтобы добраться до неизвестных особых точек функции f, используется один прекрасный метод, основанный на разложении ростка функций в ряд Якоби—Хартогса. Метод был разработан Е. М. Чиркой [19], где он использовал такие ряды для вычисления скорости рационального приближения.

Ряды Якоби—Хартогса. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{C}$ рациональную лемнискату G_r, точнее, объединение нескольких связных компонент множества $|g(z)| < r$, определяемого некоторой рациональной функцией g. Пусть $f(z)$ голоморфна в окрестности $\overline{G}_r$. Функция

$$F(z,w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_r} \frac{f(\xi)}{g(\xi) - w} \cdot \frac{g(\xi) - g(z)}{\xi - z} d\xi$$

голоморфна в области $G_r \times \{|w| < r\}$, причем $F(z, g(z)) \equiv f(z)$ в G_r по интегральной формуле Коши. Разложим $F(z,w)$ в ряд Хартогса по w:

$$F(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) w^k.$$

Подставляя в него $w = g(z)$, мы получим разложение в ряд Якоби:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) g^k(z) \tag{1.3}$$

с рациональными коэффициентами

$$c_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G_r} f(\xi) \frac{g(\xi) - g(z)}{g^{k+1}(\xi)(\xi - z)} d\xi. \tag{1.4}$$

Областью сходимости ряда (1.3) является внутренность лемнискаты $|g(z)| < R$, где радиус сходимости R определяется по формуле

$$\varlimsup_{k\to\infty} \|c_k\|_K^{1/k} = \frac{1}{R}.$$

Здесь K — произвольный компакт положительной емкости, не содержащий полюсов g, а предел в левой части равенства не зависит от выбора такого компакта.

Теперь вернемся к нашей функции $f('z, z_n) \in \mathcal{O}('U \times U_n)$, которая при каждом фиксированном $'z$ из некоторого не плюриполярного множества $E \subset' U$ по переменной z_n продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением некоторого полярного (дискретного) множества особенностей. Фиксируем рациональную функцию вида

$$g(z_n) = \frac{z_n^m}{p_m(z_n)}, \tag{1.5}$$

где $p_m(z_n)$ — некоторый полином степени $m > 0$ с рациональными коэффициентами и $p(0) \neq 0$. Разлагаем функцию $f('z, z_n)$ в ряд Якоби—Хартогса:

$$f('z, z_n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k('z, z_n) g^k(z_n). \tag{1.6}$$

Из формулы коэффициентов (1.4) мы видим, что $c_k('z, z_n)$ — рациональные функции по z_n, $\deg_{z_n} c_k('z, z_n) \leqslant m$, с коэффициентами, голоморфными в $'U$. Область сходимости этого ряда есть $G_g = \{|g(z_n)| < R_*('z)\}$, где $R_*('z) = \varliminf\limits_{'w \to 'z} R('w)$ — нижняя регуляризация функции $R('z) = R^g('z)$,

$$\frac{1}{R('z)} = \varlimsup_{k \to \infty} \|c_k('z, z_n)\|^{1/k}_{\{|z_n| \leqslant \delta\}}.$$

Отметим, что «иррегулярное» множество $I_g = \{R^g_*('z) < R^g('z)\}$ является плюриполярным множеством в $'U$.

4). Далее применяется теория плюрипотенциала: обозначим через $I = \bigcup\limits_g I_g$ счетное объединение иррегулярных множеств по всем счетным семействам рациональных функций вида (1.5). Оно является плюриполярным множеством. Следовательно, множество $E \backslash I$ не является плюриполярным. Так как функция f как сумма ряда (1.6) голоморфно продолжается в область $G_g = \{|g(z_n)| < R^g_*('z)\}$, то она голоморфно продолжается и в объединение $G = \bigcup\limits_g G_g$, причем это продолжение однозначно согласно 2). Если $'a \in E \backslash I$, то нетрудно видеть, что

$$G \cap \{'z =' a\} = \bigcup_g \{|g(z_n)| < R^g_*('z)\} \cap \{'z =' a\} =$$

$$= \bigcup_g \{|g(z_n)| < R^g('z)\} \cap \{'z =' a\} = \mathbb{C} \backslash S_{'a}.$$

Таким образом, если $\hat{f}$ — голоморфное продолжение функции f, то ее особое множество S обладает тем свойством, что пересечение $S \cap \{'z\} = S_{'z}$ — полярное (дискретное) для всех $'z \in E \backslash I$. Так как особое множество S, кроме того, псевдовогнутое, то утверждение теоремы непосредственно вытекает из следующих известных фактов (см. [9, 10, 24, 25, 29]): пусть $S \subset' U \times U_n$ — псевдовогнутое множество такое, что $\overline{S} \cap \{'U \times \partial U_n\} = \varnothing$ и E — некоторое неплюриполярное множество в $'U$. Тогда

а) если пересечения $\{'z\} \cap S$, $\forall\, 'z \in E$ — конечные (дискретные), то они конечны (дискретны) для всех $'z \in' U$, а S является аналитическим множеством в $'U \times U_n$;

б) если пересечения $\{'z\} \cap S$, $\forall\, 'z \in E$ — полярные, то они являются полярными для всех $'z \in' U$, а S является плюриполярным множеством в $'U \times U_n$.

2. Дальнейшие развитие теоремы 1.1

Имеющие непосредственное отношения к теореме 1.1 результаты имеются в работах У. Ротштейна (мероморфное продолжение) [26] и М. Казаряна (одна особая точка) [7, 8] (см. также [21]). Дальнейшие развитие теорема 1.1 получила в серии работ автора, С. Имамкулова, Ж. Хужамова, А. Атамуратова и М. Ваисовой (см. [1–3, 6, 12, 15–17, 20, 22]), в которых разобраны и случаи граничных множеств: $f('z, z_n) \in \mathcal{O}('D \times U_n)$ и $E \in \partial' D$. В частности, верна следующая теорема.

Теорема 2.1 (см. [16, 22]). *Пусть $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ — ограниченная область с гладкой границей, $E \subset \partial D$ — подмножество положительной меры Лебега, $mes_{2n-1} E > 0$, $f('z, z_n) \in \mathcal{O}('D \times U_n) \cap C\left(('D \cup E) \times U_n\right)$, $U_n = \{|z_n| < r\}$, $r > 0$. Если при каждом фиксированном $'a \in E$ функция $f('a, z_n)$ переменной z_n продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением некоторого полярного (дискретного) множества особенностей $S_{'a}$, то f голоморфно продолжается в $('D \times \mathbb{C}) \backslash S$, где S — замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество $'D \times \mathbb{C}$.*

В связи с теоремой 2.1 интересным является следующий вопрос: если $E \subset \partial D$ — открытое подмножество, то сохранится ли непрерывность функции $f('z, z_n) \in \mathcal{O}('D \times U_n) \cap C\left(('D \cup E) \times U_n\right)$ вплоть до граничного множества $(E \times \mathbb{C}) \setminus \overline{S}$? Следующий пример показывает, что без дополнительного условия ограниченности функции f ее непрерывность может нарушаться. В случае ограниченности функции на множестве $(('D \cup E) \times \mathbb{C}) \setminus \overline{S}$ требуемая непрерывность функции вытекает из свойств ограниченных сепаратно-аналитических функций (см. [17]).

Пример 2.1. Берем в бикруге

$$U \times V = \{|z| < 1\} \times \{|w| < 1\}$$

функцию

$$f(z, w) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - z) \frac{e^{k^2(z-1)}}{k^2} w^k.$$

Из неравенства

$$\left| (1 - z) \frac{e^{k^2(z-1)}}{k^2} w^k \right| \leqslant \frac{2}{k^2} e^{k^2 \operatorname{Re}(z-1)} \leqslant \frac{2}{k^2}, \ |z| \leqslant 1, \ |w| \leqslant 1,$$

следует, что ряд равномерно сходится в замкнутом поликруге $\overline{U} \times \overline{V}$ и его сумма $f(z, w) \in \mathcal{O}(U \times V) \cap C(\overline{U} \times \overline{V})$. Более того, для любого фиксированного $z^0 \in \overline{U}$, $|z^0| = 1$ функция $f(z^0, w)$ голоморфно продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}$. Однако

$$f\left(1 - \frac{1}{j}, 2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k^2/j^2}}{j^2 k^2} 2^k \geqslant \frac{2^j}{j^4} \to \infty$$

при $j \to \infty$, что показывает неограниченность $f(z, w)$ вблизи граничной прямой $\{z = 1\}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2 (см. [12]). *Если в условиях теоремы* 2.1 E — *открытое подмножество границы* $\partial' D$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует открытое плотное подмножество* $E^\varepsilon \subset E$ *такое, что аналитическое продолжение* f, *которое голоморфно в* $('D \times \mathbb{C}) \setminus S$, *будет непрерывным в* $(('D \cup E^\varepsilon) \times \mathbb{C}) \setminus \overline{S}^{\,\varepsilon}$, *где* $\overline{S}^{\,\varepsilon}$ *есть* ε*-окрестность множества* $\overline{S}$.

В работе [6] С. Имамкулов несколько усилил теорему 2.1, доказав ее для порождающего многообразия $M \subset \partial' D$.

Теорема 2.3. *Пусть* $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ — *ограниченная область с гладкой границей и* $M \subset \partial' D$ — *гладкое порождающее* k*-мерное многообразие,* $n - 1 \leqslant k \leqslant 2n - 3$. *Предположим, что функция* $f('z, z_n)$ *голоморфна в поликруговой области* $('D \times U_n)$, $U_n = \{|z_n| < r\}$, $r > 0$, *непрерывна на* $(\overline{'D} \times U_n)$ *и при каждом фиксированном* $'\xi$ *из некоторого множества* $E \subset M$ *положительной меры Лебега на* M, $m_k(E) > 0$, *функция* $f('\xi, z_n)$ *переменной* z_n *продолжается до функции, голоморфной на всей плоскости, за исключением некоторого полярного* (*дискретного*) *множества особенностей. Тогда* $f('z, z_n)$ *голоморфно продолжается в* $('D \times \mathbb{C}) \setminus S$, *где* S — *замкнутое плюриполярное* (*аналитическое*) *подмножество* $'D \times \mathbb{C}$.

Отметим, что в доказательствах этих теорем также существенно используется метод разложения функций в ряд Якоби—Хартогса.

3. Случай плюригармонических функций

Лемма Хартогса о голоморфном продолжении вдоль фиксированного направления справедлива и в случае плюригармонических (ph) функций: *если функция* $u('z, z_n)$ *плюригармонична в области* $U =' U \times U_n \subset \mathbb{C}^{n-1}_{'z} \times \mathbb{C}_{z_n}$ *и при каждом фиксированном* $'a \in' U$ *функция* $u('a, z_n)$ *переменного* z_n *гармонически продолжается в большой круг* $\tilde{U}_n \supset U_n$, *то функция* $u('z, z_n)$ *плюригармонически продолжается в* $\tilde{U} =' U \times \tilde{U}_n$.

В самом деле, функция $f('z, z_n) = u('z, z_n) + v('z, z_n)$, где $v('z, z_n)$ — сопряженная плюригармоническая функция в $U =' U \times U_n$, будет сопряженной по z_n в $\tilde{U}_n$. Следовательно, по лемме Хартогса f голоморфно продолжается в $\tilde{U}$, т. е. $u('z, z_n) \in ph(\tilde{U})$.

Однако в случае, когда $u('z, z_n)$ по направлению Oz_n имеет особенность, такое простое доказательство не проходит, так как сопряженная гармоническая функция в неодносвязную область может продолжаться неоднозначным образом, т. е. функция $f('z, z_n) = u('z, z_n) + v('z, z_n)$ может быть многозначной. Тем не менее, имеет место теорема.

Теорема 3.1. *Пусть функция $u('z, z_n)$ плюригармонична в поликруге $U =' U \times U_n \subset \mathbb{C}^{n-1}_{'z} \times \mathbb{C}_{z_n}$ и при каждом фиксированном $'a$ из некоторого неплюриполярного множества $E \subset' U$ функция $u('a, z_n)$ переменного z_n продолжается до функции, гармонической на всей плоскости, за исключением некоторого полярного (дискретного) множества особенностей $S_{'a}$. Тогда $u('z, z_n)$ плюригармонически (может быть, многозначно) продолжается в $('U \times \mathbb{C})\backslash S$, где S — замкнутое плюриполярное (аналитическое) подмножество $'U \times \mathbb{C}$. Более того, если E всюду плотно в $'U$, то продолжение $u('z, z_n)$ является однозначным.*

Доказательство. Приведем ход доказательства этой теоремы, которая в работах [12,17] доказана в частном случае. Так как $u('z, z_n) \in ph('U \times U_n)$, то в $'U \times U_n$ существует голоморфная функция $f('z, z_n) \in \mathcal{O}('U \times U_n): \ u('z, z_n) = f('z, z_n) + \overline{f}('z, z_n)$. Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{\partial (f + \overline{f})}{\partial z_n} = \frac{\partial f}{\partial z_n} \in \mathcal{O}('U \times U_n),$$

причем для фиксированного $'z^0 \in E$ функция $\dfrac{\partial u}{\partial z_n}('z^0, z_n)$ голоморфна в $\mathbb{C}\backslash S_{'z^0}$. По теореме 1.1 функция $\dfrac{\partial u}{\partial z_n}$ голоморфно продолжается в $('U \times \mathbb{C})\backslash S$, где S является замкнутым плюриполярным (аналитическим) подмножеством $'U \times \mathbb{C}$.

Положим

$$F('z, z_n) = \int\limits_{\gamma[0, z_n]} \frac{\partial u}{\partial z_n} dz_n,$$

где $\gamma \subset \mathbb{C}\backslash S_{'z}$ — произвольный спрямляемый путь. Ясно, что F представляет собой многозначную аналитическую функцию в $('U \times \overline{\mathbb{C}})\backslash S$. Кроме того,

$$2 \operatorname{Re} F('z, z_n) = u('z, z_n) - u(0, z_n). \tag{3.1}$$

Действительно, если $w(z), z = x + iy$ — гладкая функция в плоской области $D \subset \mathbb{C}$ и $\gamma \subset D$ — спрямляемая кривая, соединяющая $'z, ''z \in D$, то

$$\int\limits_\gamma \frac{\partial w}{\partial z} dz = \frac{1}{2} \int\limits_\gamma \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{i}{2} \int\limits_\gamma \frac{\partial w}{\partial x} dy - \frac{\partial w}{\partial y} dx = \frac{1}{2}[w(''z) - w('z)] + \frac{i}{2} \int\limits_\gamma \frac{\partial w}{\partial x} dy - \frac{\partial w}{\partial y} dx,$$

что влечет справедливость (3.1). Следовательно, функция $u('z, z_n) = 2 \operatorname{Re} F('z, z_n) - u(0, z_n)$ является многозначной плюригармонической функцией.

Функция $u('z, z_n)$ является однозначной тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} F('z, z_n)$ является однозначной, т. е. когда

$$\operatorname{Re} \oint_\gamma \frac{\partial u}{\partial z_n} dz_n = 0 \tag{3.2}$$

для любой замкнутой спрямляемой кривой $\gamma \subset \{'z\}\backslash S_{'z}$. Для доказательства второй части теоремы нам нужно доказать равенство (3.2).

Предположим противное, что существуют точка $'z^0 \in' U$ и спрямляемая замкнутая кривая $\gamma \subset \{'z^0\}\backslash S_{'z^0}$ такие, что

$$\operatorname{Re} \oint_\gamma \frac{\partial u('z^0, z_n)}{\partial z_n} dz_n \neq 0.$$

Тогда существует окрестность $'V \subset' U$, $'z^0 \in' V$ такая, что $\gamma \subset \{'z\}\backslash S_{'z}$, $\forall 'z \in' V$. Интеграл

$$\oint_\gamma \frac{\partial u('z, z_n)}{\partial z_n} dz_n$$

представляет собой голоморфную в $'V$ функцию. Следовательно, функция

$$\mathrm{Re}\oint_\gamma \frac{\partial u('z,z_n)}{\partial z_n}dz_n$$

является плюригармонической в $'V$. Для $'z\in E$ она равна нулю, ибо функция $u('z,z_n)$ является однозначной. Из всюду плотности E отсюда вытекает, что

$$\mathrm{Re}\oint_\gamma \frac{\partial u('z,z_n)}{\partial z_n}dz_n\equiv 0$$

в $'V$, что противоречит включению $'z^0\in' V$. Теорема доказана. □

Замечание 3.1. В случае, когда в теореме 3.1 при каждом фиксированном $'a\in E$ функция $u('a,z_n)$ переменного z_n продолжается до функции, гармонической на всей плоскости, за исключением некоторого дискретного множества $S_{'a}$, теорему можно существенно усилить. А именно, для однозначности продолжения $u('a,z_n)$ от E можно потребовать лишь, что E не является множеством нулей плюригармонических функций (в частности, хаусдорфова мера $H_{2n-1}(E)>0$).

В самом деле, в этом случае особое множество $S\subset' U\times\mathbb{C}$ будет аналитическим множеством. Рассмотрим совокупность его регулярных точек $S_0\subset S$ такую, что в некоторой окрестности V каждой точки $z^0\in S_0$ множество $V\cap S$ является графиком аналитической функции, $V\cap S=\{z_n=a('z)\}$. Тогда проекция $\pi(S\backslash S_0)$ множества $S\backslash S_0$ в $'U$ является плюриполярным множеством. Следовательно, $E\backslash\pi(S\backslash S_0)$ тоже не будет нулем никакой плюригармонической функции. Отсюда мы заключаем, что множество $\pi^{-1}(E)\cap S_0$ не является множеством нулей плюригармонических на S_0 функций.

Для каждой точки $z=('z,z_n)\in S_0$ определим функцию

$$\Phi('z,z_n)=\mathrm{Re}\oint_\gamma \frac{\partial u}{\partial z_n}dz_n, \tag{3.3}$$

где $\gamma\subset\{'z\}\backslash S_{'z}$ — окружность $|z_n-a('z)|=\varepsilon,\ \varepsilon>0$ такая, что внутри нее помимо $a('z)$ нет других точек сечения $S_{'z}$. Ясно, что функция Φ определена и плюригармонична на аналитическом множестве S_0. Если $'z^0\in E\backslash\pi(S\backslash S_0)$, то функция $u('z^0,z_n)$ является однозначной в $\pi^{-1}\left\{'z^0\right\}\backslash S_{'z^0}$. Следовательно, $\Phi('z^0,z_n)=0\ \forall z_n\in S_{'z^0}$. Таким образом, мы доказали, что $\Phi('z,z_n)=0$ на $\pi^{-1}(E)\cap S_0$. Отсюда вытекает, что $\Phi('z,z_n)\equiv 0$ на S_0, ибо множество $\pi^{-1}(E)\cap S_0$ не является множеством нулей плюригармонических на S_0 функций. Так как множество $\pi(S\backslash S_0)$ плюриполярное, а значит нигде не плотное в $'U$, то отсюда следует (3.2).

Как показывает следующий пример, в случае, когда множество $E\subset' U$ — лишь не плюриполярное, теорема 3.1 не верна.

Пример 3.1. Рассмотрим в поликруге $U\times V=\{|z|<1\}\times\{|w|<1\}$ функцию

$$u(z,w)=\mathrm{Re}[z\ln(w-1)].$$

Ясно, что $u(z,w)$ плюригармонична в $U\times V$. Вещественный интервал $E=(-1,1)$ является неплюриполярным множеством в U, причем для любого фиксированного $z=x\in E$ функция $u(x,w)=x\ln|w-1|$ является гармонической по w в $\mathbb{C}\backslash\{w=1\}$. Однако $u(z,w)=\mathrm{Re}[z\ln(w-1)]$ не является однозначной плюригармонической функцией в $\mathbb{C}^2\backslash\{w=1\}$, она многозначная.

4. Граничный вариант

Для граничных множеств $E\subset\partial' D$, в отличие от голоморфных функций, плюригармоническое продолжение имеет ряд трудностей.

Пример 4.1. Рассмотрим в поликруге $U\times V=\{|z|<1\}\times\left\{|w|<\frac{1}{2}\right\}\subset\mathbb{C}^2$ голоморфную функцию $f(z,w)=\exp\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2\ln(w-1)$.

Тогда функция $u(z,w) = \operatorname{Re} f(z,w) \in ph(U\times V) \cap C^\infty\left((\overline{U}\backslash\{1\})\times V\right)$, причем при фиксированном $z=\xi,\ |\xi|=1,\ \xi\neq 1$ имеем

$$u(\xi,w) = \operatorname{Re}\exp\left(\frac{1+\xi}{1-\xi}\right)^2 \ln|w-1|,$$

и эта функция по переменной w является гармонической вне $\{w=1\}$. Однако $u(z,w)$ не является однозначной плюригармонической функцией в $(U\times\mathbb{C})\backslash\{w=1\}$.

Сформулируем следующую проблему, которая нам кажется правдоподобной.

Проблема 4.1. *Пусть* $'D\subset\mathbb{C}^{n-1}$ — *ограниченная область с гладкой границей,* $u('z,z_n)\in ph('D\times U_n)\cap C('\overline{D}\times\overline{U})$, $U_n=\{|z_n|<r\}$, $r>0$. *Если при каждом фиксированном* $'\xi\in\partial' D$, *функция* $u('\xi,z_n)$ *переменного* z_n *продолжается до функции, гармонической на всей плоскости* $\mathbb{C}$, *за исключением конечного числа особых точек* $S_{'z}=\{\beta_1('\xi),\beta_2('\xi),\ldots,\beta_m('\xi)\}$, $m=m('\xi)$, *то* $u('z,z_n)$ *плюригармонически* (*однозначно*) *продолжается в* $('D\times\mathbb{C})\backslash S$, *где* $S\subset' D\times\mathbb{C}$ — *аналитическое множество.*

Отметим, что при выполнении условий, приведенных в проблеме 4.1, производная

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_n} - i\frac{\partial u}{\partial y_n}\right]$$

является голоморфной в $'D\times U_n$ и непрерывной в $'\overline{D}\times U_n$ функцией, причем для фиксированных $'z\in\partial' D$ она голоморфна на всей плоскости $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа особых точек $S_{'z}=\{\beta_1('\xi),\beta_2('\xi),\ldots,\beta_m('\xi)\}$.

В самом деле, берем произвольный поликруг $'U\subset' D$. Так как $u('z,z_n)\in \mathrm{ph}('U\times U_n)$, то в $'U\times U_n$ существует голоморфная функция $f('z,z_n)\in('U\times U_n)$: $u('z,z_n)=\operatorname{Re} f('z,z_n) = \dfrac{1}{2}[f('z,z_n)+\overline{f}('z,z_n)]$. Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_n}\in\mathcal{O}('U\times U_n).$$

По формуле Шварца при фиксированном $'z\in' U$ справедливы равенства

$$f('z,z_n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u('z,re^{it})\frac{re^{it}+z_n}{re^{it}-z_n}dt + i\operatorname{Im} f('z,0),\quad z_n\in U_n,$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_n} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} u('z,re^{it})\frac{d}{dz_n}\left[\frac{re^{it}+z_n}{re^{it}-z_n}\right]dt,\quad ('z,z_n)\in' U\times U_n.$$

Но функция

$$\frac{\partial u}{\partial z_n} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi} u('z,re^{it})\frac{d}{dz_n}\left[\frac{re^{it}+z_n}{re^{it}-z_n}\right]dt$$

определена в $'\overline{D}\times U_n$, является голоморфной в $'D\times U_n$ и непрерывной в $'\overline{D}\times U_n$, причем для $'z\in\partial' D$ она голоморфна на всей плоскости $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа особых точек.

Отсюда и по теореме 2.1 функция $\dfrac{\partial u}{\partial z_n}$ голоморфно продолжается в $('D\times\mathbb{C})\backslash S$, где особое множество S является аналитическим множеством. Как в теореме 3.1, функция

$$F('z,z_n) = \int\limits_{\gamma[0,z_n]}\frac{\partial u}{\partial z_n}dz_n,$$

где $\gamma\subset\mathbb{C}\backslash S_{'z}$ — произвольный спрямляемый путь, представляет собой многозначную аналитическую функцию в $('D\times\overline{\mathbb{C}})\backslash S$, причем $u('z,z_n)=\operatorname{Re} F('z,z_n)+u(0,z_n)$. Эта формула дает нам многозначное плюригармоническое продолжение функции $u('z,z_n)$. Для установления справедливости сформулированной проблемы 4.1 нужно лишь доказать однозначность функции $u('z,z_n)$, используя условие ее однозначности для всех граничных точек $'z\in\partial' D$.

Ниже мы покажем, что в случае бесконечного числа особых точек $S_{'z} = \{\beta_1('\xi), \beta_2('\xi), \ldots\}$ проблема 4.1 имеет отрицательный ответ.

Пример 4.2 (см. [12]). Рассмотрим аналитическое в $\mathbb{C}^2\backslash\{w=0\}$ множество

$$A = \left\{\exp\left(1+\frac{1}{w}\right) = z\right\} = \left\{w = \frac{1}{-1+lnz+2k\pi i},\ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots\right\}.$$

Очевидно, что его замыкание

$$\overline{A} = \left\{\exp\left(1+\frac{1}{w}\right) = z\right\} \cup \{w=0\}$$

является псевдовогнутым плюриполярным множеством, т. е. $\mathbb{C}^2\backslash\overline{A}$ является псевдовыпуклым множеством. Покажем, что $\overline{A}$ является L-полным, т. е. $\exists\, u(z,w) \in L:\ \overline{A} = \{u(z,w) = -\infty\}$, где $L = \{u(z,w) \in psh(\mathbb{C}^2):\ u(z,w) \leqslant \text{const} + \ln\left(1+(|z|^2+|w|^2)^{1/2}\right)$. Для этого заметим, что аналитическое множество $B = \{\exp(1+w) - z = 0\}$ является полным плюриполярным множеством, $B = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2:\ \ln|\exp(1+w) - z| = -\infty\}$. Следовательно, оно является L-полным, т. е. $\exists\, u(z,w) \in L:\ B = \{u(z,w) = -\infty\}$ (см. [14]). Положим $v(z,w) = u(z, 1/w) + 2\ln|w|$. Функция $v(z,w)$ является плюрисубгармонической в $\mathbb{C}^2\backslash\{w=0\}$ и, кроме того, в окрестности плоскости $w=0$ имеет место

$$v(z,w) = u(z,1/w) + 2\ln|w| \leqslant \text{const} + \ln\left(|w| + (1+|zw|^2)^{1/2}\right) + \ln|w|.$$

Отсюда вытекает, что $v(z,w)$ плюрисубгармонически продолжается на $w=0$, т. е. $v(z,w) \in psh\left(\mathbb{C}^2\right)$. Нетрудно видеть, что

$$\{v(z,w) = -\infty\} = \left\{\exp\left(1+\frac{1}{w}\right) = z\right\} \cup \{w=0\} = \overline{A},$$

что означает полноту и, следовательно, L-полноту плюриполярного множества $\overline{A}$.

Положим $S = \overline{A} \cap (U\times\mathbb{C})$. Заметим, что $S \subset \{|z|<1\}\times\{|w|<1\}$ и, так как открытое множество $\{v(z,w) < \alpha\}$ является полиномиально выпуклым для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\overline{A} = \{v(z,w) = -\infty\}$, то отсюда легко следует, что компакт $\overline{S} = \overline{A} \cap (\overline{U}\times\mathbb{C})$ — полиномиально выпуклый, где $U = \{|z|<1\}$ — единичный круг.

Покажем, что граница Шилова алгебры полиномов $P(\overline{S})$ есть топологическая граница $\partial\overline{S}$. Предположим противное, что для некоторого полинома $p(z,w)$ норма $\|p\|_S = p(z^0,w^0) = 1$, $(z^0,w^0) \in S \cap (U\times\mathbb{C})$, но $\|p\|_{\partial S} < 1$. Берем концентрический круг $U' \subset\subset U$ такой, что $\|p\|_{\partial S'} < 1$, где $S' = S \cap (U'\times\mathbb{C})$. Тогда последовательность аналитических множеств $B_k = \left\{(z,w) \in U' \times \{|w|<1\}:\ p(z,w) = 1 + \dfrac{1}{k}\right\}$ обладает следующими свойствами:

а) $B_k \subset U\times\mathbb{C}$ и $B_k \to B_\infty$, $\partial B_k \to \partial B_\infty$ относительно метрики Хаусдорфа, где $B_\infty = \{(z,w) \in U' \times \{|w|<1\}:\ p(z,w) = 1\}$;

б) $B_\infty \ni (z^0,w^0)$, но $\partial B_\infty \subset\subset (U\times\mathbb{C})\backslash S$.

По принципу непрерывности это противоречит псевдовыпуклости $(U\times\mathbb{C})\backslash S$ в точке $(z^0,w^0) \in S$.

При фиксированном $\xi = e^{i\varphi} \in \partial U$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, сечение

$$S_\xi = \left\{\frac{1}{-1+i\varphi+2k\pi i},\ k = 0,\pm1,\pm2,\ldots\right\} \subset \partial S$$

состоит из бесконечного числа точек. Заметим, что аналитическая поверхность $S\backslash\{w=0\}$ биголоморфно эквивалентна кругу $|v|<1$:

$$\Psi(v) = \left(\exp\left(\frac{v-1}{v+1}\right), -\frac{1+v}{2}\right) : U \to S\backslash\{w=0\}.$$

Берем на окружности $\partial U = \{e^{i\varphi}, -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$ меру $\dfrac{1}{2\pi}d\varphi$. Она является представляющей мерой алгебры полиномов $P(\overline{U})$ относительно точки $0:\ p(0) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial U} p(e^{i\varphi})d\varphi,\ \forall p \in P(\overline{U})$. Образ этой меры $d\theta = \dfrac{1}{2\pi} d\Psi^-$ на $\partial S \setminus \{w=0\}$ является представляющей мерой алгебры полиномов $P(\overline{S})$ относительно точки $(e^{-1}, -1/2) \in S$. Положим

$$\mu = \frac{|\xi - e^{-1}|}{1 - |e^{-1}|^2}\theta.$$

Меру μ нам удобно представить в виде $d\mu = \dfrac{d\varphi}{2\pi} \otimes d\mu_\xi(w),\ \xi = e^{i\varphi},\ d\mu_\xi(w)$ — единичная дискретная мера, сосредоточенная на S_ξ. Заметим, что мера μ является аналитической, т. е. функции

$$a_k(\xi) = \int w^k d\mu_\xi(w),\ k = 1, 2, \ldots,$$

голоморфно продолжаются в единичный круг U, причем продолжения непрерывны вплоть до границы ∂U. Тогда потенциал

$$U^\mu(\xi, w) = \int \ln|\eta - w| d\mu_\xi(\eta),\ \xi \in \partial U,\ w \in \mathbb{C},$$

обладает следующими свойствами:

а) функция $U^\mu(\xi, w)$ плюригармонически продолжается в $U \times \{|w| > 1\}$, причем продолжение непрерывно вплоть до $\overline{U} \times \{|w| > 1\}$;

б) функция

$$\frac{\partial U^\mu(\xi, w)}{\partial w} = \int \frac{d\mu_\xi(\eta)}{\eta - w}$$

голоморфно продолжается в $(U \times \mathbb{C}) \setminus S$;

в) функция $U^\mu(\xi, w)$ гармоническая и однозначная в $\mathbb{C} \setminus S_\xi,\ \forall \xi \in \partial U$, продолжается в $(U \times \mathbb{C}) \setminus S$ как многозначная ph функция, которая не является однозначной.

Действительно, при $|w| > 1$ имеем

$$U^\mu(\xi, w) = \int \ln|\eta - w| d\mu_\xi(\eta) = \ln|w| + \int \ln\left|1 - \frac{\eta}{w}\right| d\mu_\xi(\eta) =$$

$$= \ln|w| - \mathrm{Re} \int \sum_{k=1}^\infty \frac{\eta^k}{w^k} d\mu_\xi(\eta) = \ln|w| - \mathrm{Re} \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{w^k} \int \eta^k d\mu_\xi(\eta) =$$

$$= \ln|w| - \mathrm{Re} \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k(\xi)}{w^k}. \tag{4.1}$$

Отметим, что меру $d\mu = \dfrac{d\varphi}{2\pi} \otimes d\mu_\xi(w)$ мы выбрали так, чтобы функция $a_k(\xi) = \int \eta^k d\mu_\xi(\eta)$ была граничным значением голоморфной в единичном круге функции $a_k(z), k = 1, 2, \ldots$. Так как $d\mu$ — единичная мера, сосредоточенная на ∂S и $\overline{S} \subset \{|z| \leqslant 1\} \times \{|w| \leqslant 1\}$, то $|a_k(\xi)| \leqslant 1$. Отсюда следует, что последний ряд в (4.1) равномерно сходится на компактных подмножествах $\overline{U} \times \{|w| > 1\}$ и

$$U^\mu(z, w) \in ph\left(U \times \{|w| > 1\}\right) \cap C\left(\overline{U} \times \{|w| > 1\}\right).$$

Утверждение б) вытекает из теоремы 2.1, а утверждение в) следует из результата Левенберга—Слодковского [23] о том, что не существует функции $V(z, w) \in psh(U \times \mathbb{C}) \cap ph((U \times \mathbb{C}) \setminus S)$: $V|_S \equiv -\infty$. Согласно этому результату, функция $U^\mu(z, w)$ не может быть однозначной в $U \times \mathbb{C}$, т. е., она многозначная.

Пример 4.3. Функция $u(\xi, w) = U^\mu\left(\xi, \dfrac{1}{w}\right) + \ln|w|,\ \xi \in \partial U,\ w \in \mathbb{C}$, обладает тем свойством, что она плюригармонически продолжается в $U \times \{|w| < 1\}$, причем продолжение непрерывно вплоть до $\overline{U} \times \{|w| < 1\}$. Кроме того, она гармоническая и однозначная в $\mathbb{C} \setminus S_\xi,\ \forall \xi \in \partial U$, но ее плюригармоническое продолжение в $(U \times \mathbb{C}) \setminus \overline{S}$ является многозначным, не является однозначным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Атамуратов А. А.* О мероморфном продолжении вдоль фиксированного направления// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 3. — С. 323–327.
2. *Атамуратов А. А.* Мероморфное продолжение функций по граничным сечениям// Uzbek Mat. Zh. — 2009. — № 1. — С. 4–9.
3. *Атамуратов А. А.* Продолжение сепаратно-мероморфных функций, заданных на части границы// Uzbek Mat. Zh. — 2009. — № 3. — С. 18–26.
4. *Гончар А. А.* Локальное условие однозначности аналитических функций// Мат. сб. — 1972. — *89*. — С. 148–164.
5. *Гончар А. А.* Локальное условие однозначности аналитических функций нескольких переменных// Мат. сб. — 1974. — *93*. — С. 296–313.
6. *Имомкулов С. А.* О голоморфном продолжении функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2005. — *69*, № 2. — С. 125–144.
7. *Казарян М. В.* О голоморфном продолжении функций со специальными особенностями в $\mathbb{C}^n$// Докл. АН АрмССР. — 1983. — *76*. — С. 13–17.
8. *Казарян М. В.* Мероморфное продолжение по группам переменных// Мат. сб. — 1984. — *125*, № 3. — С. 384–397.
9. *Садуллаев А.* Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества// Мат. сб. — 1982. — 119, № 1. — С. 96–118.
10. *Садуллаев А.* Критерий быстрой рациональной аппроксимации в $\mathbb{C}^n$// Мат. сб. — 1984. — *125*, № 2. — С. 269–279.
11. *Садуллаев А.* Плюрисубгармонические функции// Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1985. — *8*. — С. 65–113.
12. *Садуллаев А.* О плюригармоническом продолжении вдоль фиксированного направления// Мат. сб. — 2005. — *196*. — С. 145–156.
13. *Садуллаев А.* Об аналитических мультифункциях// Мат. заметки. — 2008. — *83*, № 5. — С. 84–95.
14. *Садуллаев А.* Теория плюрипотенциала. Применения. — Рига: Palmarium Akademic Publishing, 2012.
15. *Садуллаев А., Имомкулов С. А.* Продолжение плюригармонических функций с дискретными особенностями на параллельных сечениях// Вестн. Красноярск. гос. ун-та. — 2004. — № 5/2. — С. 3–6.
16. *Садуллаев А., Имомкулов С. А.* Продолжение сепаратно-аналитических функций, заданных на части границы области// Мат. заметки. — 2006. — *79*, № 2. — С. 234–243.
17. *Садуллаев А., Имомкулов С. А.* Продолжение голоморфных и плюригармонических функций с тонкими особенностями на параллельных сечениях// Тр. МИАН. — 2006. — *253*. — С. 158–174.
18. *Садуллаев А., Чирка Е. М.* О продолжении функций с полярными особенностями// Мат. сб. — 1987. — *132*, № 3. — С. 383–390.
19. *Чирка Е. М.* Разложение в ряды и скорость рациональных приближений для голоморфных функций с аналитическими особенностями// Мат. сб. — 1974. — *93*, № 2. — С. 314–324.
20. *Atamuratov A. A., Vaisova M. D.* On the meromorphic extension along the complex lines// TWMS J. Pure Appl. Math. — 2011. — *2*, № 1. — С. 10–16.
21. *Chirka E. M.* On the removable singularities for meromorphic mappings// Publ. Mat. — 1996. — *40*. — С. 229–232.
22. *Imomkulov S. A., Khujamov J. U.* On holomorphic continuation of functions along boundary sections// Math. Bohem. — 2005. — *130*, № 3. — С. 309–322.
23. *Levenberg N., Słodkowski Z.* Pseudoconcave pluripolar sets in $\mathbb{C}^2$// Math. Ann. — 1998. — *312*. — С. 429–443.
24. *Nishino T.* Sur les ensembles pseudo-concaves// J. Math. Kyoto Univ. — 1962. — *1*. — С. 225–245.
25. *Oka K.* Note sur les familles de fonctions analytiques multiform etc.// J. Sci. Hiroshima Univ. — 1934. — *4*. — С. 93–98.
26. *Rothstein W.* Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Functionen// Math. Z. — 1950. — *53*. — С. 84–95.
27. *Sadullaev A.* Plurisubharmonic functions// В сб.: «Several Complex Variables II». — Berlin—Heidelberg: Springer, 1994. — С. 56–106.
28. *Sadullaev A.* On analytic multifunctions// Math. Notes. — 2008. — *83*. — С. 652–656.
29. *Slodkowski Z.* Analytic set-valued functions and spectra// Math. Ann. — 1981. — *256*, № 3. — С. 363–386.

