

УДК 517.958+519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-110-124

EDN: UIYIPG

О СШИВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НА ВИРТУАЛЬНОЙ ГРАНИЦЕ С ДОМИНИРОВАНИЕМ ГЕОМЕТРИИ ТЕЧЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

А. И. ИБРАГИМОВ^{1,2}, Е. М. ВАРФОЛОМЕЕВ³, Э. С. ЗАКИРОВ²

¹*Texas Tech University, Lubbock, USA*

²*Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия*

³*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

Аннотация. Изучается следующая обратная задача для уравнения в частных производных: найти геометрический параметр области нестационарной задачи, который соответствует численному. Важной особенностью является то, что интересующий нас блок дискретизации содержит источник (трещины), генерирующий поток в пористой среде. С индустриальной точки зрения мы строим аппарат для сшивающего численно найденного давления в резервуаре с аналитическим. Наша цель состоит в том, чтобы получить значение функции давления на трещине (или вблизи трещины) в зависимости от расстояния между множественными трещинами (ср. [14]). Для этого мы обобщаем вероятностный метод Эйнштейна (см. [5]) для броуновского движения для изучения транспорта жидкостей в пористой среде. Мы обобщаем парадигму Эйнштейна, связывая средние изменения плотности жидкости со скоростью жидкости, и выводим уравнение анизотропной диффузии в недивергентной форме, которое содержит член конвекции. Затем мы применяем закон Дарси и основные законы для потока сжимаемой жидкости и получаем нелинейные уравнения в частных производных для функции плотности. Мы используем преобразование Бернштейна для сведения исходной нелинейной задачи к линейной. Используемый метод позволяет использовать аналитическое решение стационарного состояния для интерпретации численно найденного давления на трещине, зависящего от времени, учитывающей одномерную геометрию потока в направлении «длинной» трещины.

Ключевые слова: поток в пористой среде, материальный баланс Эйнштейна, радиус блока скважины Писмана, параболическое уравнение в недивергентной форме.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследования поддержаны госзаданием Института проблем нефти и газа РАН, проект 122022800272-4.

Для цитирования: А. И. Ибрагимов, Е. М. Варфоломеев, Э. С. Закиров. О сшивании аналитического и численного решений задачи на виртуальной границе с доминированием геометрии течения в ограниченной области // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 110–124. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-110-124>

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье мы опишем парадигму материального баланса (МБ) в виде алгебраического набора уравнений и укажем предполагаемое применение для интерпретации численного распределения давления вдоль искусственной трещины, производящей пластовую жидкость. Математически эта проблема полностью понятна для вертикальной скважины и приводит к так называемому

радиусу блока скважины Писмана (см. недавнюю публикацию [9]; см. также [3, 12–15, 20, 21]), где представлен подробный обзор в классическом круговом случае). Это не означает, что решение уже найдено, но дает один из способов доказательства.

В этой статье мы рассматриваем численное моделирование потока и ставим цель интерпретировать численное решение с помощью аналитического решения, основанного на качественном понимании процесса течения жидкости к трещине-источнику. Пусть $P_{M,N,K}$ — $3D$ -матрица распределения давления в пласте, полученная в результате некоторого моделирования (численного решения). Задача иллюстрируется картиной течения к системе множественных трещин, представленной на рис. 1 (см. [11]).

Пусть симулятор резервуара на заданной сетке дает данные о резервуаре в ячейках $B_{m,n,k}$ для некоторых m, n, k , и пусть характерный размер ячейки будет Δ . В целом понятно, что при $\Delta \rightarrow 0$ решение $P_{M,N,K} \rightarrow u(x, y, z, t)$ сходится поточечно. Во многих случаях так оно и есть или ожидается, что так будет (см. обзор сходимости). Для этого требуется, чтобы сетка аппроксимировала границу области и граничные данные численного решения аппроксимировали граничные данные. Этого не наблюдается для многих задач в приближении подземных областей. В то же время, вдали от границы внутри области численное решение в каждой ячейке близко к аналитическому решению в центре ячейки. Большая проблема возникает, когда ячейка содержит возмущение в виде искусственной трещины. Предполагается, что скорость добычи жидкости фиксирована на участке трещины, и цель состоит в том, чтобы оценить давление и сравнить его с фактическим значением давления на трещине.

Задача состоит в следующем: найти геометрическое расстояние относительно источника, такое, чтобы значение давления удовлетворяло уравнению материального баланса. Эта проблема была хорошо изучена в случае радиального течения к скважине как к стоку (см. [9]). В случае потоков, не описываемых радиальной моделью, в некоторых симуляторах задача приближается суперпозицией радиальных (см. [22]). Очевидно, это приводит к значительным ошибкам. В настоящей статье мы решаем эту проблему, используя аналитическое решение, которое сводит поток к трещинам к квази-одномерному. Наша мотивация основана на недавней статье, которая качественно описывает составные потоки к семейству трещин (см. [11]).

В некотором смысле наш подход основан на наборах семейств решений, каждый из которых представляет качественное поведение потока. Мы считаем, что это многообещающий подход, который обеспечивает правильную интерпретацию моделируемых данных. Мы разбиваем область потока на ячейки, некоторые из которых содержат трещины как источник потока, а другие являются просто субъектами уравнения материального баланса. Наша цель — интерпретировать численное решение на ячейке в зависимости от местоположения трещины в ячейке (см. [11]).

В данной работе мы выводим уравнение переноса однофазной изотермической жидкости в пористой среде на основе парадигмы Эйнштейна броуновского движения частиц. С нашей точки зрения, это лучше соответствует нашей процедуре интерпретации.

Моделирование фильтрации в пористой среде имеет долгую историю изучения и традиционно базируется на «трех китах» (см. [10]).

