Современная математика. Фундаментальные направления. Том 72, № 3 (2026). С. 604–617
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-604-617 УДК 517.938
EDN: QWPQOT *Научная статья*

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ БЕЗ ТОЧЕК МЕНЬШЕГО ПЕРИОДА НА ЗАМКНУТЫХ ОРИЕНТИРУЕМЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Е. Е. Чилина

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

Аннотация. Основными задачами качественной теории динамических систем являются нахождение полного набора инвариантов в классах топологической сопряженности отображений и построение модельного представителя в этих классах. Одними из простейших отображений с точки зрения динамики являются периодические гомеоморфизмы двумерных поверхностей, однако даже для этого семейства отображений задача реализации до сих пор остается нерешенной. Было доказано Я. Нильсеном, что класс топологической сопряженности сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерных ориентируемых компактных поверхностей однозначно определяется конечным числом данных. Аналогичные результаты были получены Х. Хангом для меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов. В настоящей работе рассматриваются как сохраняющие, так и меняющие ориентацию периодические гомеоморфизмы без точек меньшего периода на замкнутых ориентируемых двумерных поверхностях. Основными результатами работы являются нахождение полных инвариантов всех классов топологической сопряженности таких отображений и их реализация.

Ключевые слова: периодический гомеоморфизм, замкнутые поверхности.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00027-П. Автор благодарит О. В. Починку за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

Для цитирования: *Чилина Е. Е.* Периодические гомеоморфизмы без точек меньшего периода на замкнутых ориентируемых поверхностях // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. **72**, № 3. С. 604–617. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-604-617 EDN: QWPQOT

1. Введение и формулировка результатов

Везде далее используются следующие обозначения:

- $\Sigma_{g,\tau}$ — ориентированная компактная двумерная поверхность рода g с τ дырами;
- $\Sigma_g = \Sigma_{g,0}$;
- $N(A)$ — трубчатая окрестность множества $A \subset \Sigma_{g,\tau}$ (односторонняя трубчатая окрестность множества A в случае, когда множество A принадлежит краю поверхности $\Sigma_{g,\tau}$).

Напомним, что гомеоморфизм $f\colon \Sigma_{g,\tau} \to \Sigma_{g,\tau}$ называется *периодическим* гомеоморфизмом периода $n \in \mathbb{N}$, если $f^n = id_{\Sigma_{g,\tau}}$ и $f^k \neq id_{\Sigma_{g,\tau}}$ для любого натурального $k < n$. *Периодом* точки $x \in \Sigma_{g,\tau}$ периодического гомеоморфизма $f\colon \Sigma_{g,\tau} \to \Sigma_{g,\tau}$ называется наименьшее натуральное число k такое, что $f^k(x) = x$. Точка $x \in \Sigma_{g,\tau}$ называется *точкой меньшего периода* периодического гомеоморфизма f периода n, если ее период $k < n$.

© Е. Е. Чилина, 2026
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Гомеоморфизмы $f\colon \Sigma_{g,\tau} \to \Sigma_{g,\tau}$ и $f'\colon \Sigma'_{g,\tau} \to \Sigma'_{g,\tau}$ называются *топологически сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h\colon \Sigma_{g,\tau} \to \Sigma'_{g,\tau}$ такой, что $f'h = hf$.

В 1937 году Я. Нильсеном [5] найдены необходимые и достаточные условия существования класса топологической сопряженности сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма компактной ориентируемой поверхности. В 2017 году Х. Хангом [4] эти результаты были обобщены на меняющие ориентацию гомеоморфизмы компактных ориентируемых поверхностей. Доказано, что каждый класс периодических отображений описывается конечным числом инвариантов, которые будем называть характеристикой периодического гомеоморфизма. Ряд работ К. Йокояма 1983, 1984, 1992 годов [7–9] содержит классификацию периодических отображений в том числе и на неориентируемых поверхностях. Описать представителя в каждом классе сложно. Однако имеются некоторые решения для частных случаев. Например, для двумерной сферы задача была решена Б. Керекьярто [6] в 1934 году, а для двумерного тора частично решена Браурэм [3] в 1919 году. Для сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора полная классификация и реализация приведена в работе Д. А. Баранова, В. З. Гринеса, О. В. Починки и Е. Е. Чилиной [2] 2023 года, а также есть классификация сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов поверхности рода 2 с частичной реализацией в работе 2021 года Д. А. Баранова и О. В. Починки [1].

Настоящая работа посвящена реализации и нахождению характеристик каждого класса топологической сопряженности периодических гомеоморфизмов без точек меньшего периода замкнутых ориентируемых поверхностей.

Приведём основные сведения про периодические гомеоморфизмы, необходимые для формулировки результатов настоящей работы (более детально см. [4]).

Пусть $f\colon \Sigma_{g,\tau} \to \Sigma_{g,\tau}$ — периодический гомеоморфизм периода n. Тогда факторпространство $\Sigma_{g,\tau}/f$ является компактной поверхностью. Обозначим через

$$\pi_f\colon \Sigma_{g,\tau} \to \Sigma_{g,\tau}/f$$

естественную проекцию. Введём следующие обозначения:

- B_f^k — множество всех точек периода $k < n$ гомеоморфизма f;
- B_f — множество всех точек периода меньшего n гомеоморфизма f;
- $\mathcal{B}_f = \pi_f(B_f)$.

Отображение π_f является n-листным ветвленным накрытием с множеством ветвления $\mathcal{B}_f = \pi_f(B_f)$.

Выберем точку $\bar{x}_0 \in \pi_f^{-1}(x)$ из полного прообраза точки $x \in \Sigma_{g,\tau}/f \setminus \mathcal{B}_f$ и определим гомоморфизм $\Omega_f\colon \pi_1(\Sigma_{g,\tau}/f \setminus \mathcal{B}_f, x) \to \mathbb{Z}_n$ следующим образом. Для каждой петли $\gamma \subset \Sigma_{g,\tau}/f \setminus \mathcal{B}_f$ в точке $x \in \Sigma_{g,\tau}/f \setminus \mathcal{B}_f$ обозначим через $[\gamma]$ элемент фундаментальной группы $\pi_1(\Sigma_{g,\tau}/f \setminus \mathcal{B}_f, x)$, состоящий из всех петель в точке x, гомотопных γ. Для петли γ обозначим через $\bar{\gamma}$ её поднятие на Σ с началом в точке $\bar{x}_0$ и концом в точке $\bar{x}_1$. Тогда существует натуральное число $r \leqslant n$ такое, что $f^r(\bar{x}_0) = \bar{x}_1$ (см. рис. 1). Определим гомоморфизм $\Omega_f([\gamma]) = r \pmod n$. Так как группа $\mathbb{Z}_n$ абелева, то гомоморфизм Ω_f индуцирует гомоморфизм $\omega_f\colon H_1(\Sigma_{g,\tau}/f \setminus \mathcal{B}_f) \to \mathbb{Z}_n$.