Азимбай Садуллаев
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,

Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: sadullaev@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-83-94 UDC 517.55+517.559

Continuation of Analytic and Pluriharmonic Functions in the Given Direction by the Chirka Method: a Survey

© 2019 **A. Sadullaev**

Abstract. In this paper, we provide a survey of results on analytic and plurisubharmonic continuations of functions that have this set of singularities along a fixed direction. We show the advantages of using the pluripotential theory and the Jacobi–Hartogs series for description of the singular set of such functions.

REFERENCES

1. A. A. Atamuratov, "O meromorfnom prodolzhenii vdol' fiksirovannogo napravleniya" [On meromorphic continuation along a fixed direction], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 3, 323–327 (in Russian).
2. A. A. Atamuratov, "Meromorfnoe prodolzhenie funktsiy po granichnym secheniyam" [Meromorphic continuation of functions along boundary sections], *Uzbek Mat. Zh.* [Uzbek Mat. Zh.], 2009, No. 1, 4–9 (in Russian).
3. A. A. Atamuratov, "Prodolzhenie separatno-meromorfnykh funktsiy, zadannykh na chasti granitsy" [Continuation of separately meromorphic functions defined on a part of the boundary], *Uzbek Mat. Zh.* [Uzbek Mat. Zh.], 2009, No. 3, 18–26 (in Russian).
4. A. A. Gonchar, "Lokal'noe uslovie odnoznachnosti analiticheskikh funktsiy" [Local condition of one-valuedness of analytic functions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1972, **89**, 148–164 (in Russian).
5. A. A. Gonchar, "Lokal'noe uslovie odnoznachnosti analiticheskikh funktsiy neskol'kikh peremennykh" [Local condition of one-valuedness of analytic functions of multiple arguments], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1974, **93**, 296–313 (in Russian).
6. S. A. Imomkulov, "O golomorfnom prodolzhenii funktsiy, zadannykh na granichnom puchke kompleksnykh pryamykh" [On holomorphic continuation of functions defined on a boundary pencil of complex lines], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2005, **69**, No. 2, 125–144 (in Russian).
7. M. V. Kazaryan, "O golomorfnom prodolzhenii funktsiy so spetsial'nymi osobennostyami v $\mathbb{C}^n$" [On holomorphic continuation of functions with special singularities to $\mathbb{C}^n$], *Dokl. AN ArmSSR* [Rep. Acad. Sci. Armenian SSR], 1983, **76**, 13–17 (in Russian).
8. M. V. Kazaryan, "Meromorfnoe prodolzhenie po gruppam peremennykh" [Meromorphic continuation with respect to groups of arguments], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **125**, No. 3, 384–397 (in Russian).
9. A. Sadullaev, "Ratsional'nye approksimatsii i plyuripolyarnye mnozhestva" [Rational approximations and pluripolar sets], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, 119, No. 1, 96–118 (in Russian).
10. A. Sadullaev, "Kriteriy bystroy ratsional'noy approksimatsii v $\mathbb{C}^n$" [Criteria of fast rational approximation in $\mathbb{C}^n$], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **125**, No. 2, 269–279 (in Russian).
11. A. Sadullaev, "Plyurisubgarmonicheskie funktsii" [Plurisubharmonic functions], *Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 1985, **8**, 65–113 (in Russian).
12. A. Sadullaev, "O plyurigarmonicheskom prodolzhenii vdol' fiksirovannogo napravleniya" [On the plurisubharmonic continuation along fixed direction], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2005, **196**, 145–156 (in Russian).
13. A. Sadullaev, "Ob analiticheskikh mul'tifunktsiyakh" [On analytic multifunctions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2008, **83**, No. 5, 84–95 (in Russian).
14. A. Sadullaev, *Teoriya plyuripotentsiala. Primeneniya* [Pluripotential Theory: Applications], Palmarium Akademic Publishing, Riga, 2012 (in Russian).
15. A. Sadullaev and S. A. Imomkulov, "Prodolzhenie plyurigarmonicheskikh funktsiy s diskretnymi osobennostyami na parallel'nykh secheniyakh" [Continuation of pluriharmonic functions with discrete

singularities on parallel sections], *Vestn. Krasnoyarsk. gos. un-ta* [Bull. Krasnoyarsk State Univ.], 2004, No. 5/2, 3–6 (in Russian).
16. A. Sadullaev and S. A. Imomkulov, "Prodolzhenie separatno-analiticheskikh funktsiy, zadannykh na chasti granitsy oblasti" [Continuation of separately analytic functions defined on a part of the boundary], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2006, **79**, No. 2, 234–243 (in Russian).
17. A. Sadullaev and S. A. Imomkulov, "Prodolzhenie golomorfnykh i plyurigarmonicheskikh funktsiy s tonkimi osobennostyami na parallel'nykh secheniyakh" [Continuation of holomorphic and pluriharmonic functions with fine singularities on parallel sections], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2006, **253**, 158–174 (in Russian).
18. A. Sadullaev and E. M. Chirka, "O prodolzhenii funktsiy s polyarnymi osobennostyami" [On continuation of functions with polar singularities], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1987, **132**, No. 3, 383–390 (in Russian).
19. E. M. Chirka, "Razlozhenie v ryady i skorost' ratsional'nykh priblizheniy dlya golomorfnykh funktsiy s analiticheskimi osobennostyami" [Expansion into series and rate of rational approximations for holomorphic functions with analytic singularities], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1974, **93**, No. 2, 314–324 (in Russian).
20. A. A. Atamuratov and M. D. Vaisova, "On the meromorphic extension along the complex lines," *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 2011, **2**, No. 1, 10–16.
21. E. M. Chirka, "On the removable singularities for meromorphic mappings," *Publ. Mat.*, 1996, **40**, 229–232.
22. S. A. Imomkulov and J. U. Khujamov, "On holomorphic continuation of functions along boundary sections," *Math. Bohem.*, 2005, **130**, No. 3, 309–322.
23. N. Levenberg and Z. Słodkowski, "Pseudoconcave pluripolar sets in $\mathbb{C}^2$," *Math. Ann.*, 1998, **312**, 429–443.
24. T. Nishino, "Sur les ensembles pseudo-concaves," *J. Math. Kyoto Univ.*, 1962, **1**, 225–245.
25. K. Oka, "Note sur les familles de fonctions analytiques multiform, etc.," *J. Sci. Hiroshima Univ.*, 1934, **4**, 93–98.
26. W. Rothstein, "Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Functionen," *Math. Z.*, 1950, **53**, 84–95.
27. A. Sadullaev, "Plurisubharmonic functions," In: *Several Complex Variables II*, Springer, Berlin—Heidelberg, 1994, pp. 56–106.
28. A. Sadullaev, "On analytic multifunctions," *Math. Notes*, 2008, **83**, 652–656.
29. Z. Slodkowski, "Analytic set-valued functions and spectra," *Math. Ann.*, 1981, **256**, No. 3, 363–386.

A. Sadullaev
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: sadullaev@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 95–108

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-95-108 УДК 517.946

ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ—РИМАНА В МНОГОМЕРНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОБЛАСТИ

© 2019 г. Э. Н. САТТОРОВ, Ф. Э. ЭРМАМАТОВА

Аннотация. В работе рассматривается задача восстановления решений обобщенной системы Коши—Римана в многомерной пространственной области по их значениям на куске границы этой области, т. е. задача Коши. Строится приближенное решение этой задачи, основанное на методе матрицы Карлемана.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В монографии И. Н. Векуа [5] существенно расширяются рамки классической теории аналитических функций и ее применений. В ней рассматривается класс функций, который объединяет семейства решений весьма широкого класса эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными. Это — обобщенная система Коши—Римана, для решений которой сохраняется ряд основных свойств аналитических функций одной комплексной переменной.

В настоящей работе рассматривается задача восстановления решения системы уравнений [17,18]

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}+H_i\right)=0,$$
$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k}-\frac{\partial F_k}{\partial x_j}-H_kF_j+H_jF_k=0,\quad i,k,j=1,\dots,n, \tag{1.1}$$

которая является n-мерным аналогом обобщенной системы Коши—Римана, по ее известным значениям на части границы этой области, т. е. задача Коши. Когда все $H_i=0$, то система (1.1) является системой Рисса [24, с. 106]. Как известно, система Коши—Римана в физических приложениях привела к далеко идущим обобщениям [6, 7, 32].

Задача Коши для обобщенной системы Коши—Римана, как и многие задачи Коши нахождения регулярных решений эллиптических уравнений и систем, в общем случае оказывается неустойчивой относительно равномерно малых изменений начальных данных. Таким образом, эти задачи некорректно поставлены [1, с. 39].

В монографиях Л. А. Айзенберга [2] и Н. Тарханова [34] рассматривается регуляризация задачи Коши для системы Коши—Римана и для системы с инъективным символом, там же приведена обширная библиография.

При исследовании задачи Коши для системы (1.1) будем априори предполагать существование ее решения. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному [12, с. 4]. Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена [4, с. 58]. В этих условиях устанавливается явная формула восстановления, которая является аналогом классической формулы Б. Римана, В. Вольтерра и Ж. Адамара, построенной ими для решения задачи Коши в теории гиперболических уравнений [20, теорема 2.1]. Если при указанных условиях вместо данных Коши заданы их непрерывные приближения с уклонением в равномерной метрике, заданным положительным числом, при условии, что решение ограничено на части поверхности конуса $T \equiv \partial G_\rho = \partial\Omega_\rho \setminus S$, то предполагается явная формула регуляризации [20, теорема 2.2].

Метод получения указанных результатов основан на построении в явном виде матрицы фундаментального решения обобщенной системы Коши—Римана, зависящей от положительного параметра, исчезающего при стремлении параметра к бесконечности на $T \equiv \partial G_\rho$, когда полюс фундаментального решения лежит в полупространстве $y_n > 0$ (см. [20, лемма 1.2]). Следуя М. М. Лаврентьеву и Ш. Ярмухамедову, матрицу фундаментальных решений с указанным свойством назовем *матрицей Карлемана для полупространства* (см. [12, с. 34], [28]). После построения матрицы Карлемана в явном виде формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши, выписываются в виде обобщенной пространственной интегральной формулы Коши. Полученная в [20, теорема 2.1] формула продолжения позволяет формулировать критерий разрешимости задачи Коши [20, теорема 3.1].

На протяжении последних десятилетий сохранился интерес к классическим некорректным задачам математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в работах [9–14] и развивалось впоследствии в [3–30].

2. Постановка задачи и матрицы Карлемана

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное n-мерное евклидово пространство,

$$x=(x_1,\dots,x_n),\ \ y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n,\ \ x'=(x_1,\dots,x_{n-1}),\ \ y'=(y_1,\dots,y_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1},$$

$$s=\alpha^2=|y'-x'|=(y_1-x_1)^2+\ldots+(y_{n-1}-x_{n-1})^2,\ \ r^2=s+(y_n-x_n)^2=|y-x|^2, \tau=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho},\ \ \rho>1,$$

$$G_\rho=\{y:|y'|<\tau y_1,\ \ y_1>0\},\ \ \partial G_\rho=\{y:|y'|=\tau y_1,\ \ y_1>0\},\ \ \overline{G}_\rho=G_\rho\cup\partial G_\rho,$$

ε, ε_1и ε_2 — достаточно малые постоянные положительные числа,

$$G_\rho^\varepsilon=\{y:|y'|<\tau(y_1-\varepsilon)\},\ \ \partial G_\rho^\varepsilon=\{y:|y'|=\tau(y_1-\varepsilon)\}\ \ \overline{G}_\rho^\varepsilon=G_\rho^\varepsilon\cup\partial G_\rho^\varepsilon,$$

$$C=\{\varsigma:\varsigma=\xi+i\eta,-\infty<\xi<\infty,-\infty<\eta<\infty\},$$

Ω_ρ — ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega_\rho$, состоящей из части поверхности конуса $T\equiv\partial G_\rho$ и гладкого куска поверхности S, лежащего на конусе $\overline{G}_\rho$. Случай $\rho=1$ предельный. В этом случае ∂G_1 — плоскость $\mathbb{R}^{n-1}$ и G_1 — полупространство $y_1>0$, Ω_1 — односвязная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей, состоящей из части плоскости $\mathbb{R}^{n-1}$ и гладкого куска поверхности S, лежащей в полупространстве $y_1\geqslant 0$, $\overline{\Omega}_\rho=\Omega_\rho\cup\partial\Omega_\rho$, S_0 — внутренние точки поверхности S. $F(x)=(F_1(x),F_2(x),\dots,F_n(x))$ — вектор-функция, которая имеет в этой области непрерывные производные первого порядка. $A(\Omega_\rho)$ — совокупность вектор-функций класса $C^1(\Omega_\rho)$, удовлетворяющий эллиптической системе (1.1) и непрерывной на $\overline{\Omega}_\rho=\Omega_\rho\cup\partial\Omega_\rho$, $H=(H_1,H_2,\dots,H_n)$ — заданный постоянный вектор.

Легко можно показать, что F_i — решение системы (1.1), удовлетворяют уравнению

$$\triangle\varphi-|H^2|\varphi=0. \tag{2.1}$$

Вводим следующие обозначения:

$$L_{kj}(X_1,X_2,\dots,X_n;H)=L_{jk}(X_1,X_2,\dots,X_n;H)=$$
$$=(X_j-H_j)F_k-(X_k-H_k)F_j+\delta_{kj}(X_i+H_i)F_i,\quad k\leqslant j,$$
$$L_k(X,H)F=(L_{k1}F,L_{k1}F,\dots,L_{kn}F),\quad k=1,\dots,n, \tag{2.2}$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда систему (1.1) можно записать в виде:

$$L_k(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n};H)F=0,\quad k=1,\dots,n. \tag{2.3}$$

Для каждого векторного оператора L_k определяем сопряженный векторный оператор L_k^* равенством:

$$V \cdot L_k(\frac{\partial}{\partial x}; H) + FL_k^*(\frac{\partial}{\partial x}) = \operatorname{div} F_k. \tag{2.4}$$

Тогда легко получить, что

$$L_k^*(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; H)F =$$
$$= L_k(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial x_{k-1}}, \frac{\partial}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}; -H_1, \dots, -H_k, H_{k+1}, \dots, H_n)F. \tag{2.5}$$

Постановка задачи (задача Коши). Известны данные Коши решения системы (2.3) на поверхности S:

$$F(y) = f(y), y \in S, \tag{2.6}$$

где $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$ — заданная на S непрерывная вектор-функция. Требуется восстановить вектор-функцию $F(x)$ в Ω_ρ, исходя из заданной f, т. е. решить задачу аналитического продолжения решения обобщенной системы Коши—Римана в многомерной евклидовой пространственной области по ее значениям на гладком куске S границы.

Если вместо $f(y)$ заданы ее приближения $f_\delta(y)$ с точностью $\delta \in (0,1)$ в метрике $C(S)$, а также число B — размер компакта, которому принадлежат решения, то речь идет о построении семейства вектор-функций $F(x, f_\delta) = F_{\sigma\delta}$ (регуляризация), сходящихся к точному решению задачи (2.3), (2.6) в Ω при подходящем выборе параметра регуляризации $\sigma = \sigma(\delta)$ и $\delta \to 0$ (см. [4]).

Следуя [26], функцию $F_{\sigma\delta}$ назовем *регуляризованным решением* задачи Коши для обобщенной системы Коши—Римана. Регуляризованное решение определяет устойчивость метода приближенного решения задачи.

В данной работе на основе результатов работ [12, с. 4], [28, 30] по задаче Коши для уравнений Лапласа и Гельмгольца построена матрица Карлемана в явном виде и на ее основе — регуляризованное решение задачи Коши для системы (2.3). В [25] приведены теоремы существования матрицы Карлемана и критерий разрешимости более широкого класса краевых задач для эллиптических систем. Ранее в [3,25] доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве положительной меры. Поскольку в данной статье речь идет о явных формулах, то построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес.

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и в близких к нему случаях, когда $\partial\Omega \setminus S$ — часть поверхности конуса, построена в [28]. Матрицу Карлемана для уравнения Коши—Римана в случае, когда S — произвольное множество положительной меры, построил Л. А. Айзенберг [3]. Развивая идею С. Е. Мергеляна [14], указавшего способ построения функции Карлемана в задаче Коши для уравнения Лапласа в случае, когда S — кусок с гладким краем границы односвязной области, на основе теорем об аппроксимации в [26] построена матрица Карлемана для эллиптических систем.

В том случае, когда $n = 2$, $H = 0$, рассматриваемая система (2.3) будет обобщенной системой Коши—Римана, теория которой разработана Векуа [5], а формула продолжения решения по ее значениям на куске границы получена Т. Ишанкуловым [10]. Если $n = 3$, то $F(y)$ будет обобщенным потенциальным вектором, в котором система (2.3) (ряд аналитических фактов) изучена в [16], а формула продолжения решения по ее значениям на куске границы и аналог теоремы Фок—Куни получена в работе [20]. В настоящей работе утверждается, что все результаты, полученные в трехмерном случае в [22], остаются справедливыми для системы (2.3). Именно, в этом случае явно строится фундаментальная матрица, которая является ядром обобщенных интегралов Коши и типа Коши. Пусть $U^k = (u_1^k, \dots, u_n^k)$ — фундаментальное решение системы [17, 18]:

$$L_k^*(\frac{\partial}{\partial x}; H)U^k = 0, \tag{2.7}$$

где u_k^i определяются равенствами:

$$u_k^i(y, x) = (\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_k} - H_k \Phi_0) \cdot \operatorname{sign}(k - i), \quad i \neq k,$$

$$u_i^i(y,x) = (\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} + H_i\Phi_0), \tag{2.8}$$

где Φ_0 — классическое фундаментальное решение уравнения (1.1). Справедливо

Определение 2.1. Матрица $M_0(y,x;H)$ называется *матрицей фундаментальных решений* системы (2.3), где

$$M_0(y,x;H) = \|L_k^*(\alpha;0)U^k\|, \tag{2.9}$$

а U^k определяется согласно (2.8).

Следуя [28], приведем

Определение 2.2. *Матрицей Карлемана* задачи (2.3), (2.6) называется матрица $M_\sigma(y,x;H)$ размера $n \times n$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1. $M_\sigma(y,x;H) = M_0(y,x;H) + G_\sigma(y,x;H)$, где σ — положительный числовой параметр, матрица $G_\sigma(y,x;H)$ по переменной y удовлетворяет системе (2.3) всюду в области Ω_ρ, $M_0(y,x;H)$ — матрица фундаментальных решений уравнений (2.3);
2. $\int\limits_{\partial G_\rho} |M_\sigma(y,x;H)|dS_y \leqslant \varepsilon(\sigma)$ при фиксированном $x \in \Omega_\rho$, где $\varepsilon(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \infty$; здесь и далее $|M_\sigma|$ означает евклидову норму матрицы $M_\sigma = ||M_{ij}||$, т. е. $|M_\sigma| = \left(\sum\limits_{ij=1}^{3} M_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, в частности, $|F| = \left(\sum\limits_{i}^{n} F_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ для вектора F.

Для $F(y) \in A(\Omega_\rho)$ справедлива обобщенная пространственная интегральная формула Коши [17]:

$$\int\limits_{\partial\Omega_\rho} M_0(y,x;H)F(y)dS_y = \begin{cases} 0, & x \notin \overline{\Omega_\rho}, \\ F(x), & x \in \Omega_\rho, \end{cases} \tag{2.10}$$

а также получен аналог интеграла типа Коши, даны изящные формулы скачков для предельных значений этого интеграла [18].

Поскольку матрица Карлемана отличается от матрицы фундаментальных решений на решение транспонированной системы, то обобщенная интегральная формула Коши остается справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на матрицу Карлемана.

С целью построения приближенного решения задачи (2.3), (2.6) рассмотрим матрицу

$$M_\sigma(y,x;H) = \|L_k^*(\alpha;0)V^k\|, \tag{2.11}$$

где $V^k = (v_1^1, \ldots, v_n^k)$ определяется равенством

$$v_k^i(y,x) = (\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_k} - H_k\Phi_\sigma)\cdot \operatorname{sign}(k-i) \quad \text{при} \quad i \neq k, \quad v_i^i(y,x) = (\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial x_i} + H_i\Phi_\sigma), \tag{2.12}$$

а функция $\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$ при $s \geqslant 0, v \geqslant 1$ определяется следующим равенством:

$$C_nK(x_n)\Phi_\sigma(y,x;\lambda) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}} \int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(w)}{w}\right] \frac{\psi(\lambda u)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}} du, w = i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_n, \tag{2.13}$$

где

$$\psi(\lambda u) = \begin{cases} uJ_0(\lambda u), & n = 2m, \ m \geqslant 1, \\ \cos(\lambda u), & n = 2m+1, \ m \geqslant 1, \end{cases}$$

$J_0(\lambda u)$ — функция Бесселя нулевого порядка; здесь берется регулярная ветвь аналитической функции $J_0(\lambda)$ в $C^{(n)}(\Omega_\rho)$, $n = 2m$, вещественная при $\lambda > 0, \lambda = |H|^2$,

$$C_n = \begin{cases} (-1)^m 2^(- 1)(m-2)!(n-2)\omega_n, & n = 2m, \ m \geqslant 2, \\ (-1)^m 2^(- 2n+1)(m-1)!(n-2)\pi\omega_n, & n = 2m+1, \ m \geqslant 1, \end{cases}$$

ω_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $K(w)$ — целая функция комплексного переменного, вещественная при вещественном w ($w = u + iv$, u, v — действительные числа), $K(u) \neq \infty$, $|u| < \infty$, удовлетворяющая условиям

$$\sup_{v \geqslant 1} |K^{(p)}(u+iv)\exp(v)|\operatorname{Im}\lambda|| = M(u) < \infty, p = 0, 1, \ldots \tag{2.14}$$

При вещественном w из вещественности $K(w)$ имеем $\overline{K(\overline{w})} = K(w)$. Так как

$$\operatorname{Im}\left(\frac{K(w)}{w}\right) = \frac{1}{2i}\left\{\frac{K(w)}{w} - \frac{K(\overline{w})}{\overline{w}}\right\} = \frac{\overline{w}K(w) - wK(\overline{w})}{2i(r^2+u^2)} =$$

$$= \frac{(y_n - x_n)\operatorname{Im}K(w) - \sqrt{s+u^2}\operatorname{Re}K(w)}{r^2+u^2}, \tag{2.15}$$

то (2.13) имеет вид

$$C_n K(x_n)\Phi(y,x;\lambda) = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}\int_0^\infty \left\{\frac{(y_n - x_n)\operatorname{Im}K(w)}{\sqrt{s+u^2}} - \operatorname{Re}K(w)\right\}\frac{\psi(\lambda u)}{r^2+u^2}du. \tag{2.16}$$

Из (2.14) и (2.16) следует, что при $y \neq x$ интеграл в (2.13) абсолютно сходится.

Если $K(w) \equiv 1$, то функция $\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$ является *классическим фундаментальным решением* уравнения Гельмгольца, то есть

$$\Phi_\sigma(y,x;\lambda) \equiv \Phi_0(y,x;\lambda) = C_n\frac{1}{r^{n-2}}e^{-\lambda r}.$$

Согласно [20], можно показать, что

$$\frac{1}{r^{n-2}}e^{-\lambda r} = \frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}\int_0^\infty \frac{\psi(\lambda u)}{r^2+u^2}du.$$

В [11] доказана

Лемма 2.1. *Функция* $\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$, *определенная формулой* (2.13), *представима в виде*

$$\Phi_\sigma(y,x;\lambda) = \Phi_0(r;\lambda) + g_\sigma(y,x;\lambda), \tag{2.17}$$

где $\Phi_0(r;\lambda)$ — *классическое фундаментальное решение уравнения* (1.1):

$$\Phi_0(r;\lambda) = A_m\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1}K_{\frac{n}{2}-1}(\lambda r), A_{2m} = (-1)^m 2^{m-1}, A_{2m+1} = (-1)^m 2^{-m-\frac{1}{2}},$$

$K_0(\lambda)$ — *функция Макдональда* [15, 27], $g_\sigma(y,x;\lambda)$ — *регулярные решения* (2.3) *по* y *в* $\mathbb{R}^n$ *для* $\lambda \in C^n(\Omega.)$

Верна аналогичная лемма для системы (2.3).

Лемма 2.2. *Матрица* $M_\sigma(y,x;H)$, *определенная формулой* (2.11), *является матрицей Карлемана задачи* (2.3), (2.6), *т. е. представима в виде*

$$M_\sigma(y,x;H) = M_0(r;\lambda) + G_\sigma(y,x;H), \tag{2.18}$$

где $G_\sigma = ||G_{ij\sigma}(y,x,\sigma)||_{n\times n}$ — *матрица, определенная для всех значений* y, x *и по переменной* y *удовлетворяющая системе* (2.3) *во всем пространстве* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Из леммы 2.1 и определения 2.1 следует (2.15). Так как $\Delta\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)g_\sigma - \lambda^2 g_\sigma = 0$, то отсюда нетрудно видеть, что матрица $G_\sigma(y,x;H)$ удовлетворяет уравнению (2.3), т. е. она есть регулярное решение по переменной y, включая и точку $y = x$.

Из формулы (2.13) видно, что на ∂G_ρ функция $\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$ и ее градиент $\nabla\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$ при $\sigma \to \infty$ экспоненциально стремятся к нулю при всех $y_1, \ldots, y_{n-1}$ и $x \in \mathbb{R}^n, x > 0$. Тогда при $\sigma \to \infty$ матрица $M_\sigma(y,x;H)$, также стремится к нулю при всех $y_1, \ldots, y_{n-1}$ и $x \in \mathbb{R}^n, x > 0$. Согласно определению 2.1 матрица $M_\sigma(y,x;H)$, определенная формулой (2.11), является матрицей Карлемана для области Ω_ρ и части ∂G_ρ. $\square$

3. Целая функция Миттаг-Леффлера и некоторые ее свойства

При решении задачи (2.3), (2.6) формула продолжения выражается через целую функцию Миттаг-Леффлера, поэтому приведем без доказательства основные ее свойства. Они даны в [8, гл. 3, § 2] с подробными доказательствами.

Целая функция Миттаг-Леффлера определяется рядом

$$E_\rho(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{\Gamma(1+n/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad w \in C, \quad E_1(w) = \exp(w),$$

где Γ — гамма-функция Эйлера. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\rho > 1$. Обозначим через $\gamma = \gamma(1,\beta)$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{\rho}$, $\rho > 1$, контур в комплексной плоскости w, пробегаемый в направлении неубывания $\arg w$ и состоящий из луча $\arg w = -\beta$, $|w| \geqslant 1$, дуги $-\beta \leqslant \arg w \leqslant \beta$, окружности $|w| = 1$ и луча $\arg w = \beta$, $|w| \geqslant 1$. Контур γ разбивает C на две односвязные бесконечные области Ω^- и Ω^+, лежащие слева и справа от γ соответственно. Будем предполагать, что $\dfrac{\pi}{2\rho} < \beta < \dfrac{\pi}{\rho}$, $\rho > 1$.

При этих условиях справедливы следующие интегральные представления:

$$E_\rho(w) = \rho \exp(w^\rho) + \psi_\rho(w), \ \ w \in \Omega^+, \tag{3.1}$$

$$E_\rho(w) = \psi_\rho(w), \ \ E'_\rho(w) = \psi'_\rho(w), \ \ w \in \Omega^-, \tag{3.2}$$

где

$$\psi_\rho(w) = \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\exp(\varsigma^\rho)}{\varsigma - w} d\varsigma, \ \ \psi'_\rho(w) = \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\exp(\varsigma^\rho)}{(\varsigma - w)^2} d\varsigma. \tag{3.3}$$

Так как $E_\rho(w)$ вещественно при вещественном w, имеем

$$\operatorname{Re} \psi_\rho(w) = \frac{\psi_\rho(w) + \psi_\rho(\overline{w})}{2} = \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\exp(\varsigma^\rho)(\varsigma - \operatorname{Re} w)}{(\varsigma - w)(\varsigma - \overline{w})} d\varsigma, \tag{3.4}$$

$$\operatorname{Im} \psi_\rho(w) = \frac{\psi_\rho(w) - \psi_\rho(\overline{w})}{2i} = \frac{\rho \operatorname{Im} w}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\exp(\varsigma^\rho)}{(\varsigma - w)(\varsigma - \overline{w})} d\varsigma. \tag{3.5}$$

$$\operatorname{Im} \frac{\psi'_\rho(w)}{\operatorname{Im} w} = \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{2\exp(\varsigma^\rho)(\varsigma - \operatorname{Re} w)}{(\varsigma - w)^2(\varsigma - \overline{w})^2} d\varsigma. \tag{3.6}$$

Всюду в дальнейшем в определении контура $\gamma(1,\beta)$ будем брать $\beta = \dfrac{\pi}{2\rho} + \dfrac{\varepsilon_2}{2}$, $\rho > 1$. Ясно, что если

$$\frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon_2 \leqslant |\arg w| \leqslant \pi, \tag{3.7}$$

то $w \in \Omega^-_\rho$ и $E_\rho(w) = \psi_\rho(w)$.

Обозначим

$$T_{k,p}(w) = \frac{\rho}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{\varsigma^p e^{\varsigma^p}}{(\varsigma - w)^k (\varsigma - \overline{w})^k} d\varsigma, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, \ldots$$

При $\dfrac{\pi}{2\rho} + \varepsilon_2 \leqslant |\arg w| \leqslant \pi$ справедливы неравенства

$$|E_\rho(w)| \leqslant \frac{C_1}{1 + |w|}, \quad |E'_\rho(w)| \leqslant \frac{C_2}{1 + |w|^2}, \quad |T_{k,p}(w)| \leqslant \frac{C_3}{1 + |w|^{2k}}, \tag{3.8}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные, не зависящие от w. Выберем в (3.4) $\beta = \dfrac{\pi}{2\rho} + \dfrac{\varepsilon_2}{2} < \dfrac{\pi}{\rho}$, $\rho > 1$. Тогда $E_\rho(w) = \psi_\rho(w)$, где $\psi_\rho(w)$ определяется из (3.3). При этом заметим, что $\cos \rho\beta < 0$ и интеграл сходится:

$$\int\limits_\gamma |\zeta|^p \exp[\cos \rho\beta |\zeta|^\rho] |d\varsigma| < \infty, \quad p = 0, 1, \ldots \tag{3.9}$$

Далее, при достаточно большом $|w|(w \in \Omega^+,\ \overline{w} \in \Omega^-)$ имеем

$$\min_{\varsigma\in\gamma}|\varsigma - w| \geqslant |w|\sin\frac{\varepsilon_2}{2}, \quad \min_{\varsigma\in\gamma}|\varsigma - \overline{w}| \geqslant |w|\sin\frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{3.10}$$

Теперь из (3.2) и разложения

$$\frac{1}{\varsigma - w} = -\frac{1}{w} + \frac{\zeta}{w(\varsigma - w)}, \quad \frac{1}{\varsigma - \overline{w}} = -\frac{1}{w} + \frac{\zeta}{\overline{w}(\varsigma - \overline{w})} \tag{3.11}$$

для больших $|w|$ получаем

$$\left|E_\rho(w) - \Gamma^{-1}(1-\frac{1}{\rho})\frac{1}{w}\right| \leqslant \frac{\rho}{2\pi\sin\dfrac{\varepsilon_2}{2}}\frac{1}{|w|^2}\int\limits_\gamma |\varsigma|\exp[\cos\rho\beta|\varsigma|^\rho]|d\varsigma| \leqslant \frac{\text{const}}{|w|^2},$$

$$\Gamma^{-1}(1-\frac{1}{\rho}) = \frac{\rho}{2\pi i}\int\limits_\gamma \exp(\varsigma^\rho)d\varsigma.$$

Отсюда следует первое из неравенств (3.8). Из (3.10), (3.3) и разложения

$$\frac{1}{(\varsigma-w)^2} = \frac{1}{w^2} - 2\frac{\varsigma}{w^2(\varsigma-w)} + \frac{\varsigma^2}{w^2(\varsigma-w)^2}$$

при больших $|w|$ аналогично выводим неравенство

$$\left|E'_\rho(w) - \Gamma^{-1}(1-\frac{1}{\rho})\frac{1}{w^2}\right| \leqslant \frac{\text{const}}{|w|^3}.$$

Второе неравенство из (3.8) доказано.

4. Формула Карлемана

В формуле (2.16) в качестве $K(w)$ выберем целую функцию Миттаг-Леффлера

$$K(w) = \exp(aw^2)E_\rho(\sigma w),$$

где $\rho > 1, w = i\sqrt{u^2+s} + y_1 - x_1$, $a > 0$ и $\sigma \geqslant 0$. Полученное при этом фундаментальное решение уравнения Гельмгольца $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$ и его производные по переменной σ имеют вид $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$ и $P_\sigma(y-x;\lambda) = \dfrac{d\Phi_\sigma(y-x;\lambda)}{d\sigma}$ соответственно. Из леммы 2.1 следует, что $F_\sigma(y-x;\lambda)$ является регулярным решением уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^n$, однако

$$\Phi_\sigma(y-x;\lambda) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{e^{aw^2}E_\rho(\sigma w)}{w}\right]\frac{\psi(\lambda u)du}{\sqrt{u^2+s}}, \tag{4.1}$$

$$P_\sigma(y-x;\lambda) = \frac{d\Phi_\sigma(y-x,\lambda)}{d\sigma} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}\left[e^{aw^2}E'_\rho(\sigma w)\right]\frac{\psi(\lambda u)du}{\sqrt{u^2+s}}. \tag{4.2}$$

Согласно (2.16), выделяя мнимые части в (4.1), (4.2) будем иметь:

$$\Phi_\sigma(y-x;\lambda) = \frac{1}{4\pi}e^{-as+a(y_1-x_1)^2}\int\limits_0^\infty \varphi_\sigma(y,x,\lambda,u)\frac{e^{-au^2}\psi(\lambda u)du}{u^2+r^2}, \tag{4.3}$$

где

$$\varphi_\sigma(y,x,\lambda,u) = \left[\frac{(y_1-x_1)}{\sqrt{u^2+s}}\operatorname{Im}E_\rho(\sigma w) - \operatorname{Re}E_\rho(\sigma w)\right]\cos(\lambda\sqrt{u^2+s}) +$$

$$+\left[\operatorname{Im}E_\rho(\sigma w) + \frac{(y_1-x_1)}{\sqrt{u^2+s}}\operatorname{Re}E_\rho(\sigma w)\right]\sin(\lambda\sqrt{u^2+s}), \quad \lambda = 2a(y_1-x_1), \tag{4.4}$$

$$P_\sigma(y-x;\lambda) = \frac{1}{4\pi}e^{-as+a(y_1-x_1)^2}\int\limits_0^\infty \phi_\sigma(y,x,k,u)e^{-au^2}\psi(\lambda u)du, \tag{4.5}$$

где

$$\phi_\sigma(y,x,k,u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+s}}(\sin(\lambda\sqrt{u^2+s})\operatorname{Re}E'_\rho(\sigma w) + \cos(\lambda\sqrt{u^2+s})\operatorname{Im}E'_\rho(\sigma w)). \tag{4.6}$$

Если $\sigma = 0$ и $K(0) = E_\rho(0) = 1$, тогда функция $\Phi_0(y-x;\lambda)$ из (3.1) определяет классическое фундаментальное решение уравнения Гельмгольца.