1. Уравнение неразрывности (уравнение материального баланса, в дивергентной форме), связывающее скорость и плотность жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.1)$$

2. Основное уравнение, связывающее скорость и градиент давления:

$$F(\vec{v}, \nabla p) = 0. \quad (1.2)$$

3. Функциональное уравнение состояния, которое функционально связывает два основных параметра — давление и плотность:

$$F(\rho; p) = 0. \quad (1.3)$$

Это приводит к параболическому (линейному или квазилинейному, вырожденному) уравнению относительно функции давления в дивергентной форме (см. [1]). Все три ограничения выше могут быть подвержены стохастическим возмущениям. Например, принято рассматривать (см. [16]) возмущение скорости из-за неоднородности в среде, и можно использовать методы Монте-Карло

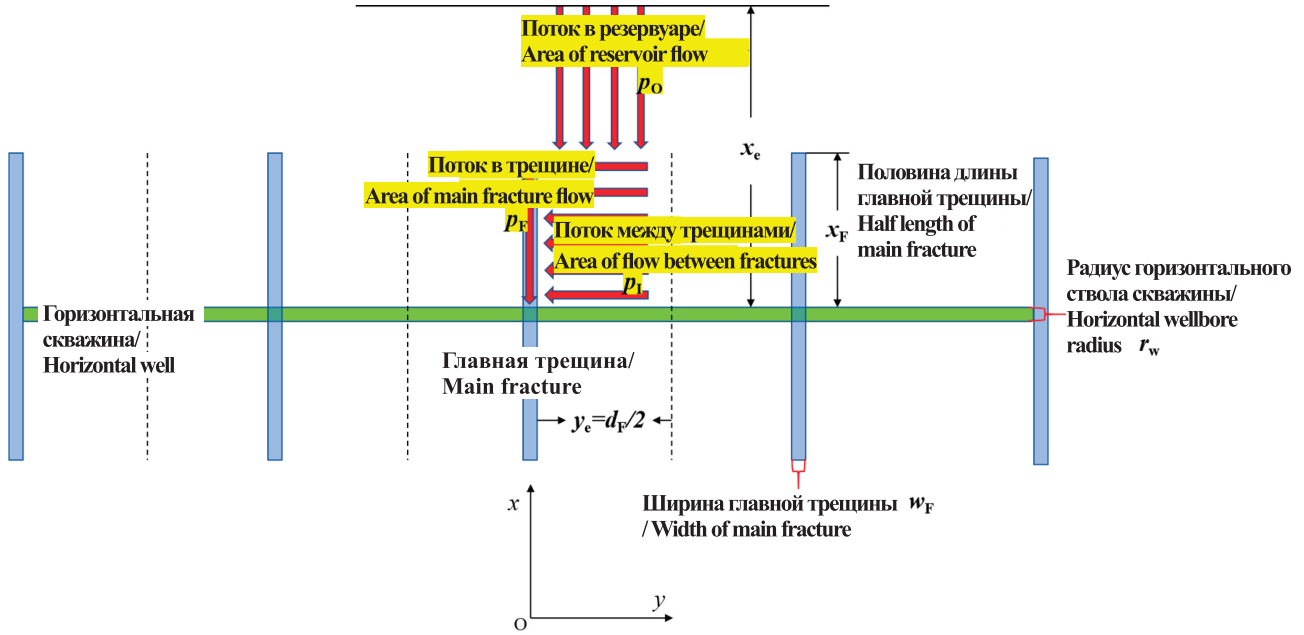


РИС. 1. Качественная схема явления

FIG. 1. Qualitative picture of interest

вдоль основного тренда для генерации случайных данных. Алгоритм Монте-Карло и его обобщение используются для моделирования случайности в термодинамическом уравнении (см. [18]), однако это не является темой нашего исследования. Мы следуем недооцененной работе Эйнштейна с целью построения потока в среде на основе мысленного эксперимента над концепцией скачков частицы, которые для нас являются событиями.

В данной работе мы построим уравнение материального баланса случайного блуждания частиц в среде, подверженной диффузии и дрейфу. Для этого мы описываем материальный баланс с помощью уравнения типа Эйнштейна, в котором плотность частиц в пространственной переменной в фиксированной точке в фиксированное время будет функцией зависимых переменных, которые будут ключевыми характеристиками. Согласно парадигме Эйнштейна, события заключаются в длине скачков за интервал времени τ как входной коэффициент и их частоте $\varphi_\tau(\vec{\Delta}(x, t))$. Следуя парадигме Эйнштейна, мы предлагаем модель переноса жидкости в виде совокупности частиц, составляющих жидкость в среде, характеризующейся функцией плотности, которая в любой момент времени t изменяется в пространстве x случайным образом в пределах интервала времени τ . Параметр τ как входная переменная размерности времени фиксирован и остается неизменным в любой момент времени и в любой точке пространства x . Функция распределения плотности вероятности (РПВ) $\varphi_\tau(\vec{\Delta}(x, t))$ характеризует как перенос (конвекцию или дрейф) в некотором направлении, так и диффузию с помощью коэффициентов матрицы. Функция РПВ — это еще один параметр, который зависит от τ и определяет движение жидкости \mathcal{F} в среде \mathcal{M} . Как мы уже упоминали, жидкость \mathcal{F} и среда \mathcal{M} сами могут быть подвержены случайности, но в статье это не рассматривается. Продолжая мысленный эксперимент Эйнштейна, после нескольких шагов мы приходим к уравнению недивергентного типа с дрейфом для гладкой функции $\rho(x, t)$ с коэффициентами, образующими составной оператор с матрицей диффузии и конвекции вида

$$\mathcal{L}\rho(x, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t} - \langle \tau^{-1} A, D^2 \rho \rangle - \frac{\Delta_e}{\tau} \cdot \nabla \rho.$$

Выше $D^2 \rho$ — матрица Гессе, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в \mathbb{R}^{n^2} между двумя матрицами $n \times n$. Здесь $A(x, t)$ и Δ_e — функции от $((x, t); \dots)$; они представляют собой стандартное отклонение и ожидаемое значение случайного процесса «скачков» частиц, которые приводят к изменению плотности и, очевидно, зависят от $\varphi_\tau(x, t)$. Поэтому естественно исследовать уравнение с внешней силой: $\mathcal{L}\rho = \mathcal{R}(x, t)$.

Одной из целей этого проекта является построение модели в терминах параболического уравнения в недивергентной форме и применение методов, разработанных Ландисом, для изучения качественных свойств решения этого уравнения. Детали формулировки модели уравнения в частных производных представлены в разделе 2. Мы вводим основные предположения в пункте 2.2. Одно из них — гипотеза 2.1 о том, что скорость жидкости в среде «матрично пропорциональна» ожидаемому значению длины прыжков частиц:

$$M_0 \vec{v} = \frac{1}{\tau} \int \vec{\Delta} \varphi_\tau(\vec{\Delta}(x, t)) d\Delta_1 \dots \Delta_n.$$

Далее мы накладываем условие неотрицательности на матрицу M_0 (см. [6]). Эта гипотеза позволяет связать микроскопический транспорт с макроскопическим, что является ключом к пониманию и разработке различных типов моделей.