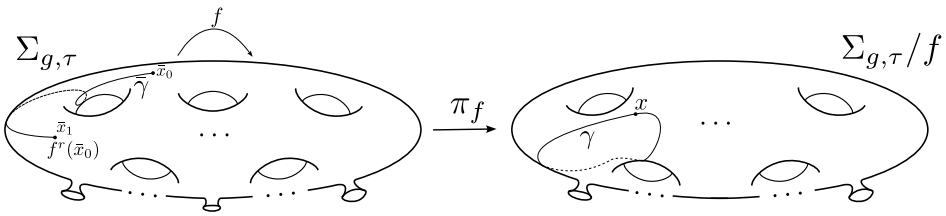

Рис. 1. Поднятие петли γ

Fig. 1. Lifting the loop γ

Пусть $f\colon \Sigma_{g,\tau} \to \Sigma_{g,\tau}$ — сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода n. Тогда факторпространство $\Sigma_{g,\tau}/f$ является ориентированной поверхностью с ориентацией, индуцированной накрытием π_f. Если множество $B_f \neq \varnothing$, то оно конечно. Введём следующие обозначения:

- $q_1, q_2, \ldots, q_b$ — элементы множества $\mathcal{B}_f$;
- $\delta_1, \ldots, \delta_c$ — компоненты связности края поверхности $\Sigma_{g,\tau}/f$;
- S_{q_i}, $j = 1, \ldots, b$ — край поверхности $cl(N(q_i))$ (см. рис. 2).

Ориентируем кривую S_{q_i} (δ_i) согласованно с ориентацией поверхности $\Sigma_{g,\tau}/f \setminus N(\mathcal{B}_f)$ ($\Sigma_{g,\tau}/f$). Введём множества

$$Q = \{\omega_f(S_{q_1}), \ldots, \omega_f(S_{q_b})\}, \quad \Delta = \{\omega_f(\delta_1), \ldots, \omega_f(\delta_c)\}$$

и обозначим через h род поверхности $\Sigma_{g,\tau}/f$. Тогда класс топологической сопряженности гомеоморфизма f описывается набором данных

$$[h, n; Q; \Delta],$$

который будем называть *характеристикой сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма.*

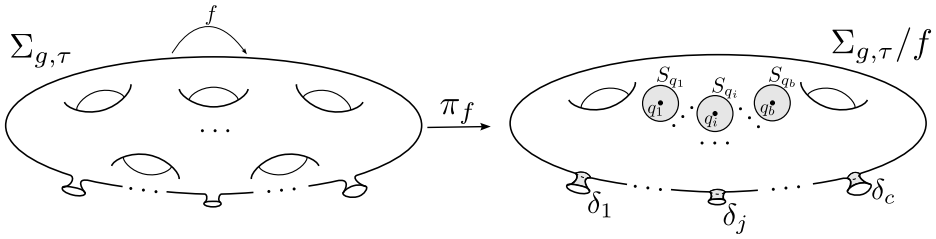

Рис. 2. Факторпространство $\Sigma_{g,\tau}/f$ по действию сохраняющего ориентацию гомеоморфизма f

Fig. 2. The quotient space $\Sigma_{g,\tau}/f$ under the action of an orientation-preserving homeomorphism f

Теорема 1.1. *Пусть $f\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$ — сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода $n \in \mathbb{N}$ без точек меньшего периода. Тогда число n является делителем числа $g-1$ и характеристика f имеет вид*

$$\left[\frac{g-1}{n} + 1, n; \varnothing; \varnothing\right].$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ и $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на поверхности Σ_g рода $g = n(h-1)+1$ существует сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм с характеристикой $[h, n; \varnothing; \varnothing]$.

Реализация таких отображений по заданной характеристике приведена в пункте 4.1.

Пусть $f\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$ — меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода n. Тогда n — чётное число. Если множество $B_f^k \neq \varnothing$ для чётного значения $k < n$, то оно конечно, а если множество $B_f^k \neq \varnothing$ для нечетного значения k, то оно состоит из конечного числа простых замкнутых кривых и $n = 2k$. Факторпространство Σ_g/f может быть как ориентируемой, так и неориентируемой компактной поверхностью. Введём следующие обозначения:

- $q_1, q_2, \ldots, q_b$ — изолированные точки множества $\mathcal{B}_f$;
- $\delta_1, \ldots, \delta_c$ — компоненты связности края поверхности Σ_g/f;
- $\iota_1, \ldots, \iota_s$ — произвольный набор простых замкнутых кривых на Σ_g/f таких, что топологическое пространство $cl(N(\iota_l))$ для любого $l = 1, \ldots, s$ гомеоморфно ленте Мебиуса и поверхность Σ_g/f после разреза по кривым $\iota_1, \ldots, \iota_s$ является ориентируемой;
- S_{q_i}, $j = 1, \ldots, b$ — край поверхности $cl(N(q_i))$ (см. рис. 3);
- S_{δ_j}, $j = 1, \ldots, c$ — компонента связности края поверхности $cl(N(\delta_j))$, отличная от δ_j (см. рис. 3).

Таким образом, $\mathcal{B}_f = \{q_1, \ldots, q_b, \delta_1, \ldots, \delta_c\}$.

Разрежем поверхность Σ_g/f по кривым $\iota_1, \ldots, \iota_s$. Получим ориентируемую поверхность, которую обозначим через $\overline{\Sigma_g/f}$. Зафиксируем на $\overline{\Sigma_g/f}$ произвольную ориентацию. Ориентация $\overline{\Sigma_g/f}$

индуцирует ориентацию края поверхности $\overline{\Sigma_g/f} \setminus N(\mathcal{B}_f)$, которая в свою очередь индуцирует ориентацию кривых $\iota_l, S_{q_i}, S_{\delta_j}$. Введём множества

$$Q = \{\omega_f(S_{q_1}), \dots, \omega_f(S_{q_b})\}, \quad \Delta = \{\omega_f(S_{\delta_1}), \dots, \omega_f(S_{\delta_c})\}, \quad I = \{\omega_f(\iota_1), \dots, \omega_f(\iota_s)\}$$

и обозначим через h род поверхности $\overline{\Sigma_g/f}$. Таким образом, класс топологической сопряженности гомеоморфизма f описывается набором данных (с точностью до отношений эквивалентности $R0$–$R4$, приведенных в разделе 2)

$$[h, n; Q; \Delta; I],$$

который будем называть *характеристикой меняющего ориентацию периодического гомеоморфизма.*

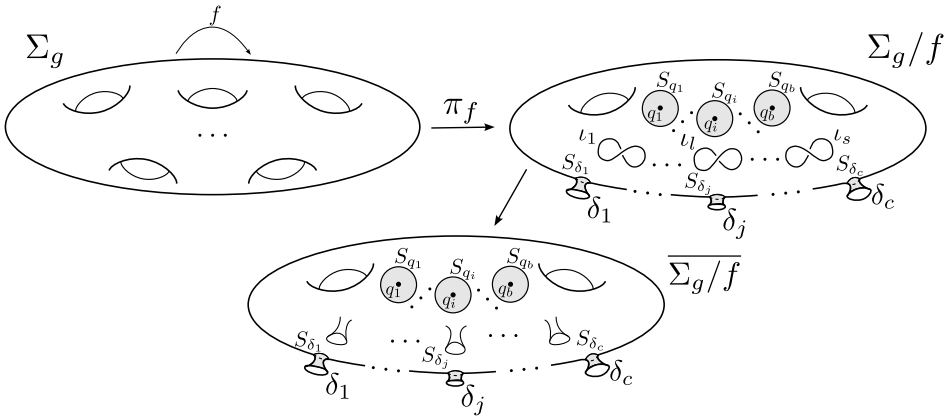

Рис. 3. Факторпространство Σ_g/f по действию меняющего ориентацию гомеоморфизма f и поверхность $\overline{\Sigma_g/f}$