Следствие 4.1. *Матрица $M_{1\sigma}(y,x;H)$ при $y \neq x$, определенная формулой*

$$M_{1\sigma}(y,x;H) = \frac{\partial}{\partial\sigma}M_\sigma(y,x;H), \tag{4.7}$$

соответственно удовлетворяет системе (2.3) *по переменной y в $\mathbb{R}^n$, включая точку $y = x$.*

В точке $(0,0,\ldots,0) \in \partial\Omega_\rho$ нормальная производная не определена. Так как $F(y)$, $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$, $M_\sigma(y-x;H)$ $(x \in \Omega_\rho)$ имеют непрерывные частные производные вплоть до $\partial\Omega_\rho$,

$$\frac{\partial F}{\partial n}(0) = \frac{\partial F}{\partial y_n}(0), \quad \frac{\partial M_\sigma}{\partial n}(0,x) = \frac{\partial M_\sigma}{\partial y_n}(0,x), \quad x \in \Omega_\rho.$$

При фиксированном $x \in \Omega_\rho$ обозначим через S^* ту часть S, на которой $|y'| = \tau y_1 - |x'| \geqslant \alpha$. Если $x = x_0 \in \Omega_\rho$, то $S = S^*$ (в этом случае $|y'| = \tau y_1 - |x'| = \tau y_1$, $\alpha = |y'|$ и неравенство означает, что y лежит внутри или на конусе $|y'| = \tau y_1 - |x'|$).

Предположим, что $F(y) \in A(\Omega_\rho)$ ограничена на $\partial\Omega_\rho$:

$$|F(y)| \leqslant B, y \in T = \partial\Omega_\rho \setminus S, \tag{4.8}$$

где B — заданное положительное число. В этом предположении верна обобщенная интегральная формула Коши

$$F(x) = \int\limits_{\partial\Omega_\rho} M_\sigma(y-x;H)F(y)dS_y, \quad x \in \Omega_\rho. \tag{4.9}$$

Обозначим

$$F_\sigma(x) = \int\limits_S M_\sigma(y-x;H)F(y)dS_y, \quad x \in \Omega_\rho, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x) = \int\limits_S \frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j}(y-x;H)F(y)dS_y, \quad x \in \Omega_\rho. \tag{4.11}$$

Замечание 4.1. Из-за присутствия $\alpha_0 = \sqrt{x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ в $\beta = \tau y_1 - \alpha_0$ функция $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$, $y \in \partial\Omega_\rho$ не имеет производных по x_j, $j = 2,\ldots,n$, в точках $x = x_0 = (x_1,0,\ldots,0) \in \Omega_\rho$. Поэтому $\dfrac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x)$ определены всюду в Ω_ρ, кроме точек $x = x_0$. Доопределим в точках $x = x_0$ производные следующим образом. В (4.10), (4.11) величину $\beta = \tau y_1$ полагаем равной $\beta = \tau y_1$ $(\gamma = \tau x_1)$. Тогда $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$, $y \in \partial\Omega_\rho$ дифференцируема по переменной x всюду в Ω_ρ. Таким образом, при $x \neq x_0 \in \Omega_\rho$ производные $\dfrac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x)$ определяются по формуле (4.11), где $\beta = \tau y_1 - \alpha_0$. Затем в правой части (4.11) положим $\alpha_0 = 0$ $(\beta = \tau y_1)$ и вычислим производные по формуле $\dfrac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x)$.

Теорема 4.1. *Пусть $F(y) \in A(\Omega_\rho)$ и $F(y) = f(y)$, где $f(y)$ — заданные на S вектор-функции класса $C(S)$. Тогда для любого $x \in \Omega_\rho$ справедливы формулы Карлемана*:

$$F(x) = \lim_{\sigma\to\infty} F_\sigma(x) = \lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_S M_\sigma(y,x;H)f(y)dS_y,$$

$$\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x) = \lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial F_\sigma}{\partial x_j}(x) = \lim_{\sigma\to\infty}\int\limits_S \frac{\partial M_\sigma}{\partial x_j}(y-x;H)F(y)dS_y. \tag{4.12}$$

Доказательство. Согласно формуле (4.9), имеем

$$F(x)=\int\limits_S M_\sigma(y,x;H)f(y)dS_y+\int\limits_{\partial\Omega_\rho\backslash S} M_\sigma(y,x;H)f(y)dS_y, \partial\Omega_\rho=S\cup(\partial\Omega_\rho\backslash S). \tag{4.13}$$

Оценим $M_\sigma(y,x;H)$. Для этого необходимо оценить

$$\Phi_\sigma(y-x;\lambda),\ \ \frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial x_i}(y-x;\lambda),\ \ i=1,\dots,n.$$

По построению

$$\Phi_\sigma(y-x;\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty\left[-\operatorname{Re}E_\rho(\sigma w)+(y_1-x_1)\frac{\operatorname{Im}E_\rho(\sigma w)}{\sqrt{u^2+s}}\right]\frac{\psi(\lambda u)du}{u^2+r^2}, \tag{4.14}$$

$$P_\sigma(y-x;\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty \operatorname{Im}E'_\rho(\sigma w)\frac{\psi(\lambda u)du}{\sqrt{u^2+s}},$$

$$P_\sigma(y-x;\lambda)=\frac{\partial\Phi_\sigma(y-x;\lambda)}{\partial\sigma}.$$

□

Аналогично [31], приводим следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть K — компакт в G_ρ, δ — расстояние от K до ∂G_ρ. Тогда для $\sigma\geqslant 0$ при $x\in K$, $y\in\mathbb{R}^n\backslash G_\rho$ ($|y'|\geqslant\tau y_1$) справедливы неравенства*

$$|\Phi_\sigma(y-x;\lambda)|+\left|\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi_\sigma(y-x;\lambda)\right|\leqslant\frac{C_4(\rho,\delta)r}{1+\sigma\delta}, \tag{4.15}$$

$$|P_\sigma(y-x;\lambda)|+\left|\frac{\partial}{\partial y_i}P_\sigma(y-x;\lambda)\right|\leqslant\frac{C_5(\rho,\delta)r}{1+\sigma^2\delta^2},\ \ r\geqslant\delta>0. \tag{4.16}$$

Из леммы 4.1 следует утверждение теоремы. Действительно, если K — компакт в Ω_ρ, то $K\subset G_\rho$. Поэтому неравенства для $\Phi_\sigma(y,x;\lambda)$ и ее производных из леммы сохраняются и в том случае, когда $x\in K\subset\Omega_\rho$ и $y\in\partial\Omega_\rho\backslash S\subset\partial G_\rho$ (в этом случае δ — расстояние от компакта $K\subset\Omega_\rho$ до $\partial\Omega_\rho$.) Теперь устремим σ к бесконечности. Тогда предел интеграла в (4.13) по части $\partial\Omega_\rho\backslash S$ границы $\partial\Omega_\rho$ равен нулю, и получаем формулы (4.12).

Доказательство. Нужно оценить интеграл справа в равенстве (4.14) и его производные. С этой целью выберем $\varepsilon>0$ такое, чтобы $K\subset\overline{G}^\varepsilon_\rho(|x'|\leqslant\tau(x_1-\varepsilon))$, $\overline{G}^\varepsilon_\rho\subset G_\rho$. Так как расстояние от $\partial G^\varepsilon_\rho$ до ∂G_ρ равно $\varepsilon\tau_1$, то $\delta\geqslant\varepsilon\tau_1$. В условиях леммы имеем

$$\tau w=i\tau\sqrt{u^2+s}+\tau y_1-\tau x_1=\sqrt{u^2+s}(i\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho}+\frac{\tau y_1-\tau x_1}{\sqrt{u^2+s}}),\ \ u\geqslant 0,\ \ \rho>1,$$

$$\frac{\tau y_1-\tau x_1}{\sqrt{u^2+s}}\leqslant\frac{|y'|-|x'|-\varepsilon\tau}{|y'-x'|}\leqslant 1-\varepsilon_1,\ \ y'\neq x',\ \ |\arg(a\pm\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho})|\geqslant\frac{\pi}{2\rho};\ \ a\leqslant 1.$$

Таким образом выполняется (3.7): $\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon_2\leqslant|\arg w|\leqslant\pi$, $\rho>1$, $\arg(\tau w)=\arg w$, $\operatorname{Re}w<0$ при $y'=x'$, неравенство подавно выполняется. Поэтому $E_\rho(w)=\psi_\rho(w)$, $w\in\Omega^-_\rho$, где $\beta=\dfrac{\pi}{2\rho}+\dfrac{\varepsilon_2}{2}$. Интегралы оцениваем согласно неравенствам (3.8):

$$|\operatorname{Re}E_\rho(\sigma w)|\leqslant\frac{C_6(\rho,\delta)\sigma r}{1+\sigma^2|w|^2}, \tag{4.17}$$

$$|w|^2=u^2+r^2\geqslant r^2\geqslant\delta^2,\ \ \delta\geqslant\tau_1\varepsilon,$$

$$\left|\frac{\operatorname{Im}E_\rho(\sigma w)}{\sqrt{u^2+s}}\right|\leqslant\frac{C_7(\rho,\delta)\sigma r}{1+\sigma^2|w|^2}, \tag{4.18}$$

где постоянные C_6,C_7 не зависят от σ,x,y.

Вычислим производные функции, определенные равенствами (3.4), (3.5) по переменным y_i, $i=1,2,\ldots,n$ и заметим, что оценки (4.17) и (4.18) для них сохраняются, но с другими постоянными. Тогда получим неравенства (4.15).

Оценка (4.16) для $P_\sigma(y-x;\lambda)$ и ее производных следует из второй формулы (4.14) и неравенств (3.8), где $E'_\rho(w)=\psi'_\rho(w)$, а также формулы (3.6). $\square$

Формулы (4.12) можно написать в эквивалентной форме:

$$F(x)=\int\limits_0^\infty J_{1\sigma}(x,H)d\sigma+\int\limits_S M_0(y,x;H)f(y)dS_y, \tag{4.19}$$

где

$$J_{1\sigma}(x;H)=-\int\limits_S M_{1\sigma}(y,x;H)f(y)dS_y, \quad M_{1\sigma}(y,x;H)=\frac{d}{d\sigma}M_\sigma(y,x;H). \tag{4.20}$$

Теорема 4.2. *Пусть $S\subset C^2$, $f(y)\in C(S_0)\cap L(S)$. Тогда для существования решений $F(y)\in A(\Omega_\rho)$ таких, что $F(y)=f(y)$, $y\in S_0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x\in G_\rho$ сходился несобственный интеграл* (*равномерно на компактах из* G_ρ):

$$\left|\int\limits_0^\infty J_{1\sigma}(x;H)d\sigma\right|<\infty, \tag{4.21}$$

где $J_{1\sigma}(x;H)$ определяется формулой (4.20).

Если условие (4.21) *выполнено, то аналитическое продолжение осуществляется эквивалентными формулами* (4.12) *и* (4.19).

Доказательство. Необходимость. Пусть $F(y)\in A(D_\rho)\cup S_0)\cap L(S)$ с условием (2.6), K — компакт в G_ρ и $\varepsilon>0$ такое, что $K\subset\overline{G}_\rho^{2\varepsilon}\subset\overline{G}_\rho^{\varepsilon}\subset G_\rho$. Ясно, что расстояние от K до $\partial G_\rho^\varepsilon$ не меньше $\varepsilon\tau_1$, а расстояние от $\partial G_\rho^{2\varepsilon}$ до $\partial G_\rho^\varepsilon$ равно $\varepsilon\tau_1$.

Пусть теперь $y\in\mathbb{R}^n/G_\rho^\varepsilon$ $(|y'|\geqslant\tau(y_1-\varepsilon),\ y_1>\varepsilon)$, $x\in K$ $(|x'|\leqslant\tau(x_1-2\varepsilon),\ x_1>2\varepsilon)$. Тогда $\arg w=\arg(\sigma w)=\arg(i\tau\sqrt{u^2+s}+\tau y_1-\tau x_1)$ и

$$\frac{\tau y_1-\tau x_1}{\sqrt{u^2+s}}\leqslant\frac{|y'|-|x'|-\varepsilon}{|y'-x'|}\leqslant 1-\varepsilon_1,\ u\geqslant 0,\ y'\neq x',\ \tau=\frac{\pi}{2\rho},\ \rho>1.$$

Поэтому для $\arg w$ справедливо неравенство (3.7), при этом если $y'=x'$, то $\mathrm{Re}\,w<0$ и это неравенство имеет место. Следовательно, для $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$, $P_\sigma(y-x;\lambda)$ справедливы оценки (4.15), (4.16) из леммы 4.1, где $\delta\geqslant\varepsilon\tau_1$. Обозначим $S_\varepsilon=\overline{G}_\rho^\varepsilon\cap S$, при этом часть $S_\varepsilon\subset S$ вместе с частью T_ε поверхности конуса $\partial G_\rho^\varepsilon$ в объединении состоит из замкнутой кусочно-гладкой поверхности $S_\varepsilon\cup T_\varepsilon$ (направление внешней нормали согласовано), являющейся границей односвязной ограниченной области. Интеграл в правой части формулы (4.20) представим в виде суммы двух интегралов согласно представлению $S=S_\varepsilon\cup(S\setminus S_\varepsilon)$. Так как функция $P_\sigma(y-x;\lambda)$ является регулярным решением системы (2.3), в силу формулы Стрэттона—Чу, интеграл по части S_ε равен интегралу по T_ε, причем $y\in T_\varepsilon$, $x\in K$, для $P_\sigma(y-x;\lambda)$ справедливы неравенства (4.16) и продолжение функции $F(y)$ ограничено постоянными числами, зависящими от ε. Поэтому модуль интеграла по части S_ε не превосходит величины $\dfrac{\mathrm{const}}{1+\delta^2\sigma^2}$ с постоянной, зависящей от ρ,ε,δ и диаметра области D_ρ. Так как $|y|\geqslant\tau(y_1-\varepsilon)$, $y_1\geqslant\varepsilon$, когда $y\in S\setminus S_\varepsilon$ и $x\in K$, $f(y)\in C(S_0)\cap L(S)$, то эти неравенства сохраняются для модуля интеграла по части $S\setminus S_\varepsilon$. Отсюда следует (4.21).

Достаточность. В условиях теоремы функции $F(x)$ определим для $x\in G_\rho\setminus S_0$ правыми частями (4.20). Рассмотрим первое слагаемое в правой части равенства (3.7). Так как $P_\sigma(y-x;\lambda)$ — решение системы (2.3) при $\sigma\geqslant 0$ в G_ρ, функции $J_1(x,\sigma)$ при $\sigma\geqslant 0$ также являются решением системы (2.3) в G_ρ. Поэтому из (4.21) заключаем, что первое слагаемое в правой части (4.20) представляет собой решение системы (2.3) в G_ρ как предел равномерно сходящейся последовательности решений системы уравнений (2.3) функций

$$F_n(x) = \int_0^n J_{1\sigma}(x;H)d\sigma, \quad n = 1,2,\ldots$$

Второе слагаемое является интегралом типа Коши и представляет одно решение в Ω_ρ, а другое в $\Omega'_\rho = G_\rho/\overline{\Omega}_\rho$. Поэтому правая часть в (4.20) определяет в Ω_ρ и Ω'_ρ два различных решения $F^+(x)$ и $F^-(x)$ соответственно. Это следует из (2.18). Если x_1, x_2 — две точки на нормали в точке $x \in S_0$, симметричные относительно точки x, то

$$\lim_{x_1\to x}[F^+(x_1) - F^-(x_2)] = f(x), \tag{4.22}$$

причем предельные соотношения выполняются равномерно относительно x на каждой компактной части S_0. Если $\max y_1 < x_1$ где $y \in S,\ x \in G_\rho$, то $\operatorname{Re} w = y_1 - x_1 < 0$ и для $\Phi_\sigma(y-x;\lambda)$ и ее производных справедливы неравенства (4.15), (4.16). Видим, что $P^-(x) = 0$, и согласно теореме единственности $F^-(x) \equiv 0,\ x \in \Omega_\rho$. Ясно, что $F^-(x)$ гладко продолжается на $\Omega'_\rho \cup S_0$. Тогда $F^+(x)$ также гладко продолжается как функция класса $C(\Omega_\rho \cup S_0)$ (см. [17]). Следовательно, $F^+(x) = f(x),\ x \in S_0$. Теперь положим $F(x) = F^+(x),\ x \in \Omega_\rho \cup S_0$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. — М.: Наука, 1978.
2. *Айзенберг Л. А.* Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения. — Новосибирск: Наука, 1990.
3. *Айзенберг Л. А., Тарханов Н. Н.* Абстрактная формула Карлемана// Докл. АН СССР. — 1988. — *298*, № 6. — С. 1292–1296.
4. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. — М.: Физматгиз, 1988.
6. *Владимиров В. С., Волович И. В.* Суперанализ I. Дифференциальное исчисление// Теор. мат. физ. — 1984. — *59*, № 1. — С. 3–27.
7. *Владимиров В. С., Волович И. В.* Суперанализ II. Интегральное исчисление// Теор. мат. физ. — 1984. — *60*, № 2. — С. 169–198.
8. *Джарбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функции в комплексной области. — М.: Наука, 1966.
9. *Иванов В. К.* Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе// Дифф. уравн. — 1965. — *1*, № 1. — С. 131–136.
10. *Ишанкулов Т. И.* О возможности обобщенно-аналитического продолжения в область функций, заданных на куске ее границы// Сиб. мат. ж. — 2000. — *41*, № 6. — С. 1350–1356.
11. *Лаврентьев М. М.* О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка// Докл. АН СССР. — 1957. — *112*, № 2. — С. 195–197.
12. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962.
13. *Махмудов О. И.* Задача Коши для системы уравнений теории упругости и термоупругости в пространстве// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2004. — *501*, № 2. — С. 43–53.
14. *Мергелян С. Н.* Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа// Усп. мат. наук. — 1956. — *11*, № 5. — С. 3–26.
15. *Никифоров Л. Ф., Уваров В. Б.* Основы теории специальных функций. — М.: Наука, 1974.
16. *Оболашвили Е. И.* Пространственный аналог обобщенных аналитических функций// Сообщ. АН ГССР. — 1974. — *73*, № 1. — С. 20–24.
17. *Оболашвили Е. И.* Обобщенная система Коши—Римана в многомерном евклидовом пространстве// Сб. докл. Межд. конф. по компл. анализу и его применениям к уравн. с частн. производными (Галле, ГДР, 18–24 октября 1976 г.). — Галле, 1977. — С. 36–39.
18. *Оболашвили Е. И.* Обобщенная система Коши—Римана в многомерном пространстве// Тр. Тбилис. мат. ин-та. — 1978. — *58*. — С. 168–173.
19. *Сатторов Э. Н.* Регуляризация решения задачи Коши для обобщенной системы Моисила—Теодореску// Дифф. уравн. — 2008. — *44*, № 8. — С. 1100–1110.

20. *Сатторов Э. Н.* О продолжении решений обобщенной системы Коши—Римана в пространстве// Мат. заметки. — 2009. — *85*, № 5. — С. 768–781.
21. *Сатторов Э. Н.* Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла в бесконечной области// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 6. — С. 445–455.
22. *Сатторов Э. Н.* О восстановлении решений обобщенной системы Моисила—Теодореску в пространственной области по их значениям на куске границы// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2011. — *1*. — С. 72–84.
23. *Сатторов Э. Н., Мардонов Дж. А.* Задача Коши для системы уравнений Максвелла// Сиб. мат. ж. — 2003. — *44*, № 4. — С. 851–861.
24. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.
25. *Тарханов Н. Н.* О матрице Карлемана для эллиптических систем// Докл. АН СССР. — 1985. — *284*, № 2. — С. 294–297.
26. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации// Докл. АН СССР. — 1963. — *151*, № 3. — С. 501–504.
27. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. — М.: ИЛ, 1957.
28. *Ярмухамедов Ш.* О задаче Коши для уравнения Лапласа// Докл. АН СССР. — 1977. — *235*, № 2. — С. 281–283.
29. *Ярмухамедов Ш.* Об аналитическом продолжении голоморфного вектора по его граничным значениям на куске границы// Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1980. — *6*. — С. 34–40.
30. *Ярмухамедов Ш.* О продолжении решения уравнения Гельмгольца// Докл. РАН. — 1997. — *357*, № 3. — С. 320–323.
31. *Ярмухаммедов Ш.* Функция Карлемана и задача Коши для уравнения Лапласа// Сиб. мат. ж. — 2004. — *45*, № 3. — С. 702–719.
32. *Brackx F., Delanghe K., Sommen F.* Clifford analysis. — Boston—London—Melbourne: Pitman, 1982.
33. *Makhmudov O., Niyozov I., Tarkhanov N.* The Cauchy problem of couple-stress elasticity// Contemp. Math. — 2008. — *455*. — С. 297–310.
34. *Tarkhanov N. N.* Cauchy problem for solutions of elliptic equations. — Berlin: Akademie-Verlag, 1995.

Э. Н. Сатторов
Самаркандский государственный университет им. А. Навои,
Узбекистан, 140104, г. Самарканд, Университетский б-р, д. 15
E-mail: Sattorov-e@rambler.ru

Ф. Э. Эрмаматова
Самаркандский государственный университет им. А. Навои,
Узбекистан, 140104, г. Самарканд, Университетский б-р, д. 15
E-mail: Fotima-e@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-95-108 UDC 517.946

Carleman's Formula for Solutions of the Generalized Cauchy–Riemann System in Multidimensional Spatial Domain

© 2019 **E. N. Sattorov, F. E. Ermamatova**

Abstract. In this paper, we consider the restoration problem for solutions of the generalized Cauchy–Riemann system in a multidimensional spatial domain using their values on a piece of the boundary of the domain, i. e., the Cauchy problem. We construct an approximate solution of this problem based on the Carleman matrix method.

REFERENCES

1. J. Hadamard, *Zadacha Koshi dlya lineynykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi giperbolicheskogo tipa* [Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations of Hyperbolic Type], Nauka, Moscow, 1978 (Russian translation).
2. L. A. Eisenberg, *Formuly Karlemana v kompleksnom analize. Pervye prilozheniya* [Carleman's Formulas in Complex Analysis. First Applications], Nauka, Novosibirsk, 1990 (in Russian).
3. L. A. Eisenberg and N. N. Tarkhanov, "Abstraktnaya formula Karlemana" [Abstract Carlemans Formula], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1988, **298**, No. 6, 1292–1296 (in Russian).
4. L. Bers, F. John, and M. Schechter, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1966 (Russian translations).
5. I. N. Vekua, *Obobshchennye analiticheskie funktsii* [Generalized Analytic Functions], Fizmatgiz, Moscow, 1988 (in Russian).
6. V. S. Vladimirov and I. V. Volovich, "Superanaliz I. Differentsial'noe ischislenie" [Superanalysis I. Differential Calculus], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1984, **59**, No. 1, 3–27 (in Russian).
7. V. S. Vladimirov and I. V. Volovich, "Superanaliz II. Integral'noe ischislenie" [Superanalysis II. Integral Calculus], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1984, **60**, No. 2, 169–198 (in Russian).
8. M. M. Dzharbashyan, *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoy oblasti* [Integral Transformations and Representations of Functions in Complex Domain], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
9. V. K. Ivanov, "Zadacha Koshi dlya uravneniya Laplasa v beskonechnoy polose" [The Cauchy problem for the Laplace equations in infinite strip], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 1, 131–136 (in Russian).
10. T. I. Ishankulov, "O vozmozhnosti obobshchenno-analiticheskogo prodolzheniya v oblast' funktsiy, zadannykh na kuske ee granitsy" [On generalized analytic continuation into the domain for functions defined on a part of its boundary], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2000, **41**, No. 6, 1350–1356 (in Russian).
11. M. M. Lavrent'ev, "O zadache Koshi dlya lineynykh ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka" [On the Cauchy problem for second-order linear elliptic equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1957, **112**, No. 2, 195–197 (in Russian).
12. M. M. Lavrent'ev, *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki* [On Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics], VTS SO AN SSSR, Novosibirsk, 1962 (in Russian).
13. O. I. Makhmudov, "Zadacha Koshi dlya sistemy uravneniy teorii uprugosti i termouprugosti v prostranstve" [The Cauchy problem for a system of equations from the elasticity and thermoelasticity theory in the space], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2004, **501**, No. 2, 43–53 (in Russian).
14. S. N. Mergelyan, "Garmonicheskaya approksimatsiya i priblizhennoe reshenie zadachi Koshi dlya uravneniya Laplasa" [Harmonic approximation and approximate solution of the Cauchy problem for the Laplace equation], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1956, **11**, No. 5, 3–26 (in Russian).
15. L. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Osnovy teorii spetsial'nykh funktsiy* [Foundations of the Theory of Special Functions], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
16. E. I. Obolashvili, "Prostranstvennyy analog obobshchennykh analiticheskikh funktsiy" [Spatial analog of generalized analytic functions], *Soobshch. AN GSSR* [Rep. Acad. Sci. Georgian SSR], 1974, **73**, No. 1, 20–24 (in Russian).
17. E. I. Obolashvili, "Obobshchennaya sistema Koshi—Rimana v mnogomernom evklidovom prostranstve" [Generalized Cauchy–Riemann system in multidimensional Euclidean space], *Sb. dokl. Mezhd. konf. po kompl. analizu i ego primeneniyam k uravn. s chastn. proizvodnymi* (Galle, GDR, 18–24 Oct. 1976), Galle, 1977, pp. 36–39 (in Russian).
18. E. I. Obolashvili, "Obobshchennaya sistema Koshi—Rimana v mnogomernom prostranstve" [Generalized Cauchy–Riemann system in multidimensional space], *Tr. Tbilis. mat. in-ta* [Proc. Tbilisi Math. Inst.], 1978, **58**, 168–173 (in Russian).
19. E. N. Sattorov, "Regulyarizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya obobshchennoy sistemy Moisila—Teodoresku" [Regularization of solution of the Cauchy problem for the generalized Moisil–Theodorescu system], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2008, **44**, No. 8, 1100–1110 (in Russian).
20. E. N. Sattorov, "O prodolzhenii resheniy obobshchennoy sistemy Koshi—Rimana v prostranstve" [On continuation of solutions of the generalized Cauchy–Riemann system in the space], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **85**, No. 5, 768–781 (in Russian).
21. E. N. Sattorov, "Regulyarizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya sistemy uravneniy Maksvella v beskonechnoy oblasti" [Regularization of solution of the Cauchy problem for the Maxwell system of equations in infinite domain], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 6, 445–455 (in Russian).

22. E. N. Sattorov, “O vosstanovlenii resheniy obobshchennoy sistemy Moisila—Teodoresku v prostranstvennoy oblasti po ikh znacheniyam na kuske granitsy” [On restoration of solutions of the generalized Moisil–Theodorescu system in a spatial domain by their values of a part of the boundary], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2011, **1**, 72–84 (in Russian).
23. E. N. Sattorov and Dzh. A. Mardonov, “Zadacha Koshi dlya sistemy uravneniy Maksvella” [The Cauchy problem for the Maxwell system of equations], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2003, **44**, No. 4, 851–861 (in Russian).
24. E. Stein and G. Weiss, *Vvedenie v garmonicheskiy analiz na evklidovykh prostranstvakh* [Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces], Mir, Moscow, 1974 (Russian translation).
25. N. N. Tarkhanov, “O matritse Karlemana dlya ellipticheskikh sistem” [On the Carleman matrix for elliptic systems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1985, **284**, No. 2, 294–297 (in Russian).
26. A. N. Tikhonov, “O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarizatsii” [On solution of ill-posed problems and the regularization method], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1963, **151**, No. 3, 501–504 (in Russian).
27. F. Tricomi, *Lektsii po uravneniyam v chastnykh proizvodnykh* [Lezioni sulle equazioni a derivate parziali], IL, Moscow, 1957 (Russian translation).
28. Sh. Yarmukhamedov, “O zadache Koshi dlya uravneniya Laplasa” [On the Cauchy problem for the Laplace equation], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1977, **235**, No. 2, 281–283 (in Russian).
29. Sh. Yarmukhamedov, “Ob analiticheskom prodolzhenii golomorfnogo vektora po ego granichnym znacheniyam na kuske granitsy” [On analytic continuation of a holomorphic vector by its boundary values on a part of the boundary], *Izv. AN UzSSR. Ser. fiz.-mat. nauk* [Bull. Acad. Sci. Uzbek SSR. Ser. Phys.-Math. Sci.], 1980, **6**, 34–40 (in Russian).
30. Sh. Yarmukhamedov, “O prodolzhenii resheniya uravneniya Gel’mgol’tsa” [On continuation of solution of the Helmholtz equation], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1997, **357**, No. 3, 320–323 (in Russian).
31. Sh. Yarmukhammedov, “Funktsiya Karlemana i zadacha Koshi dlya uravneniya Laplasa” [Carleman’s function and the Cauchy problem for the Laplace equation], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2004, **45**, No. 3, 702–719 (in Russian).
32. F. Brackx, K. Delanghe, and F. Sommen, *Clifford analysis*, Pitman, Boston—London—Melbourne, 1982.
33. O. Makhmudov, I. Niyozov, and N. Tarkhanov, “The Cauchy problem of couple-stress elasticity,” *Contemp. Math.*, 2008, **455**, 297–310.
34. N. N. Tarkhanov, *Cauchy problem for solutions of elliptic equations*, Akademie-Verlag, Berlin, 1995.

E. N. Sattorov
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
E-mail: `Sattorov-e@rambler.ru`

F. E. Ermamatova
Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan
E-mail: `Fotima-e@mail.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 109–123

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-109-123 УДК 517.984

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ В ТРЕХЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ С ПРИМЕСЬЮ В МОДЕЛИ ХАББАРДА. ВТОРОЕ ДУБЛЕТНОЕ СОСТОЯНИЕ

© 2019 г. **С. М. ТАШПУЛАТОВ**

Аннотация. В данной работе рассматриваются трехэлектронные системы с примесью в модели Хаббарда и исследуется спектр такой системы во втором дублетном состоянии в ν-мерной решетке Z^ν.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В начале 1970-х годов практически одновременно и независимо друг от друга вышли работы [5, 6, 10], в которых была представлена простая модель металла, ставшая впоследствии фундаментальной в теории сильно коррелированных электронных систем. В этой модели рассматривалась единственная невырожденная электронная зона с локальным кулоновским взаимодействием. Гамильтониан модели содержал только два параметра: матричный элемент t перескока электрона с одного узла решетки на соседний и параметр U кулоновского отталкивания двух электронов на одном узле. Во вторичном квантовании данный гамильтониан может быть записан как

$$H = t\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow}, \tag{1.1}$$

где $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}$ обозначают Ферми-операторы рождения и уничтожения электрона со спином γ в узле m, а суммирование по τ означает суммирование по ближайшим соседям в решетке.

Модель, предложенная в [5, 6, 10], была названа моделью Хаббарда в честь Джона Хаббарда, ученого, внесшего огромный вклад в изучение статистической механики данной системы, хотя локальная форма кулоновского взаимодействия была впервые введена Андерсоном для модели с примесью в металле [4]. Также следует напомнить, что модель Хаббарда представляет собой частный случай полярной модели Шубина—Вонсовского [13], которая была описана еще за 30 лет до появления работ [5,6,10]. В модели Шубина—Вонсовского наряду с кулоновским взаимодействием на одном узле рассматривается взаимодействие электронов на соседних узлах.

Модель Хаббарда является приближением, используемым в физике твердого тела для описания перехода из проводящего состояния в диэлектрическое. Она представляет собой простейшую модель, которая описывает взаимодействие элементарных частиц в решетке. Ее гамильтониан состоит лишь из двух слагаемых: кинетическое, отвечающее за туннелирование (перескок) частиц между узлами решетки, и слагаемое, отвечающее за внутриузловое взаимодействие. Частицы могут быть как фермионами (как в оригинальной работе Хаббарда), так и бозонами. Простота и достаточность гамильтониана Хаббарда сделали данную модели довольно популярной и эффективной для описания сильно коррелированных электронных систем.

Модель Хаббарда хорошо описывает поведение частиц в периодическом потенциале при достаточно низких температурах таких, что все частицы будет находиться в нижней энергетической зоне Блоха, а дальними взаимодействиями можно будет пренебречь. Если учитывается взаимодействие между частицами на различных узлах, такая модель называется расширенной моделью Хаббарда. Она была предложена для описания электронов в твердых телах, и до сих пор представляет немалый интерес при изучении высокотемпературной суперпроводимости. Позднее расширенной модели Хаббарда было найдено применение и при изучении поведения ультрахолодных атомов в оптических решетках.

При рассмотрении электронов в твердых телах модель Хаббарда можно считать усовершенствованной версией модели сильно связанных электронов, которая учитывает только слагаемое из гамильтониана, отвечающее за перескок. В случае сильных взаимодействий эти две модели могут давать существенно отличающиеся результаты. Модель Хаббарда способна точно предсказать существование так называемых изоляторов Мотта, в которых в силу сильного отталкивания между частицами отсутствует проводимость.

Модель Хаббарда в настоящее время является одной из наиболее активно изучаемых мультиэлектронных моделей металлов [1,2,11,12,15]. Однако точных результатов для спектра и волновых функций кристалла, описываемого моделью Хаббарда, по-прежнему крайне мало, следовательно, получение соответствующих утверждений представляет большой интерес. Спектр и волновые функции системы двух электронов в кристалле, описываемом гамильтонианом Хаббарда, были изучены в [2]. Известно, что двухэлектронные системы могут находиться в двух различных состояниях — триплетном и синглетном [1, 2, 11, 12, 15]. В работе [2] было доказано, что спектр гамильтониана H^t системы в триплетном состоянии чисто непрерывен и совпадает с отрезком $[m, M]$, а у оператора H^s системы в синглетном состоянии, кроме непрерывного спектра $[m, M]$, существует единственное антисвязанное состояние при некоторых значениях квазиимпульса. Для антисвязанного состояния реализуется такое коррелированное движение электронов, при котором велик вклад двоичных состояний. При этом в силу замкнутости системы энергия должна оставаться постоянной и большой. Это вынуждает электроны не расходиться на большие расстояния. Далее, существенным является то обстоятельство, что связанные состояния (их иногда называют состояниями типа рассеяния) ниже непрерывного спектра не формируются. Это вполне понятно, так как взаимодействие имеет характер отталкивания. Заметим, что при $U < 0$ верна обратная ситуация: ниже непрерывного спектра имеется связанное состояние (антисвязанные состояния отсутствуют), поскольку в этом случае электроны притягиваются друг к другу.

Для первой зоны спектр не зависит от параметра U внутриузлового кулоновского взаимодействия двух электронов и соответствует энергии двух невзаимодействующих электронов, в точности совпадая с триплетной зоной. Вторая зона определяется кулоновским взаимодействием в гораздо большей степени: от U зависят как амплитуды, так и энергия двух электронов, причем сама зона исчезает при $U \to 0$, а при $U \to \infty$ неограниченно возрастает. Вторая зона в основном соответствует одночастичному состоянию, а именно движению двойки, т. е. двухэлектронным связанным состояниям.

Спектр и волновые функции системы трех электронов в кристалле, описываемом гамильтонианом Хаббарда, были изучены в [3]. В трехэлектронных системах существуют квартетное состояние и дублетные состояния двух типов. В работе [3] было доказано, что существенный спектр системы в квартетном состоянии состоит из одного отрезка, а трехэлектронное связанное состояние отсутствует. Также было показано, что существенный спектр системы в дублетных состояниях является объединением не более чем трех отрезков, а в дублетных состояниях присутствуют трехэлектронные связанные состояния. При этом спектры таких дублетных состояний различны.

