

АЛГОРИТМЫ ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИЕЙ, КОНВЕКЦИЕЙ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В. Г. ПИМЕНОВ, А. В. ЛЕКОМЦЕВ

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

Аннотация. Рассматривается диффузионно-конвекционное уравнение с двумя пространственными переменными и несколькими переменными запаздывания по времени. Предполагается, что коэффициенты диффузии и конвекции зависят от искомой функции. Производится дискретизация задачи, для учета запаздывания приводятся интерполяционно-экстраполяционные процедуры. Приводятся конструкции аналога метода переменных направлений в двух вариантах: с кусочно-постоянной интерполяцией и с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением. В результате метод сводится к решению на каждом шаге времени двух трехдиагональных систем линейных алгебраических уравнений, которые имеют диагональное преобладание при достаточно малом шаге дискретизации. Изучается порядок невязки метода, в первом варианте он имеет первый порядок малости относительно шага дискретизации по времени Δ и второй относительно шага по пространству h , во втором варианте метод имеет второй порядок относительно Δ и h . Изучаются вопросы устойчивости метода. При определенных предположениях обосновывается сходимость метода и устанавливается порядок сходимости. Приводятся результаты численного моделирования для диффузионного уравнения с двумя переменными запаздываниями. Вычислимые порядки сходимости по каждому шагу дискретизации в примерах оказались близки к теоретически полученным порядкам сходимости по соответствующим шагам дискретизации.

Ключевые слова: диффузия, конвекция, нелинейные коэффициенты, запаздывание, метод переменных направлений, интерполяция, экстраполяция, устойчивость, сходимость.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, проект № 075-02-2026-1315 «Уральский математический центр».

Вклад авторов. Все авторы участвовали в разработке концепции исследования, сборе, обработке и анализе данных, написании текста рукописи, формулировке выводов.

Для цитирования: Пименов В. Г., Лекомцев А. В. Алгоритмы переменных направлений для решения уравнений с нелинейной диффузией, конвекцией и запаздыванием // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 3. С. 565–584. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-565-584](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-565-584) EDN: [QTNNBY](https://edn.ru/QTNNBY)

1. ВВЕДЕНИЕ

Диффузионные уравнения с нелинейной зависимостью от искомой функции коэффициентов диффузии и конвекции возникают в различных моделях газовой динамики, теории популяций, моделях бактериального роста и других [6–9]. В исследованиях дендритных структур различного морфологического типа при вариации динамических режимов, проводимых группой профессора А. Г. Масловской, особый интерес представляют режимы с запаздываниями. В силу сложности

задачи, главным инструментом исследования являются численные методы, следовательно, разработка соответствующих численных алгоритмов, а также исследование на их сходимость к точному решению и оценка порядков сходимости относительно шагов дискретизации является очень актуальной задачей. В работе [5] для моделирования структурных особенностей паттернов культивированных бактерий применяется аналог метода дробных шагов, дополненный итерационной процедурой для учета нелинейности. Хотя исходным в модели является уравнение для потока неизвестной функции, при применении численного алгоритма авторы переходят к системе нелинейных диффузионных уравнений с конвекцией, для которой рассматривается задача Неймана. Статья [5] посвящена исследованию конкретной модели и численный метод не исследуется на устойчивость и сходимость.

Несмотря на значительные упрощения (наличие только одного уравнения, независимость коэффициентов диффузии и конвекции от производных), изучаемая в данной работе математическая задача сохраняет главные эффекты: зависимость коэффициентов диффузии и конвекции от искомой функции, две пространственные переменные, краевые условия Неймана и наличие эффектов запаздывания. Основным алгоритмом является аналог метода переменных направлений, имеющий для линейных уравнений, в отличие от метода дробных шагов, при определенных условиях второй порядок сходимости относительно величины шага дискретизации по времени. Этот метод, восходящий к работам Д. Писмена, Х. Рекфорда и Д. Дугласа, был исследован для уравнения с постоянным коэффициентом диффузии и с запаздыванием общего вида в работе [2], смотри также [1]. В работе [3], где для уравнения с нелинейно зависящим от искомой функции коэффициентом диффузии рассматривались краевые условия Дирихле и отсутствовали конвективные слагаемые, был разработан такой аналог, исследована его локальная погрешность, устойчивость и сходимость.

В данной работе, в отличие от работы [3], рассматриваются краевые условия Неймана, также алгоритм усложняется для учета слагаемых с первыми производными по пространственным переменным. Рассмотрены два варианта алгоритма, теоретически отличающиеся по точности и устойчивости, обеспечивающие первый и второй порядки сходимости относительно величины шага дискретизации по времени.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим нелинейное уравнение диффузии–конвекции с эффектом запаздывания

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = d(u) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + a_x(u) \frac{\partial u}{\partial x} + a_y(u) \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + f(x, y, t, u(t - \tau_1(t)), u(t - \tau_2(t)), \dots, u(t - \tau_N(t))), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $0 \leq t \leq T$, $-L \leq x \leq L$, $-L \leq y \leq L$ — независимые переменные; $u = u(x, y, t)$ — искомая функция решения. Коэффициенты $d = d(u)$ и конвекции $a_x = a_x(u)$, $a_y = a_y(u)$ могут зависеть от искомой функции. Величины запаздывания удовлетворяют ограничениям $0 \leq \tau_n(t) \leq \tau$ для всех $n = 1, \dots, N$ и $t \in [0, T]$.

Заданы функциональные начальные условия

$$u(x, y, s) = \varphi(x, y, s), \quad -L \leq x \leq L, \quad -L \leq y \leq L, \quad -\tau \leq s \leq 0, \quad (2.2)$$

и нулевые граничные условия Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.3)$$

где Γ — граница области $-L \leq x \leq L$, $-L \leq y \leq L$, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к Γ .

Будем предполагать, что решение $u(x, y, t)$ задачи (2.1)–(2.3) существует и единственно. Кроме того, при доказательстве сходимости численных методов будем предполагать необходимую гладкость решения $u(x, y, t)$.

Дополнительно будем предполагать, что функция $f(x, y, t, u^1, u^2, \dots, u^N)$ липшицева по u^k , то есть существует постоянная L_f такая, что для всех $x \in [-X, X]$, $y \in [-X, X]$, $t \in [0, T]$,

$u^1, u^2, \dots, u^N, v^1, v^2, \dots, v^N$ выполняется

$$|f(x, y, t, u^1, u^2, \dots, u^N) - f(x, y, t, v^1, v^2, \dots, v^N)| \leq L_f \sum_{n=1}^N |u^n - v^n|. \quad (2.4)$$

Также будем предполагать, что коэффициент диффузии $d(u)$ липшицев с константой Липшица L_d и для всех u выполняется

$$0 < \check{d} \leq d(u) \leq \hat{d}. \quad (2.5)$$

Кроме того, будем предполагать, что коэффициенты конвекции $a_x(u)$ и $a_y(u)$ липшицевы с константой Липшица L_a и удовлетворяют

$$|a_x(u)| \leq \hat{a}, \quad |a_y(u)| \leq \hat{a}. \quad (2.6)$$

3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ. МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Разобьем отрезок $[0, X]$ на части, введя шаг по пространству $h = 2L/J$, где J — целое, введем точки $x_i = -L + ih$, $i = 0, \dots, J$, $y_j = -L + jh$, $j = 0, \dots, J$.

Введем шаг по времени $\Delta = \frac{\tau}{M_0}$, где M_0 — натуральное, и пусть $M = \left\lceil \frac{T}{\Delta} \right\rceil$. Введем точки (узлы по времени) $t_k = k\Delta$, $k = -M_0, \dots, M$.

Аппроксимацию функции $u(x_i, y_j, t_k)$ в узлах будем обозначать через $u_{i,j}^k$, эту аппроксимацию будем называть *значениями модели*.

Определение 3.1. При фиксированных $i = 0, \dots, J$ и $j = 0, \dots, J$ назовем *дискретной предысторией* к моменту t_k , $k = 0, \dots, M$ совокупность значений модели

$$\{u_{i,j}^l\}_k = \{u_{i,j}^l, k - M_0 \leq l \leq k\}.$$

Определение 3.2. Оператором интерполяции—экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение $I: \{U_{i,j}^l\}_k \rightarrow u_{i,j}(\cdot)$, где функция $u_{i,j}(t)$ определена на отрезке $[t_k - \tau, t_k + \Delta/2]$.