В данной статье мы рассматриваем постулат Дарси для макроскопических потоков и связываем скорость потока только с функцией плотности. При таком предположении мы приходим к квазилинейному параболическому уравнению для функции плотности с квадратичной нелинейностью градиента. Используя нелинейную подстановку типа Коула—Хопфа, мы сводим исходное уравнение, нелинейное относительно как градиента, так и решения, к нелинейному, но только относительно самого решения. Парадигма Эйнштейна хорошо представлена в [6].

Замечание 1.1. Авторы осознают недостатки предложенной модели. Очевидно, для подтверждения мысленного эксперимента требуется больше данных и опытов. Возможно, он слишком амбициозен, можно сравнить это с так называемой теорией корневого давления, где методы интерпретации существуют уже много десятилетий, но по-прежнему требуются дополнительные исследования чтобы понять, почему высокое дерево может транспортировать воду наверх к листьям (см. [19]). Мысленный эксперимент Эйнштейна дает возможный ответ на этот вопрос. А именно, предположим, что в течение временного интервала T_0 каналы из-за капиллярного давления транспортируют воду от корней к высоте дерева на уровне H_0 . Затем она «расширится» из-за диффузии по каналам внутри дерева во всех направлениях и создаст мини-резервуар U_0 высотой порядка H_0 . Затем процесс транспортировки продолжится до следующего уровня H_1 и т. д. Конечно, потребуется больше экспериментальных подтверждений этого гипотетического процесса, мы просто выдвигаем эту идею для изучения научным сообществом.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы поэтапно выводим модель: самое общее уравнение (2.8), уравнение диффузии с конвективным членом (2.16) при гипотезе 2.1, частные уравнения пористой среды (2.18), (2.17) с учетом анизотропного закона Дарси (2.13). В следующем разделе мы предлагаем метод для реализации качественного поведения потока: одномерного по направлению к трещине и радиального вдали от системы трещины в целом.

Мы предполагаем, что на поток не действуют силы гравитации, и сводим исходное уравнение к недивергентному линейному уравнению (см. [6]).

2. ВЫВОД МОДЕЛЕЙ

2.1. Общие уравнения. Предположим, что $\rho(x, t)$ — функция плотности в единичном объеме в точке x в момент времени t ($-\infty < t < \infty$), где $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\tau > 0$ — временной интервал в качестве входного параметра в момент наблюдения в точке x , и этот параметр одинаков для всего времени и пространства.

Пусть $\rho(x + \Delta, t)$ — изменение плотности, которое приводит к изменению в момент времени t в точке пространства x из-за перемещения на расстояние Δ частиц, составляющих материю.

Предположение 2.1. Пусть $\rho(x, t \pm \tau)$ — значение плотности в точке x в момент времени $t \pm \tau$. Знак перед параметром τ выбирается в зависимости от того, является ли «жидкость» (или любой интересующий нас объект) «средофобной» («+») или «средофильной» («−») в данной среде.

Процесс на отрезке времени $[t, t + \tau]$ характеризуется многомерной РПВ, которую можно представить другим способом.

Предположение 2.2. Пусть $\phi(x, t, \Delta; \tau)$ для $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n$ — распределение плотности вероятности процесса движения, и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t, \Delta; \tau) d\zeta = 1.$$

Для определенности предположим, что перед τ стоит знак «+». Тогда уравнение материального баланса Эйнштейна принимает вид

$$\rho(x, t + \tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x + \Delta, t) \phi(x, t, \Delta; \tau) d\Delta. \quad (2.1)$$

Замечание 2.1. Обратим внимание, что уравнение Эйнштейна представляет собой модель случайного процесса, определяемого относительно входных параметров τ и функции плотности вероятности ϕ . В общем случае параметр τ зависит от t и x . Но, как мы увидим далее, это приведет к слишком большому усложнению, поскольку τ находится внутри неизвестной функции плотности ($\rho(x, t + \tau)$). Поэтому мы *предполагаем*, что τ является входной характеристикой жидкости и ее фильтрационной способностью в среде, поскольку время и пространство являются независимыми параметрами.

Предположение 2.3. Далее предположим, что τ фиксировано и достаточно мало, так что для всех t

$$\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \rho(x, t + \tau) - \rho(x, t). \quad (2.2)$$

Кроме того, для заданного $\tau > 0$ скалярная функция РПВ $\phi_\tau(\zeta, x, t, \dots)$ зависит от многих переменных и такова, что:

1. параметр τ является основным, он характеризует жидкость;
2. функция РПВ $\phi_\tau(x, t, \zeta)$ как функция событий характеризует пористую среду относительно заданной жидкости, текущей и «сжимающейся» внутри среды (длина движения частиц, составляющих нашу жидкость), и является функцией вектора ζ ;
3. эта функция РПВ может характеризовать:
 - неоднородность среды,
 - геометрию потока,
 - диффузию вдоль движения,
 - кинетику движения и ее зависимость от градиента давления,
 - и т. д.;
4. все моменты выше 2-го игнорируются относительно первого и второго моментов.

Для простоты обозначим $\phi(x, t, \zeta) = \phi(x, t, \zeta; \tau)$.

Определение 2.1. Введем функции коэффициентов

$$\bar{a}_{ij}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_i \zeta_j \phi(x, t, \zeta) d\zeta, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (2.3)$$

матрицу размера $n \times n$

$$\bar{A}(x, t) = (\bar{a}_{ij}(x, t))_{1 \leq i, j \leq n} \quad (2.4)$$

и вектор

$$E(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t, \zeta) \zeta d\zeta. \quad (2.5)$$

Обратим внимание, что матрица $\bar{A}(x, t)$ симметрична, и для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\sum_{i,j=1}^n \xi_i \bar{a}_{ij}(x, t) \xi_j = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi \cdot \zeta|^2 \phi(x, t, \zeta) d\zeta \geq 0.$$

Следовательно, матрица $\bar{A}(x, t)$ является положительно полуопределенной.

Замечание 2.2. Рассмотрим случай взаимно независимых событий для скачков, когда

$$\phi(x, t, \zeta) = \phi_1(x, t, \zeta_1) \dots \phi_n(x, t, \zeta_n), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \quad (2.6)$$

при $\int_{\mathbb{R}} \phi_i(x, t, s) ds = 1$, для $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} \sigma_i \sigma_j & \text{при } i \neq j, \\ \bar{\sigma}_i^2 & \text{при } i = j, \end{cases}$$

где

$$\sigma_i(x, t) = \int_{\mathbb{R}} s \phi_i(x, t, s) ds, \quad \bar{\sigma}_i(x, t) = \left(\int_{\mathbb{R}} s^2 \phi_i(x, t, s) ds \right)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Предположим, кроме того, что каждая функция $\phi_i(s, x, t)$, $1 \leq i \leq n$, четна относительно s . Тогда каждое $\sigma_i = 0$ и, следовательно, $\bar{A}(x, t)$ является диагональной матрицей $\text{diag}[\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n]$. Поскольку каждое $\bar{\sigma}_i$ положительно, в этом случае матрица $\bar{A}(x, t)$ положительно определена. Более того, получаем, что $E(x, t) = 0$.