2. Оператор энергии в трехэлектронных системах с примесью в модели Хаббарда. Второе дублетное состояние

Здесь мы рассмотрим оператор энергии в трехэлектронных системах с примесью в модели Хаббарда и опишем структуру существенного и дискретного спектров системы для второго дублетного состояния. Гамильтониан выбранной модели имеет вид

$$H = A\sum_{m,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m,\gamma} + B\sum_{m,\tau,\gamma} a^+_{m,\gamma}a_{m+\tau,\gamma} + U\sum_m a^+_{m,\uparrow}a_{m,\uparrow}a^+_{m,\downarrow}a_{m,\downarrow} + (A_0 - A)\sum_\gamma a^+_{0,\gamma}a_{0,\gamma} +$$

$$+(B_0 - B)\sum_{\tau,\gamma}(a^+_{0,\gamma}a_{\tau,\gamma} + a^+_{\tau,\gamma}a_{0,\gamma}) + (U_0 - U)a^+_{0,\uparrow}a_{0,\uparrow}a^+_{0,\downarrow}a_{0,\downarrow}. \tag{2.1}$$

Здесь A (A_0) — это энергия электрона на регулярном (примесном) узле решетки, B (B_0) — интеграл перехода между электронами (между электроном и примесями) на соседних узлах (для удобства предположим, что $B > 0$ $(B_0 > 0)$), $\tau = \pm e_j, j = 1, 2, \ldots, \nu$, где e_j — единичные взаимно ортогональные векторы, что означает, что суммирование ведется по ближайшим соседям, U (U_0) — параметр внутриузлового кулоновского взаимодействия двух электронов на регулярных (примесных) узлах, γ — спиновый индекс, $\gamma =\uparrow$ либо $\gamma =\downarrow$, где $\uparrow$ или $\downarrow$ обозначают значения спина $\frac{1}{2}$ или $-\frac{1}{2}$, а $a^+_{m,\gamma}$ и $a_{m,\gamma}$ — это операторы рождения и уничтожения электрона в узле $m \in Z^\nu$, соответственно.

Энергия системы зависит от значения полного спина S. В трехэлектронных системах существуют квартетное состояние и два дублетных.

Равно как и гамильтониан, N_e электронная система характеризуется полным спином S, $S = S_{max}, S_{max} - 1, \ldots, S_{min}, S_{max} = \frac{N_e}{2}, S_{min} = 0, \frac{1}{2}$.

Гамильтониан (2.1) коммутирует со всеми компонентами полного спина оператора $S = (S^+, S^-, S^z)$, и следовательно, структура собственных функций и собственных значений системы зависит от S.

Второе дублетное состояние соответствует трехэлектронным связанным состояниям с базисными функциями: ${}^2d^{1/2}_{p,q,t} = a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0$.

Подпространство ${}^2E^d_{1/2}$, отвечающее второму дублетному состоянию, является множеством всех векторов вида $\psi = \sum\limits_{p,q,t\in Z^\nu} \widetilde{f}(p,q,t){}^2d^{1/2}_{p,q,t}$, $\widetilde{f} \in l_2^{as}$, где l_2^{as} — это подпространство антисимметричных функций в пространстве $l_2((Z^\nu)^3)$.

В данном случае гамильтониан H действует в антисимметричном пространстве Фока E_{as}. Пусть φ_0 — это вакуумный вектор в антисимметричном пространстве Фока E_{as}. Второе дублетное состояние соответствует свободному движению трех электронов по решетке и их взаимодействию.

Обозначим через ${}^2H^d_{1/2}$ сужение оператора H на пространство ${}^2E^d_{1/2}$.

Теорема 2.1. *Подпространство ${}^2E^d_{1/2}$ инвариантно относительно оператора H, а оператор ${}^2H^d_{1/2}$ является ограниченным самосопряженным. Он порождает замкнутый самосопряженный оператор ${}^2\overline{H}^d_{1/2}$, действующий в пространстве l_2^{as} следующим образом*:

$${}^2\overline{H}^d_{1/2}\psi = 3Af(p,q,t) + B\sum_\tau[f(p+\tau,q,t) + f(p,q+\tau,t) + f(p,q,t+\tau)] + U(\delta_{p,t} + \delta_{q,t})\times$$

$$\times f(p,q,t) + (A_0 - A)[\delta_{p,0}f(p,q,t) + \delta_{q,0}f(p,q,t) + \delta_{t,0}f(p,q,t)] + (B_0 - B)\sum_\tau[\delta_{p,0}f(\tau,q,t) +$$

$$+\delta_{q,0}f(p,\tau,t) + \delta_{t,0}f(p,q,\tau) + \delta_{p,\tau}f(0,q,t) + \delta_{q,\tau}f(p,0,t) + \delta_{t,\tau}f(p,q,0)] +$$

$$+(U_0 - U)(\delta_{p,0}\delta_{t,0} + \delta_{q,0}\delta_{t,0})f(p,q,t), \tag{2.2}$$

где $\delta_{k,j}$ — это символ Кронекера. Оператор ${}^2H^d_{1/2}$ действует на вектор $\psi \in^2 E^d_{1/2}$ по формуле

$${}^2H^d_{1/2}\psi = \sum_{p,q,t}({}^2\overline{H}^d_{1/2}f)(p,q,t){}^2d^{1/2}_{p,q,t}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Применим гамильтониан H к векторам $\psi \in^2 E^d_{1/2}$, используя стандартные антикоммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения электронов в узлах решетки, $\{a_{m,\gamma}, a^+_{n,\beta}\} = \delta_{m,n}\delta_{\gamma,\beta}$, $\{a_{m,\gamma}, a_{n,\beta}\} = \{a^+_{m,\gamma}, a^+_{n,\beta}\} = \theta$, также учитывая, что $a_{m,\gamma}\varphi_0 = \theta$, где θ — это нулевой элемент пространства ${}^2E^d_{1/2}$. Отсюда получаем утверждение теоремы. $\square$

Обозначим $\varepsilon_1 = A_0 - A$, $\varepsilon_2 = B_0 - B$ и $\varepsilon_3 = U_0 - U$.

Лемма 2.1. *Спектры операторов* ${}^2H^d_{1/2}$ *и* ${}^2\overline{H}^d_{1/2}$ *совпадают.*

Доказательство. В силу того, что ${}^2H^d_{1/2}$ и ${}^2\overline{H}^d_{1/2}$ являются ограниченными самосопряженными операторами, имеем, что если $\lambda \in \sigma({}^2H^d_{1/2})$, то из критерия Вейля (см. [14, ч. VII, п. 3, с. 262-263]) вытекает, что существует такая последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $||\psi_n|| = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} ||({}^2H^d_{1/2} - \lambda)\psi_n|| = 0$. Положим $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{1-\delta_{p,q}}}\sum\limits_{p,q,t} a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0$. Тогда

$$||({}^2H^d_{1/2} - \lambda)\psi_n||^2 = (({}^2H^d_{1/2} - \lambda)\psi_n, ({}^2H^d_{1/2} - \lambda)\psi_n) = \sum_{p,q,t} ||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \lambda)f_n(p,q,t)||^2\times$$

$$\times(\frac{1}{\sqrt{1-\delta_{p,q}}}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0, \frac{1}{\sqrt{1-\delta_{p,q}}}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0) = \sum_{p,q,t} ||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \lambda)F_n(p,q,t)||^2\times$$

$$\times(\frac{1}{1-\delta_{p,q}}a_{t,\downarrow}a_{q,\uparrow}a_{p,\uparrow}a^+_{p,\uparrow}a^+_{q,\uparrow}a^+_{t,\downarrow}\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{p,q,t} ||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \lambda)F_n(p,q,t)||^2\times$$

$\times(\frac{1}{1-\delta_{p,q}} \times (1-\delta_{p,q})\varphi_0, \varphi_0) = \sum\limits_{p,q,t} ||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \lambda)F_n(p,q,t)||^2 \to 0$ при $n \to \infty$, где $F_n = \sum\limits_{p,q,t} f_n(p,q,t)$. Отсюда следует, что $\lambda \in \sigma({}^2\overline{H}^d_{1/2})$. Следовательно, $\sigma({}^2H^d_{1/2}) \subset \sigma({}^2\overline{H}^d_{1/2})$. И напротив, положим $\overline{\lambda} \in \sigma({}^2\overline{H}^d_{1/2})$. Тогда, исходя из критерия Вейля, существует последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $||F_n = 1||$ и $\lim\limits_{n\to\infty} ||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \overline{\lambda})\psi_n|| = 0$. Положив $F_n = \sum\limits_{p,q,t} f_n(p,q,t)$, $||F_n = (\sum\limits_{p,q,t} |f_n(p,q,t)|^2)^{\frac{1}{2}}$, мы вправе заключить, что $||\psi_n|| = ||\psi_n|| = 1$ и $||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \overline{\lambda})F_n|| = ||({}^2\overline{H}^d_{1/2} - \overline{\lambda})\psi_n|| \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что $\overline{\lambda} \in \sigma({}^2H^d_{1/2})$, и следовательно, $\sigma({}^2\overline{H}^d_{1/2}) \subset \sigma({}^2H^d_{1/2})$. Из этих двух соотношений вытекает, что $\sigma({}^2H^d_{1/2}) = \sigma({}^2\overline{H}^d_{1/2})$. □

Назовем оператор ${}^2\overline{H}^d_{1/2}$ *оператором второго дублетного состояния* трехэлектронной системы.

Пусть F обозначает преобразование Фурье: $F : l_2((Z^\nu)^3) \to L_2((T^\nu)^3) \equiv^2 \widetilde{E}^d_{1/2}$, где T^ν — это ν-мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, $\lambda(T^\nu) = 1$.

Положим ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2} = F^2\overline{H}^d_{1/2}F^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор ${}^2\overline{H}^d_{1/2}$ действует в гильбертовом пространстве $L_2^{as}((T^\nu)^3)$, где L_2^{as} — подпространство антисимметричных функций из $L_2((T^\nu)^3)$.

Теорема 2.2. *Преобразование Фурье оператора* ${}^2\overline{H}^d_{1/2}$ *есть оператор* ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2} = F^2\overline{H}^d_{1/2}F^{-1}$, *действующий в пространстве* ${}^2\widetilde{E}^d_{1/2}$ *по формуле*

$$({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}\widetilde{f})(\lambda,\mu,\gamma) = \{3A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos\mu_i + \cos\gamma_i]\}\widetilde{f}(\lambda,\mu,\gamma)+$$

$$+U\int_{T^\nu}\widetilde{f}(s,\mu,\lambda+\gamma-s)ds + U\int_{T^\nu}\widetilde{f}(\lambda,s,\mu+\gamma-s)ds + \varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(s,\mu,\gamma)ds+$$

$$+\varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(\lambda,s,\gamma)ds + \varepsilon_1\int_{T^\nu}\widetilde{f}(\lambda,\mu,s)ds + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos s_i + \cos\lambda_i]\times$$

$$\times\widetilde{f}(s,\mu,\gamma)ds + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\mu_i + \cos s_i]\widetilde{f}(\lambda,s,\gamma)ds + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i + \cos s_i]\times$$

$$\times\widetilde{f}(\lambda,\mu,s)ds+\varepsilon_3[\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(s,r,\gamma)dsdr+\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(\lambda,r,l)drdl]. \tag{2.4}$$

Теорема 2.2 доказывается непосредственным преобразованием Фурье к (2.2).

С помощью тензорных произведений гильбертовых пространств и тензорных произведений операторов в гильбертовых пространствах [14] можно убедиться в том, что оператор ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ представим в виде

$${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}=\widetilde{H}_2\otimes I_1+I_2\otimes\widetilde{H}_1, \tag{2.5}$$

где $(\widetilde{H}_2\widetilde{f})(\lambda,\mu)=\{2A+2B\sum\limits_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos\mu_i]\}\widetilde{f}(\lambda,\mu)+\varepsilon_1\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(s,\mu)ds+\varepsilon_1\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(\lambda,t)dt+$

$$+2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i+\cos s_i]\widetilde{f}(s,\mu)ds+2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\mu_i+\cos t_i]\widetilde{f}(\lambda,t)dt+$$

$$+\varepsilon_3\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(s,t)dsdt+\varepsilon_3\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(t,\xi)dtd\xi,$$

и $(\widetilde{H}_1\widetilde{f})(\lambda)=\{A+2B\sum\limits_{i=1}^{\nu}\cos\gamma_i\}\widetilde{f}(\gamma)+\varepsilon_1\int\limits_{T^\nu}\widetilde{f}(\xi)d\xi+2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\sum\limits_{i=1}^{\nu}[\cos\gamma_i+\cos\xi_i]\widetilde{f}(\xi)d\xi$, а I_1 и I_2 — это тождественные операторы в соответствующих пространствах.

Для исследования спектра оператора ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ нам необходимо изучить спектры операторов $\widetilde{H}_2$ и $\widetilde{H}_1$.

Действительно, оператор $\widetilde{H}_2$ может быть представлен как

$$\widetilde{H}_2=\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1+K, \tag{2.6}$$

где $(K\widetilde{f})(\lambda,\mu)=2\varepsilon_3\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu}f(s,t)dsdt$ — оператор конечного ранга (т. е. конечномерный оператор). Ранг оператора K равен единице. Следовательно, существенные спектры операторов $\widetilde{H}_2$ и $\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1$ совпадают.

Спектр оператора $A\otimes I+I\otimes B$, где A и B — плотно определенные ограниченные линейные операторы, был изучен в [7–9]. Там были даны явные формулы, выражающие существенный спектр $\sigma_{ess}(A\otimes I+I\otimes B)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(A\otimes I+I\otimes B)$ оператора $A\otimes I+I\otimes B$ через спектр $\sigma(A)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(A)$ оператора A и через спектр $\sigma(B)$ и дискретный спектр $\sigma_{disc}(B)$ оператора B:

$$\sigma_{disc}(A\otimes I+I\otimes B)=\{\sigma(A)\backslash\sigma_{ess}(A)+\sigma(B)\backslash\sigma_{ess}(B)\}\backslash\{(\sigma_{ess}(A)+$$
$$+\sigma(B))\cup(\sigma(A)+\sigma_{ess}(B))\}, \tag{2.7}$$
$$\sigma_{ess}(A\otimes I+I\otimes B)=(\sigma_{ess}(A)+\sigma(B))\cup(\sigma(A)+\sigma_{ess}(B)). \tag{2.8}$$

Очевидно, что $\sigma(A\otimes I+I\otimes B)=\{\lambda+\mu:\lambda\in\sigma(A),\mu\in\sigma(B)\}$.

Тем самым мы провели необходимое исследование спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

3. Спектр и локальные примесные состояния оператора энергии для одноэлектронных систем с примесью в модели Хаббарда

Гамильтониан одно-магнонной примесной системы также имеет вид (2.1). Пусть E_1 обозначает гильбертово пространство, порожденное векторами вида: $\Psi=\sum\limits_p a^+_{p,\uparrow}\varphi_0$. Такое пространство называется *пространством одноэлектронных состояний* оператора H. Пространство E_1 инвариантно относительно оператора H. Пусть H_1 — сужение оператора H на пространство E_1.

Теорема 3.1. *Подпространство E_1 инвариантно относительно оператора H, а оператор H_1 является ограниченным самосопряженным. Он порождает ограниченный самосопряженный оператор $\overline{H}_1$, действующий в пространстве l_2 по формуле*

$$(\overline{H}_1f)(p)=Af(p)+B\sum_{\tau}f(p+\tau)+\varepsilon_1\delta_{p,0}f(p)+\varepsilon_2\sum_{\tau}(\delta_{p,\tau}f(0)+\delta_{p,0}f(\tau)), \tag{3.1}$$

где $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера. Оператор H_1 действует на вектор $\psi \in E_1$ следующим образом:

$$H_1\psi = \sum_p (\overline{H}_1 f)(p) a^+_{p,\uparrow}\varphi_0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Применим гамильтониан H к векторам $\psi \in E_1$, используя стандартные антикоммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения электронов в узлах решетки, также учитывая, что $a_{m,\gamma}\varphi_0 = \theta$, где θ — это нулевой элемент пространства E_1. Отсюда получаем утверждение теоремы. □

Лемма 3.1. *Спектры операторов $\overline{H}_1$ и H_1 совпадают.*

Обозначим через F преобразование Фурье: $F : l_2(Z^\nu)) \to L_2(T^\nu) \equiv \widetilde{E}_1$, где T^ν — это ν-мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda$, $\lambda(T^\nu) = 1$.

Положим $\widetilde{H}_1 = F\overline{H}_1F^{-1}$. В квазиимпульсном представлении оператор $\overline{H}_1$ действует в гильбертовом пространстве $L_2(T^\nu)$.

Теорема 3.2. *Преобразование Фурье оператора $\overline{H}_1$ есть оператор $\widetilde{H}_1 = F\overline{H}_1F^{-1}$, действующий в пространстве $\widetilde{E}_1$ по формуле*

$$(\widetilde{H}_1 f)(\lambda) = [A + 2B\sum_{i=1}^{\nu}\cos\lambda_i]f(\lambda) + \varepsilon_1\int_{T^\nu} f(s)ds + 2\varepsilon_2\int_{T^\nu}\sum_{i=1}^{\nu}[\cos\lambda_i + \cos s_i]f(s)ds. \tag{3.3}$$

Очевидно, что непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ не зависит от ε_1 и ε_2 и заполняет весь замкнутый интервал $G_\nu = [m_\nu, M_\nu] = [A - 2B\nu, A + 2B\nu]$, где $m_\nu = \min\limits_{x\in T^\nu} h(x)$, $M_\nu = \max\limits_{x\in T^\nu} h(x)$, а $h(x) = A + 2B\sum\limits_{i=1}^{\nu}\cos x_i$.

Положим $\Delta_\nu(z) = a(1 + \nu d) - \nu bc$, где $a = 1 + \int\limits_{T^\nu}\frac{p(s)}{h(s) - z}ds$, $b = 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\frac{1}{h(s) - z}ds$, $c = \int\limits_{T^\nu}\frac{p(s)q(s_i)}{h(s) - z}ds$, $d = 2\varepsilon_2\int\limits_{T^\nu}\frac{q(s_i)}{h(s) - z}ds$, а $h(s) = A + 2B\sum\limits_{i=1}^{\nu}\cos s_i$, $p(s) = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2\sum\limits_{i=1}^{\nu}\cos s_i$ и $q(s_i) = \cos s_i$.

Лемма 3.2. *Величина $z_0 \notin G_\nu$ является собственным значением оператора $\widetilde{H}_1$ тогда и только тогда, когда она является нулем функции $\Delta_\nu(z)$, т. е. $\Delta_\nu(z_0) = 0$.*

Доказательство. В рассматриваемом случае уравнение для собственных значений представляет собой интегральное уравнение с вырожденным ядром. Следовательно, оно эквивалентно системе линейных однородных уравнений. Как известно, система линейных однородных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, а в данном случае определитель есть функция $\Delta_\nu(z)$. □

Теорема 3.3. *Пусть $\nu = 1$. Тогда:*

A) *Если $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ и $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ и $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, то оператор $\widetilde{H}_1$ не имеет собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

B) *Если $\varepsilon_1 > 0$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $\varepsilon_1 > 0$ и $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение $z = z_1$ ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.*

C) *Если* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то оператор* $\widetilde{H}_1$ *имеет только одно собственное значение* $z = z_2$ *выше непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_1$.

D) *Если* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1, 0$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *то оператор* $\widetilde{H}_1$ *имеет два собственных значения* $z = z_1$ *и* $z = z_2$ *ниже и выше непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_1$, *соответственно.*

Доказательство. Пусть $\nu = 1$. В таком случае непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ совпадает с отрезком $[A - 2B, A + 2B]$. Выражая все интегралы в уравнении $\Delta_\nu(z) = 0$ через интеграл $J(z) = \int\limits_{T^\nu} \frac{ds}{A + 2B\cos s - z}$, находим, что уравнение $\Delta_\nu(z) = 0$ эквивалентно уравнению

$$\{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\}J(z) + (B + \varepsilon_2)^2 = 0. \tag{3.4}$$

Так как функция $J(z) = \int\limits_{T^\nu} \frac{ds}{A + 2B\cos s - z}$ является непрерывной при $z \notin G_\nu$, а $[J(z)]' = \int\limits_{T^\nu} \frac{ds}{[A + 2B\cos s - z]^2} > 0$, функция $J(z)$ возрастает как функция от z при $z \notin G_\nu$. Более того, $J(z) \to 0$ при $z \to -\infty$, $J(z) \to +\infty$ при $z \to m_1 - 0$, $J(z) \to -\infty$ при $z \to M_1 + 0$ и $J(z) \to 0$ при $z \to +\infty$. Из $\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A) \neq 0$, т. е. из $z \neq A - \frac{\varepsilon_1 B^2}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$, получаем выражение следующего вида:

$$J(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}. \tag{3.5}$$

Обозначим $\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$. Функция $\psi(z)$ имеет полюс $z_0 = A - \frac{B^2\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$.

Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Функция $\Psi(z)$ является монотонно возрастающей, так как $\psi'(z) = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{[\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]^2} > 0$, а $\psi(z) \to +0$ при $z \to -\infty$, $\psi(z) \to +\infty$ при $z \to z_0 - 0$, $\psi(z) \to -\infty$ при $z \to z_0 + 0$ и $\psi(z) \to -0$ при $z \to +\infty$.

Если полюс функции $\psi(z)$ совпадает с нижней границей непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, т. е. $z_0 = m_1$, то при условии, что $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ и $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$ или $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ и $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, оператор $\widetilde{H}_1$ не будет иметь собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Аналогично, если полюс функции $\psi(z)$ совпадает с верхней границей непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, т. е. $z_0 = M_1$, то при условии, что $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$ или $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, оператор $\widetilde{H}_1$ не будет иметь собственных значений вне непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Если полюс функции $\psi(z)$ лежит ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, т. е. $z_0 < m_1$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение $z_1 < m_1$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Если полюс функции $\psi(z)$ лежит выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, т. е. $z_0 > M_1$, то оператор имеет только одно собственное значение $z_2 > M_1$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Если полюс функции $\Psi(z)$ находится внутри непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, т. е. $m_1 < z_0 < M_1$, то оператор имеет два собственных значения $z_1 < m_1$ и $z_2 > M_1$, лежащих ниже и выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, соответственно.

Из $z_0 < m_1$ найдем условия существования единственного собственного значения оператора $\widetilde{H}_1$, лежащего ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Этими условиями являются: $\varepsilon_1 > 0$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $\varepsilon_1 > 0$ и $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, или $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$.

Из $z_0 > M_1$ найдем условия существования единственного собственного значения оператора $\widetilde{H}_1$, лежащего выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Этими условиями являются: $\varepsilon_1 < 0$ и $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $\varepsilon_1 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $0 < \varepsilon_1 < 2B$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 < 2B$ и $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$.

Из $m_1 < z_0 < M_1$ найдем условия существования двух собственных значений оператора $\widetilde{H}_1$, лежащих ниже и выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, соответственно. Этими условиями являются: $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B < \varepsilon_1 \leqslant 0$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $-2B < \varepsilon_1 \leqslant 0$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B < \varepsilon_1 \leqslant 0$ и $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B < \varepsilon_1 \leqslant 0$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$.

Следовательно, если

a) $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ и $\varepsilon_2 > -B+\sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $\varepsilon_2 < -B-\sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-B-\sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$,

b) $-2B < \varepsilon_1 \leqslant 0$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет два собственных значения $z_1 < m_1$ и $z_2 > M_1$. □

Теперь рассмотрим двухмерный случай. В двухмерном случае также будем иметь, что уравнение $\Delta_2(z) = 0$ эквивалентно уравнению вида (3.4), а именно $J(z) = \int\limits_{T^2} \frac{ds_1 ds_2}{A + 2B(\cos s_1 + \cos s_2) - z}$.

Получены результаты, аналогичные одномерному случаю.
Теперь же рассмотрим трехмерный случай.

Теорема 3.4. *Пусть* $\nu = 3$. *Тогда*:

A) *Если* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 \leqslant -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то оператор* $\widetilde{H}_1$ *имеет только одно собственное значение* z_1 *ниже непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_1$.

B) *Если* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 < 6B$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 < 6B$ *и* $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то оператор* $\widetilde{H}_1$ *имеет только одно собственное значение* z_2 *выше непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_1$.

C) *Если* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B \leqslant \varepsilon_2 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *то оператор* $\widetilde{H}_1$ *имеет два собственных значения* z_1 *и* z_2 *ниже и выше непрерывного спектра оператора* $\widetilde{H}_1$, *соответственно.*

Доказательство. В трехмерном случае также имеем уравнение вида $(\varepsilon_2 + B)^2 + \{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)\}J(z) = 0$, где $J(z) = \int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{A + 2B(\cos s_1 + \cos s_2 + \cos s_3) - z}$.

В трехмерном случае интеграл $\int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 + \cos s_1 + \cos s_2 + \cos s_2} = \int\limits_{T^3} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{3 - \cos s_1 - \cos s_2 - \cos s_2}$ конечен. Выражая этот интеграл через интеграл Уотсона W, будем иметь, что $J(z) = \frac{W}{3}$.

Тогда $J(z) \to +0$ при $z \to -\infty$, $J(z) = \frac{W}{3}$ при $z = A - 6B$, $J(z) \to -0$ при $z \to +\infty$ и $J(z) = -\frac{W}{3}$ при $z = A + 6B$.

Функция $\psi(z) = -\frac{(B + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 B^2 + (\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)}$ имеет полюс $z_0 = A - \frac{B^2\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2}$.

Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 < -2B$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$. Если $\varepsilon_2 = -B$ и $\varepsilon_1 > 2B$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение $z = A + \varepsilon_1$, лежащее выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Функция $\Psi(z)$ также является монотонно возрастающей, т. к. $\psi'(z) = \frac{(B + \varepsilon_2)^2}{[\varepsilon_2^2 + 2B\varepsilon_2)(z - A)]^2} > 0$, а $\psi(z) \to +0$ при $z \to -\infty$, $\psi(z) \to +\infty$ при $z \to z_0 - 0$, $\psi(z) \to -\infty$ при $z \to z_0 + 0$ и $\psi(z) \to -0$ при $z \to +\infty$.

Если $\varepsilon_1 > 0$ и $0 < \varepsilon_2 \leqslant -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} <$

$\varepsilon_2 < 0$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение z_1 ниже непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Если $\varepsilon_1 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $\varepsilon_1 < 0$ и $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 < 6B$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 < 6B$ и $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение z_2 выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$.

Если $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ и $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_2 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, то оператор $\widetilde{H}_1$ имеет два собственных значения z_1 и z_2 ниже и выше непрерывного спектра оператора $\widetilde{H}_1$, соответственно. □

Из полученных результатов видно, что спектр оператора $\widetilde{H}_1$ состоит из непрерывного спектра и максимум двух собственных значений.

4. Структура существенного и дискретного спектров оператора $\widetilde{H}_2$

Теперь, используя полученные ранее результаты и представление (2.6), мы можем приступить к описанию структуры существенного и дискретного спектров оператора $\widetilde{H}_2$.

Следующие теоремы описывают структуру существенного и дискретного спектров оператора $\widetilde{H}_2$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\nu = 1$. *Тогда*:

A) *Если* $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ *и* $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ *и* $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из одного интервала* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [2A - 4B, 2A + 4B]$, *а дискретный — не более чем из одной точки* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2) = \{z_3\}$.

B) *Если* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из объединения двух интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [2A - 4B, 2A + 4B] \cup [A - 2B + z_1, A + 2B + z_1]$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2) = \{2z_1, z_3\}$.

C) *Если* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из объединения двух интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [2A - 4B, 2A + 4B] \cup [A - 2B + z_2, A + 2B + z_2]$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2) = \{2z_2, z_3\}$.

D) *Если* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$

и $-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{2}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<-2B$, *или* $-2B\leqslant\varepsilon_1<0$ *и* $\varepsilon_2>-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B\leqslant\varepsilon_1<0$ *и* $\varepsilon_2<-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B\leqslant\varepsilon_1<0$ *и* $-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{2}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<-2B$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из объединения трех интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2)=[2A-4B,2A+4B]\cup[A-2B+z_1,A+2B+z_1]\cup[A-2B+z_2,A+2B+z_2]$, *а дискретный — не более чем из четырех точек* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2)=\{2z_1,2z_2,z_1+z_2,z_3\}$.

Доказательство. A) Как следует из представления (2.6), формул (2.7), (2.8) и теоремы 3.3, в одномерном случае непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ — это $\sigma_{cont}(\widetilde{H}_1)=[A-2B,A+2B$, а дискретный спектр пуст. Оператор K является одномерным. Следовательно, существенный спектр оператора $\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1$ и оператора $\widetilde{H}_2$ представляет собой отрезок $[2A-4B,2A+4B]$. Расширив одномерный оператор K в операторе $\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1$, получим самое большее одно дополнительное собственное значение z_3. Отсюда получаем утверждение A) данной теоремы.

B) В этом случае оператор $\widetilde{H}_1$ имеет одно собственное значение z_1, лежащее ниже непрерывного спектра. Таким образом, существенный спектр оператора $\widetilde{H}_1\otimes I+I\otimes\widetilde{H}_1$ состоит из объединения двух интервалов, а дискретный — из одной точки. Отсюда следует утверждение B) данной теоремы. Остальные утверждения получаем аналогичным путем. □

Следующие теоремы описывают структуру существенного и дискретного спектров оператора $\widetilde{H}_2^s$ в трехмерном случае.

Теорема 4.2. *Пусть* $\nu=3$. *Тогда*:

A) *Если* $\varepsilon_1>0$ *и* $0<\varepsilon_2\leqslant-B+\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B\leqslant\varepsilon_1<0$ *и* $-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<-2B$, *или* $-6B\leqslant\varepsilon_1<0$ *и* $-2B<\varepsilon_2<-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B\leqslant\varepsilon_1<0$ *и* $-B+\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<0$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из объединения двух интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2)=[2A-12B,2A+12B]\cup[A-6B+z_1,A+6B+z_1]$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2)=\{2z_1,z_3\}$.

B) *Если* $\varepsilon_1<0$ *и* $-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<-2B$, *или* $\varepsilon_1<0$ *и* $0<\varepsilon_2<-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0<\varepsilon_1<6B$ *и* $-2B<\varepsilon_2<-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0<\varepsilon_1<6B$ *и* $-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<0$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из объединения двух интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2)=[2A-12B,2A+12B]\cup[A-6B+z_2,A+6B+z_2]$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2)=\{2z_2,z_3\}$.

C) *Если* $0<\varepsilon_1\leqslant6B$ *и* $\varepsilon_2>-B+\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B\leqslant\varepsilon_1<0$ *и* $\varepsilon_2>-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0<\varepsilon_1\leqslant6B$ *и* $\varepsilon_2<-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B\leqslant\varepsilon_1<0$ *и* $\varepsilon_2<-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $0<\varepsilon_1\leqslant6B$ *и* $-B-\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<-B+\sqrt{B^2-\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *или* $-6B\leqslant\varepsilon_2<0$ *и* $-B-\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}<\varepsilon_2<-B+\sqrt{B^2+\frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, *то существенный спектр оператора* $\widetilde{H}_2$ *состоит из объединения трех интервалов* $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2)=[2A-12B,2A+12B]\cup[A-6B+z_1,A+6B+z_1]\cup[A-6B+z_2,A+6B+z_2]$, *а дискретный — не более чем из четырех точек* $\sigma_{disc}(\widetilde{H}_2)=\{2z_1,2z_2,z_1+z_2,z_3\}$.

Доказательство. A). Из теоремы 3.4 следует, что для $\nu = 3$, $\varepsilon_1 > 0$ и $0 < \varepsilon_2 \leqslant -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, оператор $\widetilde{H}_1$ имеет только одно собственное значение z_1, лежащее ниже непрерывного спектра. Однако непрерывный спектр оператора $\widetilde{H}_1$ состоит из отрезка $[A - 6B, A + 6B]$, а существенный спектр оператора $\widetilde{H}_2$, следовательно, состоит из объединения отрезков $[2A - 12B, 2A + 12B]$ и $[z_1 + A - 6B, z_1 + A + 6B]$, т. е. $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [2A - 12B, 2A + 12B] \cup [A - 6B + z_1, A + 6B + z_1]$, а точка $2z_1$ является собственным значением этого оператора $\widetilde{H}_1 \otimes I + I \otimes \widetilde{H}_1$, и в представлении (2.6) оператор K имеет ранг, равный единице. Таким образом, оператор $\widetilde{H}_2$ имеет не более одного дополнительного собственного значения z_3. Следовательно, оператор $\widetilde{H}_2$ имеет не более двух собственных значений $2z_1$ и z_3.

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично. □

5. Структура существенного и дискретного спектров оператора ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$

Теперь, зная спектры операторов $\widetilde{H}_2$ и $\widetilde{H}_1$, можно описать существенный и дискретный спектры оператора ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$.

Теорема 5.1. *Пусть* $\nu = 1$. *Тогда*:

A) *Если* $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ *и* $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 \geqslant -2B$ *и* $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 = -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 = -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *то существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ *состоит из объединения не более чем двух интервалов* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [2A - 4B + z_3, 2A + 4B + z_3]$, *а дискретный спектр пуст, т. е.* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = \varnothing$, *где* z_3 — *это собственное значение оператора* $\widetilde{H}_2$.

B) *Если* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $\varepsilon_1 > 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ *состоит из объединения не более чем четырех интервалов* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [2A - 4B + z_1, 2A + 4B + z_1] \cup [A - 2B + z_3, A + 2B + z_3] \cup [A - 2B + 2z_1, A + 2B + 2z_1]$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_1, z_1 + z_3\}$.

C) *Если* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $\varepsilon_1 < 0$ *и* $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-2B < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, *то существенный спектр оператора* ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ *состоит из объединения не более чем четырех интервалов* $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A - 6B, 3A + 6B] \cup [2A - 4B + z_2, 2A + 4B + z_2] \cup [A - 2B + z_3, A + 2B + z_3] \cup [A - 2B + 2z_2, A + 2B + 2z_2$, *а дискретный — не более чем из двух точек* $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_2, z_2 + z_3\}$.

D) *Если* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или* $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2B$ *и* $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, *или* $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ *и* $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, *или*

$-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, или $-2B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1}$, or $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{2}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, то существенный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ состоит из объединения не более чем семи интервалов $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-6B, 3A+6B] \cup [2A-4B+z_1, 2A+4B+z_1] \cup [2A-4B+z_2, 2A+4B+z_2] \cup [A-2B+z_3, A+2B+z_3] \cup [A-2B+2z_1, A+2B+2z_1] \cup [A-2B+z_1+z_2, A+2B+z_1+z_2] \cup [A-2B+2z_2, A+2B+2z_2]$, а дискретный — не более чем из шести точек $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_1, 3z_2, 2z_1+z_2, z_1+2z_2, z_1+z_3, z_2+z_3\}$.

В трехмерном случае структура существенного и дискретного спектров оператора ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ описывается следующей теоремой.

Теорема 5.2. *Пусть $\nu = 3$. Тогда*:

A) *Если $\varepsilon_1 > 0$ и $0 < \varepsilon_2 \leqslant -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $-B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, то существенный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ состоит из объединения четырех интервалов $\sigma_{ess}(\widetilde{H}_2) = [3A-18B, 3A+18B] \cup [2A-12B+z_1, 2A+12B+z_1] \cup [A-6B+2z_1, A+6B+2z_1] \cup [A-6B+z_3, A+6B+z_3]$, а дискретный — не более чем из двух точек $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_1, z_1+z_3\}$.*

B) *Если $\varepsilon_1 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -2B$, или $\varepsilon_1 < 0$ и $0 < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 < 6B$ и $-2B < \varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 < 6B$ и $-B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < 0$, то существенный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ состоит из объединения четырех интервалов $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-18B, 3A+18B] \cup [2A-12B+z_2, 2A+12B+z_2] \cup [A-6B+2z_2, A+6B+2z_2] \cup [A-6B+z_3, A+6B+z_3]$, а дискретный — не более чем из двух точек $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_2, z_2+z_3\}$.*

C) *Если $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 > -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ и $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_1 < 0$ и $\varepsilon_2 < -B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $0 < \varepsilon_1 \leqslant 6B$ и $-B - \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 - \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, или $-6B \leqslant \varepsilon_2 < 0$ и $-B - \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1} < \varepsilon_2 < -B + \sqrt{B^2 + \frac{1}{6}B\varepsilon_1}$, то существенный спектр оператора ${}^2\widetilde{H}^d_{1/2}$ состоит из объединения семи интервалов $\sigma_{ess}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = [3A-18B, 3A+18B] \cup [2A-12B+z_1, 2A+12B+z_1] \cup [2A-12B+z_2, 2A+12B+z_2] \cup [A-6B+2z_1, A+6B+2z_1] \cup [A-6B+z_1+z_2, A+6B+z_1+z_2] \cup [A-6B+2z_2, A+6B+2z_2] \cup [A-6B+z_3, A+6B+z_3]$, а дискретный — не более чем из шести точек $\sigma_{disc}({}^2\widetilde{H}^d_{1/2}) = \{3z_1, 3z_2, 2z_1+z_2, z_1+2z_2, z_1+z_3, z_2+z_3\}$.*

Доказательство. Доказательство теорем 5.1–5.2 проводится аналогично доказательству теорем 4.1–4.2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Изюмов Ю. А., Скрябин Ю. Н.* Статистическая механика магнитоупорядоченных систем. — М.: Наука, 1987.
2. *Карпенко Б. В., Дякин В. В., Будрина Г. Л.* Два электрона в модели Хаббарда// Физ. метал. и металловед. — 1986. — *61*, № 4. — С. 702–706.