В дальнейшем будем использовать два способа интерполяции с экстраполяцией.

Вариант 1. Кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией:

$$u_{i,j}(t) = \begin{cases} \varphi(x_i y_j, t), & t \in [-\tau, 0], \\ u_{i,j}^{l-1}, & t \in [t_{l-1}, t_l], \quad 1 \leq l \leq k, \\ u_{i,j}^k, & t \in [t_k, t_k + \Delta/2]. \end{cases} \quad (3.1)$$

Вариант 2. Кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением:

$$u_{i,j}(t) = \begin{cases} \varphi(x_i y_j, t), & t \in [-\tau, 0], \\ u_{i,j}^{l-1} \frac{t_l - t}{\Delta} + u_{i,j}^l \frac{t - t_{l-1}}{\Delta}, & t \in [t_{l-1}, t_l], \quad 1 \leq l \leq k, \\ u_{i,j}^{k-1} \frac{t_k - t}{\Delta} + u_{i,j}^k \frac{t - t_{k-1}}{\Delta}, & t \in [t_k, t_k + \Delta/2]. \end{cases} \quad (3.2)$$

В частности, при $t = t_{k+\frac{1}{2}} = t_k + \frac{\Delta}{2}$ кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением дает

$$u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}}) = \frac{3}{2}u_{i,j}^k - \frac{1}{2}u_{i,j}^{k-1} = \tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}. \quad (3.3)$$

Кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией имеет первый порядок погрешности по Δ , то есть, если точное решение $u(x, y, t)$ является непрерывно дифференцируемой по t на $[-\tau, T]$ и непрерывной по x и y на $[-L, L]^2$ функцией, тогда существуют константы C_1 и C_2 такие, что для всех i, j, k и $t \in [t_k - \tau, t_k + \Delta/2]$ выполняется следующее неравенство:

$$|u_{i,j}(t) - u(x_i, y_j, t)| \leq C_1 \max_{k-M_0 \leq l \leq k} |u_{i,j}^l - u(x_i, y_j, t_l)| + C_2 \Delta. \quad (3.4)$$

Кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением имеет второй порядок погрешности по Δ , то есть, если точное решение $u(x, y, t)$ является дважды непрерывно дифференцируемой по t на $[-\tau, T]$ и непрерывной по x и y на $[-L, L]^2$ функцией, тогда существуют

константы C_1 и C_2 такие, что для всех i, j, k и $t \in [t_k - \tau, t_k + \Delta/2]$ выполняется следующее неравенство:

$$|u_{i,j}(t) - u(x_i, y_j, t)| \leq C_1 \max_{k-M_0 \leq l \leq k} |u_{i,j}^l - u(x_i, y_j, t_l)| + C_2 \Delta^2. \quad (3.5)$$

Кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией является липшицевой с константой Липшица, равной 1, в следующем смысле. Если $u_{i,j}(\cdot), v_{i,j}(\cdot)$ — результаты кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением по дискретным предысториям $\{u_{i,j}^l\}_k$ и $\{v_{i,j}^l\}_k$ соответственно, то для всякого $t \in [t_k - \tau, t_k + \frac{\Delta}{2}]$ выполняется

$$|u_{i,j}(t) - v_{i,j}(t)| \leq |u_{i,j}^{l(t)-1} - v_{i,j}^{l(t)-1}|, \quad (3.6)$$

где $t \in [t_{l(t)-1}, t_{l(t)}]$, если же $t > t_k$, то $t_{l(t)-1} = t_k$

Кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением является липшицевой с константой Липшица, равной 2, в следующем смысле. Если $u_{i,j}(\cdot), v_{i,j}(\cdot)$ — результаты кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением по дискретным предысториям $\{u_{i,j}^l\}_k$ и $\{v_{i,j}^l\}_k$ соответственно, то для всякого $t \in [t_k - \tau, t_k + \frac{\Delta}{2}]$ выполняется

$$|u_{i,j}(t) - v_{i,j}(t)| \leq 2(|u_{i,j}^{l(t)} - v_{i,j}^{l(t)}| + |u_{i,j}^{l(t)-1} - v_{i,j}^{l(t)-1}|), \quad (3.7)$$

где $t \in [t_{l(t)-1}, t_{l(t)}]$, если же $t > t_k$, то $t_{l(t)} = t_k$.

На множестве сеточных функций $u_{i,j}^k$ введем разностные операторы

$$\begin{aligned} \delta_x[u_{i,j}^k] &= \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2h}, \quad \delta_x^2[u_{i,j}^k] = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2}, \\ \delta_y[u_{i,j}^k] &= \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j-1}^k}{2h}, \quad \delta_y^2[u_{i,j}^k] = \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2}. \end{aligned}$$

Опишем аналог метода переменных направлений [4] в варианте метода фиктивных узлов.

Вариант 1. Введем промежуточный временной слой $u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$. Рассмотрим систему на первом полушаге:

$$\begin{aligned} (u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^k)/(\Delta/2) &= d(u_{i,j}^k)\delta_x^2[u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}] + d(u_{i,j}^k)\delta_y^2[u_{i,j}^k] + a_x(u_{i,j}^k)\delta_x[u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}] + a_y(u_{i,j}^k)\delta_y[u_{i,j}^k] + \\ &+ f(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{k+\frac{1}{2}})), \dots, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_N(t_{k+\frac{1}{2}}))), \quad i = \overline{0, J}, \quad j = \overline{0, J}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь $u_{i,j}(t)$ — результат кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией (3.1). Система дополняется уравнениями, следующими из граничных условий:

$$u_{-1,j}^{k+\frac{1}{2}} = u_{1,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad u_{J+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = u_{J-1,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad j = \overline{0, J}. \quad (3.9)$$

При $k = 0$ используются также начальные условия

$$u_{i,j}^0 = \varphi(x_i, y_j, 0), \quad i = \overline{0, J}, \quad j = \overline{0, J}. \quad (3.10)$$

На втором полушаге решается система относительно $u_{i,j}^{k+1}$:

$$\begin{aligned} (u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})/(\Delta/2) &= d(u_{i,j}^k)\delta_x^2[u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}] + d(u_{i,j}^k)\delta_y^2[u_{i,j}^{k+1}] + a_x(u_{i,j}^k)\delta_x[u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}] + a_y(u_{i,j}^k)\delta_y[u_{i,j}^{k+1}] + \\ &+ f(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{k+\frac{1}{2}})), \dots, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_N(t_{k+\frac{1}{2}}))), \quad i = \overline{0, J}, \quad j = \overline{0, J}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Система дополняется уравнениями, следующими из граничных условий:

$$u_{i,-1}^{k+1} = u_{i,1}^{k+1}, \quad u_{i,J+1}^{k+1} = u_{i,J-1}^{k+1}, \quad i = \overline{0, J}. \quad (3.12)$$

Вариант 2. Введем промежуточный временной слой $u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$. Рассмотрим систему на первом полушаге:

$$(u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^k)/(\Delta/2) = d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})\delta_x^2[u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}] + d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})\delta_y^2[u_{i,j}^k] + a_x(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})\delta_x[u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}] +$$

$$+ a_y(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})\delta_y[u_{i,j}^k] + f(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{k+\frac{1}{2}})), \dots, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_N(t_{k+\frac{1}{2}}))), \quad i = \overline{0, J}, \quad j = \overline{0, J}.$$

Здесь $u_{i,j}(t)$ — результат кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением (3.2), величина $\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$ определяется (3.3). Система дополняется уравнениями (3.9), следующими из граничных условий. При $k = 0$ используются также конечномерные начальные условия (3.10).

На втором полушаге решается система относительно $u_{i,j}^{k+1}$:

$$(u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})/(\Delta/2) = d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})\delta_x^2[u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}] + d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})\delta_y^2[u_{i,j}^{k+1}] + a_x(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})\delta_x[u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}] +$$

$$+ a_y(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})\delta_y[u_{i,j}^{k+1}] + f(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{k+\frac{1}{2}})), \dots, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_N(t_{k+\frac{1}{2}}))), \quad i = \overline{0, J}, \quad j = \overline{0, J}.$$

Система дополняется уравнениями (3.12), следующими из граничных условий.

4. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Покажем, что при малых шагах h алгоритмы однозначно разрешимы. Для определенности рассмотрим **вариант 1**.

Исключая значения в фиктивных узлах $u_{-1,j}^{k+\frac{1}{2}}$ и $u_{J+1,j}^{k+\frac{1}{2}}$, а также приводя подобные при неизвестных, получаем при фиксированном $j = 0, \dots, J$ из (3.8) и (3.9):

$$\left(a_x(u_{i,j}^k)\frac{\Delta}{2h} - d(u_{i,j}^k)\frac{\Delta}{h^2}\right)u_{i-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \left(2 + d(u_{i,j}^k)\frac{2\Delta}{h^2}\right)u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(-a_x(u_{i,j}^k)\frac{\Delta}{2h} - d(u_{i,j}^k)\frac{\Delta}{h^2}\right)u_{i+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = 2u_{i,j}^k + d(u_{i,j}^k)\Delta\delta_y^2[u_{i,j}^k] + \Delta\tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad i = \overline{1, J-1},$$

где

$$\tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = f\left(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{k+\frac{1}{2}})), \dots, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_N(t_{k+\frac{1}{2}}))\right). \quad (4.2)$$

Следует учитывать, что $u_{i,-1}^k = u_{i,1}^k$, $u_{i,J+1}^k = u_{i,J-1}^k$. Система дополняется уравнением при $i = 0$:

$$\left(2 + d(u_{0,j}^k)\frac{2\Delta}{h^2}\right)u_{0,j}^{k+\frac{1}{2}} - d(u_{0,j}^k)\frac{2\Delta}{h^2}u_{1,j}^{k+\frac{1}{2}} = 2u_{0,j}^k + d(u_{0,j}^k)\Delta\delta_y^2[u_{0,j}^k] + \Delta\tilde{f}_{0,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (4.3)$$

а также при $i = J$:

$$-d(u_{J,j}^k)\frac{2\Delta}{h^2}u_{J-1,j}^{k+\frac{1}{2}} + \left(2 + d(u_{J,j}^k)\frac{2\Delta}{h^2}\right)u_{J,j}^{k+\frac{1}{2}} = 2u_{J,j}^k + d(u_{J,j}^k)\Delta\delta_y^2[u_{J,j}^k] + \Delta\tilde{f}_{J,j}^{k+\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

Аналогично, при фиксированном $i = 0, \dots, J$ перепишем систему (3.11), (3.12) в виде

$$\left(2 + d(u_{i,0}^k)\frac{2\Delta}{h^2}\right)u_{i,0}^{k+1} - d(u_{i,0}^k)\frac{2\Delta}{h^2}u_{i,1}^{k+1} = 2u_{i,0}^{k+\frac{1}{2}} + d(u_{i,0}^k)\Delta\delta_x^2[u_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}] + \Delta\tilde{f}_{i,0}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (4.5)$$

$$\left(a_x(u_{i,j}^k)\frac{\Delta}{2h} - d(u_{i,j}^k)\frac{\Delta}{h^2}\right)u_{i,j-1}^{k+1} + \left(2 + d(u_{i,j}^k)\frac{2\Delta}{h^2}\right)u_{i,j}^{k+1} +$$

$$+ \left(-a_x(u_{i,j}^k)\frac{\Delta}{2h} - d(u_{i,j}^k)\frac{\Delta}{h^2}\right)u_{i,j+1}^{k+1} = 2u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + d(u_{i,j}^k)\Delta\delta_x^2[u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}] + \Delta\tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad j = \overline{1, J-1},$$

$$-d(u_{i,J}^k)\frac{2\Delta}{h^2}u_{i,J-1}^{k+1} + \left(2 + d(u_{i,J}^k)\frac{2\Delta}{h^2}\right)u_{i,J}^{k+1} = 2u_{i,J}^{k+\frac{1}{2}} + d(u_{i,J}^k)\Delta\delta_x^2[u_{i,J}^{k+\frac{1}{2}}] + \Delta\tilde{f}_{i,J}^{k+\frac{1}{2}}. \quad (4.7)$$

Следует учитывать, что $u_{-1,j}^{k+\frac{1}{2}} = u_{1,j}^{k+\frac{1}{2}}$, $u_{J+1,j}^{k+\frac{1}{2}} = u_{J-1,j}^{k+\frac{1}{2}}$.

Теорема 4.1. Пусть шаг h достаточно мал, а именно, удовлетворяет соотношению

$$h \leq \frac{2\tilde{d}}{\hat{a}}. \quad (4.8)$$

Тогда трехдиагональные системы (4.3), (4.1), (4.4) и (4.5), (4.6), (4.7) имеют диагональное преобладание, равное 2, и, следовательно, однозначно разрешимы.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (4.1). Модуль диагонального коэффициента равен

$$\left| 2 + d(u_{i,j}^k) \frac{2\Delta}{h^2} \right| = 2 + d(u_{i,j}^k) \frac{2\Delta}{h^2}.$$

Сумма модулей всех остальных коэффициентов при неизвестных при условиях теоремы и условиях (2.5)-(2.6) равна

$$\left| a_x(u_{i,j}^k) \frac{\Delta}{2h} - d(u_{i,j}^k) \frac{\Delta}{h^2} \right| + \left| -a_x(u_{i,j}^k) \frac{\Delta}{2h} - d(u_{i,j}^k) \frac{\Delta}{h^2} \right| = 2d(u_{i,j}^k) \frac{\Delta}{h^2},$$

т. е. уравнение (4.1) имеет диагональное преобладание, равное 2. Аналогично проверяется, что другие уравнения систем имеют такое же диагональное преобладание. $\square$

Вариант 2 исследуется так же, только $d(u_{i,j}^k)$, $a_x(u_{i,j}^k)$, $a_y(u_{i,j}^k)$ заменяются на $d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})$, $a_x(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})$, $a_y(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})$ соответственно. Условие (4.8) гарантирует однозначную разрешимость систем (3.13) и (3.14).

5. ИСКЛЮЧЕНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ

Рассмотрим **вариант 1**.

Введем операторы $\Lambda_x = \Lambda_x(u_{i,j}^k)$ и $\Lambda_y = \Lambda_y(u_{i,j}^k)$, определенные на сеточных функциях $v_{i,j}^k$ формулами

$$\Lambda_x(u_{i,j}^k)[v_{i,j}^k] = \begin{cases} -d(u_{i,j}^k) \frac{2v_{i,j}^k}{h^2}, & i = 0, \\ d(u_{i,j}^k) \delta_x^2[v_{i,j}^k] + a_x(u_{i,j}^k) \delta_x[v_{i,j}^k], & i = \overline{1, J-1}, \\ -d(u_{i,j}^k) \frac{2v_{i,j}^k}{h^2}, & i = J, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\Lambda_y(u_{i,j}^k)[v_{i,j}^k] = \begin{cases} -d(u_{i,j}^k) \frac{2v_{i,j}^k}{h^2}, & j = 0, \\ d(u_{i,j}^k) \delta_y^2[v_{i,j}^k] + a_y(u_{i,j}^k) \delta_y[v_{i,j}^k], & j = \overline{1, J-1}, \\ -d(u_{i,j}^k) \frac{2v_{i,j}^k}{h^2}, & j = J. \end{cases} \quad (5.2)$$

Тогда системы (4.3), (4.1), (4.4) и (4.5), (4.6), (4.7) запишутся в виде

$$\left(E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_x(u_{i,j}^k) \right) [u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}] = \left(E + \frac{\Delta}{2} \Lambda_y(u_{i,j}^k) \right) [u_{i,j}^k] + \frac{\Delta}{2} \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (5.3)$$

$$\left(E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_y(u_{i,j}^k) \right) [u_{i,j}^{k+1}] = \left(E + \frac{\Delta}{2} \Lambda_x(u_{i,j}^k) \right) [u_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}] + \frac{\Delta}{2} \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (5.4)$$

где E — тождественный оператор.