Fig. 3. The quotient space Σ_g/f under the action of an orientation-reversing homeomorphism f and the surface $\overline{\Sigma_g/f}$

Теорема 1.2. *Пусть $f\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$ — меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм без точек меньшего периода. Тогда характеристика f эквивалентна одной из следующих*:

1. $[h, 2(2k-1); \varnothing; \varnothing; \{2k-1\}]$, *где* $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$, $g = (2k-1)(2h-1)+1$;
2. $[0, 2k; \varnothing; \varnothing; \{2l-1, 2k-(2l-1)\}]$, *где* $l, k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant l \leqslant \dfrac{k+1}{2}$, *НОД*$\{2l-1, k\} = 1$, $g = 1$;
3. $[0, 4k; \varnothing; \varnothing; \{2l-1, 2k-(2l-1)\}]$, *где* $l, k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant l \leqslant \dfrac{k+1}{2}$, *НОД*$\{2l-1, k\} = 1$, $g = 1$;
4. $[h, 4k; \varnothing; \varnothing; \{2k-1, 1\}]$, *где* $h, k \in \mathbb{N}$, $g = 4kh+1$;
5. $[h, 2k; \varnothing; \varnothing; \{2k-1, 1\}]$, *где* $h, k \in \mathbb{N}$, $g = 2kh+1$.

При этом различные характеристики попарно не эквивалентны.

Реализация каждой характеристики из теоремы 1.2 приведена в разделе 4.2.

2. Вспомогательные утверждения

В настоящем разделе приведены основные сведения о периодических гомеоморфизмах компактных ориентированных поверхностей из работ Я. Нильсена [5] и Х. Ханга [4].

Предложение 2.1. *Сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм*

$$f\colon \Sigma_{g,\tau} \to \Sigma_{g,\tau}$$

с характеристикой

$$[h, n;\ Q = \{\theta_1, \dots, \theta_b\};\ \Delta = \{\eta_1, \dots, \eta_c\}]$$

существует тогда и только тогда, когда

1. $\theta_i \neq 0 \pmod n$, $i = 1, \dots, b$;
2. $\theta_1 + \dots + \theta_b + \eta_1 + \dots + \eta_c = 0 \pmod n$;

3. *если* $h = 0$, *то* $НОД\{\theta_1, \dots, \theta_b, \eta_1, \dots, \eta_c, n\} = 1$;
4. $\tau = \sum\limits_{j=1}^{c} НОД\{\eta_j, n\}$;
5. $2g + \tau - 2 = n\Big(2h + b + c - \sum\limits_{i=1}^{b} \dfrac{НОД\{\theta_i, n\}}{n} - 2\Big)$.

Предложение 2.2. *Два сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизма компактной ориентируемой поверхности топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их характеристики совпадают.*

Предложение 2.3. *Меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм*

$$f\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$$

с характеристикой

$$[h, 2m;\ Q = \{2\theta_1, \dots, 2\theta_b\};\ \Delta = \{2\eta_1, \dots, 2\eta_c\};\ I = \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$$

существует тогда и только тогда, когда

1. $\Delta \cup I \neq \varnothing$;
2. *если* m *чётно, то* $\Delta = \varnothing$;
3. ζ_l *нечетно при* $l = 1, \dots, s$;
4. $[h, m; Q; \{\eta_1, \dots, \eta_c, \zeta_1, \dots, \zeta_s\}]$ — *характеристика сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма*;
5. $g - 1 = m\Big(2h + b + c + s - \sum\limits_{i=1}^{b} \dfrac{НОД\{\theta_i, m\}}{m} - 2\Big)$.

Пусть f — меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности с характеристикой

$$[h, 2m;\ Q = \{2\theta_1, \dots, 2\theta_b\};\ \Delta = \{2\eta_1, \dots, 2\eta_c\};\ I = \{\zeta_1, \dots, \zeta_s\}].$$

Определим следующие отношения для характеристик меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов замкнутых ориентируемых поверхностей:

R0 $[h, 2m; Q; \Delta; I] \sim [h, 2m; Q; \Delta; I]$;
R1 $[h, 2m; Q; \Delta; I] \sim [h, 2m; \{-2\theta_1, \dots, -2\theta_b\}; \{-2\eta_1, \dots, -2\eta_c\}; \{-\zeta_1, \dots, -\zeta_s\}]$;
R2 $[h, 2m; Q; \Delta; I] \sim$
a)$[h, 2m; \{-2\theta_1, 2\theta_2, \dots, 2\theta_b\}; \Delta; \{\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}, \zeta_s + 2\theta_1\}]$,
b)$[h, 2m; Q; \{-2\eta_1, 2\eta_2, \dots, 2\eta_c\}; \{\zeta_1, \dots, \zeta_{s-1}, \zeta_s + 2\eta_1\}]$,
c)$[h, 2m; Q; \Delta; \{-\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{s-1}, \zeta_s + 2\zeta_1\}]$;
R3 $[h, 2m; Q; \Delta; \{\zeta_1, \dots, \zeta_{s-3}, \zeta_{s-2}, \zeta_{s-1}, \zeta_s\}] \sim$
$[h + 1, 2m; Q; \Delta; \{\zeta_1, \dots, \zeta_{s-3}, \zeta_{s-2} + \zeta_{s-1} + \zeta_s\}]$ при $s \geqslant 3$;
R4 $[h, 2m; Q; \Delta; \{\zeta_1, \zeta_2\}] \sim [h, 2m; Q; \Delta; \{\zeta_1 + 2d, \zeta_2 - 2d\}]$ при $s = 2$, где

$$d = \begin{cases} 1, & \text{если } h > 0 \\ \text{НОД}\{\theta_1, \dots, \theta_b, \eta_1, \dots, \eta_c\}, & \text{если } h = 0 \end{cases}.$$

Предложение 2.4. *Два меняющих ориентацию периодических гомеоморфизма замкнутой ориентируемой поверхности топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их характеристики эквивалентны посредством отношений* $R0$–$R4$.

3. Характеристики периодических гомеоморфизмов без точек меньшего периода замкнутых ориентируемых поверхностей

Настоящий раздел содержит доказательства теорем 1.1-1.2.

3.1. Доказательство теоремы 1.1. Пусть $f\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$ — сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм периода $n \in \mathbb{N}$ без точек меньшего периода. Из пункта 5 предложения 2.1 следует, что род поверхности Σ_g/f равен $\dfrac{g-1}{n} + 1$. Так как $\dfrac{g-1}{n} + 1 \in \mathbb{Z}$, то число n является делителем числа $g - 1$ и характеристика f имеет вид $\Big[\dfrac{g-1}{n} + 1, n; \varnothing; \varnothing\Big]$.