3. *Ташпулатов С. М.* О спектральных свойствах трехэлектронных систем в модели Хаббарда// Теор. мат. физ. — 2014. — *179*, № 3. — С. 387–405.
4. *Anderson C. W.* Localized magnetic states in metals// Phys. Rev. — 1961. — *124*. — С. 41–53.
5. *Gutzwiller M. C.* Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals// Phys. Rev. Lett. — 1963. — *10*. — С. 159–162.
6. *Hubbard J.* Electron correlations in narrow energy bands// Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1963. — *276*. — С. 238–257.
7. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators, 1// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *235*. — С. 75–113.
8. *Ichinose T.* Spectral properties of tensor products of linear operators, 2: The approximate point spectrum and Kato essential spectrum// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *237*. — С. 223–254.
9. *Ichinose T.* Tensor products of linear operators. Spectral theory// Banach Center Publ. — 1982. — *8*. — С. 294–300.
10. *Kanamori J.* Electron correlation and ferromagnetism of transition metals// Prog. Theor. Phys. — 1963. — *30*. — С. 275–289.
11. *Lieb E.* Two theorems on the Hubbard model// Phys. Rev. Lett. — 1989. — *62*. — С. 1201–1204.
12. *Mattis D.* The few-body problems on a lattice// Rev. Mod. Phys. — 1986. — *58*. — С. 370–379.
13. *Shubin S. C., Wonsowsky S. V.* On the electron theory of metals// Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1934. — *145*. — С. 159–180.
14. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. — New York: Acad. Press, 1978.
15. *Tsvelick A. M., Wiegman C. B.* Exact results in the theory of magnetic alloys// Adv. Phys. — 1983. — *32*. — С. 453–713.

С. М. Ташпулатов
Институт ядерной физики АН Респ. Узбекистан,
Узбекистан, 702132, г. Ташкент, пос. Улугбек
E-mail: `sadullatashpulatov@yandex.ru`, `toshpul@inp.uz`

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-109-123 UDC 517.984

Spectra of the Energy Operator of Three-Electron Systems in the Impurity Hubbard Model. Second Doublet State

© 2019 **S. M. Tashpulatov**

Abstract. We consider the three-electron systems in the impurity Hubbard model and investigated the spectra of the system in the second doublet state in the ν-dimensional lattice Z^{ν}.

REFERENCES

1. Yu. A. Izyumov and Yu. N. Skryabin, *Statisticheskaya mekhanika magnitouporyadochennykh sistem* [Statistical Mechanics of Magnetically Ordered Systems], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
2. B. V. Karpenko, V. V. Dyakin, and G. L. Budrina, “Dva elektrona v modeli Khabbarda” [Two electrons in the Hubbard Model], *Fiz. metal. i metalloved.* [Phys. Metal. Phys. Metallurgy], 1986, **61**, No. 4, 702–706 (in Russian).
3. S. M. Tashpulatov, “O spektral’nykh svoystvakh trekhelektronnykh sistem v modeli Khabbarda” [Spectral properties of three-electron systems in the Hubbard model], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2014, **179**, No. 3, 387–405 (in Russian).
4. C. W. Anderson, “Localized magnetic states in metals,” *Phys. Rev.*, 1961, **124**, 41–53.
5. M. C. Gutzwiller, “Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals,” *Phys. Rev. Lett.*, 1963, **10**, 159–162.
6. J. Hubbard, “Electron correlations in narrow energy bands,” *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1963, **276**, 238–257.

7. T. Ichinose, “Spectral properties of tensor products of linear operators, 1,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, **235**, 75–113.
8. T. Ichinose, “Spectral properties of tensor products of linear operators, 2: The approximate point spectrum and Kato essential spectrum,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, **237**, 223–254.
9. T. Ichinose, “Tensor products of linear operators. Spectral theory,” *Banach Center Publ.*, 1982, **8**, 294–300.
10. J. Kanamori, “Electron correlation and ferromagnetism of transition metals,” *Prog. Theor. Phys.*, 1963, **30**, 275–289.
11. E. Lieb, “Two theorems on the Hubbard model,” *Phys. Rev. Lett.*, 1989, **62**, 1201–1204.
12. D. Mattis, “The few-body problems on a lattice,” *Rev. Mod. Phys.*, 1986, **58**, 370–379.
13. S. C. Shubin and S. V. Wonsowsky, “On the electron theory of metals,” *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1934, **145**, 159–180.
14. M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, Acad. Press, New York, 1978.
15. A. M. Tsvelick and C. B. Wiegman, “Exact results in the theory of magnetic alloys,” *Adv. Phys.*, 1983, **32**, 453–713.

S. M. Tashpulatov
Institute of Nuclear Physics, Acad. Sci. of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `sadullatashpulatov@yandex.ru, toshpul@inp.uz`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 124–136

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-124-136 УДК 517.977

ε-ПОЗИЦИОННЫЕ СТРАТЕГИИ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ПРЕСЛЕДОВАНИЯ И ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ПОСТОЯННОГО МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2019 г. **М. ТУХТАСИНОВ, Х.Я. МУСТАПОКУЛОВ**

Аннотация. В настоящей работе рассмотрены две задачи. В первой задаче показано, что при выполнении предположения работы [1] и еще одного дополнительного условия на параметры игры преследование может быть завершено на любой окрестности терминального множества. При этом для завершения игры строится ε-позиционная стратегия преследователя.

Во второй задаче рассматривается вопрос об инвариантности данного многозначного отображения относительно системы с распределенными параметрами. Система описывается уравнением теплопроводности, в правой части которого в аддитивной форме находятся управления.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Для эффективного решения линейных дифференциальных игр преследования-убегания с позиции преследователя разработано несколько методов. В фундаментальной работе [11] Л.С. Понтрягин дал полное изложение своих результатов по линейным дифференциальным играм, в частности, о первом методе, к достоинством которого относится его эффективность при решении конкретных задач [5].

В работе [12] рассмотрена задача о возможности завершения преследования для момента первого поглощения. Однако существуют примеры (см. [8]), показывающие, что за время первого поглощения завершить преследование невозможно, хотя время первого попадания конечное. В работе [16] приведены достаточные условия для завершения преследования в линейных дифференциальных играх при различных модификациях методов теории дифференциальных игр. Важным результатом этой работы является то, что обобщение первого метода Понтрягина привело к созданию третьего метода. В свою очередь, третий метод Н.Ю. Сатимова был обобщен М.С. Никольским [9], А. Азамовым, Б.Т. Саматовым [1]. Заметим, что третий метод является сильнее первого, но слабее второго метода. При этом управление преследующего, гарантирующее завершение преследования, задается в виде стробоскопической стратегии. Результаты работ [4, 12, 16, 17] отличаются от работ [5, 8–11, 13, 14, 19, 20, 24] тем, что стратегия преследователя является позиционной.

В первой части показано, что при выполнении предположения работы [1] и еще одного дополнительного условия на параметры игры преследование может быть завершено на любой окрестности терминального множества.

Во второй части работы рассматриваются вопросы о сильной и слабой инвариантности постоянного многозначного отображения относительно системы с распределенными параметрами, в которых управляющее воздействие имеет импульсный характер, что выражается при помощи дельта-функции Дирака [7].

Цель изучения инвариантных множеств сводится к тому, чтобы как можно дольше удержать траекторию движения объекта в пределах заданного множества (области выживаемости). В ранее изученных задачах получены заметные успехи, в основном, для управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями [2, 15, 18, 23, 25].

В работах [2, 15, 23, 25] и других авторов были получены интересные результаты в вопросе об инвариантности заданных множеств относительно систем с сосредоточенными параметрами, а в работах [21, 22, 26] с распределенными параметрами.

В работах [21, 22] рассмотрены управляемый процесс, описываемый уравнением параболического типа, при этом управляющий параметр, на который наложены геометрическое и интегральное ограничения, участвует в правой части уравнения в аддитивной форме. Приведены условия на постоянные данные, обеспечивающие слабую или сильную инвариантность постоянного многозначного отображения.

В работе [26] получены аналогичные результаты при наличии информации с запаздыванием.

1. Задача I

1.1. Вспомогательные построения. Рассматривается линейная дифференциальная игра преследования, описываемая уравнением

$$\dot{z} = Cz - u + v, \; z \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где z — фазовый вектор; $u, v \in \mathbb{R}^n$ — параметры управления; C — постоянная матрица порядка $n \times n$; P, Q — непустые компактные подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, терминальным является непустое подмножество M пространства $\mathbb{R}^n$.

Уравнение (1.1) и множества P, Q, M описывают дифференциальную игру двух игроков: преследующего, который распоряжается вектором u, и убегающего, который распоряжается вектором v. Движение точки z начинается при $t = 0$ и протекает под воздействием измеримых функций $u(t) \in P$ и $v(t) \in Q$ при $t \geqslant 0$, которых называем *допустимыми управлениями* преследующего и убегающего игроков соответственно.

Вкратце, остановимся на *третьем методе* в задаче преследования.

Будем говорить, что из начального состояния $z(0) = z^0$ возможно *окончание игры* преследования, если у догоняющего есть такая допустимая стратегия $U(z^0, t, v)$, что при любом допустимом $v(t) \in Q$ и $u[t] = U(z^0, t, v(t)) \in P$, $t \geqslant 0$, существует конечный момент времени $\tau > 0$ такой, что: $z(\tau) \in M$, где $z(t)$, $t \geqslant 0$ — соответствующее решение задачи (1.1) при $u = u[t]$, $v = v(t)$, $t \geqslant 0$.

Через $\Omega(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство, состоящее из всех непустых компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.1. Через $\Gamma(M)$ обозначим всю совокупность суммируемых многозначных отображений $M(\cdot) : [0, \tau] \to \Omega(\mathbb{R}^n)$, для которых имеет место включение $\int_0^\tau M(s)\, ds \subset M$.

Теорема 1.1. *Если для данной начальной точки $z^0 \notin M$ при некотором моменте времени τ выполнено включение*

$$e^{\tau C} z^0 \in \bigcup_{M(\cdot) \in \Gamma(M)} \int_0^\tau \left(\left(M(s) + e^{(\tau - s)C} P \right) \overset{*}{-} e^{(\tau - s)C} Q \right) ds, \tag{1.2}$$

то из точки z^0 возможно завершение преследования за время τ.

Теперь переходим к изложению нашего результата. Показывается, что если добавить еще одно условие, то игру можно закончить ε-позиционной стратегией к моменту τ на любой α-окрестности множества M.

Лемма 1.1. *Пусть $\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k$ — последовательность моментов времени, где $\tau_0 = 0$, $\tau_k = \tau$. Тогда для данного многозначного отображения $M(\cdot) \in \Gamma(M)$ при условии*

$$e^{-\tau C}M(s) + e^{-sC}P \overset{*}{-} e^{-sC}Q \neq \varnothing, \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau,$$

верно следующее включение:

$$\int\limits_0^\tau \left(\left(e^{-\tau C}M(s) + e^{-sC}P\right) \overset{*}{-} e^{-sC}Q\right) ds \subset \sum_{i=1}^k \left(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} \left(e^{-\tau C}M(s) + e^{-sC}P\right) ds \overset{*}{-} \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} e^{-sC}Q ds\right). \quad (1.3)$$

Доказательство. Доказательство этой леммы следует из аддитивности интеграла и включения

$$\int\limits_a^b \left(F(s) \overset{*}{-} G(s)\right) ds \subset \int\limits_a^b F(s)\, ds \overset{*}{-} \int\limits_a^b G(s)\, ds,$$

справедливость которого, в свою очередь, вытекает из следующих рассуждений. Пусть $h \in \int\limits_a^b \left(F(s) \overset{*}{-} G(s)\right) ds$. Тогда по определению интеграла от многозначного отображения следует существование интегрируемой однозначной ветви $h(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$, многозначного отображения $F(s) \overset{*}{-} G(s)$ такой, что имеет место равенство

$$h = \int\limits_a^b h(s)\, ds. \quad (1.4)$$

По определению операции геометрической разности, имеем $h(s) + G(s) \subset F(s)$, $a \leqslant s \leqslant b$. Проинтегрируем обе части этого включения в пределах от a до b. Тогда получаем

$$\int\limits_a^b h(s)\, ds + \int\limits_a^b G(s)\, ds \subset \int\limits_a^b F(s)\, ds,$$

или

$$\int\limits_a^b h(s)\, ds \in \int\limits_a^b F(s)\, ds \overset{*}{-} \int\limits_a^b G(s)\, ds.$$

Отсюда и из (1.4) получим доказательство леммы. □

Условие A. Для произвольных $t \geqslant 0$ и $0 \leqslant a < b$ имеет место включение

$$\int\limits_a^b e^{-sC}P\, ds \subset \int\limits_a^b e^{-(t+s)C}P\, ds.$$

Теорема. *Пусть для данного начального положения z^0 при некотором конечном времени τ выполнены включение* (1.2) *и условие* A. *Тогда для любого положительного числа α существует такая ε-позиционная стратегия $U(z^0, t, z)$ преследующего игрока, что при любом управлении убегающего игрока $v(\cdot)$ решение $z(t)$, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, задачи Коши*

$$\dot{z} = Cz - U(z^0, t, z) + v(t), \quad z(0) = z^0$$

удовлетворяет включению $z(\tau) \in M_\alpha$, где через M_α обозначена α-окрестность множества M.

Доказательство. Допустим, что для момента времени τ выполнены включение (1.2) и условие A. Известно, что если $u(s) \in P$, $v(s) \in Q$, $0 \leqslant s \leqslant t$ — произвольные допустимые управления преследующего и убегающего игроков соответственно, то после подстановки их в правую часть уравнения (1.1) получим неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Cz - u(t) + v(t),$$

решение которой с начальным условием $z(0) = z^0$ представляется формулой Коши:

$$z(t) = e^{tC} z^0 - \int_0^t e^{(t-s)C} \big(u(s) - v(s)\big)\, ds. \tag{1.5}$$

Для данного положительного числа α выберем натуральное число k так, чтобы имело место неравенство

$$\left| \int_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{(\tau-s)C} P\, ds \right| < \frac{\alpha}{2}, \tag{1.6}$$

где $\varepsilon = \dfrac{\tau}{k}$ и для компактного множества F: $\big|F\big| = \max\big\{||f|| : f \in F\big\}$.

Из соотношений (1.2), (1.3) следует, что для данного начального положения z^0 и момента времени τ существуют многозначное отображение $\overline{M}(\cdot) \in \Gamma(M)$ и векторы $g^i \in \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} \big(e^{-\tau C}\ \overline{M}(s) + e^{-sC} P\big)\, ds \overset{*}{-} \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC} Q\, ds$, $i = 1, 2, \ldots, k$, для которых имеет место равенство

$$z^0 = g^1 + g^2 + \ldots + g^k. \tag{1.7}$$

Пусть теперь $v(s) \in Q$, $0 \leqslant s \leqslant \tau$ — произвольное допустимое управление убегающего игрока. На отрезке $[0, \varepsilon]$ преследующий игрок выбирает произвольное допустимое управление $u^{(1)}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant \varepsilon$.

Далее применим метод математической индукции по i. Пусть $i = 1$. Тогда из формулы Коши (1.5) в момент времени ε имеем позицию вида

$$z(\varepsilon) = e^{\varepsilon C} z^0 - \int_0^\varepsilon e^{(\varepsilon-s)C} \Big(u^{(1)}(s) - v(s)\Big)\, ds.$$

Отсюда получаем следующее равенство:

$$z(\varepsilon) - e^{\varepsilon C} \left(z^0 - g^1 - \int_0^\varepsilon e^{-sC} u^{(1)}(s)\, ds \right) = e^{\varepsilon C} \left(g^1 + \int_0^\varepsilon e^{-sC} v(s)\, ds \right), \tag{1.8}$$

в силу условия А имеем

$$g^1 + \int_0^\varepsilon e^{-sC} v(s)\, ds \in g^1 + \int_0^\varepsilon e^{-sC} Q\, ds \subset \int_0^\varepsilon \big(e^{-\tau C}\ \overline{M}(s) + e^{-\varepsilon C} e^{-sC} P\big)\, ds \subset$$

$$\subset \int_0^\varepsilon e^{-\tau C}\ \overline{M}(s)\, ds + \int_\varepsilon^{2\varepsilon} e^{-sC} P\, ds.$$

Таким образом, из (1.8) получаем

$$z(\varepsilon) - e^{\varepsilon C} \Big(z^0 - g^1 - \int_0^\varepsilon e^{-sC} u^{(1)}(s)\, ds \Big) = e^{\varepsilon C} \Big(g^1 + \int_0^\varepsilon e^{-sC} v(s)\, ds \Big) \in$$

$$\in e^{\varepsilon C} \Big(\int_0^\varepsilon e^{-\tau C}\ \overline{M}(s)\, ds + \int_\varepsilon^{2\varepsilon} e^{-sC} P\, ds \Big).$$

Следовательно, зная $z(\varepsilon)$ и z^0, можно найти допустимое управление $u^{(2)}(s) \in P$, $\varepsilon \leqslant s \leqslant 2\varepsilon$ такое, что выполняются включения

$$z(\varepsilon) - e^{\varepsilon C}\left(z^0 - g^1 - \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-sC}u^{(1)}(s)\,ds\right) \in e^{\varepsilon C}\Big(\int\limits_0^{\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds + \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} e^{-sC}u^{(2)}(s)\,ds\Big),$$

$$g^1 + \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds \in \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds + \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} e^{-sC}u^{(2)}(s)\,ds.$$

Теперь, считая, что аналогичные соотношения верны при $i-1$, выведем соответствующие равенства для i, $1 < i < k$. Используя явный вид (1.5) решения системы (1.1), записываем его значение к моменту $i\varepsilon$:

$$z(i\varepsilon) = e^{i\varepsilon C}z^0 - \int\limits_0^{i\varepsilon} e^{(i\varepsilon - s)C}\Big(u(s) - v(s)\Big)\,ds.$$

После несложных преобразований получаем:

$$z(i\varepsilon) - e^{i\varepsilon C}\Bigg(z^0 - g^1 - g^2 - \ldots - g^i + g^1 + \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds + g^2 + \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds + \ldots$$

$$\ldots + g^{i-1} + \int\limits_{(i-2)\varepsilon}^{(i-1)\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds - \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-sC}u^{(1)}(s)\,ds - \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} e^{-sC}u^{(2)}(s)\,ds + \int\limits_{2\varepsilon}^{3\varepsilon} e^{-sC}u^{(3)}(s)\,ds + \ldots$$

$$\ldots + \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC}u^{(i)}(s)\,ds\Bigg) \in e^{i\varepsilon C}\Bigg(\int\limits_0^{(i-1)\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds + g^i + \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds\Bigg). \tag{1.9}$$

Отсюда в силу условия A имеем

$$g^i + \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds \in g^i + \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC}Q\,ds \subset \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC}P\,ds \subset \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds + \int\limits_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} e^{-sC}P\,ds. \tag{1.10}$$

Таким образом, из (1.9) и (1.10) следует, что существует допустимое управление $u^{(i+1)}(s) \in P$, $i\varepsilon \leqslant s \leqslant (i+1)\varepsilon$ такое, что:

$$z(i\varepsilon) - e^{i\varepsilon C}\left(z^0 - g^1 - g^2 - \ldots - g^i - \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-sC}u^{(1)}(s)\,ds\right) \in$$

$$\in e^{i\varepsilon C}\Bigg(\int\limits_0^{i\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds + \int\limits_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} e^{-sC}u^{(i+1)}(s)\,ds\Bigg),$$

$$g^i + \int\limits_{(i-1)\varepsilon}^{i\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds \in \int\limits_0^{i\varepsilon} e^{-\tau C}\,\overline{M}(s)\,ds + \int\limits_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} e^{-sC}u^{(i+1)}(s)\,ds.$$

Если повторить все рассуждения для случая k, то из (1.9) и (1.10) получаем

$$z(k\varepsilon) - e^{k\varepsilon C}\left(z^0 - g^1 - g^2 - \ldots - g^k - \int\limits_0^{\varepsilon} e^{-sC}u^{(1)}(s)\,ds\right) = e^{k\varepsilon C}\Bigg(g^k + \int\limits_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{-sC}v(s)\,ds\Bigg) \in$$

$$\in e^{k\varepsilon C}\Bigg(g^k+\int\limits_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{-sC}Q\,ds\Bigg)\subset e^{k\varepsilon C}\Bigg(\int\limits_{0}^{k\varepsilon} e^{-\tau C}\;\overline{M}(s)\,ds+\int\limits_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} e^{-sC}P\,ds\Bigg).$$

Из последнего включения и равенства (1.7) имеем

$$z(\tau)\in\int\limits_0^{\tau}\overline{M}(s)\,ds-\int\limits_0^{\varepsilon}e^{(\tau-s)C}P\,ds+\int\limits_{(k-1)\varepsilon}^{\tau}e^{(\tau-s)C}P\,ds.$$

Отсюда, учитывая то, что $\overline{M}(\cdot)\in\Gamma(M)$, и неравенства (1.6), получаем

$$z(\tau)\in M_\alpha.$$

Этим заканчивается доказательство теоремы. □

2. Задача II

2.1. Вспомогательные построения. Через A обозначим дифференциальный оператор

$$A\varphi=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\Big),\ x\in\Omega, \tag{2.1}$$

где функции $a_{ij}(x)\in L^p(\Omega)$, $p\geqslant 1$ удовлетворяют условиям:

1. $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$, $i,j=1,\ldots,n$, $x\in\overline{\Omega}$;
2. существует положительная константа γ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\gamma\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2, \tag{2.2}$$

для любых $x\in\overline{\Omega}$ и вещественных чисел $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\neq 0$.

Неравенство (2.2) называется *условием равномерной эллиптичности* оператора A. В качестве области определения оператора A берется пространство $C^2(\overline{\Omega})$ дважды непрерывно дифференцируемых в Ω и непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций.

Определение 2.1. Пусть $\varphi(\cdot)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)$ — функция, не равная нулю. Число λ, при котором имеет место равенство

$$-\int\limits_{\Omega}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j}\,dx=\lambda\int\limits_{\Omega}\varphi(x)\psi(x)dx,$$

для произвольных функций $\psi(\cdot)\in\mathring{W}_2^1(\Omega)$, называется *собственным значением*, а $\varphi(\cdot)$ — *собственной функцией*, соответствующей λ, следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned}&A\varphi(x)=\lambda\varphi(x),\ x\in\Omega,\\&\varphi(x)=0,\ x\in\partial\Omega.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ — подпространство $W_2^1(\Omega)$, в котором плотным множеством является множество гладких функций, равных нулю вблизи $\partial\Omega$, а $W_2^1(\Omega)$ — гильбертово пространство, состоящее из элементов пространства $L_2(\Omega)$, имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные φ_{x_i}, $i=1,\ldots,n$.

Поскольку задача однородна, то можно считать

$$\int\limits_{\Omega}\varphi^2(x)dx=1.$$

Можно показать, что оператор (2.1) имеет дискретный спектр [6], то есть:

1. Существует счетная система собственных значений $\{\lambda_k\}$ краевой задачи (2.3) такая, что

$$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n\leqslant\ldots,\ \lambda_n\to\infty,\ n\to\infty;$$

2. Каждому собственному значению λ_k соответствует конечное число собственных функций $\varphi_k(x)$ таких, что $\int\limits_\Omega \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{ij}$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j; \end{cases}$$

3. Система всех собственных функций $\{\varphi_k\}$ полна (замкнута) в пространстве $L_2(\Omega)$, т. е. любую функцию $f(\cdot)$ из пространства $L_2(\Omega)$ можно представить в единственном виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\varphi_k(x),\ x \in \Omega, \tag{2.4}$$

где равенство понимается в смысле

$$\int\limits_\Omega \left[f(x) - \sum_{k=1}^{N} f_k\varphi_k(x)\right]^2 dx \to 0,\ N \to \infty.$$

Коэффициенты Фурье f_k ряда (2.4) определяются формулой

$$f_k = \int\limits_\Omega f(x)\varphi_k(x)dx,$$

а сам ряд (2.4) называется *рядом Фурье* функции $f(x)$. При соответствующих условиях на функции $a_{ij}(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$, формула Грина записывается в следующем виде [6]:

$$\int\limits_\Omega \Big(\psi A\varphi(x) - \varphi(x)A\psi\Big)dx = 0. \tag{2.5}$$

2.2. Предположения и вспомогательные утверждения. Рассмотрим следующую задачу управления теплообменом [3]:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Au(x,t) = F(x,t,\mu),\ \ 0 < t \leqslant T,\ \ x \in \Omega \tag{2.6}$$

с граничным и начальным условиями

$$u(x,t) = 0,\ \ 0 \leqslant t \leqslant T,\ \ x \in \partial\Omega, \tag{2.7}$$

$$u(x,0) = u^0(x),\ \ x \in \Omega. \tag{2.8}$$

Здесь $u = u(t,x)$ — неизвестная функция, T — произвольное положительное число, $F(x,t,\mu)$ и $u^0(\cdot)$ — заданные функции своих аргументов, а μ — управляющий параметр; функцией F определяется общая задача об управлении с импульсом.

Обобщенным решением краевой задачи (2.6)–(2.8) на отрезке $[0,T]$ называется функция $u(\cdot,\cdot) \in W_2^{1,1}(\Omega\times[0,T])$, удовлетворяющая тождеству

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x_i}\frac{\partial \psi(x,\tau)}{\partial x_j}\,dx - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega u(x,\tau)\frac{\partial\psi(x,\tau)}{\partial\tau}dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega u(x,t)\psi(x,t)dx - \int\limits_\Omega u(x,0)\psi(x,0)dx = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega F(x,\tau,\mu)\psi(x,\tau)dx.$$

при любых $t \in [0,T]$, $\psi(\cdot,\cdot) \in W_2^{1,1}(\Omega\times[0,T])$ (см. [3, 6]).

Решение задачи (2.6)–(2.8) формально представим в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(x). \tag{2.9}$$

Для нахождения функций $u_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \ldots, \infty$ умножаем (2.6) на функцию $\varphi_k(x)$, затем проинтегрируем полученные тождества по области Ω. Тогда имеем следующие тождества:

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Au(x,t) - F(x,t,\mu) \Big) \varphi_k(x) dx \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{2.10}$$

Согласно формуле (2.5), при $\psi = \varphi_k(x)$, $\varphi(x) = u(x,t)$, получаем

$$\int\limits_{\Omega} \varphi_k(x) Au(x,t) dx = \int\limits_{\Omega} u(x,t) A\varphi_k(x) dx. \tag{2.11}$$

Но по определению функций $u(x,t)$, $\varphi_k(x)$ с учетом (2.3) имеем

$$A\varphi_k(x) = \lambda_k \varphi_k(x), \ x \in \Omega.$$

Поэтому из (2.11) получаем

$$\int\limits_{\Omega} \varphi_k(x) Au(x,t) dx = \lambda_k u_k(t). \tag{2.12}$$

Теперь, учитывая то, что

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \varphi_k(x) dx = \frac{du_k(t)}{dt},$$

из формул (2.10) и (2.12) имеем

$$\dot{u}_k(t) + \lambda_k u_k(t) = \int\limits_{\Omega} F(x,t,\mu) \varphi_k(x) dx, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

Так как функция (2.9) должна удовлетворять начальному условию $u(x,0) = u^0(x)$, то

$$u_k(0) = u_k^0 = \int\limits_{\Omega} u^0(x) \varphi_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Имея это в виду из (2.13) находим

$$u_k(t) = e^{-\lambda_k t} u_k^0 + \int\limits_0^t e^{-\lambda_k (t-\tau)} \int\limits_{\Omega} F(x,t,\mu) \varphi_k(x) dx d\tau, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

Таким образом, (2.9) и (2.14) на отрезке $[0,\, T]$ определяют формальное решение задачи (2.6)–(2.8) в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_k t} u_k^0 + \int\limits_0^t e^{-\lambda_k (t-\tau)} \int\limits_{\Omega} F(x,t,\mu) \varphi_k(x) dx d\tau \right] \varphi_k(x). \tag{2.15}$$

2.3. Определения и основные результаты. Пусть $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$, $t_0 > 0$ — последовательность моментов времени, занумерованных в порядке возрастания, без конечных точек сгущения.

Предположим, что преследователь может воздействовать на систему (2.6) только в моменты $\{t_i\}$ и его воздействия имеют импульсный характер, что выражается при помощи дельта-функции Дирака [3, 7]:

$$F(x,t,\mu(\cdot)) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(x) \delta(t - t_i), \; x \in \Omega, t \geqslant 0. \tag{2.16}$$

Предположим также, что управление $\mu(\cdot)$ представляет собой измеримую функцию.

Определение 2.2. Функцию $\mu(\cdot)$, удовлетворяющую условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Bigg(\int\limits_{\Omega} \mu(\xi) \varphi_k(\xi) ds \Bigg)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \leqslant \rho^2,$$

где ρ — некоторая положительная константа, μ_k — коэффициенты Фурье функции $\mu(\cdot)$ по системе $\{\varphi_k\}$, назовем *допустимым управлением*.

Определение 2.3 (см. [7,21,22,26]). Многозначное отображение $W:[0,T]\to 2^{\mathbb{R}}$, где $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$, называется *сильно инвариантным* на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8), если для любых $\langle u^0(\cdot)\rangle\in W(0)$ и допустимых $\mu(\cdot)$ выполняется включение $\langle u(\cdot,t)\rangle\in W(t)$ при всех $0<t\leqslant T$, где $\langle\,\rangle$ — соответствующая норма, $u(x,t)$ — соответствующее решение задачи (2.6)–(2.8).

Определение 2.4. Многозначное отображение $W:[0,T]\to 2^{\mathbb{R}}$, где $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$, называется *слабо инвариантным* на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8), если для любого $\langle u^0(\cdot)\rangle\in W(0)$ существует допустимое управление $\mu(\cdot)$ такое, что $\langle u(\cdot,t)\rangle\in W(t)$ при всех $0<t\leqslant T$.

В данном пункте исследуются сильная и слабая инвариантность отображения вида

$$W(t)=[0,b],\ \ 0\leqslant t\leqslant T,$$

где b — положительная константа.

Дальнейшей нашей целью является нахождение такой связи между параметрами T,b,ρ и λ_i, чтобы обеспечить сильную или слабую инвариантность отображения $W(t)$ на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8).

Обозначим

$$N(t)=\max\{i\in N\cup\{0\}:t_i\leqslant t\leqslant T\}.$$

А. Случай $\langle u(\cdot,t)\rangle=\|u(\cdot,t)\|=\|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)}$, $0\leqslant t\leqslant T$. Здесь $\|u(\cdot,t)\|^2=\int\limits_{\Omega}|u(\xi,t)|^2\,d\xi=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k^2(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $u_k(\cdot)$ — коэффициенты Фурье функции $u(\cdot,\cdot)$ по системе $\{\varphi_k(\cdot)\}$.

Тогда из (2.15) и (2.16) следует

$$||u(\cdot,t)||^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_k t}u_k^0+\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=0}^{N(t)}\mu(\xi)\delta(\tau-t_i)\varphi_k(\xi)d\xi d\tau\right]^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_k t}u_k^0+\mu_k\sum_{i=0}^{N(t)}\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\delta(\tau-t_i)d\tau\right]^2,\ t\in[0,T]. \tag{2.17}$$

Теорема 2.1.

1°. *Пусть* $t_0>T$, *тогда при любом* $\rho\geqslant 0$ *многозначное отображение* $W(t)$ *сильно инвариантно на отрезке* $[0,T]$ *относительно задачи* (2.6)–(2.8).

2°. *Пусть* $t_0\leqslant T$. *Если* $\rho\leqslant b\cdot\left(e^{\lambda_1 t_0}-1\right)\Big/\sum\limits_{i=0}^{N(T)}e^{\lambda_1 t_i}$, *то многозначное отображение* $W(t)$ *сильно инвариантно на отрезке* $[0,T]$ *относительно задачи* (2.6)–(2.8).

Доказательство. Покажем, что отображение $W(t)$ сильно инвариантно на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8). Пусть $u^0(\cdot)$ — произвольное начальное положение с условием $\|u^0(\cdot)\|\leqslant b$, а $\mu(\cdot)$ — произвольное допустимое управление.

1°. Допустим, $t_0>T$. Тогда из (2.17) следует

$$||u(\cdot,t)||^2=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2\lambda_k t}|u_k^0|^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}e^{-2\lambda_1 t}|u_k^0|^2\leqslant b^2.$$

2°. Допустим, $t_0\leqslant T$ и $\rho\leqslant b\cdot\left(e^{\lambda_1 t_0}-1\right)\Big/\sum\limits_{i=0}^{N(T)}e^{\lambda_1 t_i}$.

Пусть $t\in[0,t_0)$. Тогда можно показать аналогично 1°, что $||u(\cdot,t)||\leqslant b$.

Пусть $t\in[t_0,T]$. Тогда

$$||u(\cdot,t)||^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_k t}u_k^0+\mu_k\sum_{i=0}^{N(t)}\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\delta(t-t_i)d\tau\right]^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-\lambda_k t}u_k^0+\mu_k\sum_{i=0}^{N(t)}e^{-\lambda_k(t-t_i)}\right]^2\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-2\lambda_k t}|u_k^0|^2 + 2e^{-\lambda_k t}|u_k^0||\mu_k|\sum_{i=0}^{N(t)} e^{-\lambda_k(t-t_i)} + |\mu_k|^2\left(\sum_{i=0}^{N(t)} e^{-\lambda_k(t-t_i)}\right)^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant e^{-2\lambda_1 t}\left[\sum_{k=1}^{\infty}|u_k^0|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|u_k^0||\mu_k|\sum_{i=0}^{N(t)} e^{\lambda_1 t_i} + \sum_{k=1}^{\infty}|\mu_k|^2\Big(\sum_{i=0}^{N(t)} e^{\lambda_1 t_i}\Big)^2\right].$$

Теперь, применяя неравенство Коши—Буняковского, получим из среднего слагаемого

$$||u(\cdot,t)||^2 \leqslant e^{-2\lambda_1 t}\left[b^2 + 2b\rho\sum_{i=0}^{N(t)} e^{\lambda_1 t_i} + \rho^2\Big(\sum_{i=0}^{N(t)} e^{\lambda_1 t_i}\Big)^2\right] = e^{-2\lambda_1 t}\left[b + \rho\sum_{i=0}^{N(t)} e^{\lambda_1 t_i}\right]^2. \qquad (2.18)$$

Следовательно, $||u(\cdot,t)||^2 \leqslant b^2$. Это означает, что $W(t)$, $t \in [0,T]$ сильно инвариантно относительно задачи (2.6)–(2.8).

Теорема 2.1 доказана. □

Примечание 2.1. Можно показать, что многозначное отображение $W(t)$ всегда слабо инвариантно на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8).

Действительно, для любых $||u^0(\cdot)|| \in W(0)$ при $\mu(t) = 0$, $t \geqslant 0$, имеем $||u(\cdot,t)|| \in W(t)$ для всех $0 < t \leqslant T$.

Б. Случай $\langle u(\cdot,\cdot)\rangle = \|u(\cdot,\cdot)\| = \|u(\cdot,\cdot)\|_{L_2(\Omega\times[0,T])}$. Здесь $\|u(\cdot,\cdot)\|^2 = \int\limits_0^T ||u(\cdot,t)||^2 dt = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^T u_k^2(t)dt$.

Теорема 2.2.

1°. *Пусть* $t_0 > T$ *и* $2\lambda_1 \geqslant 1$, *тогда при любом* $\rho \geqslant 0$ *многозначное отображение* $W(t)$ *сильно инвариантно на отрезке* $[0,T]$ *относительно задачи* (2.6)–(2.8).

2°. *Пусть* $t_0 \leqslant T$ *и* $\rho \leqslant b\cdot\left(\sqrt{\dfrac{2\lambda_1}{1-e^{-2\lambda_1 T}}} - 1\right)\Big/\sum\limits_{i=0}^{N(T)} e^{\lambda_1 t_i}$, *тогда многозначное отображение* $W(t)$ *сильно инвариантно на отрезке* $[0,T]$ *относительно задачи* (2.6)–(2.8).