Применим к (5.3) оператор $E + \frac{\Delta}{2} \Lambda_x(u_{i,j}^k)$, а к (5.4) оператор $E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_x(u_{i,j}^k)$ и сложим. Получим:

$$\left(E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_x(u_{i,j}^k) \right) \left(E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_y(u_{i,j}^k) \right) [u_{i,j}^{k+1}] = \left(E + \frac{\Delta}{2} \Lambda_x(u_{i,j}^k) \right) \left(E + \frac{\Delta}{2} \Lambda_y(u_{i,j}^k) \right) [u_{i,j}^k] + \Delta \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}. \quad (5.5)$$

Преобразуем (5.5) к каноническому виду [4]:

$$\begin{aligned} & \left(E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_x(u_{i,j}^k) \right) \left(E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_y(u_{i,j}^k) \right) \left[\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta} \right] + \left(\left(E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_x(u_{i,j}^k) \right) \left(E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_y(u_{i,j}^k) \right) - \right. \\ & \left. - \left(E + \frac{\Delta}{2} \Lambda_x(u_{i,j}^k) \right) \left(E + \frac{\Delta}{2} \Lambda_y(u_{i,j}^k) \right) \right) \left[\frac{u_{i,j}^k}{\Delta} \right] = \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$B(u_{i,j}^k) \left[\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta} \right] + A(u_{i,j}^k) [u_{i,j}^k] = \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (5.6)$$

где

$$B = B(u_{i,j}^k) = \left(E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_x(u_{i,j}^k) \right) \left(E - \frac{\Delta}{2} \Lambda_y(u_{i,j}^k) \right), \quad A = A(u_{i,j}^k) = -\Lambda_x(u_{i,j}^k) - \Lambda_y(u_{i,j}^k). \quad (5.7)$$

Хотя систему удалось свести к каноническому виду, вообще говоря, нельзя непосредственно применить результаты общей теории разностных схем [4], а также теории схем с эффектом последовательности [1] для исследования (5.6), так как операторы A и B зависят от $u_{i,j}^k$, причем зависимости могут быть нелинейные.

Вариант 2 отличается определением операторов $\Lambda_x = \Lambda_x(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})$ и $\Lambda_y = \Lambda_y(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})$:

$$\Lambda_x(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})[v_{i,j}^k] = \begin{cases} -d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \frac{2v_{i,j}^k}{h^2}, & i = 0, \\ d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \delta_x^2[v_{i,j}^k] + a_x(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \delta_x[v_{i,j}^k], & i = \overline{1, J-1}, \\ -d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \frac{2v_{i,j}^k}{h^2}, & i = J, \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\Lambda_y(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})[v_{i,j}^k] = \begin{cases} -d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \frac{2v_{i,j}^k}{h^2}, & j = 0, \\ d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \delta_y^2[v_{i,j}^k] + a_y(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \delta_y[v_{i,j}^k], & j = \overline{1, J-1}, \\ -d(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \frac{2v_{i,j}^k}{h^2}, & j = J. \end{cases} \quad (5.9)$$

Аналогично в (5.7) изменяется зависимость операторов $B = B(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})$ и $A = A(\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})$. Кроме того, в формулах (5.3)–(5.6) в определении величин $\tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$ (см. (4.2)) применяется не кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией, а кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением.

6. НЕВЯЗКА БЕЗ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И НЕВЯЗКА С ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ И ЭКСТРАПОЛЯЦИЕЙ

Рассмотрим **вариант 1**.

Лемма 6.1. Пусть точное решение $u(x, y, t)$ задачи (2.1)–(2.3) четырежды непрерывно дифференцируемо по x и y и непрерывно дифференцируемо по t . Тогда

$$\begin{aligned} & \left| d\left(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) \right) + \right. \\ & + a_x\left(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\right) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + a_y\left(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\right) \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - \\ & \left. - \left(\Lambda_x(u(x_i, y_j, t_k) + \Lambda_y(u(x_i, y_j, t_k)) [u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})] \right) \right| \leq C_3(\Delta + h^2), \quad i = \overline{0, J}, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Доказательство. Зафиксируем внутренний узел $i = 1, \dots, J-1$ и $j = 1, \dots, J-1$. В силу предположений о непрерывной дифференцируемости по t решения $u(x, y, t)$ задачи (2.1) получаем

$$u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) = u(x_i, y_j, t_k) + r_1, \quad |r_1| \leq C_4 \Delta.$$

В силу липшицевости коэффициентов d , a_x и a_y выполняется

$$\begin{aligned} & |d(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})) - d(u(x_i, y_j, t_k))| \leq L_d |u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - u(x_i, y_j, t_k)| \leq L_d C_4 \Delta, \\ & |a_x(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})) - a_x(u(x_i, y_j, t_k))| \leq L_a |u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - u(x_i, y_j, t_k)| \leq L_a C_4 \Delta, \\ & |a_y(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})) - a_y(u(x_i, y_j, t_k))| \leq L_a |u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - u(x_i, y_j, t_k)| \leq L_a C_4 \Delta. \end{aligned}$$

Тогда, в силу ограниченности модулей соответствующих производных выполняется

$$\begin{aligned} & \left| d\left(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) \right) + \right. \\ & + a_x\left(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\right) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + a_y\left(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\right) \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - \\ & \left. - d\left(u(x_i, y_j, t_k)\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) \right) - a_x\left(u(x_i, y_j, t_k)\right) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - \right. \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$-a_y\left(u(x_i, y_j, t_k)\right)\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\Big| \leq (L_d + 2L_a)C_4C_5\Delta.$$

Из формул численного дифференцирования для первых и вторых производных по x и y , оценок их погрешностей и (6.2) следует заключение леммы. Случаи граничных узлов рассматриваются аналогично. $\square$

Лемма 6.2. Пусть выполняются условия леммы 6.1. Тогда найдутся такие константы, что

$$|\Lambda_x(u)[u(x_i, y_j, t_k)]| \leq C_{10}, \quad |\Lambda_y(u)[u(x_i, y_j, t_k)]| \leq C_{11}$$

для любых допустимых u .

Доказательство. Оценим, согласно определению (5.1), при $i = 1, \dots, J-1$ и $j = 0, \dots, J$,

$$\begin{aligned} & |\Lambda_x(u)[u(x_i, y_j, t_k)]| = \\ & = \left| d(u) \frac{u(x_{i+1}, y_j, t_k) - 2u(x_i, y_j, t_k) + u(x_{i-1}, y_j, t_k)}{h^2} + a_x(u) \frac{u(x_{i+1}, y_j, t_k) - u(x_{i-1}, y_j, t_k)}{2h} \right| \leq \\ & \leq |d(u)| \left| \frac{u(x_{i+1}, y_j, t_k) - 2u(x_i, y_j, t_k) + u(x_{i-1}, y_j, t_k)}{h^2} \right| + |a_x(u)| \left| \frac{u(x_{i+1}, y_j, t_k) - u(x_{i-1}, y_j, t_k)}{2h} \right|. \end{aligned}$$

Из формул численного дифференцирования и предположений леммы вытекает

$$\left| \frac{u(x_{i+1}, y_j, t_k) - 2u(x_i, y_j, t_k) + u(x_{i-1}, y_j, t_k)}{h^2} \right| \leq C_{12}, \quad \left| \frac{u(x_{i+1}, y_j, t_k) - u(x_{i-1}, y_j, t_k)}{2h} \right| \leq C_{13}.$$

Таким образом, с учетом (2.5) и (2.6) получаем

$$|\Lambda_x(u)[u(x_i, y_j, t_k)]| \leq \hat{d}C_{12} + \hat{a}C_{13}.$$

Случаи $i = 0$ и $i = J$ в оценке $|\Lambda_x(u)[u(x_i, y_j, t_k)]|$ рассматриваются аналогично. Подобным образом оценивается величина $|\Lambda_y(u)[u(x_i, y_j, t_k)]|$. $\square$

Лемма 6.3. Пусть все производные функции $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_k)$ до шестого порядка по x и y непрерывны. Тогда найдется такая константа C_{12} , что $\left| \Lambda_y(u)\Lambda_x(u) \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_k) \right] \right| \leq C_{12}$ для любых допустимых u .