3.2. Доказательство теоремы 1.2. Рассмотрим меняющий ориентацию периодический гомеоморфизм $f\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$ без точек меньшего периода. Тогда его характеристика имеет вид

$$[\bar{h}, 2m; \varnothing; \varnothing;\ I = \{\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_s\}].$$

Согласно пункту 1 предложения 2.3, $I \neq \varnothing$. Если $s \geqslant 3$, то при нечётных s получим, что

$$[\bar{h}, 2m; \varnothing; \varnothing; \{\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_s\}] \overset{R3}{\sim} \left[\bar{h} + \frac{s-1}{2}, 2m; \varnothing; \varnothing; \{\bar{\zeta}_1 + \Sigma_{l=2}^{s} \bar{\zeta}_l\}\right],$$

а при чётных s получим

$$[\bar{h}, 2m; \varnothing; \varnothing; \{\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_s\}] \overset{R3}{\sim} \left[\bar{h} + \frac{s-2}{2}, 2m; \varnothing; \varnothing; \{\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2 + \Sigma_{l=3}^{s} \bar{\zeta}_l\}\right].$$

Таким образом, согласно предложению 2.4, характеристика f эквивалентна одной из следующих:

$$1)\quad [h, 2m; \varnothing; \varnothing; \{\zeta_1\}], \qquad 2)\quad [h, 2m; \varnothing; \varnothing; \{\zeta_1, \zeta_2\}].$$

В случае 1), согласно пункту 4 предложения 2.3, $[h, m; \varnothing; \{\zeta_1\}]$ — характеристика сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма. Из пункта 2 предложения 2.1 следует, что $\zeta_1 = 0 \pmod m$. Так как значение ζ_1 определено с точностью до сравнимости по модулю $2m$ и, согласно пункту 3 предложения 2.3, ζ_1 нечетно, то $\zeta_1 = m$, где $m = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, характеристика f эквивалентна характеристике

$$[h, 2(2k-1); \varnothing; \varnothing; \{2k-1\}], \tag{3.1}$$

где $k \in \mathbb{N}$. Из пункта 5 предложения 2.3 получаем, что $g = (2k-1)(2h-1)+1$. Так как различным $k \in \mathbb{N}$ соответствует различный период, то им же соответствуют и различные классы эквивалентности.

Рассмотрим случай 2) отдельно для $h = 0$ и $h \geqslant 1$.

Пусть $h = 0$. Без ограничения общности будем считать, что $\zeta_1 \leqslant \zeta_2$. Положим $\zeta_1 = 2l-1$. Если $m = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, то в силу пунктов 3-4 предложения 2.3 и пункта 2 предложения 2.1 получим $\zeta_2 = 2(2k-1) - (2l-1)$. С учётом пункта 3 предложения 2.1 при $k \in \mathbb{N}$, $l \in \{1, \dots, k\}$ и НОД$\{2l-1, 2k-1\} = 1$ имеем попарно неэквивалентные характеристики вида

$$[0, 2(2k-1); \varnothing; \varnothing; \{2l-1, 2(2k-1) - (2l-1)\}] \tag{3.2}$$

гомеоморфизма поверхности рода $g = 1$. Если $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то в силу пунктов 3-4 предложения 2.3 и пункта 2 предложения 2.1 получим, что возможны 2 варианта $\zeta_2 = 2k - (2l-1)$ и $\zeta_2 = 4k - (2l-1)$. В первом варианте для $k, l \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant l \leqslant \dfrac{k+1}{2}$ и НОД$\{2l-1, k\} = 1$ получим характеристику

$$[0, 4k; \varnothing; \varnothing; \{2l-1, 2k-(2l-1)\}], \tag{3.3}$$

на поверхности рода $g = 1$. Во втором варианте для $k, l \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant l \leqslant \dfrac{2k+1}{2}$ и НОД$\{2l-1, 2k\} = 1$ получим характеристику

$$[0, 4k; \varnothing; \varnothing; \{2l-1, 4k-(2l-1)\}] \tag{3.4}$$

на поверхности рода $g = 1$. Заметим, что характеристики (3.2) и (3.4) на поверхности рода $g = 1$ для $k, l \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant l \leqslant \dfrac{k+1}{2}$ и НОД$\{2l-1, k\} = 1$ можно записать в виде

$$[0, 2k; \varnothing; \varnothing; \{2l-1, 2k-(2l-1)\}]. \tag{3.5}$$

Пусть $h \geqslant 1$. Тогда $d = 1$ в отношении $R4$. Согласно пункту 3 предложения 2.3, ζ_1, ζ_2 — нечетные. Тогда

$$[h, 2m; \varnothing; \varnothing; \{\zeta_1, \zeta_2\}] \overset{R4}{\sim} [h, 2m; \varnothing; \varnothing; \{\zeta_1 + \zeta_2 - 1, 1\}].$$

Положим $\tilde{\zeta}_1 = \zeta_1 + \zeta_2 - 1$. Тогда согласно пункту 4 предложения 2.3, $[h, m; \varnothing; \{\tilde{\zeta}_1, 1\}]$ — характеристика сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма. Из пункта 2 предложения 2.1 следует, что $\tilde{\zeta}_1 + 1 = 0 \pmod m$. Так как значение $\tilde{\zeta}_1$ нечётно (пункт 3 предложения 2.3), то возможны 2 варианта: a) $m = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$, и $\tilde{\zeta}_1 = 2k-1$, b) $\tilde{\zeta}_1 = 2m-1$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда характеристика f эквивалентна либо характеристике

$$[h, 4k; \varnothing; \varnothing; \{2k-1, 1\}], \tag{3.6}$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $g = 4kh + 1$, либо

$$[h, 2k; \varnothing; \varnothing; \{2k-1, 1\}], \tag{3.7}$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $g = 2kh + 1$.

Непосредственно проверяется, что полученные характеристики попарно не эквивалентны.

4. Реализация периодических гомеоморфизмов замкнутых ориентируемых поверхностей без точек меньшего периода

В настоящем разделе описано построение представителя в каждом классе топологической сопряженности периодических гомеоморфизмов без точек меньшего периода замкнутых ориентируемых двумерных поверхностей, вложенных в $\mathbb{R}^3$. Отображения заданы как в стандартной прямоугольной системе координат (x, y, z), так и в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z), где $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

4.1. Сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы. В этом пункте описано построение модельного представителя в каждом классе топологической сопряженности сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов без точек меньшего периода замкнутых ориентируемых двумерных поверхностей.

Построим периодический гомеоморфизм без точек меньшего периода поверхности Σ_g с характеристикой $[h, n; \varnothing; \varnothing]$. Согласно пункту 5 предложения 2.1, $g = n(h-1) + 1$.

Пусть $g = 0$. Тогда $n = 1$. Таким образом, на сфере существует только тождественный гомеоморфизм, являющийся сохраняющим ориентацию периодическим гомеоморфизмом без точек меньшего периода.

Пусть $g = 1$. Представим Σ_1 параметрически как подмножество $\mathbb{R}^3$ следующим образом:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} x(\psi_1, \psi_2) = (3 + \cos\psi_1)\cos\psi_2, \\ y(\psi_1, \psi_2) = (3 + \cos\psi_1)\sin\psi_2, \\ z(\psi_1, \psi_2) = \sin\psi_1, \end{cases} \quad \psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}.$$

Определим гомеоморфизм

$$\phi_n(\rho, \varphi, z) = \left(\rho, \varphi + \frac{2\pi}{n}, z\right) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда гомеоморфизм $f^+_{1,n} = \phi_n|_{\Sigma_1}$ имеет характеристику $[1, n; \varnothing; \varnothing]$.