Предположим, что $\rho \in C^3(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим малое τ и предположим, что носитель функции $\zeta \mapsto \phi(x, t, \zeta)$ находится в малом шаре с центром в начале координат. С помощью разложения Тейлора функции $\zeta \mapsto \rho(x + \zeta, t)$ для малых $|\zeta|$ с точностью до квадратичных членов имеем приближение

$$\rho(x + \zeta, t) \approx \rho(x, t) + \zeta \cdot \nabla \rho(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \zeta_i \zeta_j \rho_{x_i x_j}(x, t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho(x, t + \tau) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x + \zeta, t) \phi(\tau, \zeta, x, t) d\zeta \approx \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x, t) \phi(\tau, \zeta, x, t) d\zeta + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \zeta \cdot \nabla \rho(x, t) \phi(\tau, \zeta, x, t) d\zeta + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_i \zeta_j \rho_{x_i x_j}(x, t) \phi(\tau, \zeta, x, t) d\zeta = \\ &= \rho(x, t) + E \cdot \nabla \rho + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Объединяя это с (2.2) и заменяя приближенное равенство точным, получаем

$$\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} + E \cdot \nabla \rho. \quad (2.8)$$

Аналогичное уравнение можно получить с помощью стохастических методов (см. [17]).

Замечание 2.3. Параметр τ может зависеть от самого решения, и это может привести к такому явлению, как конечная скорость распространения (подробнее см. в [8]).

2.2. Основное предположение.

Гипотеза 2.1. Предположим, что ожидаемое значение плотности потока относительно параметра τ пропорционально скорости потока жидкости:

$$M_0 v(x, t) = \frac{E(x, t)}{\tau}. \quad (2.9)$$

Здесь $M_0(x, t)$ — безразмерная константа, которую для простоты мы предполагаем равной 1.

Фактически, матрица M_0 может зависеть от РПВ $\phi(x, t, \dots)$ через усреднение и само ожидаемое значение. Обратим внимание, что это фундаментальная гипотеза, которая связывает микроскопические особенности переноса частиц в среде и макроскопические свойства потока, такие как скорость в среде и/или на открытом пространстве.

Из (2.8) и (2.9) получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2\tau} \bar{a}_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} + (M_0 v) \cdot \nabla \rho. \quad (2.10)$$

Для $1 \leq i, j \leq n$ положим $a_{ij}(x, t) = (2\tau)^{-1} \bar{a}_{ij}(x, t)$ и определим матрицу

$$A(x, t) = (a_{ij}(x, t))_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{1}{2\tau} \bar{A}(x, t). \quad (2.11)$$

Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle + (M_0(x, t) v(x, t)) \cdot \nabla \rho. \quad (2.12)$$

В этом уравнении слагаемое $\langle A(x, t), D^2 \rho \rangle$ представляет диффузию в недивергентной форме, а слагаемое $(M_0(x, t) v(x, t)) \cdot \nabla \rho$ представляет конвекцию/перенос.

2.3. Движение жидкости в пористой среде (закон Дарси). Учтем анизотропный закон Дарси:

$$v = -\bar{K}(x, t) \nabla p, \quad (2.13)$$

где $\bar{K}(x, t)$ — матрица размера $n \times n$. Из (2.12) и (2.13) получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - (K(x, t) \nabla p) \cdot \nabla \rho, \quad (2.14)$$

где

$$K(x, t) = M_0(x, t) \bar{K}(x, t), \quad B(x, t) = M_0(x, t) \bar{K}(x, t) \vec{g}. \quad (2.15)$$

Учтем основной закон:

$$p = P(\rho),$$

тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - P'(\rho) (K \nabla \rho) \cdot \nabla \rho + \rho B \cdot \nabla \rho. \quad (2.16)$$

Случай слабосжимаемых жидкостей. Имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = \kappa = \text{const} \ll 1.$$

Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - \frac{1}{\kappa \rho} (K(x, t) \nabla \rho) \cdot \nabla \rho + \rho B(x, t) \cdot \nabla \rho. \quad (2.17)$$

Случай изоэнтропического течения газа. Имеем $p = c\rho^\gamma$ с удельной теплоемкостью $\gamma \geq 1$,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - \gamma \rho^{\gamma-1} (K(x, t) \nabla \rho) \cdot \nabla \rho + \rho B(x, t) \cdot \nabla \rho. \quad (2.18)$$

Замечание 2.4. Сравнение со стандартным уравнением пористой среды: при $m > 1$

$$u_t = \Delta(u^m) = \nabla \cdot (m u^{m-1} \nabla u) = m u^{m-1} \Delta u + m(m-1) u^{m-2} |\nabla u|^2.$$

Обратим внимание, что здесь член $|\nabla u|^2$ имеет положительный коэффициент $m(m-1)$, тогда как в нашей модели он имеет отрицательный коэффициент. Это серьезное отклонение от стандартных моделей. Авторы, по сути, не полностью могут объяснить эту особенность модели. Однако, поскольку вывод настолько естествен и прямолинеен, мы просто выдвигаем эту идею для изучения научным сообществом.

В следующих двух разделах мы сосредоточимся исключительно на математическом аспекте уравнения (2.16).