Доказательство. Зафиксируем внутренний узел, то есть $i = 1, \dots, J-1$ и $j = 1, \dots, J-1$. Обозначим $v(x_i, y_j, t_k) = \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_k)$, тогда

$$\begin{aligned} \Lambda_x(u)[v(x_i, y_j, t_k)] &= d(u)\delta_x^2[v(x_i, y_j, t_k)] + a_x(u)\delta_x[v(x_i, y_j, t_k)], \\ \Lambda_y(u)\Lambda_x(u)[v(x_i, y_j, t_k)] &= d(u)\delta_y^2[\Lambda_x(u)[v(x_i, y_j, t_k)]] + a_y(u)\delta_y[\Lambda_x(u)[v(x_i, y_j, t_k)]] = \\ &= d^2(u)\delta_y^2[\delta_x^2[v(x_i, y_j, t_k)]] + d(u)a_x(u)\delta_y^2[\delta_y[v(x_i, y_j, t_k)]] + \\ &+ a_y(u)d(u)\delta_y[\delta_x^2[v(x_i, y_j, t_k)]] + a_y(u)a_x(u)\delta_y[\delta_x[v(x_i, y_j, t_k)]]. \end{aligned}$$

Согласно формулам численного дифференцирования

$$\delta_y^2[\delta_x^2[v(x_i, y_j, t_k)]] = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) (x_i, y_j, t_k) + r_6, \quad |r_6| \leq C_{13}h^2,$$

$$\delta_y[\delta_x^2[v(x_i, y_j, t_k)]] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) (x_i, y_j, t_k) + r_7, \quad |r_7| \leq C_{14}h^2,$$

$$\delta_y^2[\delta_x[v(x_i, y_j, t_k)]] = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) (x_i, y_j, t_k) + r_8, \quad |r_8| \leq C_{15}h^2,$$

$$\delta_y[\delta_x[v(x_i, y_j, t_k)]] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) (x_i, y_j, t_k) + r_9, \quad |r_9| \leq C_{16}h^2.$$

В силу ограниченности соответствующих производных с учетом (2.5) и (2.6) получаем заключение леммы. Случаи граничных узлов рассматриваются аналогично. $\square$

Определение 6.1. *Невязкой без интерполяции неоднородности* метода переменных направлений (5.6) в варианте 1 назовем

$$\psi_{i,j}^k = B(u(x_i, y_j, t_k)) \left[\frac{u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k)}{\Delta} \right] + A(u(x_i, y_j, t_k)) [u(x_i, y_j, t_k)] - f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (6.3)$$

$$f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = f\left(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{k+\frac{1}{2}})), \dots, u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_N(t_{k+\frac{1}{2}}))\right). \quad (6.4)$$

Теорема 6.1. *Пусть выполняется условие лемм 6.1 и 6.3. Тогда невязка без интерполяции неоднородности метода переменных направлений в варианте 1 имеет порядок $O(\Delta + h^2)$.*

Доказательство проводится подобно доказательству теоремы 5.1 из [3] с использованием лемм 6.1, 6.2 и 6.3.

Определение 6.2. *Невязкой с кусочно-постоянной интерполяцией и экстраполяцией* метода переменных направлений (5.6) в варианте 1 назовем

$$\hat{\psi}_{i,j}^k = B(u(x_i, y_j, t_k)) \left[\frac{u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k)}{\Delta} \right] + A(u(x_i, y_j, t_k)) [u(x_i, y_j, t_k)] - \hat{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}},$$

где

$$\hat{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = f\left(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, \hat{u}_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{k+\frac{1}{2}})), \dots, \hat{u}_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_N(t_{k+\frac{1}{2}}))\right), \quad (6.5)$$

$\hat{u}_{i,j}(t)$, $t \in [t_k - \tau, t_{k+\frac{1}{2}}]$ — результат кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией предыстории точного решения $\{u(x_i, y_j, t_l)\}_k$.

Теорема 6.2. *Пусть выполняются условия теоремы 6.1. Тогда невязка с кусочно-постоянной интерполяцией и экстраполяцией метода переменных направлений имеет порядок $O(\Delta + h^2)$.*

Доказательство. Невязка без интерполяции неоднородности и невязка с кусочно-постоянной интерполяцией и экстраполяцией продолжением связаны следующим соотношением:

$$\hat{\psi}_{i,j}^k = \psi_{i,j}^k + \hat{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}.$$

В силу определений (6.4), (6.5), липшицевости (2.4) функции f и того, что кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией имеет первый порядок (3.4), получаем

$$|\hat{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}| \leq L_f N C_2 \Delta.$$

Тогда из утверждения теоремы 6.1 вытекает утверждение данной теоремы. $\square$

Рассмотрим **вариант 2**. Обозначим $\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}u(x_i, y_j, t_k) - \frac{1}{2}u(x_i, y_j, t_{k-1})$.

Лемма 6.4. *Пусть точное решение $u(x, y, t)$ задачи (2.1)–(2.3) четырежды непрерывно дифференцируемо по x и y и дважды непрерывно дифференцируемо по t . Тогда*

$$\begin{aligned} & \left| d\left(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) \right) + \right. \\ & + a_x\left(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\right) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + a_y\left(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\right) \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - \\ & \left. - \left(\Lambda_x(\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) + \Lambda_y(\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \right) [u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})] \right| \leq \hat{C}_3(\Delta^2 + h^2), \quad i = \overline{0, J}, \quad j = \overline{0, J}, \quad k = \overline{0, M-1}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Доказательство. Зафиксируем внутренний узел $i = 1, \dots, J-1$ и $j = 1, \dots, J-1$. В силу предположений о соответствующей гладкости решения $u(x, y, t)$ задачи (2.1) и свойства линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением получаем

$$u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) = \frac{3}{2}u(x_i, y_j, t_k) - \frac{1}{2}u(x_i, y_j, t_{k-1}) + r_1 = \hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + r_1, \quad |r_1| \leq \hat{C}_4 \Delta^2.$$

В силу липшицевости коэффициентов d , a_x и a_y выполняется

$$|d(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})) - d(\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})| \leq L_d |u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - \hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}| \leq L_d \hat{C}_4 \Delta^2,$$

$$|a_x(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})) - a_x(\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})| \leq L_a |u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - \hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}| \leq L_a \hat{C}_4 \Delta^2,$$

$$|a_y(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})) - a_y(\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})| \leq L_a |u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - \hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}| \leq L_a \hat{C}_4 \Delta^2.$$

Тогда в силу ограниченности модулей соответствующих производных выполняется

$$\begin{aligned} & \left| d\left(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) \right) + \right. \\ & + a_x\left(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\right) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + a_y\left(u(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}})\right) \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - \\ & - d\left(\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) \right) - a_x\left(\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) - \\ & \left. - a_y\left(\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}\right) \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}) \right| \leq (L_d + 2L_a) \hat{C}_4 C_5 \Delta^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из формул численного дифференцирования для первых и вторых производных по x и y , оценок их погрешностей и (6.7) вытекает заключение леммы. Случаи граничных узлов рассматриваются аналогично. $\square$

Определение 6.3. *Невязкой без интерполяции неоднородности* метода переменных направлений (5.6) в варианте 2 метода назовем

$$\tilde{\psi}_{i,j}^k = B(\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \left[\frac{u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k)}{\Delta} \right] + A(\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) [u(x_i, y_j, t_k)] - f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}, \quad (6.8)$$

где $f_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$ определено в (6.4).

Теорема 6.3. *Пусть выполняются условия лемм 6.4 и 6.3. Тогда невязка без интерполяции неоднородности метода переменных направлений в варианте 2 метода имеет порядок $O(\Delta^2 + h^2)$.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 6.1 с заменой зависимости операторов B , A , Λ_x , Λ_y от $\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$ и использованием леммы 6.4 вместо леммы 6.1.