Пусть $g > 1$. Тогда $h > 1$. Положим

$$\mathcal{A}_n = \left\{(\rho, \varphi, z) \middle| 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{2\pi}{n}\right\}.$$

К Σ_1 приклеим $h-1$ ручку $\Sigma^1_{1,0}, \ldots, \Sigma^{h-1}_{1,0}$ так, что $(\Sigma^1_{1,0} \cup \ldots \cup \Sigma^{h-1}_{1,0}) \subset \operatorname{int}\mathcal{A}_n$. Положим

$$\Sigma_{h-1,2} = \Sigma^1_{1,0} \cup \ldots \cup \Sigma^{h-1}_{1,0} \cup (\Sigma_1 \cap \mathcal{A}_n).$$

Тогда топологическое пространство

$$\Sigma_g = \bigcup_{i=1}^{n} \phi_n^i(\Sigma_{h-1,2})$$

(см. рис. 4 для случая $n = 6$) является замкнутой поверхностью рода $g = n(h-1) + 1$, инвариантной относительно гомеоморфизма ϕ_n. По построению гомеоморфизм $f^+_{h,n} = \phi_n|_{\Sigma_g}$ является периодическим гомеоморфизмом периода n и не имеет точек меньшего периода на Σ_g.

4.2. Меняющие ориентацию гомеоморфизмы. В этом пункте описано построение модельного представителя в каждом классе топологической сопряженности меняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов без точек меньшего периода замкнутых ориентируемых двумерных поверхностей по характеристикам из теоремы 1.2.

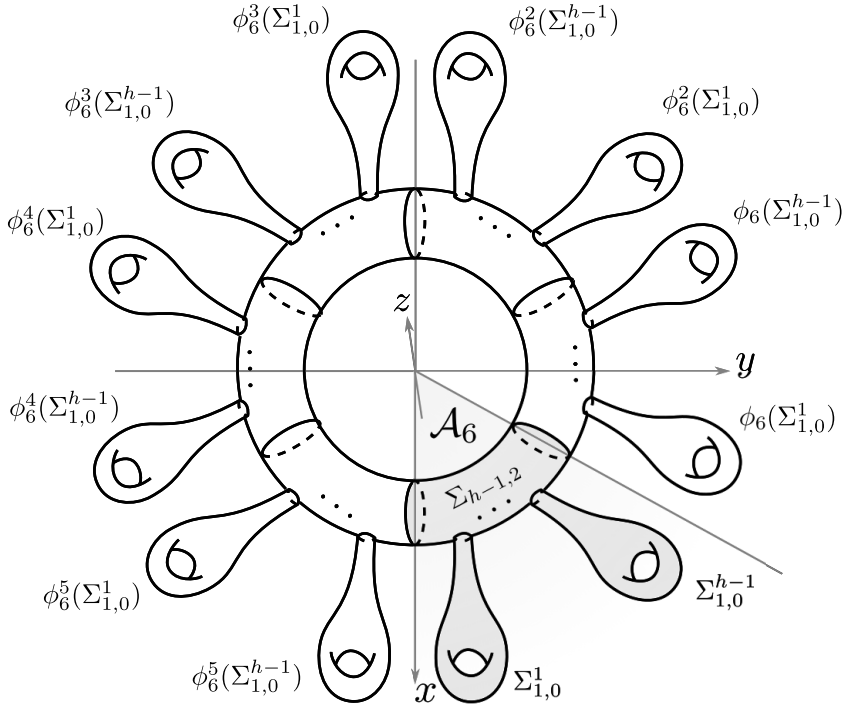

Рис. 4. Несущая поверхность гомеоморфизма $f_{h,6}^+$

Fig. 4. The supporting surface of the homeomorphism $f_{h,6}^+$

4.2.1. Характеристика $[h, 2(2k-1); \varnothing; \varnothing; \{2k-1\}]$, *где* $h \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k \in \mathbb{N}$. Сначала рассмотрим случай $k = 1$ отдельно для $h = 0$ и $h > 0$. Если $h = 0$, то несущая поверхность гомеоморфизма с характеристикой $[0, 2; \varnothing; \varnothing; \{1\}]$ является сферой. Представим сферу как подмножество $\mathbb{R}^3$ стандартным образом:

$$\Sigma_0 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Положим

$$\Upsilon(x, y, z) = (-x, -y, -z).$$

Тогда гомеоморфизм $f_{1,0,1}^- = \Upsilon|_{\Sigma_0}$ реализует характеристику $[0, 2; \varnothing; \varnothing; \{1\}]$ на Σ_0. Пусть $h > 1$. Положим

$$\mathbb{R}^3_{z>0} = \{(x, y, z) | z > 0\}.$$

Приклеим h ручек $\Sigma_{1,0}^1, \ldots, \Sigma_{1,0}^h$ к сфере Σ_0 так, что $(\Sigma_{1,0} \cup \ldots \cup \Sigma_{1,0}^h) \subset \mathbb{R}^3_{z>0}$. Положим

$$\Sigma_{h,1} = \Sigma_{1,0}^1 \cup \ldots \cup \Sigma_{1,0}^h \cup (\Sigma_0 \cap \mathbb{R}^3_{z>0}).$$

Тогда топологическое пространство

$$\Sigma_g = \Sigma_{h,1} \cup \Upsilon(\Sigma_{h,1})$$

(см. рис. 5) является замкнутой поверхностью рода $g = 2h$, инвариантной относительно гомеоморфизма Υ. По построению гомеоморфизм $f_{1,h,1}^- = \Upsilon|_{\Sigma_g}$ имеет характеристику $[h, 2; \varnothing; \varnothing; \{1\}]$.

Пусть $k > 1$ и $n = 2k - 1$. Рассмотрим несущую поверхность $\Sigma_{n(h-1)+1}$ гомеоморфизма $f_{h,n}^+$, построенного в разделе 4.1. Без ограничения общности можно считать, что

$$\Sigma_{n(h-1)+1} \subset \{(\rho, \varphi, z) | -1 \leqslant z \leqslant 1\}.$$

Определим отображения

$$\alpha(\rho, \varphi, z) = (\rho, \varphi, z + 3),\ \vartheta(\rho, \varphi, z) = (\rho, \varphi, -z) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

и положим

$$\Sigma_{n(h-1)+1}^+ = \alpha\Big(\Sigma_{n(h-1)+1}\Big),\ \Sigma_{n(h-1)+1}^- = \vartheta\Big(\Sigma_{n(h-1)+1}^+\Big).$$