Предположение 2.4. Далее предположим, что τ фиксировано и достаточно мало, так что для всех t

$$\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} \approx \rho(\tau, x, t + \tau) - \rho(\tau, x, t). \quad (2.19)$$

Более того, функция ρ является гладкой, а функция ϕ такова, что константы M и m удовлетворяют ограничениям

$$\left| \int \Delta^{2k+1} \phi(\Delta, \dots) \right| \ll \left| \int \Delta \phi(\Delta, \dots) \right| \quad \text{для всех } k \geq 1, \quad (2.20)$$

$$\left| \int \Delta^{2k} \phi(\Delta, \dots) \right| \ll \int \Delta^2 \phi(\Delta, \dots) \quad \text{для всех } k \geq 2. \quad (2.21)$$

При всех предположениях 2.4 из разложения Тейлора следует, что уравнение материального баланса Эйнштейна можно аппроксимировать в виде

$$\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\sigma(x, t, \tau)}{2} (\rho_{xx} + \rho_{yy} + \dots) + \vec{\Delta}_e(x, t, \tau) \cdot \nabla \rho. \quad (2.22)$$

Здесь

$$D = D(x, t, \tau) = \frac{1}{\tau} \frac{\sigma(x)}{2}, \quad (2.23)$$

$$\sigma(x, t, \tau) = \int \vec{\Delta} \cdot \vec{\Delta} \phi(\tau, \Delta, x, t) d\Delta, \quad (2.24)$$

$$\vec{\Delta}_e(x, t, \tau) = \int \vec{\Delta} \cdot \phi(\tau, \Delta, x, t) d\Delta. \quad (2.25)$$

Предположение 2.5. В общем случае функция плотности однокомпонентной однофазной жидкости зависит от давления и температуры. Здесь мы предполагаем, что жидкость изотермична и плотность ρ является функцией только давления p :

$$\rho = \rho(p), \quad (2.26)$$

тогда уравнение 2.22 примет вид

$$\rho_p \tau \frac{\partial p}{\partial t} = \rho_p \cdot \frac{\sigma(x, t, \tau)}{2} \nabla \cdot \nabla p + \rho_{pp} \cdot \frac{\sigma(x, t, \tau)}{2} (\nabla p \cdot \nabla p) + \vec{\Delta}_e(x) \rho_p \cdot \nabla p. \quad (2.27)$$

2.4. Специальная линеаризация для класса уравнений в частных производных (2.27). Пусть

$$A(p) = \frac{\rho_{pp}}{\rho_p}. \quad (2.28)$$

Обратим внимание, что чисто математически имеется простое соотношение, позволяющее удалить член $|\nabla_x p|^2$ в уравнении (2.27). Другие коэффициенты (параметры) процесса, как можно увидеть, могут быть весьма нелинейными и зависеть от пространственных переменных.

Обозначим

$$D = D(x, t, \dots) = \frac{\sigma(x, t, \dots)}{2\tau} \neq 0 \quad \text{и} \quad b = \frac{\Delta_e}{\tau}. \quad (2.29)$$

Тогда уравнение (2.27) можно переписать в виде $L_0(p, p) = 0$:

$$L_0(p, \cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla(\cdot) - DA(p) \nabla(\cdot) \nabla(\cdot) - \vec{b} \cdot \nabla(\cdot). \quad (2.30)$$

Очевидно, гладкая функция $p(x, t)$ ($p \neq \text{const}$) является решением уравнения

$$L_0(p, p) = 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial p}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla p - \vec{b} \cdot \nabla p = DA(p) \nabla p \cdot \nabla p. \quad (2.31)$$

Пусть функция f такова, что

$$A(p) \frac{df(p)}{dp} - \frac{d^2 f(p)}{dp^2} = 0. \quad (2.32)$$

Тогда функция $u(x, t) = f(p(x, t))$ является решением квазилинейного уравнения

$$L_u(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla u - \vec{b} \cdot \nabla u = 0 \quad (2.33)$$

тогда и только тогда, когда

$$L_0(p, p) = 0. \quad (2.34)$$

В общем случае, если

$$\int_0^p A(s) ds < \infty, \quad (2.35)$$

то мы имеем следующее представление u как решения при условии, что функция p является решением уравнения $L_0(p, p) = 0$:

$$u = f(p) = \exp \left(\int_0^p A(s) ds \right). \quad (2.36)$$

Например, если жидкость слабо сжимаема, то $u = Ce^{\kappa p}$ и $p = \frac{1}{\kappa} \ln u + \text{const}$. Здесь $p \geq 0$ и $u \geq 1$. Многие построения, которые используются далее в этой статье, хорошо работают для класса уравнений в частных производных, которые могут быть получены из результатов этого раздела 2.4. Сформулируем вышеприведенное наблюдение в терминах следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Предположим, что*

$$\int_0^p A(s) ds < \infty. \quad (2.37)$$

Пусть p является решением уравнения

$$L_0(p, p) = \frac{\partial p}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla p - DA(p) \nabla p \cdot \nabla p - \vec{b} \cdot \nabla p = 0. \quad (2.38)$$

Тогда функция

$$u = f(p) \quad (2.39)$$

является решением уравнения

$$L_u(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla u - \vec{b} \cdot \nabla u = 0 \quad (2.40)$$

тогда и только тогда, когда

$$A(s) \frac{df(s)}{ds} - \frac{d^2 f(s)}{ds^2} = 0. \quad (2.41)$$

Доказательство. Пусть

$$u = f(p),$$

тогда доказательство теоремы следует из цепочки тождеств

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla u - \vec{b} \cdot \nabla u &= \frac{df}{dp} \left[\frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla u - \vec{b} \cdot \nabla u \right] - D \frac{d^2 f}{dp^2} \cdot \nabla u \cdot \nabla u = \\ &= DA(p) \frac{df}{dp} \cdot (\nabla u \cdot \nabla u) - D \frac{d^2 f}{dp^2} \cdot (\nabla u \cdot \nabla u) = \left(A(p) \cdot \frac{df}{dp} - \frac{d^2 f}{dp^2} \right) \cdot D (\nabla u \cdot \nabla u). \end{aligned}$$

□

2.5. Уравнение Дарси для скорости без учета глобальных сил. В этом пункте мы, частично повторяя приведенные выше построения, наглядно устанавливаем связь между подходом Эйнштейна и классическим методом, основанным на уравнении непрерывности (см. [10]).

Предположим, что поле скоростей \vec{b} подчиняется классическому уравнению Дарси без учета гравитации

$$\vec{b} = \vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (2.42)$$

где k — проницаемость, а μ — вязкость.

Рассмотрим давление $p(x, t)$ как функцию плотности:

$$p = F_0(\rho) = \Phi^{-1}(\rho), \quad (2.43)$$

или как функцию от вспомогательной функции u :

$$p = F(u) = f^{-1}(u). \quad (2.44)$$

Тогда функция давления $p(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla p - \frac{k}{\mu} \nabla p \cdot \nabla p = DA(p) \nabla p \cdot \nabla p. \quad (2.45)$$

Мы доказали в теореме 2.1, что уравнение для давления можно свести к уравнению для математической функции u , определенной в (2.39). Когда мы говорим «математическая функция», мы имеем в виду, что она не имеет физического смысла.