Доказательство. 1°. Пусть $t_0 > T$ и $2\lambda_1 \geqslant 1$. Из (2.17) следует

$$||u(\cdot,\cdot)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T e^{-2\lambda_k t}|u_k^0|^2 dt \leqslant \frac{1-e^{-2\lambda_1 T}}{2\lambda_1}\cdot b^2 \leqslant b^2.$$

2°. Пусть $t_0 \leqslant T$ и $\rho \leqslant b\cdot\left(\sqrt{\dfrac{2\lambda_1}{1-e^{-2\lambda_1 T}}} - 1\right)\Big/\sum\limits_{i=0}^{N(T)} e^{\lambda_1 t_i}$. Из (2.18) вытекает

$$||u(\cdot,\cdot)||^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T\left[e^{-\lambda_k t}u_k^0 + \mu_k\Big(\sum_{i=0}^{N(t)}\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}\delta(t-t_i)d\tau\Big)\right]^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T e^{-2\lambda_1 t}\left[b + \rho\sum_{i=0}^{N(t)} e^{\lambda_1 t_i}\right]^2 dt \leqslant \frac{1-e^{-2\lambda_1 T}}{2\lambda_1}\left[b + \rho\sum_{i=0}^{N(T)} e^{\lambda_1 t_i}\right]^2 \leqslant b^2.$$

Следовательно, многозначное отображение $W(t)$ сильно инвариантно на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8).

Теорема 2.2 доказана. □

Примечание 2.2. Как и в примечании 2.1, можно показать, что многозначное отображение $W(t)$ всегда слабо инвариантно на отрезке $[0,T]$ относительно задачи (2.6)–(2.8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азамов А., Саматов Б. Т.* О модифицированном третьем методе в задаче преследования// В сб.: «Неклассические задачи математической физики». — Ташкент: Фан, 1985. — С. 174–184.
2. *Гусейнов Х. Г., Ушаков В. Н.* Сильно и слабо инвариантные множества относительно дифференциального включения// Докл. АН СССР. — 1988. — *303*, № 4. — С. 794–796.
3. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
5. *Мезенцев А. В.* О некотором классе дифференциальных игр// Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1971. — № 6. — С. 3–7.
6. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977.
7. *Мустапокулов Х. Я.* О некоторой задаче инвариантности постоянного многозначного отображения в задаче теплопроводности с импульсным управлением// Респ. науч. конф. с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы динамических систем и их приложения». — Ташкент, 2017. — С. 215–216.
8. *Никольский М. С.* Пример дифференциальной игры преследования, в которой времени первого поглощения недостаточно для осуществления поимки// В сб.: «Теория оптимальных решений. Вып. 2». — Киев: Изд-во ИК АН УССР, 1969. — С. 57–60.
9. *Никольский М. С.* Об одном прямом методе решения линейных дифференциальных игр преследования—убегания// Мат. заметки. — 1983. — *33*, № 6. — С. 885–891.
10. *Никольский М. С.* Первый прямой метод Л. С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: МГУ, 1984.
11. *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования// Мат. сб. — 1980. — *112*, № 3. — С. 307–331.
12. *Пшеничный Б. Н.* Линейные дифференциальные игры// Автомат. и телемех. — 1968. — *1*. — С. 65–78.
13. *Пшеничный Б. Н., Сагайдак М. И.* О дифференциальных играх с фиксированным временем// Кибернетика. — 1970. — № 2. — С. 54–63.
14. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями// Докл. АН СССР. — 1981. — *256*, № 3. — С. 530–535.
15. *Реттиев Н. С.* Инвариантные множества систем управления// Дисс. к.ф.-м.н. — Ленинград, 1979.
16. *Сатимов Н.* К задаче преследования в линейных дифференциальных играх// Дифф. уравн. — 1973. — *9*, № 11. — С. 2000–2009.
17. *Сатимов Н.* О задаче преследования по позиции в дифференциальных играх// Докл. АН СССР. — 1976. — *229*, № 4. — С. 808–811.
18. *Сатимов Н. Ю., Азамов А.* К задаче избежания столкновений в нелинейных системах// Докл. АН УзССР. — 1974. — № 6. — С. 3–5.
19. *Тухтасинов М.* Линейная дифференциальная игра преследования с импульсными и интегрально-ограниченными управлениями игроков// Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2016. — *22*, № 3. — С. 273–282.
20. *Тухтасинов М.* Линейная дифференциальная игра преследования с импульсным управлением и линейным интегральным ограничением на управления игроков// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прилож. — 2017. — *143*. — С. 24–39.
21. *Тухтасинов М., Ибрагимов У.* Об инвариантных множествах при интегральном ограничении на управления// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2011. — № 8. — С. 69–76.
22. *Тухтасинов М., Мустапокулов Х. Я.* Об инвариантных множествах при геометрическом и интегральном ограничениях// Узб. мат. ж. — 2011. — № 3. — С. 161–168.
23. *Фазылов А. З.* Достаточные условия оптимальности для задачи выживания// Прикл. мат. мех. — 1997. — *61*, № 3. — С. 186–188.
24. *Чикрий А. А., Раппопорт И. С.* О достаточных условиях разрешимости игровых задач сближения в классе стробоскопических стратегий// Теор. оптим. рiшень. — 2005. — № 4. — С. 49–55.
25. *Feuer A., Heymann M.* Ω-invariance in control systems with bounded controls// J. Math. Anal. Appl. — 1976. — *53*. — С. 266–276.
26. *Tukhtasinov M., Ibragimov G. I., Mamadaliev N. O.* On an invariant set in the heat conductivity problem with time lag// Abstr. Appl. Anal. — 2013. — ID 108482.

М. Тухтасинов

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,

Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4

E-mail: mumin51@mail.ru

Х. Я. Мустапокулов
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: m_hamdam@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-124-136 UDC 517.977

ε-Positional Strategies in the Theory of Differential Pursuit Games and the Invariance of a Constant Multivalued Mapping in the Heat Conductivity Problem

© 2019 **M. Tukhtasinov, Kh. Ya. Mustapokulov**

Abstract. In this paper, we consider two problems. In the first problem, we prove that if the assumption from the paper [1] and one additional condition on the parameters of the game hold, then the pursuit can be finished in any neighborhood of the terminal set. To complete the game, an ε-positional pursuit strategy is constructed.

In the second problem, we study the invariance of a given multivalued mapping with respect to the system with distributed parameters. The system is described by the heat conductivity equation containing additive control terms on the right-hand side.

REFERENCES

1. A. Azamov and B. T. Samatov, "O modifitsirovannom tret'em metode v zadache presledovaniya" [On the modified third method in the pursuit problem], In: *Neklassicheskie zadachi matematicheskoy fiziki* [Nonclassical Problems of Mathematical Physics], Fan, Tashkent, 1985, pp. 174–184 (in Russian).
2. Kh. G. Guseynov and V. N. Ushakov, "Sil'no i slabo invariantnye mnozhestva otnositel'no differentsial'nogo vklyucheniya" [Strongly and weakly invariant sets with respect to differential inclusion], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1988, **303**, No. 4, 794–796 (in Russian).
3. A. I. Egorov, *Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami* [Optimal Control of Heat and Diffusion Processes], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
4. N. N. Krasovskiy and A. I. Subbotin, *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional Differential Games], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
5. A. V. Mezentsev, "O nekotorom klasse differentsial'nykh igr" [On some class of differential games], *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibern.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Techn. Cybern.], 1971, No. 6, 3–7 (in Russian).
6. S. G. Mikhlin, *Lineynye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Linear Partial Differential Equations], Vysshaya shkola, Moscow, 1977 (in Russian).
7. Kh. Ya. Mustapokulov, "O nekotoroy zadache invariantnosti postoyannogo mnogoznachnogo otobrazheniya v zadache teploprovodnosti s impul'snym upravleniem" [On some invariance problem for constant multivalued mapping in the heat conduction problem with impulse control], *Resp. Sci. Conf. with foreign particip. "Actual Problems of Dynamical Systems and Their Applications,"* Tashkent, 2017, pp. 215–216 (in Russian).
8. M. S. Nikol'skiy, "Primer differentsial'noy igry presledovaniya, v kotoroy vremeni pervogo pogloshcheniya nedostatochno dlya osushchestvleniya poimki" [An example of differential pursuit game where the time of first absorption is not sufficient for capturing], In: *Teoriya optimal'nykh resheniy. Vyp. 2* [Theory of Optimal Solutions. Iss. 2], IK AN USSR, Kiev, 1969, pp. 57–60 (in Russian).
9. M. S. Nikol'skiy, "Ob odnom pryamom metode resheniya lineynykh differentsial'nykh igr presledovaniya—ubeganiya" [On one direct method of solution for linear differential pursuit–escape games], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1983, **33**, No. 6, 885–891 (in Russian).
10. M. S. Nikol'skiy, *Pervyy pryamoy metod L. S. Pontryagina v differentsial'nykh igrakh* [The First Direct Pontryagin's Method in Differential Games], MSU, Moscow, 1984 (in Russian).
11. L. S. Pontryagin, "Lineynye differentsial'nye igry presledovaniya" [Linear differential pursuit games], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1980, **112**, No. 3, 307–331 (in Russian).

12. B. N. Pshenichnyy, “Lineynye differentsial’nye igry” [Linear differential games], *Avtomat. i telemekh.* [Automat. Telemech.], 1968, **1**, 65–78 (in Russian).
13. B. N. Pshenichnyy and M. I. Sagaydak, “O differentsial’nykh igrakh s fiksirovannym vremenem” [On differential games with fixed time], *Kibernetika* [Cybernetics], 1970, No. 2, 54–63 (in Russian).
14. B. N. Pshenichnyy, A. A. Chikriy and I. S. Rappoport, “Effektivnyy metod resheniya differentsial’nykh igr so mnogimi presledovatelyami” [An effective method of solution for differential games with many pursuers], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1981, **256**, No. 3, 530–535 (in Russian).
15. N. S. Rettiev, “Invariantnye mnozhestva sistem upravleniya” [Invariant sets of control systems], *Diss. k.f.-m.n.* [PhD Thesis], Leningrad, 1979 (in Russian).
16. N. Satimov, “K zadache presledovaniya v lineynykh differentsial’nykh igrakh” [To the pursuit problem in linear differential games], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1973, **9**, No. 11, 2000–2009 (in Russian).
17. N. Satimov, “O zadache presledovaniya po pozitsii v differentsial’nykh igrakh” [On the position pursuit problem in differential games], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1976, **229**, No. 4, 808–811 (in Russian).
18. N. Yu. Satimov and A. Azamov, “K zadache izbezhaniya stolknoveniy v nelineynykh sistemakh” [To the problem of avoiding collisions in nonlinear systems], *Dokl. AN UzSSR* [Rep. Acad. Sci. Uzbek SSR], 1974, No. 6, 3–5 (in Russian).
19. M. Tukhtasinov, “Lineynaya differentsial’naya igra presledovaniya s impul’snymi i integral’no-ogranichennymi upravleniyami igrokov” [Linear differential pursuit game with impulse and integrally bounded controls of players], *Tr. In-ta mat. i mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2016, **22**, No. 3, 273–282 (in Russian).
20. M. Tukhtasinov, “Lineynaya differentsial’naya igra presledovaniya s impul’snym upravleniem i lineynym integral’nym ogranicheniem na upravleniya igrokov” [Linear differential pursuit game with impulse control and integral restriction on the controls of players], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2017, **143**, 24–39 (in Russian).
21. M. Tukhtasinov and U. Ibragimov, “Ob invariantnykh mnozhestvakh pri integral’nom ogranichenii na upravleniya” [On invariant sets under the integral restriction on controls], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2011, No. 8, 69–76 (in Russian).
22. M. Tukhtasinov and Kh. Ya. Mustapokulov, “Ob invariantnykh mnozhestvakh pri geometricheskom i integral’nom ogranicheniyakh” [On invariant sets under geometric and integral restrictions], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek Math. J.], 2011, No. 3, 161–168 (in Russian).
23. A. Z. Fazylov, “Dostatochnye usloviya optimal’nosti dlya zadachi vyzhivaniya” [Sufficient conditions of optimality for the survival problem], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1997, **61**, No. 3, 186–188 (in Russian).
24. A. A. Chikriy and I. S. Rappoport, “O dostatochnykh usloviyakh razreshimosti igrovykh zadach sblizheniya v klasse stroboskopicheskikh strategiy” [On sufficient conditions of solvability for game problems of approach in the class of stroboscopic strategies], *Teor. optim. rishen’* [Theor. Optim. Solutions], 2005, No. 4, 49–55 (in Russian).
25. A. Feuer and M. Heymann, “Ω-invariance in control systems with bounded controls,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1976, **53**, 266–276.
26. M. Tukhtasinov, G. I. Ibragimov, and N. O. Mamadaliev, “On an invariant set in the heat conductivity problem with time lag,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2013, ID 108482.

M. Tukhtasinov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: mumin51@mail.ru

Kh. Ya. Mustapokulov
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: m_hamdam@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 1 (2019). С. 137–155

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-137-155 УДК 517.98

ЦИКЛИЧЕСКАЯ КОМПАКТНОСТЬ В БАНАХОВЫХ $C_\infty(Q)$-МОДУЛЯХ

© 2019 г. **В. И. ЧИЛИН, Ж. А. КАРИМОВ**

Аннотация. В данной работе мы изучаем класс дизъюнктно полных коммутативных унитарных регулярных алгебр $\mathcal{A}$ над произвольными полями. Мы вводим понятие паспорта $\Gamma(X)$ для точных регулярных дизъюнктно полных $\mathcal{A}$-модулей X, которое состоит из однозначно определенного разбиения единицы в булевой алгебре всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$ и из множества попарно различных кардинальных чисел. Мы доказываем, что $\mathcal{A}$-модули X и Y являются изоморфными тогда и только тогда, когда $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$. Далее мы изучаем банаховы $\mathcal{A}$-модули в случае, если $\mathcal{A} = C_\infty(Q)$ или $\mathcal{A} = C_\infty(Q) + i \cdot C_\infty(Q)$. Также мы устанавливаем отношение эквивалентности для всех норм в конечномерном (и, соответственно, σ-конечномерном) $\mathcal{A}$-модуле и доказываем $\mathcal{A}$-версию теоремы Рисса, которая дает критерий конечномерности (и σ-конечномерности, соответственно) банахова $\mathcal{A}$-модуля.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

С развитием бэровской теории $*$-алгебр и C^*-алгебр появилась возможность описать класс AW^*-алгебр, схожих с алгебрами фон Неймана с точки зрения их алгебраических и порядковых свойств [12] (см. также рецензию [7]). Одним из важнейших результатов в теории AW^*-алгебр является представление произвольной AW^*-алгебры $\mathcal{M}$ типа I в виде $*$-алгебры всех линейных ограниченных операторов, действующих в специальном банаховом модуле над центром $Z(\mathcal{M})$ алгебры $\mathcal{M}$ [14]. Банахова $Z(\mathcal{M})$-значная норма в данном модуле порождается скалярным произведением со значениями в коммутативной AW^*-алгебре $Z(\mathcal{M})$. Позднее такие модули стали называться *модулями Капланского—Гильберта* (МКГ).

Важными примерами бэровских $*$-алгебр являются алгебры $S(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M})$ всех измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана или к AW^*-алгебрам [9, 17–19, 22]. Если $\mathcal{M}$ является алгеброй фон Неймана, то центр $Z(LS(\mathcal{M}))$ алгебры $LS(\mathcal{M})$ отождествляется с алгеброй $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех классов измеримых совпадающих почти всюду комплексных функций, определенных на некотором махарамовском измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) (см. [5, п. 2.1, 2.2]). В случае же если $\mathcal{M}$ является AW^*-алгеброй, то $Z(LS(\mathcal{M}))$ — комплексная $*$-алгебра $C_\infty(Q, \mathbb{C}) = C_\infty(Q) \oplus i \cdot C_\infty(Q)$, где Q — стоуновский компакт, отвечающий булевой алгебре центральных проекторов из $\mathcal{M}$ [7]. Возникает естественный вопрос (схожий с вопросом в работе И. Капланского [13] относительно AW^*-алгебр) о возможности представления $*$-алгебр $LS(\mathcal{M})$ в виде $*$-алгебр всех линейных $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$-ограниченных (или $C_\infty(Q, \mathbb{C})$-ограниченных) операторов, действующих в соответствующих банаховых модулях над $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ или $C_\infty(Q, \mathbb{C})$, в случае если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана (или AW^*-алгебра, соответственно) типа I. Для решения этой задачи необходимо построить подходящую теорию МКГ над алгебрами $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $C_\infty(Q, \mathbb{C})$. В работе [2] приводится решение этой задачи для вещественной алгебры $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Там же, в частности, приведено разложение МКГ над $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ в прямую сумму однородных МКГ. Для регулярных дизъюнктно полных модулей над алгеброй $C_\infty(Q)$ подобное разложение в прямую сумму строго γ-однородных модулей приводится в работе [8] (см. определения ниже в разделе 2).

Алгебра $\mathcal{A} = C_\infty(Q)$ (или $\mathcal{A} = C_\infty(Q, \mathbb{C})$, соответственно) является примером коммутативной унитарной регулярной алгебры над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ (или комплексных чисел $\mathbb{C}$, соответственно). Для данной алгебры справедливо следующее предположение о дизъюнктной полноте: для любого множества $\{a_i\}_{i\in I}$ попарно дизъюнктных элементов в $\mathcal{A}$ существует элемент $a \in \mathcal{A}$ такой, что $as(a_i) = a_i$ для всех $i \in I$, где $s(a_i)$ — это носитель элемента a_i. Данное свойство $C_\infty(Q)$ играет ключевую роль в классификации регулярных дизъюнктно полных $C_\infty(Q)$-модулей [8]. Таким образом, будет довольно естественным рассмотреть класс дизъюнктно полных коммутативных унитарных регулярных алгебр $\mathcal{A}$ над произвольными полями и установить различные варианты структурных теорем для модулей над такими алгебрами. В разделе 3 будет приведено решение этой задачи. Мы раскладываем такой $\mathcal{A}$-модуль в прямую сумму строго однородных $\mathcal{A}$-модулей. После мы определяем паспорт $\Gamma(X)$ точного регулярного дизъюнктно полного $\mathcal{A}$-модуля X, состоящего из однозначно определенного разбиения единицы в булевой алгебре идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$ и множества попарно различных кардинальных чисел. Уже было доказано, что равенство паспортов $\Gamma(X)$ и $\Gamma(Y)$ является необходимым и достаточным условием для изоморфизма $\mathcal{A}$-модулей X и Y.

В разделе 4 мы изучаем банаховы $C_\infty(Q)$-модули и устанавливаем отношение эквивалентности для всех норм в конечномерном $C_\infty(Q)$-модуле. Кроме того, из уже доказанного варианта теоремы Рисса следует критерий конечномерности нормированного $C_\infty(Q)$-модуля.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная алгебра над полем K с единицей $\mathbf{1}$, а $\nabla = \{e \in \mathcal{A} : e^2 = e\}$ — множество всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$. Для всех $e, f \in \nabla$ будем писать $e \leqslant f$, если $ef = e$. Хорошо известно (см., например, [16, Prop. 1.6]), что данное бинарное отношение является частичным порядком на ∇, к тому же, ∇ — это булева алгебра относительно этого порядка. Более того, мы знаем, что $e \vee f = e + f - ef$, $e \wedge f = ef$, $Ce = \mathbf{1} - e$, где Ce — это дополнение e в ∇.

Коммутативная унитарная алгебра $\mathcal{A}$ называется *регулярной*, если соблюдены следующие эквивалентные условия [6, §2, п. 4]:

1. Для любого $a \in \mathcal{A}$ существует $b \in \mathcal{A}$ такой, что $a = a^2 b$;
2. Для любого $a \in \mathcal{A}$ существует $e \in \nabla$ такой, что $a\mathcal{A} = e\mathcal{A}$.

Регулярная алгебра $\mathcal{A}$ есть регулярная полугруппа относительно операции умножения [11, ч. I, § 1.9]. Из того, что все идемпотентные элементы в коммутативной алгебре $\mathcal{A}$ попарно коммутируют, следует, что $\mathcal{A}$ — коммутативная инверсивная полугруппа, т. е. для любого $a \in \mathcal{A}$ существует единственный элемент $i(a) \in \mathcal{A}$, являющийся единственным решением системы: $a^2x = a$, $ax^2 = x$ (см. [11, ч I, § 1.9]). Элемент $i(a)$ называется инверсией элемента a. Очевидно, $ai(a) \in \nabla$ для любого $a \in \mathcal{A}$. Отображение $i : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ является биекцией и автоморфизмом (относительно произведения) в полугруппе $\mathcal{A}$. Кроме того, $i(i(a)) = a$ и $i(g) = g$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $g \in \nabla$.

Идемпотентный элемент $s(a) \in \nabla$ называется *носителем* элемента $a \in \mathcal{A}$, если $s(a)a = a$ и $ga = a$, $g \in \nabla$ влечет $s(a) \leqslant g$. Ясно, что $s(a) = ai(a) = s(i(a))$. В частности, $s(e) = e$ для любого $e \in \nabla$. Легко показать, что носители элементов имеют следующие свойства.

Предложение 2.1. *Пусть $a, b \in \mathcal{A}$, тогда*:

(i) $s(ab) = s(a)s(b)$, *в частности,* $ab = 0 \Leftrightarrow s(a)s(b) = 0$;
(ii) *если* $ab = 0$, *то* $s(a + b) = s(a) + s(b)$.

Элементы a и b из коммутативной унитарной регулярной алгебры $\mathcal{A}$ называются *дизъюнктными*, если $ab = 0$. Если булева алгебра ∇ всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$ полна, $a \in \mathcal{A}$ и $r(a) = \sup\{e \in \nabla : ae = 0\}$, то $s(a) = \mathbf{1} - r(a)$. В таком случае для любого разбиения единицы $\{e_i\}_{i\in I}$ в ∇, $a, b \in \mathcal{A}$ из равенств $ae_i = be_i$, $i \in I$ следует, что $r(a - b) = \mathbf{1}$, т. е. $a = b$.

Коммутативная унитарная регулярная алгебра $\mathcal{A}$ называется *дизъюнктно полной* (*l-полной*), если булева алгебра ее идемпотентных элементов полна, и для любого множества $\{a_i\}_{i\in I}$ попарно дизъюнктных элементов из $\mathcal{A}$ существует элемент $a \in \mathcal{A}$ такой, что $as(a_i) = a_i$ для всех $i \in I$. Элемент $a \in \mathcal{A}$ такой, что $as(a_i) = a_i$, $i \in I$, вообще говоря, не определяется однозначно. Однако равенство

$$a \sup_{i\in I} s(a_i) = b \sup_{i\in I} s(a_i)$$

всегда остается верным.

Приведем несколько примеров l-полных коммутативных регулярных алгебр.

1. Пусть Δ — произвольное множество, и K^Δ — декартово произведение Δ копий поля K, т. е. множество всех K-значных функций на Δ. Множество K^Δ является коммутативной унитарной регулярной алгеброй относительно поточечных алгебраических операций, и, сверх того, булева алгебра ∇ всех идемпотентных элементов из K^Δ является изоморфной дискретной булевой алгеброй всех подмножеств Δ. При этом ∇ — это полная булева алгебра. Если $\{a_j = (\alpha_q^{(j)})_{q\in\Delta}, j \in J\}$ — это семейство попарно дизъюнктных элементов из K^Δ, то, полагая $\Delta_j = \{q \in \Delta : \alpha_q^{(j)} \neq 0\}$, $j \in J$ и $a = (\alpha_q)_{q\in\Delta} \in K^\Delta$, где $\alpha_q = \alpha_q^{(j)}$ для любых $q \in \Delta_j$, $j \in J$, и $\alpha_q = 0$ для $q \in \Delta \setminus \bigcup\limits_{j\in J} \Delta_j$, мы получим, что $as(a_j) = a_j$ для всех $j \in J$. Следовательно, K^Δ есть l-полная алгебра.
2. Пусть ∇ — полная булева алгебра, и пусть $Q(\nabla)$ — стоуновский компакт, отвечающий ∇. Алгебра $C_\infty(Q(\nabla))$ всех непрерывных функций $a : Q(\nabla) \to [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ только на нигде не плотных множествах в $Q(\nabla)$, является l-полной коммутативной регулярной алгеброй [15, п. 1.4.2].

В случае когда ∇ — это полная дискретная булева алгебра, а Δ — это множество всех элементов из ∇, $C_\infty(Q(\nabla))$ является изоморфной алгебре $\mathbb{R}^\Delta$.

Комплексификация $C_\infty(Q(\nabla), \mathbb{C}) = C_\infty(Q(\nabla)) \oplus i \cdot C_\infty(Q(\nabla))$ алгебры $C_\infty(Q(\nabla))$ также является примером l-полной коммутативной регулярной алгебры над полем $\mathbb{C}$.

Последующие примеры дизъюнктно полных коммутативных регулярных алгебр суть вариации алгебр $C_\infty(Q(\nabla))$ для различных топологических полей, в частности, для поля $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел.

Пусть K — произвольное поле, а t — хаусдорфова топология на K. Если операции $\alpha \to (-\alpha)$, $\alpha \to \alpha^{-1}$, $(\alpha, \beta) \to \alpha + \beta$, $(\alpha, \beta) \to \alpha\beta$, $\alpha, \beta \in K$, непрерывны относительно заданной топологии, то поле (K, t) называется *топологическим* (см., например, [20, Ch. 20, § 165]).

Пусть (K, t) — топологическое поле, (X, τ) — произвольное топологическое пространство, и пусть $\nabla(X)$ — булева алгебра всех открыто-замкнутых подмножеств (X, τ). Будем говорить, что отображение $\varphi : (X, \tau) \to (K, t)$ является *почти непрерывным*, если существует плотное открытое множество U в (X, τ) такое, что сужение $\varphi|_U : U \to (K, t)$ отображения φ на подмножество U непрерывно на U. Множество всех почти непрерывных отображений мы обозначим через $AC(X, K)$.

Определим поточечные алгебраические операции на $AC(X, K)$:

$$(\varphi + \psi)(t) = \varphi(t) + \psi(t),$$

$$(\alpha\varphi)(t) = \alpha\varphi(t),$$

$$(\varphi \cdot \psi)(t) = \varphi(t)\psi(t)$$

для всех $\varphi, \psi \in AC(X, K)$, $\alpha \in K$, $t \in X$.

Так как пересечение двух плотных открытых множеств из (X, τ) также является плотным открытым множеством в (X, τ), то $\varphi + \psi$, $\varphi \cdot \psi \in AC(X, K)$ для любых $\varphi, \psi \in AC(X, K)$. Очевидно, $\alpha\varphi \in AC(X, K)$ для всех $\varphi \in AC(X, K)$, $\alpha \in K$. Можно легко проверить, что $AC(X, K)$ — коммутативная алгебра над полем K с единичным элементом $\mathbf{1}(t) = 1_K$, $t \in X$, где 1_K — это единичный элемент поля K. В этом случае, алгебра $C(X, K)$ всех непрерывных отображений из (X, τ) в (K, t) является подалгеброй в $AC(X, K)$.

Рассмотрим следующий идеал алгебры $AC(X, K)$:

$$I_0(X, K) = \{\varphi \in AC(X, K) : \text{ внутренность прообраза } \varphi^{-1}(0) \text{ плотна в } (X, \tau)\}.$$

Через $C_\infty(X, K)$ обозначим фактор-алгебру $AC(X, K)/I_0(X, K)$, а через

$$\pi : AC(X, K) \to AC(X, K)/I_0(X, K)$$

соответствующий канонический гомоморфизм.

Теорема 2.1. *Фактор-алгебра $C_\infty(X,K)$ является коммутативной унитарной регулярной алгеброй над полем K. Кроме того, если (X,τ) — стоуновский компакт, то алгебра $C_\infty(X,K)$ является дизъюнктно полной, а булева алгебра ∇ всех ее идемпотентов изоморфна булевой алгебре $\nabla(X)$.*

Доказательство. Так как $AC(X,K)$ — коммутативная унитарная алгебра над K, то $C_\infty(X,K)$ — также коммутативная унитарная алгебра над K с единичным элементом $\pi(\mathbf{1})$. Теперь покажем, что $C_\infty(X,K)$ является регулярной, т. е. для любого $\varphi \in AC(X,K)$ существует $\psi \in AC(X,K)$ такой, что $\pi^2(\varphi)\pi(\psi) = \pi(\varphi)$.

Фиксируем элемент $\varphi \in AC(X,K)$ и выбираем плотное открытое множество $U \in \tau$ таким, что сужение $\varphi|_U : U \to (K,t)$ непрерывно. В силу того, что $K \setminus \{0\}$ — открытое множество в (K,t), множество $V = U \cap \varphi^{-1}(K \setminus \{0\})$ открыто в (X,τ). Совершенно ясно, что множество $W = X \setminus \overline{V}^\tau$ также открыто в (X,τ), более того, $V \cup W$ — это плотное открытое множество в (X,τ).

Определим отображение $\psi : X \to K$ следующим образом: $\psi(t) = (\varphi(t))^{-1}$, если $t \in V$, и $\psi(t) = 0$, если $t \in X \setminus V$. Видим, что $\psi \in AC(X,K)$ и $\varphi^2\psi - \varphi \in I_0(X,K)$, т. е. $\pi^2(\varphi)\pi(\psi) = \pi(\varphi)$. Следовательно, алгебра $C_\infty(X,K)$ является регулярной.

Для любого открыто-замкнутого множества $U \in \nabla(X)$ его характеристическая функция χ_U принадлежит $AC(X,K)$, в этом случае $\pi(\chi_U)^2 = \pi(\chi_U^2) = \pi(\chi_U)$, т. е. $\pi(\chi_U)$ является идемпотентом в алгебре $C_\infty(X,K)$.

Предположим, что (X,τ) — стоуновский компакт, и покажем, что для любого идемпотентного элемента $e \in C_\infty(X,K)$ существует $U \in \nabla(X)$ такой, что $e = \pi(\chi_U)$.

Если $e \in \nabla$, то $e = \pi(\varphi)$ для некоторой $\varphi \in AC(X,K)$ и $\pi(\varphi) = e^2 = \pi(\varphi^2)$, т. е. $(\varphi^2 - \varphi) \in I_0(X,K)$. Следовательно, существует плотное открытое множество V в X такое, что $\varphi^2(t) - \varphi(t) = 0$ для всех $t \in V$. Обозначим через U плотное открытое множество из X такое, что сужение $\varphi|_U : U \to K$ непрерывно. Положим $U_0 = \varphi^{-1}(\{0\}) \cap (U \cap V)$, $U_1 = \varphi^{-1}(\{1_K\}) \cap (U \cap V)$. Из того, что $U_0 \cap U_1 = \varnothing, U_0 \cup U_1 = U \cap V \in \tau$, а множества U_0, U_1 замкнуты в $U \cap V$ относительно топологии, индуцированной (X,τ), следует, что $U_0, U_1 \in \tau$. Таким образом, множество $U_\varphi = \overline{U_1}$ принадлежит булевой алгебре $\nabla(X)$, и, кроме того, $U_\varphi \cap U_0 = \varnothing$.

Так как $U_0 \cup U_1 = U \cap V$ — это плотное открытое множество в (X,τ), а $\varphi(t) = \chi_{U_\varphi}(t)$ для всех $t \in U_0 \cup U_1$, отсюда следует, что $e = \pi(\varphi) = \pi(\chi_{U_\varphi})$. Следовательно, отображение $\Phi : \nabla(X) \to \nabla$, определяемое равенством $\Phi(U) = \pi(\chi_U)$, $U \in \nabla(X)$, является сюръекцией.

Более того, для $U, V \in \nabla(X)$ справедливы следующие равенства:

$$\Phi(U \cap V) = \pi(\chi_{U\cap V}) = \pi(\chi_U\chi_V) = \pi(\chi_U)\pi(\chi_V) = \Phi(U)\Phi(V),$$
$$\Phi(X \setminus U) = \pi(\chi_{X\setminus U}) = \pi(\mathbf{1} - \chi_U) = \Phi(X) - \Phi(U).$$

Помимо всего прочего, из равенства $\Phi(U) = \Phi(V)$ следует, что непрерывные отображения χ_U и χ_V совпадают на плотном множестве в X. Поэтому $\chi_U = \chi_V$, а именно $U = V$.

Тем самым, Φ является изоморфизмом между булевой алгеброй $\nabla(X)$ и булевой алгеброй ∇ всех идемпотентных элементов из $C_\infty(X,K)$, при этом ∇ — полная булева алгебра.

Наконец, для доказательства l-полноты алгебры $C_\infty(X,K)$ покажем, что для любого семейства $\{\pi(\varphi_i) : \varphi \in AC(X,K)\}_{i\in I}$ ненулевых попарно дизъюнктных элементов из $C_\infty(X,K)$ существует $\varphi \in AC(X,K)$ такой, что $\pi(\varphi)s(\pi(\varphi_i)) = \pi(\varphi_i)$ для всех $i \in I$. Для любого $i \in I$ выберем плотное открытое множество U_i таким, что сужение $\varphi_i|_{U_i}$ будет непрерывным, и положим $V_i = U_i \cap \varphi_i^{-1}(K \setminus \{0\})$, $i \in I$. Нетрудно доказать, что $s(\pi(\varphi_i)) = \Phi(\overline{V_i})$. В частности, $V_i \cap V_j = \varnothing$, когда $i \neq j$, $i,j \in I$ (см. утверждение 2.1). Определим отображение $\varphi : X \to K$ следующим образом: $\varphi(t) = \varphi_i(t)$, если $t \in V_i$, и $\varphi(t) = 0$, если $t \in X \setminus \left(\bigcup\limits_{i\in I} V_i\right)$. Очевидно, $\varphi \in AC(X,K)$ и $\pi(\varphi)s(\pi(\varphi_i)) = \pi(\varphi\chi_{\overline{V_i}}) = \pi(\varphi_i\chi_{\overline{V_i}}) = \pi(\varphi_i)$ для всех $i \in I$. □

Пусть $\mathcal{A}$ — дизъюнктно полная коммутативная регулярная алгебра, а ∇ — булева алгебра всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$. Пусть X — левый $\mathcal{A}$-модуль с алгебраическими операциями $x+y$ и $a \cdot x$, $x,y \in X$, $a \in \mathcal{A}$ (и пусть $X \neq \{0\}$). Так как алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна, левый $\mathcal{A}$-модуль X будет правым $\mathcal{A}$-модулем X, если мы положим $x \cdot a = a \cdot x$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $x \in X$. Следовательно, мы вправе предположить, что X — это $\mathcal{A}$-бимодуль, для которого справедливо $x \cdot a = a \cdot x$, $a \in \mathcal{A}$, $x \in X$. Далее $\mathcal{A}$-бимодуль X мы будем называть *$\mathcal{A}$-модулем*.

$\mathcal{A}$-модуль X называется *точным*, если для любого ненулевого $e \in \nabla$ существует $x \in X$ такой, что $ex \neq 0$. Ясно, что для точного $\mathcal{A}$-модуля X множество $X_e := eX$ является точным $\mathcal{A}_e$-модулем для любого $0 \neq e \in \nabla$, где $\mathcal{A}_e := e \cdot \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$-модуль X называется *регулярным*, если для любого $x \in X$ из условия $ex = 0$ для всех $e \in L \subset \nabla$ следует $(\sup L)x = 0$. В таком случае, для $x \in X$ идемпотент

$$s(x) = \mathbf{1} - \sup\{e \in \nabla : ex = 0\}$$

называется *носителем* элемента x. Ясно, что $s(x)x = x$ и $s(ax) = s(a)s(x)$ для всех $x \in X$, $a \in \mathcal{A}$. Отметим также, что, если X — регулярный $\mathcal{A}$-модуль, то X_e является регулярным $\mathcal{A}_e$-модулем для любого ненулевого $e \in \nabla$.

Будем говорить, что $\mathcal{A}$-модуль X является *дизъюнктно полным* (*l-полным*), если для любого множества $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ и для любого разбиения $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы булевой алгебры ∇ существует $x \in X$ такой, что $e_i x = e_i x_i$ для всех $i \in I$. В этом случае элемент x называется *перемешиванием* множества $\{x_i\}_{i\in I}$ относительно разбиения единицы $\{e_i\}_{i\in I}$ и обозначается как $\underset{i\in I}{\mathrm{mix}}(e_i x_i)$.