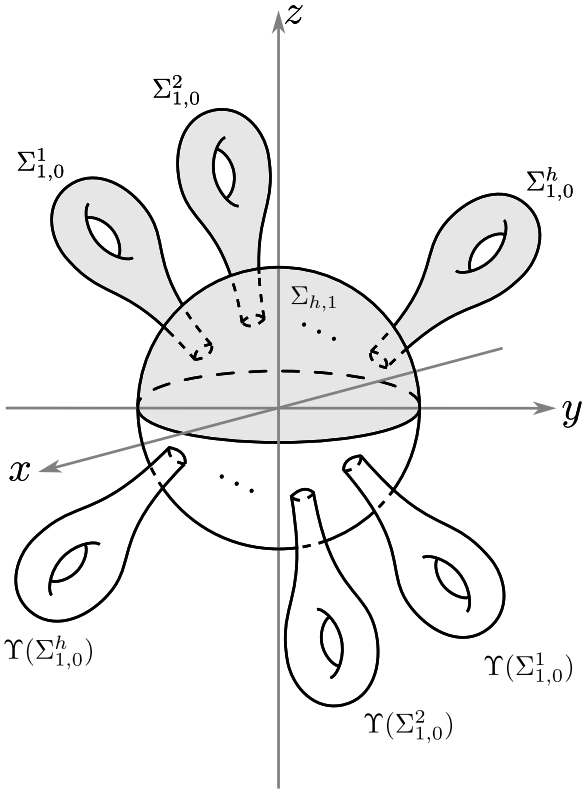

Рис. 5. Несущая поверхность гомеоморфизма $f^-_{1,h,1}$

Fig. 5. The supporting surface of the homeomorphism $f^-_{1,h,1}$

На цилиндре $C = \left\{(\rho,\varphi,z)\middle|\rho = \dfrac{1}{2}, -1 \leqslant z \leqslant 1\right\}$ определим отображение

$$\Phi_C(\rho,\varphi,z) = (\rho, \varphi + \pi(z+1), -z).$$

Для $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ определим отображение

$$\Pi_{(x_0,y_0)}(x,y,z) = (x - x_0, y - y_0, z)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Пусть $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ такие, что

$$\tilde{C} = \Pi_{(x_n,y_n)}(C) \subset \operatorname{int} \mathcal{A}_n.$$

Положим

$$\Phi_{\tilde{C}} = \Pi_{(x_n,y_n)} \Phi_C \Pi^{-1}_{(x_n,y_n)}\colon \tilde{C} \to \tilde{C}.$$

На множестве

$$\tilde{C}^n = \bigcup_{i=1}^{n} \phi^i_n(\tilde{C})$$

определим гомеоморфизм

$$\Psi_n(w) = \phi^i_n(\Phi_{\tilde{C}}(\phi^{-i}_n(w))), \quad w \in \phi^i_n(\tilde{C}), \quad i \in \{1,\dots,n\}.$$

Соединим поверхности $\Sigma^+_{n(h-1)+1}$ и $\tilde{C}$ цилиндром C' так, что

$$C' \subset (\operatorname{int} \mathcal{A}_n \cap \mathbb{R}^3_{z>0}).$$

Тогда поверхность, полученную соединением поверхностей $\Sigma^+_{n(h-1)+1}$ и $\Sigma^-_{n(h-1)+1}$ цилиндром $\mathcal{C}' \cup \cup \tilde{C} \cup \vartheta(C')$, обозначим через $\Sigma_{2(n(h-1)+1)}$. Положим

$$\Sigma_{2(h-1),4} = \Sigma_{2(n(h-1)+1)} \cap \mathcal{A}_n.$$

Тогда топологическое пространство

$$\Sigma_g = \bigcup_{i=1}^{n} \phi_n^i(\Sigma_{2(h-1),4})$$

является замкнутой поверхностью рода $g = n(2h-1)+1$ (см. рис. 6 для случая $n = 3$). Гомеоморфизм $f^-_{1,h,k}\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$, заданный формулой

$$f^-_{1,h,k}(w) = \begin{cases} \phi_n(\vartheta(w)), & w \in \Sigma_g \setminus \tilde{C}^n, \\ \phi_n(\Psi_n(w)), & w \in \tilde{C}^n, \end{cases} \qquad \text{где} \quad n = 2k-1,$$

имеет характеристику $[h, 2(2k-1); \varnothing; \varnothing; \{2k-1\}]$.

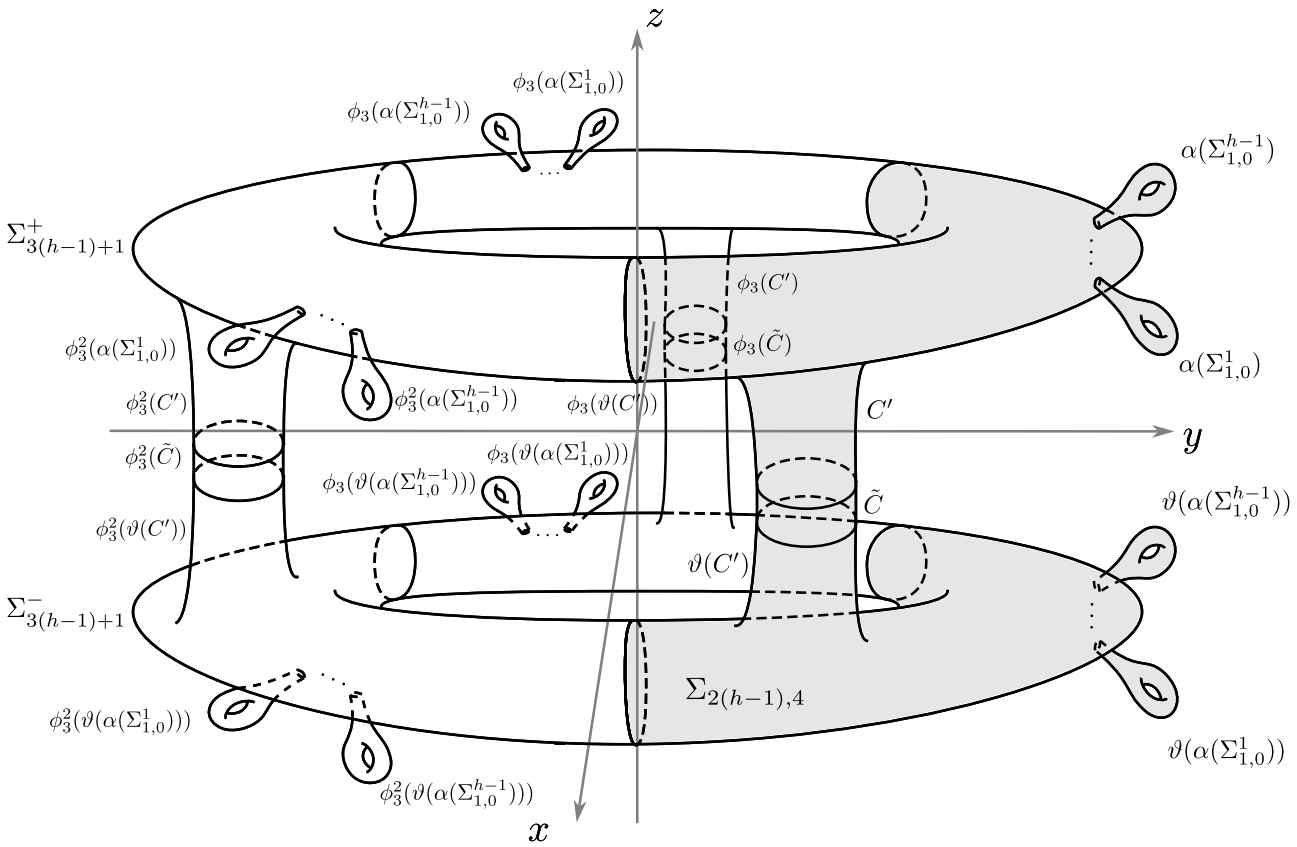

Рис. 6. Несущая поверхность гомеоморфизма $f^-_{1,h,2}$

Fig. 6. The supporting surface of the homeomorphism $f^-_{1,h,2}$

4.2.2. Характеристика $[0, 2k; \varnothing; \varnothing; \{2l-1, 2k-(2l-1)\}]$, *где* $l, k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant l \leqslant \dfrac{k+1}{2}$, *НОД*$\{2l-1, k\} = 1$. Пусть поверхность Σ_1 задана так же, как в разделе 4.1. Тогда для $\alpha = (2l-1)^{-1} \pmod{2k}$ определен гомеоморфизм $f^-_{2,l,k}\colon \Sigma_1 \to \Sigma_1$, заданный формулой