Определение 6.4. *Невязкой с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением* метода переменных направлений в варианте 2 метода назовем

$$\tilde{\psi}_{i,j}^k = B(\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) \left[\frac{u(x_i, y_j, t_{k+1}) - u(x_i, y_j, t_k)}{\Delta} \right] + A(\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}) [u(x_i, y_j, t_k)] - \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}},$$

где

$$\tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = f\left(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, \tilde{u}_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{k+\frac{1}{2}})), \dots, \tilde{u}_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_N(t_{k+\frac{1}{2}}))\right), \quad (6.9)$$

$\tilde{u}_{i,j}(t)$, $t \in [t_k - \tau, t_{k+\frac{1}{2}}]$ — результат кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением предыстории точного решения $\{u(x_i, y_j, t_l)\}_k$.

Теорема 6.4. *Пусть выполняются условия теоремы 6.3. Тогда невязка с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением в варианте 2 метода переменных направлений имеет порядок $O(\Delta^2 + h^2)$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 6.2.

7. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

При фиксированном k введем вектор $u^k = (u_{0,0}^k, \dots, u_{0,J}^k, u_{1,0}^k, \dots, u_{J,J}^k)$. На множестве H таких векторов размерности $(J+1)^2$ введем скалярное произведение и норму

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^J \sum_{j=0}^J h^2 u_{i,j} v_{i,j}, \quad \|u\|^2 = \langle u, u \rangle.$$

Рассмотрим однородную систему размерности $(J+1)^2$, соответствующую схеме (5.6), записанную в координатной форме и в векторной форме:

$$B(u_{i,j}^k) \left[\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta} \right] + A(u_{i,j}^k) [u_{i,j}^k] = 0, \quad i = 0, \dots, J, \quad j = 0, \dots, J,$$

$$B(u^k) [u^{k+1} - u^k] + \Delta A(u^k) [u^k] = 0. \quad (7.1)$$

В силу однозначной разрешимости схемы (теорема 4.1) оператор $B = B(u^k)$ обратим, поэтому (7.1) можно переписать в виде

$$u^{k+1} = (E - (B(u^k))^{-1} \Delta A(u^k)) [u^k],$$

или, вводя оператор $S = S(u^k) = E - (B(u^k))^{-1} \Delta A(u^k)$, получим следующую запись:

$$u^{k+1} = S(u^k) [u^k]. \quad (7.2)$$

Определение 7.1. Схему (7.2) назовем *устойчивой*, если $\|u^{k+1}\| \leq \|u^k\|$ для любых допустимых u^k .

Отметим, что из устойчивости следует, что $\|S(u^k)\| \leq 1$ в подчиненной операторной норме для любых допустимых u^k , и обратно.

Определение 7.2. Схему (5.6) назовем *устойчивой*, если устойчива соответствующая однородная схема (7.2).

Распишем условие устойчивости для несамосопряженных операторов [4]. Так как

$$\begin{aligned} \|u^{k+1}\|^2 &= \langle u^{k+1}, u^{k+1} \rangle = \langle S(u^k) [u^k], S(u^k) [u^k] \rangle = \\ &= \langle (E - (B(u^k))^{-1} \Delta A(u^k)) [u^k], (E - (B(u^k))^{-1} \Delta A(u^k)) [u^k] \rangle = \\ &= \|u^k\|^2 - 2\Delta \langle (B(u^k))^{-1} A(u^k) [u^k], u^k \rangle + \Delta^2 \|((B(u^k))^{-1} A(u^k)) [u^k]\|^2, \end{aligned}$$

то условие устойчивости эквивалентно выполнению соотношения

$$\langle ((B(u^k))^{-1} A(u^k)) [u^k], u^k \rangle \geq \frac{\Delta}{2} \langle (B(u^k))^{-1} A(u^k) [u^k], (B(u^k))^{-1} A(u^k) [u^k] \rangle. \quad (7.3)$$

Определение 7.3. Оператор $\Lambda_x(u^k)$ назовем *неположительно определенным*, если

$$\langle \Lambda_x(u^k) [v], v \rangle \leq 0$$

для любых допустимых v .

Теорема 7.1. Пусть операторы $\Lambda_x(u^k)$ и $\Lambda_y(u^k)$ неположительно определены, а для операторов $A(u^k)$, $B(u^k)$, определенных в (5.7), выполняется соотношение $(B(u^k))^{-1} A(u^k) = A(u^k)(B(u^k))^{-1}$. Тогда схема (7.2) устойчива.

Доказательство проводится подобно доказательству теоремы 6.1 из [3].

Случай постоянных коэффициентов. Пусть $d(u) = d > 0$, $a_x(u) = a_x$, $a_y(u) = a_y$, тогда

$$\begin{aligned}
 < \Lambda_x(u^k)[u^k], u^k > = \sum_{i=0}^J \sum_{j=0}^J h^2 \Lambda_x(u_{i,j}^k)[u_{i,j}^k] u_{i,j}^k = \\
 &= \sum_{j=0}^J \left(-2d(u_{0,j}^k)^2 + d \sum_{i=1}^{J-1} (u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k) u_{i,j}^k - 2d(u_{J,j}^k)^2 + a_x \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{J-1} (u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k) u_{i,j}^k \right) = \\
 &= \sum_{j=0}^J \left(-2d(u_{0,j}^k)^2 + d \sum_{i=1}^{J-1} (u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k) u_{i,j}^k - d \sum_{i=1}^{J-1} (u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k) u_{i,j}^k - 2d(u_{J,j}^k)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + a_x \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{J-1} (u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k) u_{i,j}^k \right) = \\
 &= \sum_{j=0}^J \left(-2d(u_{0,j}^k)^2 - d(u_{1,j}^k)^2 + (d - a_x \frac{h}{2}) u_{0,j}^k u_{1,j}^k - d \sum_{i=1}^{J-2} (u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - 2d(u_{J,j}^k)^2 - d(u_{J-1,j}^k)^2 + (d + a_x \frac{h}{2}) u_{J,j}^k u_{J-1,j}^k \right).
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

Внутренняя сумма в правой части этого равенства неположительна, а остальные слагаемые под знаком внешнего суммирования представляют собой две квадратичные формы второго порядка. Исследуем их на неположительную определенность. Для удобства вынесем знак минус из первых трех слагаемых и исследуем полученную форму на неотрицательную определенность.

Определитель D матрицы квадратичной формы $2d(u_{0,j}^k)^2 + d(u_{1,j}^k)^2 - \left(d - a_x \frac{h}{2}\right) u_{0,j}^k u_{1,j}^k$ равен

$$\begin{aligned}
 D &= 2d^2 - \left(\frac{d}{2} - a_x \frac{h}{4}\right)^2, \text{ или} \\
 D &= \frac{7}{8}d^2 + \frac{1}{4}da_x h - \frac{1}{16}(a_x h)^2 = \frac{7}{8}d^2 \left(1 + \frac{2}{7} \frac{a_x h}{d} - \frac{1}{14} \left(\frac{a_x h}{d}\right)^2\right).
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Обозначим $z = \frac{a_x h}{d}$ и исследуем на знаки параболу $-\frac{1}{14}z^2 + \frac{2}{7}z + 1$. Ее корни $z_1 = 4 - 6\sqrt{2}$, $z_2 = 4 + 6\sqrt{2}$. Тогда парабола неотрицательна, если выполняются условия $4 - 6\sqrt{2} \leq z \leq 4 + 6\sqrt{2}$, или

$$4 - 6\sqrt{2} \leq \frac{a_x h}{d} \leq 4 + 6\sqrt{2}. \tag{7.6}$$

Неравенства (7.6) выполняются при положительных a_x , если $a_x h \leq (4 + 6\sqrt{2})d$. При отрицательных a_x условие (7.6) выполняется, если $|a_x| h \leq (6\sqrt{2} - 4)d$. Таким образом, если выполняется условие

$$|a_x| h \leq (6\sqrt{2} - 4)d, \tag{7.7}$$

то форма $-2d(u_{0,j}^k)^2 - d(u_{1,j}^k)^2 + \left(d - a_x \frac{h}{2}\right) u_{0,j}^k u_{1,j}^k$ неположительно определена.