Пусть $\{x_i\}_{i\in I} \subset E \subset X$, а $\{e_i\}_{i\in I}$ есть разбиение единицы в ∇. Множество всех перемешиваний $\underset{i\in I}{\mathrm{mix}}(e_i x_i)$ называется *циклической оболочкой* множества E в X и обозначается как $\mathrm{mix}(E)$. Очевидно, вложение $E \subset \mathrm{mix}(E)$ всегда сохраняется. Если $E = \mathrm{mix}(E)$, то E называется *циклическим множеством* в X (ср. [4, п. 1.1.2]).

Таким образом, регулярный $\mathcal{A}$-модуль X является l-полным $\mathcal{A}$-модулем тогда и только тогда, когда X является циклическим множеством. В частности, в любом l-полном $\mathcal{A}$-модуле X его подмодуль X_e также является l-полным $\mathcal{A}_e$-модулем для любого ненулевого идемпотентного элемента e из $\mathcal{A}$.

Нам необходимы следующие свойства циклических оболочек множеств [10].

Предложение 2.2. *Пусть X — это l-полный $\mathcal{A}$-модуль, E — непустое подмножество в X, $a \in \mathcal{A}$. Тогда*:

(i) $\mathrm{mix}(aE) = a\mathrm{mix}(E)$;
(ii) $\mathrm{mix}(Y)$ — *l-полный $\mathcal{A}$-подмодуль в X для любого $\mathcal{A}$-подмодуля Y в X*;
(iii) *если U является изоморфизмом между $\mathcal{A}$-модулем X и $\mathcal{A}$-модулем Z, то Z — l-полный $\mathcal{A}$-модуль и* $\mathrm{mix}(U(E)) = U(\mathrm{mix}(E))$.

Пусть ∇ — произвольная полная булева алгебра. Для любого ненулевого элемента $e \in \nabla$ положим $\nabla_e = \{q \in \nabla : q \leqslant e\} = e \cdot \nabla$. Множество ∇_e является булевой алгеброй с единицей e относительно частичного порядка, индуцированного ∇.

Множество $B \subset \nabla$ называется *минорантным подмножеством* для ∇_e, если для любого ненулевого $q \in \nabla_e$ существует ненулевой $p \in B$ такой, что $p \leqslant q$. Нам потребуется следующее свойство полных булевых алгебр.

Теорема 2.2 (см. [15, п. 1.1.6]). *Если ∇ — полная булева алгебра, $0 \neq e \in \nabla$, а B — минорантное подмножество для ∇_e, то существует дизъюнктное подмножество $L \subset B$ такое, что* $\sup L = e$.

Булева алгебра называется *счетной* или *σ-конечной*, если любое семейство ненулевых попарно дизъюнктных элементов из ∇ не более чем счетно. Полная булева алгебра ∇ называется *мульти-σ-конечной*, если для любого ненулевого элемента $g \in \nabla$ существует $0 \neq e \in \nabla$ такой, что $e \leqslant g$, а булева алгебра ∇_e будет счетной. По теореме 2.2 мульти-σ-конечная булева алгебра ∇ всегда имеет такое разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы $\mathbf{1}$, что булева алгебра ∇_{e_i} будет σ-конечной для всех $i \in I$.

Воспользовавшись теоремой 2.2, получим следующие полезные свойства l-полных $\mathcal{A}$-модулей (доказательство этих свойств аналогично доказательству утверждения 2.4 из [8].)

Предложение 2.3. *Пусть X — это произвольный l-полный $\mathcal{A}$-модуль, а ∇ — полная булева алгебра всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$. Тогда*:

(i) *если X есть точный $\mathcal{A}$-модуль, то существует элемент $x \in X$ такой, что* $s(x) = \mathbf{1}$;
(ii) *если Y является l-полным $\mathcal{A}$-подмодулем регулярного $\mathcal{A}$-модуля X, и для любого ненулевого $e \in \nabla$ существует ненулевой $g_e \in \nabla$ такой, что $g_e \leqslant e$ и $g_e Y = g_e X$, то $Y = X$.*

Ниже приведем описание точного l-полного $\mathcal{A}$-модуля X в виде декартова произведения семейства точных l-полных $\mathcal{A}_{e_i}$-модулей, где $\{e_i\}_{i\in I}$ есть разбиение единицы в булевой алгебре ∇ всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$.

Рассмотрим декартово произведение

$$\prod_{i\in I} e_iX = \{\{y_i\}_{i\in I} : y_i \in e_iX\}$$

$\mathcal{A}$-подмодулей e_iX с покоординатными алгебраическими операциями. Совершенно ясно, что $\prod\limits_{i\in I} e_iX$ есть точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль.

Определим отображение $U : X \to \prod\limits_{i\in I} e_iX$, заданное с помощью $U(x) = \{e_ix\}_{i\in I}$. Очевидно, U является $\mathcal{A}$-линейным отображением из X на $\prod\limits_{i\in I} e_iX$. Если $U(x) = U(y)$, то $e_ix = e_iy$ для всех $i \in I$, и в силу регулярности $\mathcal{A}$-модуля X отсюда следует, что $x = y$.

Если $z = \{x_i\}_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} e_iX$, где $x_i \in e_iX \subset X$, $i \in I$, то l-полнота $\mathcal{A}$-модуля X влечет существование такого элемента $x \in X$, что $e_ix = e_ix_i = x_i$ для всех $i \in I$. Следовательно, $U(x) = z$, т. е. U — сюръекция.

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Если X — точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль, $\{e_i\}_{i\in I}$ — разбиение единицы в булевой алгебре ∇ всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$, то $\prod\limits_{i\in I} e_iX$ также есть точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль, а $U(x) = \{e_ix\}_{i\in I},\ x \in X,$ — изоморфизм между X и $\prod\limits_{i\in I} e_iX$.*

Пусть Y — непустое подмножество $\mathcal{A}$-модуля X. Нижеприведенный $\mathcal{A}$-подмодуль в X называется *$\mathcal{A}$-линейной оболочкой* подмножества Y:

$$\mathrm{Lin}(Y,\mathcal{A}) = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_iy_i : a_i \in \mathcal{A}, y_i \in Y, i = 1,\ldots,n,\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

если $\mathbb{N}$ является множеством всех натуральных чисел. Если X — l-полный $\mathcal{A}$-модуль, то в силу утверждения 2.2 (ii) $\mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(Y,\mathcal{A}))$ также является l-полным $\mathcal{A}$-подмодулем в X.

Множество $\{x_i\}_{i\in I}$ в $\mathcal{A}$-модуле X называется *$\mathcal{A}$-линейно независимым*, если для любых $a_1,\ldots,a_n \in \mathcal{A}$, $x_{i_1},\ldots,x_{i_n} \in \{x_i\}_{i\in I}$, $n \in \mathbb{N}$, из равенства $\sum\limits_{k=1}^{n} a_kx_{i_k} = 0$ следует, что $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Будем говорить, что $\mathcal{A}$-линейно независимая система $\{x_i\}_{i\in I}$ в l-полном $\mathcal{A}$-модуле X является *$\mathcal{A}$-базисом Гамеля*, если $\mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I},\mathcal{A})) = X$. В случае, когда $\mathcal{A}$-базис Гамеля конечен, будем его называть *$\mathcal{A}$-базисом* в X.

Используем следующий $\mathcal{A}$-вариант одного широко известного результата из линейной алгебры.

Лемма 2.1 (см. [10]). *Пусть $\{z_i\}_{i=1}^n \subset X, \{y_j\}_{j=1}^k \subset X$ и $\{ey_j\}_{j=1}^k \subset \mathrm{Lin}(\{ez_i\}_{i=1}^n,\mathcal{A}_e)$ для некоторого идемпотентного элемента $0 \neq e \in \nabla$. Если множество $\{ey_1,\ldots,ey_k\}$ $\mathcal{A}_e$-линейно независимо, то $k \leqslant n$.*

Зафиксируем некоторое кардинальное число γ. Точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль X называется *γ-однородным*, если существует $\mathcal{A}$-базис Гамеля $\{x_i\}_{i\in I}$ в X с $\mathrm{card}\, I = \gamma$. Будем говорить, что $\mathcal{A}$-модуль X *однородный*, если он является γ-однородным $\mathcal{A}$-модулем для некоторого кардинального числа γ.

Если X — γ-однородный $\mathcal{A}$-модуль, то X_e, очевидно, также является γ-однородным $\mathcal{A}_e$-модулем для любого ненулевого идемпотентного элемента $e \in \mathcal{A}$. Помимо этого, из утверждения 2.2 (iii) следует, что если $\mathcal{A}$-модуль Y изоморфен γ-однородному $\mathcal{A}$-модулю X, то Y также γ-однородный модуль.

В [10] было установлено следующее утверждение.

Предложение 2.5. *Если X и Y являются γ-однородными $\mathcal{A}$-модулями, то X и Y изоморфны. Вдобавок к этому, для любого положительного целого n существует единственный, с точностью до изоморфизма, n-однородный $\mathcal{A}$-модуль, который изоморфен $\mathcal{A}^n$.*

Пусть X — это точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль, являющийся одновременно γ-однородным и λ-однородным. Возникает естественный вопрос, будет ли в таком случае выполняться равенство $\gamma = \lambda$? Схожий вопрос ставился в классификации МКГ X над коммутативными AW^*-алгебрами $\mathcal{A}$ с булевой алгеброй проекций ∇. Для случая, когда ∇ есть мульти-σ-конечная булева алгебра в [14], было доказано, что для МКГ X равенство $\lambda = \gamma$ выполняется всегда. Однако данное равенство не может быть установлено для произвольной полной булевой алгебры ∇. Как следствие, в [15, п. 7.4.6] было введено понятие *строго γ-однородных* МКГ X, что дало возможность классифицировать МКГ X над произвольными коммутативными AW^*-алгебрами $\mathcal{A}$. По этой же причине ниже мы введем понятие строго γ-однородных точных l-полных модулей над дизъюнктно полными алгебрами $\mathcal{A}$. С помощью этого понятия мы получим необходимые и достаточные условия изоморфизма l-полных $\mathcal{A}$-модулей.

Пусть X — это точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль, $0 \neq e \in \nabla$. Через $\varkappa(e)$ обозначим наименьшее кардинальное число γ такое, что $\mathcal{A}_e$-модуль X_e будет γ-однородным. Если $\mathcal{A}$-модуль X однородный, то кардинальное число $\varkappa(e)$ определено для всех ненулевых $e \in \nabla$. Кроме того, в силу [15, п. 7.4.7], предполагаем, что $\varkappa(0) = 0$.

Будем говорить, что $\mathcal{A}$-модуль X является *строго γ-однородным* (ср. [15, п. 7.4.6]), если X — γ-однородный и $\gamma = \varkappa(e)$ для всех ненулевых $e \in \nabla$. Если $\mathcal{A}$-модуль X строго γ-однороден для некоторого кардинального числа γ, то такой $\mathcal{A}$-модуль X называется *строго однородным*.

Очевидно, что любой строго γ-однородный $\mathcal{A}$-модуль также является γ-однородным $\mathcal{A}$-модулем. Из леммы 2.1 следует, что каждый n-однородный $\mathcal{A}$-модуль X является строго n-однородным. Для случая, когда ∇ — это мульти-σ-конечная булева алгебра в [8], доказано, что любой γ-однородный $\mathcal{A}$-модуль также является строго γ-однородным $\mathcal{A}$-модулем. В частности, если X — это точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль, являющийся одновременно γ-однородным и λ-однородным, то $\lambda = \gamma$.

Отметим также, что по утверждению 2.2 (iii) всякий $\mathcal{A}$-модуль Y, изоморфный строго γ-однородному $\mathcal{A}$-модулю X, является строго γ-однородным $\mathcal{A}$-модулем.

Следующее утверждение позволяет «склеить» γ-однородные (строго γ-однородные) $\mathcal{A}$-модули (доказательство данного утверждения аналогично доказательству утверждения 3.10 из [8]).

Предложение 2.6. *Пусть $\mathcal{A}$ — l-полная коммутативная регулярная алгебра, X — l-полный $\mathcal{A}$-модуль, а $\{e_i\}_{i\in I}$ — множество попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$, и $e = \sup\limits_{i\in I} e_i$. Если X_{e_i} — γ-однородный (или строго γ-однородный) $\mathcal{A}_{e_i}$-модуль для всех $i \in I$, то $\mathcal{A}_e$-модуль X_e также будет γ-однородным (или строго γ-однородным, соответственно).*

3. Классификация точных l-полных $\mathcal{A}$-модулей

В этом разделе нами доказывается, что всякий точный дизъюнктно полный $\mathcal{A}$-модуль изоморфен декартову произведению строго однородных $\mathcal{A}$-модулей. Следующая теорема является важным шагом при доказательстве этого факта.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — l-полная коммутативная регулярная алгебра, ∇ — булева алгебра всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$, а X — точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль. Тогда существует такой ненулевой идемпотентный элемент $p \in \nabla$, что X_p будет строго однородным $\mathcal{A}_p$-модулем.*

Доказательство. Используя утверждение 2.3 (i), мы можем выбрать $x_0 \in X$ таким, что $s(x_0) = \mathbf{1}$. Если $X = \mathrm{Lin}(x_0, \mathcal{A})$, то X — строго 1-однородный модуль, и теорема 3.1 доказана.

Предположим, что $X \neq \mathrm{mix}(\{x_0\})$. Рассмотрим в X следующее непустое семейство подмножеств

$$\mathcal{E} = \{B \subset X : x_0 \in B,\ B \text{ — это } \mathcal{A}\text{-линейно независимое множество}\}.$$

Введем на $\mathcal{E}$ частичный порядок по $B \leqslant C \Leftrightarrow B \subset C$. По лемме Цорна существует максимальный элемент D в $\mathcal{E}$. Если D — это $\mathcal{A}$-базис Гамеля в X, то X — $(\mathrm{card}\, D)$-однородный $\mathcal{A}$-модуль.

Предположим, что $X \neq \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$. Если для любого ненулевого $e \in \nabla$ существует $0 \neq q_e \in \nabla$ такой, что $q_e \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})) = q_e X$, то в силу утверждений 2.2 (ii) и 2.3 (ii) отсюда следует, что $X = \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, существует такой ненулевой $e \in \nabla$, что выполняется следующее условие:

$$g \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})) \neq gX \text{ для всех ненулевых } g \in \nabla_e. \tag{1}$$

Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех ненулевых $e \in \nabla$ со свойством (1). Положим $e_0 = \sup \mathcal{L}$ и покажем, что $e_0 \neq \mathbf{1}$.

Предположим, что $e_0 = \mathbf{1}$. В таком случае для всякого ненулевого $q \in \nabla$ найдется $e \in \mathcal{L}$ такой, что $g = qe \neq 0$. Следовательно, $gX \neq g \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$ (см. (1)), откуда вытекает

$$qX \neq q \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})). \tag{2}$$

Покажем, что для любого ненулевого $q \in \nabla$ существует ненулевой идемпотентный элемент $r \leqslant q$ такой, что для любого $0 \neq g \in \nabla_r$ выполняется следующее условие:

$$\begin{gathered} \text{существует } \ x_g \in gX \quad \text{такой, что} \quad s(x_g) = g \\ \text{и } \ l \cdot x_g \notin \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}) \text{ для всех } 0 \neq l \in \nabla_g. \end{gathered} \tag{3}$$

Если это не так, то существует такой ненулевой $q \in \nabla$, что для всякого $0 \neq r \in \nabla_q$ найдется ненулевой идемпотент $g_r \in \nabla_r$ без свойства (3), т. е. для любого $x \in g_r X$ с $s(x) = g_r$ существует ненулевой идемпотент $e(x_g, r) \leqslant g_r \leqslant q$ такой, что $e(x_g, r)x \in e(x_g, r) \cdot \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}) \subset \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$.

Покажем, что в таком случае $g_q X = g_q \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$. Пусть x — это ненулевой элемент из $g_q X$, в частности, $0 \neq s(x) \leqslant g_q$. Для любого ненулевого идемпотента $a \leqslant s(x)$ существует такой ненулевой идемпотент $e(ax, a) \leqslant a$, что $e(ax, a)x \in \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$. По теореме 2.2, существует такое разбиение $\{e_i\}_{i \in I}$ носителя $s(x)$, что $e_i x \in s(x) \cdot \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$ для всех $i \in I$. Это означает, что $x \in \mathrm{mix} \cdot (s(x)\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})) = s(x) \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$ (см. утверждение 2.2 (i)). Так как $s(x) \leqslant g_q$, получим, что $x \in g_q \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$, откуда следует вложение $g_q X \subset g_q \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$. С другой стороны, в силу l-полноты $\mathcal{A}_{g_q}$-модуля $g_q X$ будем иметь:

$$g_q \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})) \subset g_q \cdot \mathrm{mix}\,(X) = \mathrm{mix}\,(g_q X) = g_q X.$$

Тем самым, $g_q X = g_q \cdot \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A}))$, что противоречит (2).

Таким образом, для всякого ненулевого $q \in \nabla$ найдется такой ненулевой идемпотентный элемент $r \leqslant q$, что для любого $0 \neq g \in \nabla_r$ условие (3) выполняется.

Вновь по теореме 2.2 можно выбрать разбиение $\{g_j\}_{j \in J}$ идемпотента $r \in \nabla$ и множество $\{x_{g_j}\}_{j \in J}$ в rX так, чтобы $s(x_{g_j}) = g_j$ и $lx_{g_j} \notin \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$ для всех $0 \neq l \in \nabla_{g_i}$.

Так как rX — это l-полный $\mathcal{A}_r$-модуль, то существует $x \in rX$ такой, что $g_j x = x_{g_j}$. В частности, $s(x) = r$, при котором $lx \notin \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$ для всех $0 \neq l \in \nabla_r$.

Опять же по теореме 2.2 выбираем разбиение $\{r_k\}_{k \in K}$ единицы $\mathbf{1}$ в булевой алгебре ∇ и множество $\{x_k\}_{k \in K}$ в X так, чтобы $s(x_k) = r_k$ и $lx_k \notin \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$ для любых $0 \neq l \in \nabla_{r_k}$. В силу l-полноты $\mathcal{A}$-модуля X существует $\hat{x} \in X$ такой, что $r_k \hat{x} = x_k$ для всех $k \in K$. В таком случае $s(\hat{x}) = \mathbf{1}$ и $l\hat{x} \notin \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$ для всех $0 \neq l \in \nabla$.

Теперь покажем, что множество $D \cup \{\hat{x}\}$ является $\mathcal{A}$-линейно независимым. Пусть $a_0 \hat{x} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, где $a_0, a_i \in \mathcal{A}$, $x_i \in D$, $i = 1, \ldots, n$. Если $a_0 = 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$, и в силу $\mathcal{A}$-линейной независимости D отсюда следует, что $a_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Если $a_0 \neq 0$, то $s(a_0) \neq 0$, и для всех $i(a_0) = h \in \mathcal{A}$ будем иметь, что $ha_0 = s(a_0)$ и $s(a_0)\hat{x} = -\sum\limits_{i=1}^{n} a_i h x_i \in \mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})$, что не соответствует действительности. Следовательно, множество $D \cup \{\hat{x}\}$ является $\mathcal{A}$-линейно независимым в X, что противоречит максимальности множества D.

Тем самым, $e_0 \neq \mathbf{1}$ и $e = \mathbf{1} - e_0 \neq 0$. По построению идемпотентного элемента e_0 видно, что всякий ненулевой идемпотент $r \leqslant e$ не обладает свойством (1). Таким образом, для любого $0 \neq r \in \nabla_e$ существует такой ненулевой идемпотентный элемент $p_r \leqslant r$, что

$$p_r X = p_r \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(D, \mathcal{A})) = \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(p_r D, \mathcal{A}_{p_r})) = p_r \mathrm{mix}\,(\mathrm{Lin}\,(eD, \mathcal{A}_e)).$$

Из утверждений 2.2 (ii) и 2.3 (ii) имеем, что $eX = \mathrm{mix}\,\mathrm{Lin}\,(eD, \mathcal{A}_e))$. Поскольку eD — $\mathcal{A}_e$-линейно независимое подмножество в $\mathcal{A}_e$-модуле eX, то eD — $\mathcal{A}_e$-базис в eX, т. е. eX есть γ-однородный $\mathcal{A}_e$-модуль, где $\gamma = \mathrm{card}\,(eD)$. При этом кардинальное число $\varkappa(p)$ определено для всех ненулевых $p \in \nabla_e$. Пусть γ_e — наименьшее кардинальное число из множества кардинальных чисел $\{\varkappa(p) : 0 \neq$

$p \leqslant e\}$, т. е. $\gamma_e = \varkappa(p)$ для некоторого ненулевого $p \leqslant e$. За счет выбора идемпотентного элемента p получим, что $\gamma_e = \varkappa(p) = \varkappa(q)$ для всех $0 \neq q \in \nabla_p$. Это означает, что $\mathcal{A}_p$-модуль X_p является строго однородным. $\square$

Теперь все готово для построения изоморфизма между точными дизъюнктно полными $\mathcal{A}$-модулями и декартовым произведением строго однородных $\mathcal{A}$-модулей.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{A}$ — это l-полная коммутативная регулярная алгебра, ∇ — булева алгебра всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$, а X — точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль. Тогда существуют определяемое единственным образом множество попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентных элементов $\{e_i\}_{i\in I} \subset \nabla$ и множество попарно различных кардинальных чисел $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ такие, что $\sup\limits_{i\in I} e_i = \mathbf{1}$, а X_{e_i} — строго γ_i-однородный $\mathcal{A}_{e_i}$-модуль для всех $i \in I$. В таком случае, $\mathcal{A}$-модули X и $\prod\limits_{i\in I} X_{e_i}$ будут изоморфны.*

Доказательство. По теореме 3.1 для всякого ненулевого идемпотента $e \in \mathcal{A}$ найдется такой ненулевой идемпотент $g \leqslant e$, что X_g будет строго однородным $\mathcal{A}_g$-модулем. По теореме 2.2 мы можем выбрать множество попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентных элементов $\{q_j\}_{j\in J}$ так, чтобы $\sup\limits_{j\in J} q_j = \mathbf{1}$, а $q_j X$ был бы строго λ_j-однородным $\mathcal{A}_{q_j}$-модулем для всех $j \in J$. Представим множество $A = \{\lambda_j\}_{j\in J}$ кардинальных чисел в виде объединения непересекающихся подмножеств A_i таким образом, чтобы каждый A_i состоял из одинаковых кардинальных чисел из A. По утверждению 2.6 имеем, что $\mathcal{A}_{e_i}$-модуль X_{e_i} является строго γ_i-однородным, где $e_i = \sup\{q_j : \lambda_j \in A_i\}$. При этом по утверждению 2.4 $\mathcal{A}$-модуль X и $\prod\limits_{i\in I} e_i X$ изоморфны.

Предположим, что существуют и другие множества попарно дизъюнктных ненулевых идемпотентов $\{g_j\}_{j\in J}$ и попарно различных кардинальных чисел $\{\mu_j\}_{j\in J}$ такие, что $\sup\limits_{j\in J} g_j = \mathbf{1}$, а X_{g_j} — строго μ_j-однородный $\mathcal{A}_{g_j}$-модуль для всех $j \in J$. Для любого фиксированного $j \in J$ из равенства $\sup\limits_{i\in I} e_i = \mathbf{1}$ следует, что $g_j = \sup\limits_{i\in I} e_i g_j$. Если существуют два различных индекса $i_1, i_2 \in I$ таких, что $e_{i_1} g_j \neq 0$ и $e_{i_2} p_j \neq 0$, то

$$\mu_j = \varkappa(g_j) = \varkappa(e_{i_1} g_j) = \varkappa(e_{i_1}) = \gamma_{i_1} \neq \gamma_{i_2} = \varkappa(e_{i_2}) = \varkappa(e_{i_2} g_j) = \mu_j.$$

Получили противоречие, из которого следует, что $e_i g_j = 0$ для всех индексов $i \in I$ кроме одного, который мы обозначим через $i(j)$. Так как $e_{i(j)} g_j \neq 0$, будем иметь, что

$$\mu_j = \varkappa(g_j) = \varkappa(e_{i(j)} g_j) = \varkappa(e_{i(j)}) = \gamma_{i(j)}.$$

Если $g_j \neq e_{i(j)}$, то ввиду равенства $\sup\limits_{j\in J} g_j = \mathbf{1}$ найдется такой индекс $j_1 \in J$, $j_1 \neq j$, что $e_{i(j)} g_{j_1} \neq 0$. Следовательно,

$$\mu_j = \gamma_{i(j)} = \varkappa(e_{i(j)}) = \varkappa(e_{i(j)} g_{j_1}) = \varkappa(g_{j_1}) = \mu_{j_1},$$

что неверно. Таким образом, $g_j = e_{i(j)}$ и $\mu_j = \gamma_{i(j)}$. По этой же причине для любого $i \in I$ существует единственный индекс $j(i)$ такой, что $e_i = g_{j(i)}$ и $\gamma_i = \mu_{j(i)}$. $\square$

Разложение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы и множество кардинальных чисел $\{\gamma_i\}_{i\in I}$ из теоремы 3.2 называются паспортом для точного дизъюнктно полного $\mathcal{A}$-модуля X и обозначаются как $\Gamma(X) = \{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i\in I(X)}$.

Получим критерий изоморфизма между точными l-полными $\mathcal{A}$-модулями посредством следующей теоремы и введенного понятия паспорта для этих $\mathcal{A}$-модулей.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathcal{A}$ — это l-полная коммутативная регулярная алгебра, а X и Y — точные l-полные $\mathcal{A}$-модули. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(i) $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$;
(ii) *$\mathcal{A}$-модули X и Y изоморфны.*

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть

$$\{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i\in I(X)} = \Gamma(X) = \Gamma(Y) = \{(e_i(Y), \gamma_i(Y))\}_{i\in I(Y)},$$

т. е. $I(X) = I(Y) := I$, $e_i(X) = e_i(Y) := e_i$ и $\gamma_i(X) = \gamma_i(Y) := \gamma_i$ для всякого $i \in I$. По теореме 3.2 существует изоморфизм $U : X \to \prod\limits_{i\in I} e_iX$ (или изоморфизм $V : Y \to \prod\limits_{i\in I} e_iY$), где $U(x) = \{e_ix\}_{i\in I}$ (или $V(y) = \{e_iy\}_{i\in I}$, соответственно) для всех $x \in X$ (или для всех $y \in Y$, соответственно).

Так как e_iX (или e_iY) является строго γ_i-однородным $\mathcal{A}_{e_i}$-модулем, то по утверждению 2.5 существует изоморфизм $U_i : e_iX \to e_iY$ для всех $i \in I$. Очевидно, что отображение $\Phi : X \to Y$, определяемое равенством

$$\Phi(x) = V^{-1}(\{U_i(e_ix)\}_{i\in I}),$$

будет изоморфизмом между $\mathcal{A}$-модулем X и $\mathcal{A}$-модулем Y.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть Ψ — это изоморфизм между X и Y, а $\Gamma(X) = \{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i\in I(X)}$ — это паспорт для $\mathcal{A}$-модуля X. По утверждению 2.2 (iii) $\mathcal{A}_{e_i(X)}$-модуль

$$Y_i = \Psi(e_i(X)X) = e_i(X)\Psi(X) = e_i(X)Y$$

является строго $\gamma_i(X)$-однородным. Это означает, что $\{(e_i(X), \gamma_i(X))\}_{i\in I}$ является паспортом для $\mathcal{A}$-модуля Y, т. е. $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$. $\square$

Пусть $\mathcal{A}$ — это l-полная коммутативная регулярная алгебра, а ∇ — булева алгебра всех идемпотентных элементов из $\mathcal{A}$. Точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль X называется *конечномерным*, если существуют конечное разбиение $e_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, единицы в булевой алгебре ∇ и конечное множество натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ такие, что X_{e_i} будет n_i-однородным $\mathcal{A}_{e_i}$-модулем для всех $i = 1, \ldots, k$.

Это означает, что всякий конечномерный $\mathcal{A}$-модуль X обладает паспортом следующего вида:

$$\Gamma(X) = \{(e_i(X), n_i(X))\}_{i=1}^k, \quad \text{где} \quad e_1(X) + \ldots + e_k(X) = \mathbf{1},\ n_1(X) < \ldots < n_k(X) < \infty.$$

Нижеследующее описание конечномерных $\mathcal{A}$-модулей непосредственно вытекает из теоремы 3.2 и утверждения 2.5.

Предложение 3.1. *Если X — это конечномерный $\mathcal{A}$-модуль, то существуют определяемое единственным образом конечное разбиение $e_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, единицы в булевой алгебре ∇ и конечное множество положительных целых чисел $n_1 < \ldots < n_k$ такие, что $\mathcal{A}$-модуль X будет изоморфен $\mathcal{A}$-модулю $\prod\limits_{i=1}^{k} \mathcal{A}_{e_i}^{n_i}$.*

Точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль X называется *σ-конечномерным*, если существуют счетное разбиение $e_i \neq 0$, $i \in \mathbb{N}$, единицы в булевой алгебре ∇ и счетное множество положительных целых чисел $n_1 < n_2 < \ldots$ такие, что X_{e_i} будет n_i-однородным $\mathcal{A}_{e_i}$-модулем для всех $i \in \mathbb{N}$.

Из теоремы 3.2 и утверждения 2.5 получим следующее описание σ-конечномерных $\mathcal{A}$-модулей.

Предложение 3.2. *Если X — это σ-конечномерный $\mathcal{A}$-модуль, то существуют определяемое единственным образом счетное разбиение $e_i \neq 0$, $i \in \mathbb{N}$, единицы в булевой алгебре ∇ и счетное множество положительных целых чисел $n_1 < n_2 < \ldots$ такие, что $\mathcal{A}$-модуль X будет изоморфен $\mathcal{A}$-модулю $\prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_{e_i}^{n_i}$.*

4. Банаховы $C_\infty(Q)$-модули

Пусть ∇ — полная булева алгебра, $Q(\nabla)$ — стоуновский компакт, отвечающий ∇, а $L^0_{\mathbb{R}} := C_\infty(Q(\nabla))$ — алгебра всех непрерывных функций $f : Q(\nabla) \to [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ только на нигде не плотных множествах в $Q(\nabla)$ (см. раздел 2). Пусть $L^0_{\mathbb{C}} = L^0_{\mathbb{R}} \oplus i \cdot L^0_{\mathbb{R}}$ — это комплексификация векторной решетки $L^0_{\mathbb{R}}$. Очевидно, что $L^0_{\mathbb{C}}$ является комплексной коммутативной $*$-алгеброй всех непрерывных функций $f : Q(\nabla) \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, принимающих значение ∞ только на нигде не плотных множествах в $Q(\nabla)$, при этом самосопряженная часть $(L^0_{\mathbb{C}})_h = \{f \in L^0_{\mathbb{C}} : f = \overline{f}\}$ комплексной векторной решетки $L^0_{\mathbb{C}}$ совпадает с $L^0_{\mathbb{R}}$. В этом разделе будем исходить из предположения, что l-полная коммутативная алгебра $\mathcal{A}$ является вещественной алгеброй $L^0_{\mathbb{R}}$ либо комплексной алгеброй $L^0_{\mathbb{C}}$. Обозначим через $\mathcal{A}_+$ (и $\mathcal{A}_{++}$) множество всех положительных (и положительных обратимых, соответственно) элементов из $L^0_{\mathbb{R}}$. Основными задачами, требующими решения, являются:

(A). Пусть X — это конечномерный (или σ-конечномерный) $\mathcal{A}$-модуль, и пусть $\|\cdot\|_i$ — это норма со значениями в $\mathcal{A}$, $i = 1, 2$. Являются ли эти две нормы $\mathcal{A}$-эквивалентными?

(B). ($\mathcal{A}$-версия теоремы Рисса). Следует ли из того, что единичный шар в банаховом $\mathcal{A}$-модуле X циклически компактен, конечномерность (σ-конечномерность) модуля X?

Вспомним, что отображение $\|\cdot\| : X \to \mathcal{A}$ называется *$\mathcal{A}$-нормой* на точном $\mathcal{A}$-модуле X со значениями в $\mathcal{A}$, если выполняются следующие условия:

1. $\|x\| \geqslant 0$ для любого $x \in X$, и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|$ для всех $x \in X$, $a \in \mathcal{A}$;
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для любых $x, y \in X$.

Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется *нормированным $\mathcal{A}$-модулем*.

Сеть $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{A}_h$ называется *(o)-сходящейся* к элементу $f \in \mathcal{A}_h$, если существуют такие сети $\{g_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{d_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{A}_h$, что $g_\alpha \leqslant f_\alpha \leqslant d_\alpha$ для любых $\alpha \in A$, и $g_\alpha \uparrow f$, $d_\alpha \downarrow f$.

Лемма 4.1 (см. [3]). *Пусть $\{e_i\}_{i\in I}$ — это разбиение единицы в булевой алгебре ∇, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset \mathcal{A}_h$, $f \in \mathcal{A}_h$. Если $e_i f_\alpha \xrightarrow{(o)} e_i f$ для любых $i \in I$, то $f_\alpha \xrightarrow{(o)} f$.*

Будем говорить, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X$ *(bo)-сходится* к элементу $x \in X$, если $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow{(o)} 0$ (см. [15, ч. 2, § 2.1, п. 2.1.5]). Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется *(bo)-сетью Коши*, если $\left(\sup\limits_{\alpha,\beta\geqslant\gamma} \|x_\alpha - x_\beta\|\right) \downarrow 0$. Нормированный $\mathcal{A}$-модуль называется *банаховым $\mathcal{A}$-модулем*, если всякая (bo)-сеть Коши (bo)-сходится к некоторому элементу этого модуля.

Предложение 4.1. *Если $(X, \|\cdot\|)$ — банахов $\mathcal{A}$-модуль, то X — l-полный $\mathcal{A}$-модуль.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, $e \cdot x = 0$ для всех $e \in L \subset \nabla$, и $q = \sup L \in \nabla$. Пусть A — это направленное множество всех конечных подмножеств L, и $x_\alpha = (\sum\limits_{k=1}^n e_{i_k}) \cdot x$, $\alpha = \{i_1, \ldots, i_k\} \in A$. Так как $x_\alpha = 0$ и

$$\|q \cdot x - x_\alpha\| = \|(q - \sum_{k=1}^n e_{i_k}) \cdot x\| = (q - \sum_{k=1}^n e_{i_k})\|x\| \xrightarrow{(o)} 0,$$

то отсюда следует, что $q \cdot x = 0$. Это означает, что $\mathcal{A}$-модуль X является регулярным.

Пусть $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$, а $\{e_i\}_{i\in I}$ — любое разбиение единицы в булевой алгебре ∇. Пусть A — это направленное множество всех конечных подмножеств I, и $x_\alpha = \sum\limits_{k=1}^n e_{i_k} \cdot x_{i_k}$, $\alpha = \{i_1, \ldots, i_k\} \in A$. Очевидно, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ является (bo)-сетью Коши. Следовательно, существует $x \in X$ такой, что $\|x_\alpha - x\| \xrightarrow{(o)} 0$, при этом $\|e_i \cdot x_\alpha - e_i \cdot x\| = e_i \cdot \|x_\alpha - x\| \xrightarrow{(o)} 0$ для всех $i \in I$. Так как $e_i \cdot x_\alpha = e_i \cdot x_i$, если $i \in \alpha \in A$, отсюда следует, что $e_i \cdot x_i = e_i \cdot x$, $i \in I$. Таким образом, $\mathcal{A}$-модуль X является l-полным. □

Пусть ∇ — это счетная булева алгебра, а $P(\mathbb{N})$ — множество всех счетных разбиений в ∇, занумерованных положительными целыми числами $n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$P(\mathbb{N}) = \{a : \mathbb{N} \to \nabla \mid a(n) \wedge a(m) = 0,\ n \neq m,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} a(n) = \mathbf{1}\}.$$

Введем на $P(\mathbb{N})$ частичный порядок, положив $a \leqslant b$ в том и только том случае, если условие $a(n) \wedge b(m) \neq 0$ влечет $n \leqslant m$, $n, m \in \mathbb{N}$. В [15, ч. 2, § 2.2, п. 2.2.2] было показано, что введенное отношение $a \leqslant b$ является частичным порядком на $P(\mathbb{N})$, а частично упорядоченное множество $(P(\mathbb{N}), \leqslant)$ — направлением.

Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — это последовательность в X. Для каждого $a \in P(\mathbb{N})$ положим $x_a = \operatorname{mix}\limits_{n\in\mathbb{N}}(a(n)x_n)$. Всякая подсеть сети $\{x_a\}_{a\in P(\mathbb{N})}$ называется *циклической подсетью* последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Подмножество $K \subset X$ называется *циклически компактным* (соответственно, *относительно циклически компактным*), если $K = \operatorname{mix}(K)$, и любая последовательность в K имеет циклическую подсеть, которая (bo)-сходится к некоторому элементу $x \in K$ (соответственно, $x \in X$) [15, ч. 8, § 8.5, п. 8.5.1].