Тогда это уравнение примет вид

$$L_u(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla u - \frac{1}{\frac{df}{dp}|_{p=F(u)}} \nabla u \cdot \nabla u = 0. \quad (2.46)$$

Перепишем уравнение (2.46) в коэффициентной форме

$$L_u(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla u - B(u) \nabla u \cdot \nabla u = 0. \quad (2.47)$$

Здесь $B(u)$ определяется как структурная функция

$$B(u) = \frac{1}{\frac{df}{dp}|_{p=F(u)}}. \quad (2.48)$$

Теорема 2.2. *Предположим, что u является ограниченным решением квазилинейного уравнения (2.47). Тогда $w(x, t) = W(u)$ является функцией от (x, t) , где $W(u)$ является функцией от u , а также удовлетворяет уравнению диффузии*

$$\frac{\partial w}{\partial t} - D \nabla^2 w = 0 \quad (2.49)$$

тогда и только тогда, когда $W(u)$ является решением уравнения

$$B(u) \frac{dW}{du} - D \frac{d^2 W}{du^2} = 0. \quad (2.50)$$

Доказательство. Доказательство следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} - D \nabla \cdot \nabla W &= \frac{dW}{du} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{dW}{du} D \nabla \cdot \nabla u - \frac{d^2 W}{du^2} D \nabla u \cdot \nabla u = \\ &= (\nabla u \cdot \nabla u) B(u) \frac{dW}{du} - \frac{d^2 W}{du^2} D (\nabla u \cdot \nabla u) = \nabla u \cdot \nabla u \left[B(u) \frac{dW}{du} - \frac{d^2 W}{du^2} D \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Тогда утверждение теоремы следует из предположения, что $W(u)$ является решением уравнения (2.50). \square

3. ОДНОМЕРНЫЙ ПОТОК В НАПРАВЛЕНИИ ТРЕЩИНЫ ДЛЯ ПСЕВДОСТАЦИОНАРНЫХ И СТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ

Мы показали, что моделирование потоков жидкости в пористых средах после линеаризации может быть сведено к линейному параболическому уравнению. Это позволяет нам применить аппарат, разработанный в [7]. Предположим, что $D = 1$, тогда моделирование течения к трещине качественно можно считать одномерным. Благодаря сведению к линейному параболическому уравнению мы можем рассматривать дискретизацию области потока вблизи трещины как одномерную сетку. Мы введем два типа процессов: стационарное состояние (СС) и псевдостационарное состояние (ПСС). Модельную задачу стационарного состояния в области течения можно записать как

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p = 0 \quad \text{в области } U \quad (3.1)$$

с граничными условиями для модельного случая: скорость добычи на трещине $x = 0$ равна 1, а давление $p(x) = u(x)$ на внешней границе области задано. Краевая задача может быть записана следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0 \quad \text{в области } U. \quad (3.2)$$

Здесь $U = [0, R_e]$, и соответствующие краевые условия для уравнения (3.2) имеют вид

$$u(R_e) = p_e, \quad (3.3)$$

$$u_x = -1. \quad (3.4)$$

Тогда решение краевой задачи получим в форме

$$u(x) = -x + p_e. \quad (3.5)$$

Уравнение материального баланса в случае стационарного состояния записывается в виде

$$MB_{ss}(p) = \frac{p(\frac{\Delta}{2}) - 2p(\frac{\Delta}{2} + \Delta) + p(\frac{\Delta}{2} + 2\Delta)}{\Delta^2} = 0, \quad (3.6)$$

то есть

$$\frac{p(\frac{\Delta}{2}) - 2p(\frac{3\Delta}{2}) + p(\frac{5\Delta}{2})}{\Delta^2} = 0. \quad (3.7)$$

В случае стационарного состояния цель состоит в том, чтобы найти R_0^{ss} такое, чтобы решение задачи (3.2)–(3.4) удовлетворяло материальному балансу вида

$$\frac{u(R_0^{ss}) - 2u(\frac{\Delta}{2} + \Delta) + u(\frac{\Delta}{2} + 2\Delta)}{\Delta^2} = 0. \quad (3.8)$$

Нетрудно видеть, что для одномерного случая в силу уравнения (3.5)

$$R_0^{ss} = \frac{\Delta}{2}. \quad (3.9)$$

Очевидно, что случай стационарного состояния не учитывает интерференцию между трещинами, поэтому требуется более точная интерпретация потока в направлении множественных трещин. По-видимому, это может быть учтено так называемым псевдостационарным режимом добычи, когда в «середине» между двумя продуктивными трещинами как источниками поток отсутствует. В этом случае уравнение аналитической задачи имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} w = \frac{1}{R_e} \quad \text{в области } U. \quad (3.10)$$

Здесь $U = [0, R_e]$, и соответствующие краевые условия для уравнения (3.2) примут вид

$$w_x \Big|_{x=R_e} = 0, \quad (3.11)$$

$$w_x \Big|_{x=0} = -1. \quad (3.12)$$

Уравнение материального баланса для случая ПСС в терминах конечно-разностной аппроксимации с учетом геометрии течения принимает вид

$$MB_{pss}(p) = \frac{p(\frac{\Delta}{2}) - 2p(\frac{\Delta}{2} + \Delta) + p(\frac{\Delta}{2} + 2\Delta)}{\Delta^2} = \alpha \frac{1}{R_e}. \quad (3.13)$$

Подчеркнем еще раз, что конечно-разностное уравнение материального баланса не включает граничные данные, считается фиксированным для любой Δ и сходится к аналитическому решению при $\Delta \rightarrow 0$. Решение в случае ПСС по определению ищется для уравнения в области течения с конкретным граничным условием, и поэтому имеет вид

$$w(x) = Ax^2 + Bx, \quad (3.14)$$

где

$$A = \frac{1}{2R_e}, \quad (3.15)$$

$$\frac{B}{A} = -2R_e, \quad B = -1. \quad (3.16)$$

И снова, как и в случае стационарного состояния, задача ставится следующим образом:

В случае псевдостационарного состояния требуется найти R_0^{pss} такое, что стационарная часть ПСС является решением

$$\frac{w(R_{(0,pss)}) - 2w(\frac{\Delta}{2} + \Delta) + w(\frac{\Delta}{2} + 2\Delta)}{\Delta^2} = \alpha \frac{1}{R_e}. \quad (3.17)$$