Подобным образом исследуем на неположительную определенность последние три слагаемых под знаком суммы в правой части (7.4). В этом случае получится парабола $-\frac{1}{14}z^2 + \frac{2}{7}z + 1$ с корнями $z_1 = -4 - 6\sqrt{2}$, $z_2 = -4 + 6\sqrt{2}$. Условие (7.6) заменяется условием

$$-4 - 6\sqrt{2} \leq \frac{a_x h}{d} \leq -4 + 6\sqrt{2}. \tag{7.8}$$

Это условие также выполняется при (7.7), и исследуемая форма является неположительно определенной. Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 7.2. Пусть коэффициенты $d(u) = d > 0$, $a_x(u) = a_x$, и для шага выполняется условие (7.7). Тогда оператор Λ_x неположительно определен.

Аналогично проверяется следующая теорема.

Теорема 7.3. Пусть коэффициенты $d(u) = d > 0$, $a_y(u) = a_y$, и выполняется условие на шаг

$$|a_y|h \leq (6\sqrt{2} - 4)d. \quad (7.9)$$

Тогда оператор Λ_y неположительно определен.

Случай линейной зависимости коэффициентов диффузии от решения. В случае переменных коэффициентов диффузии $d = d(u)$ операторы $\Lambda_x(u^k)$ и $\Lambda_y(u^k)$ могут не быть неположительно определенными, см. пример в [3].

В этой же статье (где рассматривается уравнение без конвекции: $a_x = a_y = 0$) показано, что в случае линейной зависимости (а также любой полиномиальной зависимости) коэффициентов диффузии от решения, при дополнительном предположении неотрицательности модели $u_{i,j}^k$, операторы $\Lambda_x(u^k)$ и $\Lambda_y(u^k)$ являются неположительно определенными.

В случае добавления непостоянной конвекции неположительная определенность может не сохраняться даже при линейной зависимости. Приведем пример.

Пример 1. Пусть $u(x, y, t) = x + 1$, $d(u) = u$, $a_x(u) = au$, $a = 20$, $x \in [-1, 1]$, $J = 4$, $h = 1/2$, $u_{i,j}^k = ih$. Тогда для варианта 1

$$\Lambda_x(u_{i,j}^k)[u_{i,j}^k] = \begin{cases} -u_{i,j}^k \frac{2u_{i,j}^k}{h^2}, & i = 0, \\ u_{i,j}^k \frac{u_{i-1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i+1,j}^k}{h^2} + au_{i,j}^k \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i-1,j}^k}{2h}, & i = \overline{1, J-1}, \\ -u_{i,j}^k \frac{2u_{i,j}^k}{h^2}, & i = J. \end{cases}$$

Подставляя данные, получаем

$$\Lambda_x(u_{i,j}^k)[u_{i,j}^k] = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ aih, & i = \overline{1, J-1}, \\ -\frac{8}{h^2}, & i = J. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\langle \Lambda_x(u^k)[u^k], u^k \rangle = \sum_{j=0}^J \sum_{i=0}^4 h^2 \Lambda_x(u_{i,j}^k)[u_{i,j}^k] u_{i,j}^k = \sum_{j=0}^J h^2 \left(\sum_{i=1}^3 a(ih)^2 - \frac{16}{h^2} \right) = \sum_{j=0}^J h^2 (70 - 64) > 0.$$

Такие эффекты могут привести к неустойчивости метода.

8. ПОРЯДОК СХОДИМОСТИ

Определение 8.1. Погрешностью метода (5.6) назовем величину

$$\varepsilon_{i,j}^k = u(x_i, y_j, t_k) - u_{i,j}^k, \quad i = 0, \dots, J, \quad j = 0, \dots, J, \quad k = -M_0, \dots, M.$$

Для каждого временного слоя с номером $k = -M_0, \dots, M$ введем вектор послойной погрешности $\varepsilon^k = (\varepsilon_{1,1}^k, \varepsilon_{1,2}^k, \dots, \varepsilon_{J-1,J-1}^k)$ с нормой $\|\varepsilon^k\|$.

Определение 8.2. Будем говорить, что метод *сходится с порядком* $h^p + \Delta^q$, если существует константа C , не зависящая от h и Δ , такая, что $\|\varepsilon^k\| \leq C(h^p + \Delta^q)$ для всех $k = 1, \dots, M$.

Определение 8.3. Накопленной *предысторией* послойной погрешности к моменту t_k , $k = 0, 1, \dots, M$ назовем совокупность векторов послойной погрешности $\{\varepsilon^l\}_k = \{\varepsilon^l, 0 \leq l \leq k\}$ с нормой $\|\{\varepsilon^l\}_k\| = \max_{0 \leq l \leq k} \|\varepsilon^l\|$.

Сформулируем и докажем основную теорему о порядках сходимости.

Вариант 1.

Теорема 8.1. Пусть выполняются условия теоремы 6.1 и схема (5.6) устойчива, тогда метод (5.6), где операторы определяются формулами (5.7), (5.1), (5.2), сходится с порядком $h^2 + \Delta$.

Доказательство. Запишем метод (5.6) в виде

$$B(u_{i,j}^k)[u_{i,j}^{k+1}] = \left(B(u_{i,j}^k) - \Delta A(u_{i,j}^k) \right) [u_{i,j}^k] + \Delta \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}.$$

Выпишем определение невязки с кусочно-постоянной интерполяцией и экстраполяцией метода переменных направлений в варианте 1 в следующей форме:

$$B(u(x_i, y_j, t_k))[u(x_i, y_j, t_{k+1})] = \left(B(u(x_i, y_j, t_k)) - \Delta A(u(x_i, y_j, t_k)) \right) [u(x_i, y_j, t_k)] + \Delta \hat{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \Delta \hat{\psi}_{i,j}^k.$$

Вычитая, получаем уравнение для погрешности

$$\begin{aligned} B(u(x_i, y_j, t_k))[u(x_i, y_j, t_{k+1})] - B(u_{i,j}^k)[u_{i,j}^{k+1}] &= \left(B(u(x_i, y_j, t_k)) - \Delta A(u(x_i, y_j, t_k)) \right) [u(x_i, y_j, t_k)] - \\ &- \left(B(u_{i,j}^k) - \Delta A(u_{i,j}^k) \right) [u_{i,j}^k] + \Delta \hat{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \Delta \hat{\psi}_{i,j}^k. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Запишем левую часть уравнения (8.1) в виде

$$\begin{aligned} B(u(x_i, y_j, t_k))[u(x_i, y_j, t_{k+1})] - B(u_{i,j}^k)[u_{i,j}^{k+1}] &= \\ &= B(u_{i,j}^k)[\varepsilon_{i,j}^{k+1}] + \left(B(u(x_i, y_j, t_k)) - B(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_{k+1})]. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Аналогично, первые два слагаемые в правой части уравнения (8.1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \left(B(u(x_i, y_j, t_k)) - \Delta A(u(x_i, y_j, t_k)) \right) [u(x_i, y_j, t_k)] - \left(B(u_{i,j}^k) - \Delta A(u_{i,j}^k) \right) [u_{i,j}^k] &= \\ &= \left(B(u_{i,j}^k) - \Delta A(u_{i,j}^k) \right) [\varepsilon_{i,j}^k] + \left(B(u(x_i, y_j, t_k)) - B(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k)] - \\ &- \Delta \left(A(u(x_i, y_j, t_k)) - A(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k)]. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Подставив (8.2) и (8.3) в (8.1), получим уравнение для погрешности в виде

$$\begin{aligned} B(u_{i,j}^k)[\varepsilon_{i,j}^{k+1}] &= \left(B(u_{i,j}^k) - \Delta A(u_{i,j}^k) \right) [\varepsilon_{i,j}^k] - \Delta \left(A(u(x_i, y_j, t_k)) - A(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k)] + \\ &+ \left(B(u(x_i, y_j, t_k)) - B(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k) - u(x_i, y_j, t_{k+1})] + \Delta \hat{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \Delta \hat{\psi}_{i,j}^k. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Преобразуем:

$$\begin{aligned} &\left(B(u(x_i, y_j, t_k)) - B(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k) - u(x_i, y_j, t_{k+1})] = \\ &= \frac{\Delta}{2} \left(A(u(x_i, y_j, t_k)) - A(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k) - u(x_i, y_j, t_{k+1})] + \\ &+ \frac{\Delta^2}{4} \left(\Lambda_x(u(x_i, y_j, t_k)) \Lambda_y(u(x_i, y_j, t_k)) - \Lambda_x(u_{i,j}^k) \Lambda_y(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k) - u(x_i, y_j, t_{k+1})]. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}^k &= \frac{1}{2} \left(A(u(x_i, y_j, t_k)) - A(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k) - u(x_i, y_j, t_{k+1})], \\ \chi_i, j^k &= \frac{1}{4} \left(\Lambda_x(u(x_i, y_j, t_k)) \Lambda_y(u(x_i, y_j, t_k)) - \Lambda_x(u_{i,j}^k) \Lambda_y(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k) - u(x_i, y_j, t_{k+1})], \\ \omega_{i,j}^k &= - \left(A(u(x_i, y_j, t_k)) - A(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k)], \end{aligned}$$