$$f^-_{2,l,k} = (\vartheta\phi^{\alpha}_{2k})|_{\Sigma_1}$$

и соответствующий характеристике $[0, 2k; \varnothing; \varnothing; \{2l-1, 2k-(2l-1)\}]$.

4.2.3. Характеристика $[0, 4k; \varnothing; \varnothing; \{2l-1, 2k-(2l-1)\}]$, *где* $l, k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant l \leqslant \dfrac{k+1}{2}$, *НОД*$\{2l-1, k\} = 1$. Пусть поверхность Σ_1 задана также как в разделе 4.1. Определим гомеоморфизм

$$\Theta_k(\rho, \varphi, z) = \Big(\rho, \varphi + \Big(z + \frac{1}{2}\Big)\frac{\pi}{k}, z\Big)\colon \Big\{(\rho, \varphi, z) | -\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 0\Big\} \to \Big\{(\rho, \varphi, z) | -\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 0\Big\}.$$

Заметим, что он обладает следующими свойствами:

$$\Theta_k\Big(\rho,\varphi,-\frac{1}{2}\Big)=\Big(\rho,\varphi,-\frac{1}{2}\Big)$$

и

$$\Theta_k(\rho,\varphi,0)=\Big(\rho,\varphi+2\pi\frac{1}{4k},0\Big).$$

Тогда для $\alpha=(2l-1)^{-1} \pmod{4k}$ определен гомеоморфизм $f^-_{3,l,k}\colon \Sigma_1\to\Sigma_1$, заданный формулой

$$f^-_{3,l,k}(\rho,\varphi,z)=\begin{cases}\vartheta(\rho,\varphi,z), & z\leqslant-\dfrac{1}{2},\\ \vartheta(\Theta_k^{\alpha}(\rho,\varphi,z)), & -\dfrac{1}{2}\leqslant z\leqslant 0,\\ \phi_{2k}^{\alpha}(\Theta_k^{-\alpha}(\vartheta(\rho,\varphi,z))), & 0\leqslant z\leqslant\dfrac{1}{2},\\ \phi_{2k}^{\alpha}(\vartheta(\rho,\varphi,z)), & z\geqslant\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

и соответствующий характеристике $[0,4k;\varnothing;\varnothing;\{2l-1,2k-(2l-1)\}]$.

4.2.4. Характеристика $[h,4k;\varnothing;\varnothing;\{2k-1,1\}]$, *где* $h,k\in\mathbb{N}$. Пусть поверхность Σ_1 задана также как в разделе 4.1. Положим

$$\Sigma_{0,2}=\Sigma_1\cap\mathcal{A}_{2k}.$$

К $\Sigma_{0,2}$ приклеим h ручек $\Sigma^1_{1,0},\dots,\Sigma^h_{1,0}$ так, что

$$\Big(\Sigma^1_{1,0}\cup\ldots\cup\Sigma^h_{1,0}\Big)\subset\Big(\operatorname{int}\mathcal{A}_{2k}\cap\Big\{(x,y,z)\Big|z>\frac{1}{2}\Big\}\Big).$$

Положим

$$\Sigma_{h,1}=\Sigma^1_{1,0}\cup\ldots\cup\Sigma^h_{1,0}\cup cl(\Sigma_{0,2}\cap\mathbb{R}^3_{z>0}),\quad \Sigma_{2hk,2}=\bigcup_{i=1}^{2k}\phi^i_{2k}(\Sigma_{h,1}).$$

Тогда топологическое пространство

$$\Sigma_g=\Sigma_{2hk,2}\cup\vartheta(\Sigma_{2hk,2})$$

является замкнутой поверхностью рода $g=4kh+1$ (см. рис. 7). Определим гомеоморфизм $f^-_{4,h,k}\colon\Sigma_g\to\Sigma_g$ с характеристикой $[h,4k;\varnothing;\varnothing;\{2k-1,1\}]$ формулой

$$f^-_{4,h,k}(\rho,\varphi,z)=\begin{cases}\vartheta(\rho,\varphi,z), & z\leqslant-\dfrac{1}{2},\\ \vartheta(\Theta_k(\rho,\varphi,z)), & -\dfrac{1}{2}\leqslant z\leqslant 0,\\ \phi_{2k}(\Theta_k^{-1}(\vartheta(\rho,\varphi,z))), & 0\leqslant z\leqslant\dfrac{1}{2},\\ \phi_{2k}(\vartheta(\rho,\varphi,z)), & z\geqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

4.2.5. Характеристика $[h,2k;\varnothing;\varnothing;\{2k-1,1\}]$, *где* $h,k\in\mathbb{N}$. Пусть поверхность Σ_1 задана так же, как в разделе 4.1. К поверхности Σ_1 приклеим h ручек $\Sigma^1_{1,0},\dots,\Sigma^h_{1,0}$ так, что

$$\Big(\Sigma^1_{1,0}\cup\ldots\cup\Sigma^h_{1,0}\Big)\subset\operatorname{int}\mathcal{A}_{2k}.$$

Положим

$$\Sigma_{h,2}=\Sigma^1_{1,0}\cup\ldots\cup\Sigma^h_{1,0}\cup(\Sigma_1\cap\mathcal{A}_{2k}).$$

Тогда топологическое пространство

$$\Sigma_g=\bigcup_{i=1}^{2k}(\vartheta\phi_{2k})^i(\Sigma_{h,2})$$

является замкнутой поверхностью рода $g=2kh+1$ и гомеоморфизм $f^-_{5,k}=(\vartheta\phi_{2k})|_{\Sigma_g}$ имеет характеристику $[h,2k;\varnothing;\varnothing;\{2k-1,1\}]$, где $g=2kh+1$.