Учитывая (3.14), получим

$$A \cdot (R_{(0,pss)})^2 + B \cdot (R_{(0,pss)}) - 2 \left(A \left(\frac{3\Delta}{2} \right)^2 + B \frac{3\Delta}{2} \right) + A \left(\frac{5\Delta}{2} \right)^2 + B \left(\frac{5\Delta}{2} \right) = \alpha \frac{\Delta^2}{R_e}. \quad (3.18)$$

Принимая во внимание (3.16), отсюда будем иметь

$$-\frac{1}{2R_e} (R_{(0,pss)})^2 + R_{(0,pss)} - 2 \left(-\frac{1}{2R_e} \left(\frac{3\Delta}{2} \right)^2 + \frac{3\Delta}{2} \right) - \frac{1}{2R_e} \left(\frac{5\Delta}{2} \right)^2 + \left(\frac{5\Delta}{2} \right) + \alpha \frac{\Delta^2}{1 \cdot R_e} = 0. \quad (3.19)$$

По сути, мы имеем квадратное уравнение относительно $x = R_{(0,pss)}$:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (3.20)$$

где

$$a = -\frac{1}{2R_e}, \quad (3.21)$$

$$b = \frac{1}{1} = 1, \quad (3.22)$$

$$c = -2 \left(-\frac{1}{2R_e} \left(\frac{3\Delta}{2} \right)^2 + \frac{3\Delta}{2} \right) - \frac{1}{2R_e} \left(\frac{5\Delta}{2} \right)^2 + \left(\frac{5\Delta}{2} \right) + \alpha \frac{\Delta^2}{1 \cdot R_e}. \quad (3.23)$$

Следовательно, корень можно представить в виде

$$x = R_{(0,pss)} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -R_e \cdot \left[-1 + \sqrt{D(\alpha, R_e, \Delta)} \right]. \quad (3.24)$$

Здесь дискриминант выражается как

$$\begin{aligned} D(\alpha, R_e, \Delta) &= 1 - 4 \frac{1}{-2R_e} \left[-2 \left(-\frac{1}{2R_e} \left(\frac{3\Delta}{2} \right)^2 + \frac{3\Delta}{2} \right) - \frac{1}{2R_e} \left(\frac{5\Delta}{2} \right)^2 + \frac{5\Delta}{2} + \alpha \frac{\Delta^2}{R_e} \right] = \\ &= 1 - \Delta \cdot R_e + \frac{\Delta^2}{4} (8\alpha - 7). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тогда мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 3.1.

$$R_{(0,ps)} = \begin{cases} \frac{\Delta - \frac{\Delta^2}{4R_e}(8\alpha - 7)}{1 + \sqrt{1 - \frac{\Delta}{R_e} + \frac{\Delta^2}{4R_e^2}(8\alpha - 7)}}, & \alpha \neq 1; \\ \frac{\Delta}{2}, & \alpha = 1. \end{cases} \quad (3.26)$$

Замечание 3.1. Отметим, что уравнение материального баланса Эйнштейна не связано с граничными условиями, поэтому константа α в (3.17) не связана с граничным условием.

В заключение отметим, что в этой работе можно использовать ПСС-решение для интерпретации величины давления в точках блока, содержащего трещину, и в отличие от СС-решения оно будет учитывать влияние расстояния на величину давления. Это имеет решающее значение для более точной оценки результата численного моделирования процесса гидрогенизационного восстановления на основе качественной картины потоков вблизи источника добычи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aronson D. G. The porous medium equation// В сб.: «Nonlinear Diffusion Problems». — Berlin–Heidelberg: Springer, 1986. — С. 1–46.
2. Aulisa E., Bloshanskaya L., Ibragimov A. Well productivity index for compressible fluids and gases// Evol. Equ. Control Theory. — 2016. — 5, № 1. — С. 1–36.
3. Dake L. P. Fundamentals of Reservoir Engineering. — Amsterdam–London–New York–Tokyo: Elsevier, 1985.
4. Ding Y., Renard G., Weill L. Representation of wells in numerical reservoir simulation// SPE Reservoir Eval. Engrg. — 1998. — 1, № 1. — С. 18–23.
5. A. Einstein Über die von der molekularkinetischen theorie der warme geforderte bewegung von in ruhenden flussigkeiten suspendierten teilchen// Ann. Phys. Leipzig. — 1905. — 322. — С. 549–560.
6. L. Hoang, A. Ibragimov A class of anisotropic diffusion-transport equations in non-divergence form// ArXiv. — 2025. — 2503.03089.
7. Ibragimov A., Khalmanova D., Valko P. P., Walton J. R. On a mathematical model of the productivity index of a well from reservoir engineering// SIAM J. Appl. Math. — 2005. — 65. — С. 1952–1980.
8. A. Ibragimov, Z. Sobol, I. Hevage Einstein's model of "the movement of small particles in a stationary liquid" revisited: finite propagation speed// Turkish J. Math. — 2023. — 47, № 3. — С. 934–948.
9. A. Ibragimov, E. Zakirov, I. Indrupskiy, D. Anikeev Fundamentals in Peaceman model for well-block radius for non-linear flows near well// Appl. Comput. Math. — 2024. — 23, № 1. — С. 53–69.
10. Landau L. D., Lifshitz E. M. Fluid Mechanics. — Oxford: Pergamon Press, 1987.
11. W. Liu, Ch. Liu, Ya. Duan, X. Yan, Yu. Sun, H. Sun Fracture spacing optimization method for multi-stage fractured horizontal wells in shale oil reservoir based on dynamic production data analysis// Energies. — 2023. — 16, № 24. — 7922.
12. Naz R., Alsaedi A., Hayat T. Flow of fourth grade fluid in a porous medium// Appl. Comput. Math. — 2015. — 14, № 2. — С. 125–140.
13. Peaceman D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation// Soc. Petr. Engrg. J. — 1978. — 18, № 3. — С. 183–194.
14. Peaceman D. W. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability// Soc. Petr. Engrg. J. — 1983. — 23, № 3. — С. 531–543.
15. Peaceman D. W. Representation of a horizontal well in numerical reservoir simulation// SPE Adv. Tech. Ser. — 1993. — 1, № 1. — С. 7–16.
16. Rubin Y. Transport in heterogeneous porous media: Prediction uncertainty// Water Resources Res. — 1991. — 27, № 7. — С. 1723–1738.
17. Skorokhod A. Basic principles and applications of probability theory. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2005.
18. Wang F., Landau D. P. Efficient, multiple-range random walk algorithm to calculate the density of states// Phys. Rev. Lett. — 2001. — 86, № 10. — С. 2050–2053.
19. U. Zimmermann, H. Schneider, L. H. Wegner, A. Haase Water ascent in tall trees: does evolution of land plants rely on a highly metastable state?// New Phytologist. — 2004. — 162. — С. 575–615.
20. Eclipse Reference Manual, 96A Release. — Schlumberger: GeoQuest, 1996.
21. STARS user's guide, version 2015. — Calgary: Computer Modeling Group, 2015.
22. tNavigator User Manual, 21.1 Release. — RFD, 2021.