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — это нормированный $\mathcal{A}$-модуль, а $F \subseteq X$. Подмножество $F \subseteq X$ называется (bo)-*замкнутым*, если из условий $x_\alpha \xrightarrow{(bo)} x$, $\{x_\alpha\} \subset F$ следует, что $x \in F$. Если булева алгебра ∇ является счетной, то подмножество $F \subseteq X$ (bo)-замкнуто тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$, $x_n \xrightarrow{(bo)} x$ можно сделать вывод, что $x \in F$ [21, ч. VI, § 3, теорема VI.3.1]. Следовательно, множество $K \subset X$ является циклически компактным тогда и только тогда, когда K относительно циклически компактно и (bo)-замкнуто.

Вспомним следующий критерий относительной циклической компактности [15, ч. 8, § 8.5, п. 8.5.2].

Теорема 4.1. *Пусть K — любое циклическое множество в банаховом $\mathcal{A}$-модуле $(X, \|\cdot\|)$. Тогда K относительно циклически компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существуют счетное разбиение $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ единицы в булевой алгебре ∇ и последовательность конечных подмножеств $E_n = \{x_1^n, \dots, x_{k(n)}^n\} \subset K$ такие, что $e_n(\mathrm{mix}(E_n))$ будет ε-сетью для e_nK для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. для любого $x \in e_nK$ существует такое разбиение единицы $\{q_1^n, \dots, q_{k(n)}^n\}$ в ∇, что*

$$\|x - \sum_{i=1}^{k(n)} e_n q_i^n x_i^n\| \leqslant \varepsilon \mathbf{1}.$$

Множество $E \subset (X, \|\cdot\|)$ называется $\mathcal{A}$-*ограниченным*, если существует $f \in \mathcal{A}_+$ такая, что $\|x\| \leqslant f$ для всех $x \in E$. Следующая теорема является $\mathcal{A}$-версией широко известного критерия компактности подмножеств в конечномерных нормированных пространствах [1].

Теорема 4.2. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — это конечномерный (соответственно, σ-конечномерный) банахов $\mathcal{A}$-модуль, а K — циклическое множество в $(X, \|\cdot\|)$. Следующие условия являются эквивалентными:*

(i) *K — относительно циклически компактное множество (соответственно, циклически компактное множество);*

(ii) *K — $\mathcal{A}$-ограниченное множество (соответственно, $\mathcal{A}$-ограниченное и (bo)-замкнутое множество).*

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — это банаховы модули. Отображение $T : X \to Y$ называется (bo)-*непрерывным*, если для любой сети $\{x_\alpha\} \subset X$, которая (bo)-сходится к элементу x, сеть $\{T(x_\alpha)\}$ (bo)-сходится к элементу $T(x)$.

Будем говорить, что отображение $T : X \to Y$ *сохраняет перемешивание*, если $T(\underset{i\in I}{\mathrm{mix}}(e_i x_i)) = \underset{i\in I}{\mathrm{mix}}(e_i T(x_i))$ для любого разбиения $\{e_i\} \subset \mathcal{B}$ единицы и любого множества $\{x_i\} \subset X$ таких, что существует перемешивание $\underset{i\in I}{\mathrm{mix}}(e_i x_i)$.

Нам понадобится следующее свойство отображений, сохраняющих перемешивание [4, ч. 1, § 1.3, п. 1.3.6].

Предложение 4.2. *Пусть X, Y — банаховы $\mathcal{A}$-модули, а $K \subset X$ — циклически компактное множество. Если $T : X \to Y$ — (bo)-непрерывное отображение, сохраняющее перемешивание, то $T(K)$ — циклически компактное множество в Y.*

Следующая теорема является $\mathcal{A}$-версией хорошо известной теоремы Вейерштрасса [3].

Теорема 4.3. *Пусть K — циклически компактное множество в банаховом $\mathcal{A}$-модуле X, а $\Phi : K \to \mathcal{A}_h$ — (bo)-непрерывное отображение, сохраняющее перемешивание. Тогда существуют элементы $x, y \in K$ такие, что $\Phi(x) = \sup \Phi(K)$, $\Phi(y) = \inf \Phi(K)$.*

Пусть X — это $\mathcal{A}$-модуль, а $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ — две $\mathcal{A}$-нормы на X. Эти нормы называются $\mathcal{A}$-*эквивалентными* (обозначается $\|\cdot\|_1 \backsim \|\cdot\|_2$), если существуют $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_{++}$ такие, что

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1$$

для всех $x \in X$.

Понятно, что отношение $\|\cdot\|_1 \backsim \|\cdot\|_2$ является отношением эквивалентности на множестве всех $\mathcal{A}$-норм на $\mathcal{A}$-модуле X.

Если X — это n-однородный $\mathcal{A}$-модуль, то $X = \mathcal{A}^n$ (см. утверждение 2.5) и при этом любой элемент $x \in X$ может быть однозначно представлен как $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, где $\alpha_i \in \mathcal{A}$ и $e_i = \{0, \dots, 0, \mathbf{1}, 0, \dots, 0\}$, $i = 1, \dots, n$ (единица $\mathbf{1}$ стоит на i-ом месте).

Рассмотрим отображение $\|\cdot\|_1 : X \to \mathcal{A}_h$, определяемое правилом $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|$. Очевидно, что $\|\cdot\|_1$ есть $\mathcal{A}$-норма на $\mathcal{A}$-модуле X.

Теорема 4.4. *Если $\|\cdot\|_X$ — это $\mathcal{A}$-норма на $\mathcal{A}$-модуле $X = \mathcal{A}^n$, то $\|\cdot\|_X \backsim \|\cdot\|_1$.*

Доказательство. Пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$, и $\alpha_0 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|e_i\|_X$. Ясно видно, что $\alpha = \alpha_0 + \mathbf{1} \in \mathcal{A}_{++}$, а

$$\|x\|_X \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \cdot \|e_i\|_X \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|e_i\|_X \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leqslant \alpha \|x\|_1.$$

Следовательно, $\|x\|_X \leqslant \alpha \|x\|_1$ для всех $x \in X$, при которых $\alpha \in \mathcal{A}_{++}$.

Покажем, что множество $K = \{x \in X : \|x\|_1 = \mathbf{1}\}$ является циклически компактным множеством в $(X, \|\cdot\|_1)$. Пусть $\{q_i\}_{i \in I}$ — это любое разбиение единицы в ∇, и $\{x_i\}_{i \in I} \subset K$. Так как $X = \mathcal{A}^n$ — это l-полный $\mathcal{A}$-модуль, отсюда следует, что существует элемент $x \in X$ такой, что $q_i x = q_i x_i$ для всех $i \in I$. Из равенств

$$\|x\|_1 = \left\| \operatorname*{mix}_{i \in I} (q_i x_i) \right\|_1 = \operatorname*{mix}_{i \in I} q_i \|x_i\|_1 = \operatorname*{mix}_{i \in I} q_i = \mathbf{1},$$

получаем, что $x \in K$. Это означает, что K является циклическим множеством.

Очевидно, что подмножество $D = \prod\limits_{i=1}^{n} [-\mathbf{1}, \mathbf{1}] = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathcal{A},\ |\alpha_i| \leqslant \mathbf{1},\ i = 1, \dots, n\}$ содержит K и (bo)-замкнуто в $(\mathcal{A}^n, \|\cdot\|_1)$. Из теоремы 4.2 следует, что множество D циклически компактно в $(X, \|\cdot\|_1)$.

Отображение $\Phi : (X, \|\cdot\|_1) \to \mathcal{A}_h$, задаваемое с помощью $\Phi(x) = \|x\|_X$, сохраняет перемешивание; в этом случае неравенство $\big| \|x\|_X - \|y\|_X \big| \leqslant \|x - y\|_X \leqslant \alpha \|x - y\|_1$ влечет (bo)-непрерывность отображения Φ. Из теоремы 4.3 следует, что существует $y \in K$ такой, что $\Phi(y) = \inf \Phi(K)$, т. е.

$$\|y\|_X = \inf\{\|x\|_X : x \in X, \|x\|_1 = \mathbf{1}\}.$$

Так как $y \in K$, будем иметь, что $\|y\|_1 = \mathbf{1}$, и следовательно, $s(\|y\|_X) = s(y) = s(\|y\|_1) = \mathbf{1}$, в частности, $\beta = \|y\|_X \in \mathcal{A}_{++}$.

Если $x \in X$, $s(\|x\|_X) = \mathbf{1}$, то из $\|x\|_X \leqslant \alpha \|x\|_1$, $\alpha \in \mathcal{A}_{++}$ получим, что $s(\|x\|_1) = \mathbf{1}$. Тем самым, элемент $z = \|x\|_1^{-1} x \in X$ определен, и $\|z\|_1 = \mathbf{1}$, т. е. $z \in K$. Следовательно, $\|z\|_X \geqslant \|y\|_X$, т. е.

$$\|x\|_1^{-1} \|x\|_X \geqslant \|y\|_X, \quad \text{т. е.} \quad \|x\|_X \geqslant \|y\|_X \cdot \|x\|_1.$$

Таким образом, $\beta \cdot \|x\|_1 \leqslant \|x\|_X \leqslant \alpha \|x\|_1$, где $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_{++}$.

Пусть $0 \neq x \in X$, $s(\|x\|_X) \neq \mathbf{1}$, $e = \mathbf{1} - s(\|x\|_X) \neq 0$. В силу l-полноты точного $e\mathcal{A}$-модуля eX мы вправе выбрать элемент $a \in eX$ таким, чтобы $s(\|a\|_X) = s(a) = e$. Для элемента $b = x + a \in X$ имеем

$$s(b) = s(\|b\|_X) = s(\|s(x)b + eb\|_X) = s(\|s(x)b\|_X + \|eb\|_X) = s(\|x\|_X + \|a\|_X) = \mathbf{1}.$$

В силу вышенаписанного, $\beta \|b\|_1 \leqslant \|b\|_X \leqslant \alpha \|b\|_1$, т. е. $\beta(\|x\|_1 + \|a\|_1) \leqslant \|x\|_X + \|a\|_X \leqslant \alpha(\|x\|_1 + \|a\|_1)$. Умножив последнее неравенство на $s(x)$, получим $\beta \|x\|_1 \leqslant \|x\|_X \leqslant \alpha \|x\|_1$. Следовательно, $\mathcal{A}$-нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|$ являются $\mathcal{A}$-эквивалентными. $\square$

Из теоремы 4.4 немедленно следует

Следствие 4.1. *Любые две $\mathcal{A}$-нормы на n-однородном $\mathcal{A}$-модуле $\mathcal{A}$-эквивалентны.*

Теперь рассмотрим конечномерные (σ-конечномерные) $\mathcal{A}$-модули. В силу утверждения 3.1 (или утверждения 3.2, соответственно) конечномерный (или σ-конечномерный, соответственно) $\mathcal{A}$-модуль X изоморфен модулю $\prod\limits_{i=1}^{k}\mathcal{A}_{e_i}^{n_i}$ (или $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\mathcal{A}_{e_i}^{n_i}$, соответственно). В таком случае верна следующая теорема.

Теорема 4.5. *Пусть X — это σ-конечномерный или конечномерный $\mathcal{A}$-модуль. Тогда любые две $\mathcal{A}$-нормы на X будут $\mathcal{A}$-эквивалентны.*

Доказательство. Если X — это σ-конечный $\mathcal{A}$-модуль, то существует счетное разбиение $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ единицы в ∇ такое, что e_nX будет k_n-однородным $e_n\mathcal{A}$-модулем, где $k_1<k_2<\ldots<k_n<\ldots$

Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две $\mathcal{A}$-нормы на X. Для любых $x\in e_nX$ положим

$$\|x\|_{1,n}=\|e_nx\|_1=e_n\|x\|_1;\quad \|x\|_{2,n}=\|e_nx\|_2=e_n\|x\|_2.$$

Очевидно, что $\|x\|_{1,n}$ и $\|x\|_{2,n}$ являются $e_n\mathcal{A}$-нормами на k_n-однородном $e_n\mathcal{A}$-модуле $e_n\cdot X$. Из следствия 4.1 вытекает, что существуют $\alpha_n,\beta_n\in(e_n\mathcal{A})_{++}$ такие, что $\alpha_n\|x\|_{1,n}\leqslant\|x\|_{2,n}\leqslant\beta_n\|x\|_{1,n}$ для всех $x\in e_nX$. Положим $\alpha=\operatorname*{mix}_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_ne_n)$, $\beta=\operatorname*{mix}_{n\in\mathbb{N}}(\beta_ne_n)$. Ясно, что $\alpha,\beta\in\mathcal{A}_{++}$, и для любого $x\in X$ будем иметь

$$e_n\alpha\|x\|_1=e_n\alpha_ne_n\|x\|_1=\alpha_n\|e_nx\|_{1,n}\leqslant\|e_nx\|_{2,n}=e_n\|x\|_2=$$
$$=\|e_nx\|_{2,n}\leqslant\beta_n\|e_nx\|_{1,n}=e_n\beta_n\|e_nx\|_{1,n}=e_n\beta e_n\|x\|_1=e_n\beta\|x\|_1,$$

т. е. $e_n\alpha\|x\|_1\leqslant e_n\|x\|_2\leqslant e_n\beta\|x\|_1$ для всех $n\in\mathbb{N}$, и, следовательно, $\alpha\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\beta\|x\|_1$, где $\alpha,\beta\in\mathcal{A}_{++}$. Это означает, что $\mathcal{A}$-нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ являются $\mathcal{A}$-эквивалентными.

Для конечномерных $\mathcal{A}$-модулей доказательство аналогично. $\square$

Следствие 4.2. *Если $(X,\|\cdot\|)_X$ — нормированный конечномерный (σ-конечномерный) $\mathcal{A}$-модуль, то $(X,\|\cdot\|)_X$ — банахов $\mathcal{A}$-модуль.*

Доказательство. Для начала предположим, что $(X,\|\cdot\|_X)$ — это n-однородный $\mathcal{A}$-модуль, и на $X=\mathcal{A}^n$ рассмотрим $\mathcal{A}$-норму $\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$, $x=\{x_i\}_{i=1}^n\in\mathcal{A}^n$. Пусть $x_\alpha=\{x_i^{(\alpha)}\}_{i=1}^n\subset(\mathcal{A}^n,\|\cdot\|_1)$ — (bo)-сеть Коши, т. е.

$$\sup_{\alpha,\beta\geqslant\gamma}\sum_{i=1}^{n}|x_i^{(\alpha)}-x_i^{(\beta)}|\downarrow 0.$$

Следовательно, $\sup\limits_{\alpha,\beta\geqslant\gamma}|x_i^{(\alpha)}-x_i^{(\beta)}|\downarrow 0$. Так как $(\mathcal{A},\|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ является (bo)-полным относительно $\mathcal{A}$-нормы $\|\lambda\|_{\mathcal{A}}=|\lambda|$, $\lambda\in\mathcal{A}$, то существует $x_i^{(0)}\in\mathcal{A}$ такой, что $|x_i^{(\alpha)}-x_i^{(0)}|\xrightarrow{(o)}0$ для любых $i=1,\ldots,n$. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i^{(\alpha)}-x_i^{(0)}|\xrightarrow{(o)}0$.

Полагая $x=\{x_i^{(0)}\}_{i=1}^n\in\mathcal{A}^n=X$, получаем, что $\|x_\alpha-x\|_1\xrightarrow{(o)}0$. Так как $\|\cdot\|_1\sim\|\cdot\|_X$, то $\|x_\alpha-x\|_X\xrightarrow{(o)}0$. Тем самым, $(X,\|\cdot\|_X)$ является (bo)-полным.

Теперь пусть $(X,\|\cdot\|_X)$ — σ-конечный $\mathcal{A}$-модуль. Тогда существует счетное разбиение $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ единицы в ∇ такое, что e_nX будет k_n-однородным $e_n\mathcal{A}$-модулем. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — (bo)-сеть Коши в X, т. е. $\sup\limits_{\alpha,\beta\geqslant\gamma}\|x_\alpha-x_\beta\|_X\downarrow 0$. Очевидно, что сеть $\{e_nx_\alpha\}_{\alpha\in A}$ является (bo)-сетью Коши в k_n-однородном $e_n\mathcal{A}$-модуле e_nX. Из написанного выше следует, что существует такой элемент $x_n\in e_nX$, что $\|e_nx_\alpha-x_n\|_X\xrightarrow{(o)}0$. Так как X — l-полный $\mathcal{A}$-модуль, то $x=\operatorname*{mix}_{n\in\mathbb{N}}(e_nx_n)\in X$. В этом случае

$$e_n\|x_\alpha-x\|=\|e_nx_\alpha-e_nx\|=\|e_nx_\alpha-e_nx_n\|=\|e_nx_\alpha-x_n\|\xrightarrow{(o)}0.$$

Используя лемму 4.1, получаем, что $\|x_\alpha-x\|\xrightarrow{(o)}0$, т. е. $(X,\|\cdot\|_X)$ — (bo)-полный.

В случае конечномерного $\mathcal{A}$-модуля X доказательство будет аналогичным. $\square$

Из следствия 4.2 немедленно получаем

Следствие 4.3. *Если Y является конечномерным (σ-конечномерным) $\mathcal{A}$-подмодулем в нормированном $\mathcal{A}$-модуле $(X, \|\cdot\|)_X$, то множество Y (bo)-замкнуто в $(X, \|\cdot\|)_X$.*

Используя лемму Цорна, можем установить следующую теорему о существовании $\mathcal{A}$-базиса Гамеля в точном l-полном $\mathcal{A}$-модуле.

Теорема 4.6. *В любом точном l-полном $\mathcal{A}$-модуле существует $\mathcal{A}$-базис Гамеля, т. е. существует максимальная $\mathcal{A}$-линейно независимая система $\{x_i\}_{i\in I} \subset X$ такая, что $X = \mathrm{mix}(\mathrm{Lin}(\{x_i\}_{i\in I},\ \mathcal{A}))$.*

С помощью теоремы 4.6 получим следующую теорему.

Теорема 4.7. *Если все $\mathcal{A}$-нормы на точном l-полном $\mathcal{A}$-модуле X $\mathcal{A}$-эквивалентны, то X является конечномерным или σ-конечномерным $\mathcal{A}$-модулем.*

Доказательство. Предположим, что X не является σ-конечномерным $\mathcal{A}$-модулем. Тогда по теореме 3.2 существует $0 \neq e \in \nabla$ такой, что $e \cdot X$ будет γ-однородным для некоторого неконечного кардинального числа γ, т. е. $\mathcal{A}$-базис Гамеля в $e{\cdot}X$ является бесконечным. Следовательно, $\mathcal{A}$-базис Гамеля $B = \{x_i\}_{i\in I}$ в X также бесконечен (см. теорему 4.6). Для всякого $x = \sum\limits_{k=1}^{n(x)} \lambda_{i_k} x_{i_k} \in \mathrm{Lin}(B, \mathcal{A})$ положим

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n(x)} |\lambda_{i_k}|, \qquad \|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant k\leqslant n(x)} |\lambda_{i_k}|.$$

Очевидно, что $\|x\|_1$ и $\|x\|_\infty$ являются нормами на $\mathcal{A}$-модуле $\mathrm{Lin}(B, \mathcal{A})$, при этом $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$ для любого $x \in \mathrm{Lin}(B, \mathcal{A})$.

Так как B — это $\mathcal{A}$-базис Гамеля в X, отсюда следует, что всякий $x \in X$ имеет вид $x = \mathrm{mix}_{j\in J}(e_j y_j)$ для некоторого разбиения единицы $\{e_j\}_{j\in J}$ в ∇ и $\{y_j\}_{j\in J} \subset \mathrm{Lin}(B, \mathcal{A})$. Положим

$$\|x\|_1 = \mathrm{mix}_{j\in J}(e_i \|y_i\|_1), \qquad \|x\|_\infty = \mathrm{mix}_{j\in J}(e_i \|y_i\|_\infty).$$

Ясно видно, что $\|x\|_1$ и $\|x\|_\infty$ являются нормами на X, и $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$ для всякого $x \in X$.

Из того, что $\mathcal{A}$-базис Гамеля $B = \{x_i\}_{i\in I}$ бесконечен, следует, что существует $\mathcal{A}$-линейно независимая последовательность $\{x_{i_n}\}_{n=1}^\infty \subset B$. Если $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{i_k} \in X$, то $\|y_n\|_1 = n \cdot \mathbf{1}$, $\|y_n\|_\infty = \mathbf{1}$. Следовательно, не существует такого $\gamma \in L^0_{++}$, что $\|y_n\|_1 \leqslant \gamma \|y_n\|_\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Стало быть, нормы $\|.\|_\infty$ и $\|.\|_1$ не являются $\mathcal{A}$-эквивалентными на X. Таким образом, X является конечномерным или σ-конечномерным $\mathcal{A}$-модулем. □

Из теорем 4.5 и 4.7 вытекает следствие:

Следствие 4.4. *Пусть X — точный l-полный $\mathcal{A}$-модуль. Следующие условия эквивалентны*:
(i) *X — это конечномерный или σ-конечномерный $\mathcal{A}$-модуль*;
(ii) *все $\mathcal{A}$-нормы на X $\mathcal{A}$-эквивалентны.*

Как уже было отмечено ранее в теореме 4.2, всякое $\mathcal{A}$-ограниченное, (bo)-замкнутое циклическое множество в конечномерном (σ-конечномерном) нормированном $\mathcal{A}$-модуле $(X, \|\cdot\|_X)$ является циклически компактным. В частности, циклически компактным множеством является единичный шар $B_{\mathbf{1}}(X) = \{x \in X : \|x\|_X \leqslant \mathbf{1}\}$. Нашей следующей целью является версия теоремы Рисса, которая поможет установить конечномерность (σ-конечномерность) нормированного $\mathcal{A}$-модуля $(X, \|\cdot\|_X)$ в случае, когда $B_{\mathbf{1}}(X)$ — циклически компактное множество.

Далее будем предполагать, что булева алгебра ∇ является счетной.

Предложение 4.3. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированный $\mathcal{A}$-модуль, $Y \subset X$, $Y \neq X$, — точный (bo)-замкнутый l-полный $\mathcal{A}$-подмодуль в X, а $0 < \varepsilon < 1$. Тогда существует $u_\varepsilon \in (X \setminus Y)$ такое, что $\|u_\varepsilon\| \in \nabla$ и $\|u_\varepsilon - y\| \geqslant (1-\varepsilon)\cdot e$ для всякого $y \in Y$ и некоторого ненулевого $e \in \nabla$, $e \leqslant \|u_\varepsilon\|$.*

Доказательство. Предположим, что $x_0 \in (X \setminus Y)$, и покажем, что

$$\rho(x_0, Y) = \inf_{y\in Y} \|x_0 - y\| = \alpha \neq 0, \quad \alpha \in \mathcal{A}_+.$$

Так как булева алгебра ∇ является счетной, отсюда следует, что существует такая последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Y$, что $\alpha = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \|x_0 - y_k\|$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует такое конечное разбиение $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ единицы в булевой алгебре ∇, что

$$(\inf_{1\leqslant k\leqslant m} \|x_0 - y_k\|) \cdot e_i = \|x_0 - y_i\| \cdot e_i.$$

Так как $\mathcal{A}$-подмодуль Y является l-полным, то существует $z_m \in Y$ такой, что $e_i \cdot z_m = e_i \cdot y_i$ для всех $i = 1, \ldots, m$. Следовательно,

$$\inf_{1\leqslant k\leqslant m} \|x_0 - y_k\| = \sum_{i=1}^{m}(\inf_{1\leqslant k\leqslant m} \|x_0 - y_k\|) \cdot e_i = \sum_{i=1}^{m} \|x_0 - y_i\| \cdot e_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \|e_i \cdot x_0 - e_i \cdot y_i\| = \sum_{i=1}^{m} \|e_i \cdot x_0 - e_i \cdot z_m\| = \sum_{i=1}^{m} e_i \cdot \|x_0 - z_m\| = \|x_0 - z_m\|$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Это означает, что $\|x_0 - z_m\| \downarrow \alpha$. Если $\alpha = 0$, то $z_m \xrightarrow{(bo)} x_0$ и $x_0 \in Y$, что неверно. Поэтому $\alpha \neq 0$. Таким образом, существуют ненулевой идемпотентный элемент $e_0 \in \nabla$ и число $m_0 \in \mathbb{N}$ такие, что $e_0 \leqslant s(\alpha)$ и $e_0 \cdot \alpha \leqslant e_0 \cdot \|x_0 - z_{m_0}\| \leqslant \dfrac{1}{1-\varepsilon} \cdot e_0 \cdot \alpha$. Положим $u_\varepsilon = (x_0 - z_{m_0}) \cdot i(\|x_0 - z_{m_0}\|)$, где $i(a)$ — инверсия элемента $a \in \mathcal{A}$ (см. раздел 2). Очевидно, что $u_\varepsilon \in (X \setminus Y)$ и $\|u_\varepsilon\| = s(x_0 - z_{m_0})$. При этом для любого $y \in Y$ имеем, что

$$\|u_\varepsilon - y\| = \|(x_0 - z_{m_0}) \cdot i(\|x_0 - z_{m_0}\|) - y\| \geqslant$$
$$\geqslant \|x_0 - z_{m_0} - y\|x_0 - z_{m_0}\| \cdot i(\|x_0 - z_{m_0}\|)\| \cdot i(\|x_0 - z_{m_0}\|) \cdot s(x_0 - z_{m_0}) \geqslant$$
$$\geqslant \alpha \cdot i(\|x_0 - z_{m_0}\|) \cdot e_0 \geqslant (1-\varepsilon) \cdot e_0.$$

□

С помощью теоремы 2.2 и утверждения 4.3 получаем следствие.

Следствие 4.5. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ — *банахов* $\mathcal{A}$-*модуль,* $Y \subset X$, $Y \neq X$, — *точный* (bo)-*замкнутый* l-*полный* $\mathcal{A}$-*подмодуль в* X, *а* $0 < \varepsilon < 1$. *Если* $e \cdot X \neq e \cdot Y$ *для любого ненулевого* $e \in \nabla$, *то существует* $u_\varepsilon \in (X \setminus Y)$ *такое, что* $\|u_\varepsilon\| = \mathbf{1}$ *и* $\|u_\varepsilon - y\| \geqslant (1-\varepsilon) \cdot \mathbf{1}$ *для всякого* $y \in Y$.

Следующая теорема является $\mathcal{A}$-версией теоремы Рисса для банаховых $\mathcal{A}$-модулей.

Теорема 4.8. *Пусть* $(X, \|\cdot\|)$ — *банахов* $\mathcal{A}$-*модуль. Следующие условия эквивалентны*:

(i) X — *конечномерный или* σ-*конечномерный* $\mathcal{A}$-*модуль*;

(ii) *единичный шар* $B_{\mathbf{1}}(X)$ *является циклически компактным.*

Доказательство. Импликация $(i) \Rightarrow (ii)$ следует из теоремы 4.2.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть X не является σ-конечномерным $\mathcal{A}$-модулем. Тогда существует ненулевой $e \in \nabla$ такой, что $\mathcal{A}$-модуль $e{\cdot}X$ обладает неконечным $\mathcal{A}$-базисом Гамеля $\{x_i\}_{i\in I}$. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{x_i\}_{i\in I}$, а $Y_n = \mathrm{Lin}\{x_1, \ldots, x_n, \mathcal{A}_e\}$ — это n-мерный $\mathcal{A}_e$-подмодуль в $e \cdot X$. Очевидно, что Y_n будет точным (bo)-замкнутым l-полным $\mathcal{A}_e$-модулем, при этом $Y_n \subsetneqq Y_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из следствия 4.5 имеем, что существуют $z_n \in Y_n$ такие, что $\|z_n\| = e$ и $\|z_{n+1} - z_n\| \geqslant \dfrac{1}{2}e$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Применяя теперь теорему 4.1, получаем, что $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является относительно циклически компактным множеством. Следовательно, единичный шар $B_{\mathbf{1}}(X)$ не будет циклически компактным, что противоречит условию (ii). Таким образом, X является конечномерным или σ-конечномерным $\mathcal{A}$-модулем. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ганиев И. Г., Худайбергенов К. К.* Конечномерные модули над кольцом измеримых функций// Узб. мат. ж. — 2004. — № 4. — С. 3–9.
2. *Каримов Ж. А.* Модули Капланского—Гильберта над алгеброй измеримых функций// Узб. мат. ж. — 2010. — № 4. — С. 74–81.
3. *Каримов Ж. А.* Эквивалентность норм в конечномерных $C_\infty(Q)$-модулях// Вестн. НУУз. — 2017. — № 2/1. — С. 100–108.

4. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и ее приложения. — Новосибирск: Наука, 1985.
5. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. — Киев: Iнст. мат. НАН Укр., 2007.
6. *Скорняков Л. А.* Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. — М.: Физматгиз, 1961.
7. *Чилин В. И.* Частично упорядоченные бэровские инволютивные алгебры// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. — 1985. — *27*. — С. 99–128.
8. *Чилин В. И., Каримов Ж. А.* Дизъюнктно полные $C_\infty(Q)$-модули// Владикавказ. мат. ж. — 2014. — *16*, № 2. — С. 69–78.
9. *Berberian S. K.* The regular ring of a finite $AW*$-algebra// Ann. Math. — 1957. — *65*, № 2. — C. 224–240.
10. *Chilin V. I., Karimov J. A.* Strictly homogeneous laterally complete modules// J. Phys. Conf. Ser. — 2016. — *697*. — 012002.
11. *Clifford A. N., Preston G. B.* The algebraic theory of semigroups. Vol. 1. — Providence: Am. Math. Soc., 1961.
12. *Kaplansky J.* Projections in Banach algebras// Ann. Math. — 1951. — *53*. — C. 235–249.
13. *Kaplansky J.* Algebras of type I// Ann. Math. — 1952. — *56*. — C. 450–472.
14. *Kaplansky J.* Modules over operator algebras// Amer. J. Math. — 1953. — *75*, № 4. — C. 839–858.
15. *Kusraev A. G.* Dominated operators. — Dordrecht: Kluwer, 2000.
16. *Maeda F.* Kontinuierliche Geometrien. — Berlin—Heidelberg: Springer, 1958.
17. *Saito K.* On the algebra of measurable operators for a general $AW*$-algebra, I// Tohoku Math. J. — 1969. — *21*, № 2. — C. 249–270.
18. *Saito K.* On the algebra of measurable operators for a general $AW*$-algebra, II// Tohoku Math. J. — 1971. — *23*, № 3. — C. 525–534.
19. *Segal I.* A noncommutative extension of abstract integration// Ann. Math. — 1953. — *57*, № 3. — C. 401–457.
20. *van der Waerdenm B. L.* Algebra. Vol. II. — New York: Springer, 1991.
21. *Vulikh B. Z.* Introduction to the theory of partially ordered spaces. — Groningen: Wolters-Noordhoff Sci. Publ., 1967.
22. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1973. — *74*, № 2. — C. 257–268.

В. И. Чилин
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ВУЗ городок, ул. Университетская, д. 4
E-mail: vladimirchil@gmail.com

Ж. А. Каримов
Институт математики им. В. И. Романовского, АН Респ. Узбекистан,
100170, г. Ташкент, Узбекистан, пр-т М. Улугбека, д. 81
E-mail: karimovja@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-1-137-155 UDC 517.98

The Cyclical Compactness in Banach $C_\infty(Q)$-Modules

© 2019 **V. I. Chilin, J. A. Karimov**

Abstract. In this paper, we study the class of laterally complete commutative unital regular algebras $\mathcal{A}$ over arbitrary fields. We introduce a notion of passport $\Gamma(X)$ for a faithful regular laterally complete $\mathcal{A}$-modules X, which consist of uniquely defined partition of unity in the Boolean algebra of all idempotents in $\mathcal{A}$ and of the set of pairwise different cardinal numbers. We prove that $\mathcal{A}$-modules X and Y are isomorphic if and only if $\Gamma(X) = \Gamma(Y)$. Further we study Banach $\mathcal{A}$-modules in the case $\mathcal{A} = C_\infty(Q)$ or $\mathcal{A} = C_\infty(Q) + i \cdot C_\infty(Q)$. We establish the equivalence of all norms in a finite-dimensional (respectively, σ-finite-dimensional) $\mathcal{A}$-module and prove an $\mathcal{A}$-version of Riesz Theorem, which gives the criterion of a finite-dimensionality (respectively, σ-finite-dimensionality) of a Banach $\mathcal{A}$-module.

REFERENCES

1. I. G. Ganiev and K. K. Khudaybergenov, “Konechnomernye moduli nad kol’tsom izmerimykh funktsiy” [Finite-dimensional modules over the ring of measurable functions], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek Math. J.], 2004, No. 4, 3–9 (in Russian).
2. Zh. A. Karimov, “Moduli Kaplanskogo—Gil’berta nad algebroy izmerimykh funktsiy” [Kaplanskii–Hilbert modules over the algebra of measurable functions], *Uzb. mat. zh.* [Uzbek Math. J.], 2010, No. 4, 74–81 (in Russian).
3. Zh. A. Karimov, “Ekvivalentnost’ norm v konechnomernykh $C_\infty(Q)$-modulyakh” [Equivalence of norms in finite-dimensional $C_\infty(Q)$-modules], *Vestn. NUUz* [Bull. Nat. Univ. Uzbek.], 2017, No. 2/1, 100–108 (in Russian).
4. A. G. Kusraev, *Vektornaya dvoystvennost’ i ee prilozheniya* [Vector Duality and Its Applications], Nauka, Novosibirsk, 1985 (in Russian).
5. M. A. Muratov and V. I. Chilin, *Algebry izmerimykh i lokal’no izmerimykh operatorov* [Algebras of Measurable and Locally Measurable Operators], Inst. mat. NAN Ukr., Kiev, 2007 (in Russian).
6. L. A. Skornyakov, *Dedekindovy struktury s dopolneniyami i regulyarnye kol’tsa* [Dedekind Complemented Structures and Regular Rings], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
7. V. I. Chilin, “Chastichno uporyadochennye berovskie involyutivnye algebry” [Partially ordered Baire involutive algebras], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. probl. mat. Nov. dostizh.* [Totals Sci. Tech. Ser. Contemp. Probl. Math. New Progr.], 1985, **27**, 99–128 (in Russian).
8. V. I. Chilin and Zh. A. Karimov, “Dizyunktno polnye $C_\infty(Q)$-moduli” [Disjunct complete $C_\infty(Q)$-modules], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz Math. J.], 2014, **16**, No. 2, 69–78 (in Russian).
9. S. K. Berberian, “The regular ring of a finite $AW*$-algebra,” *Ann. Math.*, 1957, **65**, No. 2, 224–240.
10. V. I. Chilin and J. A. Karimov, “Strictly homogeneous laterally complete modules,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2016, **697**, 012002.
11. A. N. Clifford and G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups. Vol. 1*, Am. Math. Soc., Providence, 1961.
12. J. Kaplansky, “Projections in Banach algebras,” *Ann. Math.*, 1951, **53**, 235–249.
13. J. Kaplansky, “Algebras of type I,” *Ann. Math.*, 1952, **56**, 450–472.
14. J. Kaplansky, “Modules over operator algebras,” *Amer. J. Math.*, 1953, **75**, No. 4, 839–858.
15. A. G. Kusraev, *Dominated operators*, Kluwer, Dordrecht, 2000.
16. F. Maeda, *Kontinuierliche Geometrien*, Springer, Berlin—Heidelberg, 1958.
17. K. Saito, “On the algebra of measurable operators for a general $AW*$-algebra, I,” *Tohoku Math. J.*, 1969, **21**, No. 2, 249–270.
18. K. Saito, “On the algebra of measurable operators for a general $AW*$-algebra, II,” *Tohoku Math. J.*, 1971, **23**, No. 3, 525–534.
19. I. Segal, “A noncommutative extension of abstract integration,” *Ann. Math.*, 1953, **57**, No. 3, 401–457.
20. B. L. van der Waerdenm, *Algebra. Vol. II*, Springer, New York, 1991.
21. B. Z. Vulikh, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Wolters-Noordhoff Sci. Publ., Groningen, 1967.

22. F. J. Yeadon, “Convergence of measurable operators,” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1973, **74**, No. 2, 257–268.

V. I. Chilin
National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: vladimirchil@gmail.com

J. A. Karimov
V. I. Romanovskii Institute of Mathematics, Acad. Sci. of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: karimovja@mail.ru