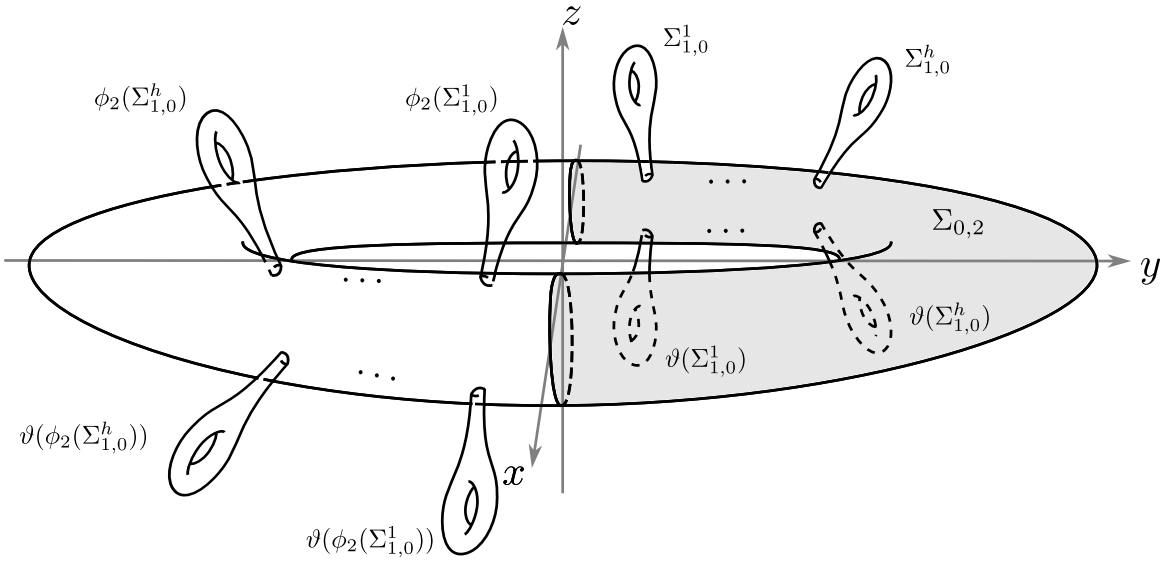

Рис. 7. Несущая поверхность гомеоморфизма $f^-_{4,h,1}$

Fig. 7. The supporting surface of the homeomorphism $f^-_{4,h,1}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баранов Д. А., Починка О. В.* Классификация периодических преобразований ориентируемой поверхности рода два // Ж. Средневолж. мат. об-ва. — 2021. — *23*, № 2. — С. 147–158. — DOI: 10.15507/2079-6900.23.202102.147-158.
2. *Baranov D. A., Grines V. Z., Pochinka O. V., Chilina E. E.* On a classification of periodic maps on the 2-torus // Russ. J. Nonlin. Dyn. — 2023. — *19*, № 1. — С. 91–110. — DOI: 10.20537/nd220702.
3. *Brouwer L. E. J.* Aufzahlung der periodisken transformationen // В сб.: «KNAW, Proceedings, 21, II, 1919». — Amsterdam, 1919. — С. 1352–1356.
4. *Hang H.* Homology and orientation reversing periodic maps on surfaces // Topology Appl. — 2017. — *229*. — С. 1–19. — DOI: 10.1016/j.topol.2017.06.023.
5. *Nielsen J.* Die Struktur periodischer Transformationen von Flachen // Phys. Meddelerser. — 1937. — *15*. — С. 1–77.
6. *Von Kerekjarto B.* Topologische charakterisierung der linearen abbildungen // Acta Scie. Math. (Szeged). — 1934. — *6*. — С. 235–262.
7. *Yokoyama K.* Classification of periodic maps on compact surfaces: I // Tokyo J. Math. — 1983. — *6*, № 1. — С. 75–94. — DOI: 10.3836/tjm/1270214327.
8. *Yokoyama K.* Classification of periodic maps on compact surfaces: II // Tokyo J. Math. — 1984. — *7*, № 1. — С. 249–285. — DOI: 10.3836/tjm/1270153007.
9. *Yokoyama K.* Complete classification of periodic maps on compact surfaces // Tokyo J. Math. — 1992. — *15*, № 2. — С. 247–279. — DOI: 10.3836/tjm/1270129455.

Е. Е. Чилина

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

E-mail: `k.chilina@yandex.ru`, Scopus: 57373009600

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-604-617
EDN: QWPQOT

UDC 517.938
Research article

Periodic homeomorphisms without points of lower period on closed orientable surfaces

E. E. Chilina

HSE University, Nizhny Novgorod, Russia

Abstract. The primary objectives of the qualitative theory of dynamical systems are to identify a complete set of invariants for the topological conjugacy classes of mappings and to construct a model representative for each class. Periodic homeomorphisms of two-dimensional surfaces are among the simplest mappings from a dynamical perspective; however, the problem of their realization remains unsolved even for this family. Nielsen proved that the topological conjugacy class of an orientation-preserving periodic homeomorphism of a compact, orientable two-dimensional surface is uniquely determined by a finite set of data. Similar results were obtained by Ham for orientation-reversing periodic homeomorphisms. This paper examines both orientation-preserving and orientation-reversing periodic homeomorphisms — specifically those without points of lower period — on closed, orientable two-dimensional surfaces. The main results of the work are the identification of complete invariants for all topological conjugacy classes of such mappings and their realization.

Keywords: periodic homeomorphism, closed surfaces.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This research was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00027-P). The author thanks O. V. Pochinka for formulating the problem and for fruitful discussions.

For citation: E. E. Chilina, "Periodic homeomorphisms without points of lower period on closed orientable surfaces," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 3, 604–617. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-604-617 EDN: QWPQOT

REFERENCES

1. D. A. Baranov and O. V. Pochinka, "Klassifikatsiya periodicheskikh preobrazovaniy orientiruemoy poverkhnosti roda dva" [Classification of periodic transformations of an orientable surface of kind two], *Zh. Srednevolzh. Mat. Ob-va* [J. Middle Volga Math. Soc.], 2021, **23**, No. 2, 147–158 (in Russian), DOI: 10.15507/2079-6900.23.202102.147-158.
2. D. A. Baranov, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, and E. E. Chilina, "On a classification of periodic maps on the 2-torus," *Russ. J. Nonlin. Dyn.*, 2023, **19**, No. 1, 91–110, DOI: 10.20537/nd220702.
3. L. E. J. Brouwer, "Aufzahlung der periodisken transformationen," In: *KNAW, Proceedings, 21, II, 1919*, Amsterdam, 1919, pp. 1352–1356.
4. H. Hang, "Homology and orientation reversing periodic maps on surfaces," *Topology Appl.*, 2017, **229**, 1–19, DOI: 10.1016/j.topol.2017.06.023.
5. J. Nielsen, "Die Struktur periodischer Transformationen von Flachen," *Phys. Meddelerser.*, 1937, **15**, 1–77.
6. B. von Kerekjarto, "Topologische charakterisierung der linearen abbildungen," *Acta Scie. Math. (Szeged)*, 1934, **6**, 235–262.
7. K. Yokoyama, "Classification of periodic maps on compact surfaces: I," *Tokyo J. Math.*, 1983, **6**, No. 1, 75–94, DOI: 10.3836/tjm/1270214327.

© E. E. Chilina, 2026

This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

8. K. Yokoyama, "Classification of periodic maps on compact surfaces: II," *Tokyo J. Math.*, 1984, **7**, No. 1, 249–285, DOI: 10.3836/tjm/1270153007.
9. K. Yokoyama, "Complete classification of periodic maps on compact surfaces," *Tokyo J. Math.*, 1992, **15**, No. 2, 247–279, DOI: 10.3836/tjm/1270129455.

E. E. Chilina
HSE University, Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: k.chilina@yandex.ru, Scopus: 57373009600