А. И. Ибрагимов
 Texas Tech University, Lubbock, USA
 Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
 E-mail: ilya1sergey@gmail.com

Е. М. Варфоломеев
 Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
 E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

Э. С. Закиров
 Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
 E-mail: ezakirov@ogri.ru

UDC 517.958+519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-110-124

EDN: UIYIPG

On the stitching of analytical and numerical solutions of the problem on a virtual boundary with the dominance of flow geometry in a bounded domain

A. I. Ibragimov, E. M. Varfolomeev, E. S. Zakirov

Abstract. We are studying the following inverse PDE problem: to find geometric parameter of the domain of the time-dependent problem that match numerical one. Important feature is that discretization box of the interest contains source (fractures) generating transport in the porous media. From industrial point of view, we are building a machinery of the sewing the simulated pressure in the reservoir with analytical one. The goal is to obtain the value of the pressure function on the fracture (or near fracture) depending on the distance between multiple fractures (cf. [14]). For that, we generalize Einstein's probabilistic method (see [5]) for the Brownian motion to study the fluids transport in porous media. We generalize Einstein's paradigm to relate the average changes in the fluid density with the velocity of fluid and derive an anisotropic diffusion equation in nondivergence form that contains a convection term. This is then combined with the Darcy and the constitutive laws for compressible fluid flows to yield a nonlinear partial differential equations for the density function. Bernstein's transformation is used to reduce the original nonlinear problem to the linear one. The method which we employ allow us to use a steady state analytical solution to interpret the result of numerical time-dependent pressure function on the fracture which takes into account 1-D geometry of the flow towards "long" fracture.

Keywords: flow in porous media, Einstein material balance, Peaceman well block radius, parabolic equation in nondivergence form.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research was supported by the state assignment of the Institute of Oil and Gas Problems of the RAS, project 122022800272-4.

For citation: A. I. Ibragimov, E. M. Varfolomeev, E. S. Zakirov, "On the stitching of analytical and numerical solutions of the problem on a virtual boundary with the dominance of flow geometry in a bounded domain," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 1, 110–124. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-110-124>



REFERENCES

1. D. G. Aronson, “The porous medium equation,” In: *Nonlinear Diffusion Problems*, Springer, Berlin–Heidelberg, pp. 1–46, 1986.
2. E. Aulisa, L. Bloshanskaya, and A. Ibragimov, “Well productivity index for compressible fluids and gases,” *Evol. Equ. Control Theory*, 2016, **5**, No. 1, 1–36.
3. L. P. Dake, *Fundamentals of Reservoir Engineering*, Elsevier, Amsterdam–London–New York–Tokyo, 1985.
4. Y. Ding, G. Renard, and L. Weill, “Representation of wells in numerical reservoir simulation,” *SPE Reservoir Eval. Engrg.*, 1998, **1**, No. 1, 18–23.
5. A. Einstein, “Über die von der molekularkinetischen theorie der warme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen,” *Ann. Phys. Leipzig*, 1905, **322**, 549–560.
6. L. Hoang and A. Ibragimov, “A class of anisotropic diffusion-transport equations in non-divergence form,” *ArXiv*, 2025, 2503.03089.
7. A. Ibragimov, D. Khalmanova, P. P. Valko, and J. R. Walton, “On a mathematical model of the productivity index of a well from reservoir engineering,” *SIAM J. Appl. Math.*, 2005, **65**, 1952–1980.
8. A. Ibragimov, Z. Sobol, and I. Hevage, “Einstein’s model of “the movement of small particles in a stationary liquid” revisited: finite propagation speed,” *Turkish J. Math.*, 2023, **47**, No. 3, 934–948.
9. A. Ibragimov, E. Zakirov, I. Indrupskiy, and D. Anikeev, “Fundamentals in Peaceman model for well-block radius for non-linear flows near well,” *Appl. Comput. Math.*, 2024, **23**, No. 1, 53–69.
10. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1987.
11. W. Liu, Ch. Liu, Ya. Duan, X. Yan, Yu. Sun, and H. Sun, “Fracture spacing optimization method for multi-stage fractured horizontal wells in shale oil reservoir based on dynamic production data analysis,” *Energies*, 2023, **16**, No. 24, 7922.
12. R. Naz, A. Alsaedi, and T. Hayat, “Flow of fourth grade fluid in a porous medium,” *Appl. Comput. Math.*, 2015, **14**, No. 2, 125–140.
13. D. W. Peaceman, “Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation,” *Soc. Petr. Engrg. J.*, 1978, **18**, No. 3, 183–194.
14. D. W. Peaceman, “Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability,” *Soc. Petr. Engrg. J.*, 1983, **23**, No. 3, 531–543.
15. D. W. Peaceman, “Representation of a horizontal well in numerical reservoir simulation,” *SPE Adv. Tech. Ser.*, 1993, **1**, No. 1, 7–16.
16. Y. Rubin, “Transport in heterogeneous porous media: Prediction uncertainty,” *Water Resources Res.*, 1991, **27**, No. 7, 1723–1738.
17. A. Skorokhod, *Basic Principles and Applications of Probability Theory*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2005.
18. F. Wang and D. P. Landau, “Efficient, multiple-range random walk algorithm to calculate the density of states,” *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **86**, No. 10, 2050–2053.
19. U. Zimmermann, H. Schneider, L. H. Wegner, and A. Haase, “Water ascent in tall trees: does evolution of land plants rely on a highly metastable state?” *New Phytologist*, 2004, **162**, 575–615.
20. *Eclipse Reference Manual, 96A Release*, GeoQuest, Schlumberger, 1996.
21. *STARS user’s guide, version 2015*, Computer Modeling Group, Calgary, 2015.
22. *tNavigator User Manual, 21.1 Release*, RFD, 2021.

A. I. Ibragimov

Texas Tech University, Lubbock, USA

Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: ilya1sergey@gmail.com

E. M. Varfolomeev

RUDN University, Moscow, Russia

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

E. S. Zakirov

Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: ezakirov@ogri.ru