перепишем (8.4) в виде

$$B(u_{i,j}^k)[\varepsilon_{i,j}^{k+1}] = \left(B(u_{i,j}^k) - \Delta A(u_{i,j}^k) \right) [\varepsilon_{i,j}^k] + \Delta \varphi_{i,j}^k + \Delta^2 \chi_i, j^k + \Delta \omega_{i,j}^k + \Delta \hat{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \Delta \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} + \Delta \hat{\psi}_{i,j}^k. \quad (8.5)$$

Используя определения (5.7), (5.1), (5.2) (для определенности рассмотрим случай внутренних узлов), липшицевость коэффициентов d , a_x и a_y , а также ограниченность разностных отношений (см. доказательство леммы 6.2), получаем

$$\begin{aligned} |\omega_{i,j}^k| &\leq \left| \left(\Lambda_x(u(x_i, y_j, t_k)) - \Lambda_x(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k)] \right| + \left| \left(\Lambda_y(u(x_i, y_j, t_k)) - \Lambda_y(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k)] \right| \leq \\ &\leq \left| d(u(x_i, y_j, t_k)) - d(u_{i,j}^k) \right| |\delta_x^2[u(x_i, y_j, t_k)]| + \left| a_x(u(x_i, y_j, t_k)) - a_x(u_{i,j}^k) \right| |\delta_x[u(x_i, y_j, t_k)]| + \\ &+ \left| d(u(x_i, y_j, t_k)) - d(u_{i,j}^k) \right| |\delta_y^2[u(x_i, y_j, t_k)]| + \left| a_y(u(x_i, y_j, t_k)) - a_y(u_{i,j}^k) \right| |\delta_y[u(x_i, y_j, t_k)]| \leq \\ &\leq (L_d + L_a) C_{17} |\varepsilon_{i,j}^k|. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Аналогично оценивается

$$|\varphi_{i,j}^k| \leq (L_d + L_a) C_{18} |\varepsilon_{i,j}^k|. \quad (8.7)$$

С использованием леммы 6.3 выводится оценка

$$|\chi_{i,j}^k| = \frac{1}{4} \left| \left(\Lambda_x(u(x_i, y_j, t_k)) \Lambda_y(u(x_i, y_j, t_k)) - \Lambda_x(u_{i,j}^k) \Lambda_y(u_{i,j}^k) \right) [u(x_i, y_j, t_k) - u(x_i, y_j, t_{k+1})] \right| \leq C_{19} \Delta. \quad (8.8)$$

Используя определения (4.2) и (6.5), а также липшицевость (2.4) функции f , оценим величину

$$\begin{aligned} |\hat{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}| &= \left| f\left(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, \hat{u}_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{k+\frac{1}{2}})), \dots, \hat{u}_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_N(t_{k+\frac{1}{2}}))\right) - \right. \\ &- \left. f\left(x_i, y_j, t_{k+\frac{1}{2}}, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_1(t_{k+\frac{1}{2}})), \dots, u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_N(t_{k+\frac{1}{2}}))\right) \right| \leq \\ &\leq L_f \sum_{n=1}^N \left| \hat{u}_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_n(t_{k+\frac{1}{2}})) - u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_n(t_{k+\frac{1}{2}})) \right|. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Используя липшицевость (3.6) оператора кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией, получаем для каждого $n = 1, \dots, N$ оценку

$$|\hat{u}_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_n(t_{k+\frac{1}{2}})) - u_{i,j}(t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_n(t_{k+\frac{1}{2}}))| \leq |\varepsilon_{i,j}^{l(n)-1}|, \quad (8.10)$$

где $t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_n(t_{k+\frac{1}{2}}) \in [t_{l(n)-1}, t_{l(n)}]$, если же $t_{k+\frac{1}{2}} - \tau_n(t_{k+\frac{1}{2}}) > t_k$, то $t_{l(n)-1} = t_k$.

Из (8.9) и (8.10) вытекает

$$|\hat{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}| \leq L_f \sum_{n=1}^N |\varepsilon_{i,j}^{l(n)-1}|. \quad (8.11)$$

Последнее слагаемое в правой части (8.5) оценивается в силу теоремы 6.2:

$$|\psi_{i,j}^k| \leq C_{20} (\Delta + h^2). \quad (8.12)$$

Перепишем (8.5) в векторном виде, введя вектора ε^k , φ^k , χ^k , ω^k , $\delta f^{k+\frac{1}{2}}$, $\hat{\psi}^k$ с координатами $\varepsilon_{i,j}^k$, $\varphi_{i,j}^k$, $\chi_{i,j}^k$, $\omega_{i,j}^k$, $\hat{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}}$, $\hat{\psi}_{i,j}^k$, соответственно, и соответствующие матрицы $A(u^k)$ и $B(u^k)$, получим

$$B(u^k) \varepsilon^{k+1} = (B(u^k) - \Delta A(u^k)) \varepsilon^k + \Delta \omega^k + \Delta \varphi^k + \Delta^2 \chi^k + \Delta \delta f^{k+\frac{1}{2}} + \Delta \hat{\psi}^k.$$

В силу обратимости $B(u^k)$ это уравнение можно переписать в виде

$$\varepsilon^{k+1} = S(u^k) \varepsilon^k + (B(u^k))^{-1} (\Delta \omega^k + \Delta \varphi^k + \Delta^2 \chi^k + \Delta \delta f^{k+\frac{1}{2}} + \Delta \hat{\psi}^k). \quad (8.13)$$

Так как $(B(u^k))^{-1}$ ограничен, то $\|(B(u^k))^{-1}\| \leq C_{21}$. В силу устойчивости $\|S(u^k)\| \leq 1$, тогда

$$\|\varepsilon^{k+1}\| \leq \|\varepsilon^k\| + C_{21} \Delta (\|\omega^k\| + \|\varphi^k\| + \Delta \|\chi^k\| + \|\delta f^{k+\frac{1}{2}}\| + \|\hat{\psi}^k\|). \quad (8.14)$$

Используя (8.6), оценим

$$\|\omega^k\|^2 = \sum_{i=1}^{J-1} \sum_{j=0}^J h^2 (\omega_{i,j}^k)^2 \leq \sum_{i=0}^J \sum_{j=1}^{J-1} h^2 (L_d + L_a)^2 C_{17}^2 |\varepsilon_{i,j}^k|^2 \leq C_{22}^2 \|\varepsilon^k\|^2. \quad (8.15)$$

Аналогично

$$\|\varphi^k\| \leq C_{23} \|\varepsilon^k\|. \quad (8.16)$$

Используя (8.11) и определение накопленной предыстории послышной погрешности к моменту t_k , оценим

$$\begin{aligned}\|\delta f^{k+\frac{1}{2}}\|^2 &= \sum_{i=0}^J \sum_{j=0}^J h^2 (\hat{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} - \tilde{f}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}})^2 \leq \sum_{i=0}^J \sum_{j=0}^J h^2 L_f^2 \sum_{n=1}^N |\varepsilon_{i,j}^{l(n)-1}|^2 = \\ &= (L_f)^2 \sum_{n=1}^N \|\varepsilon^{l(n)-1}\|^2 \leq (L_f)N \|\{\varepsilon^l\}_k\|^2,\end{aligned}$$

откуда

$$\|\delta f^{k+\frac{1}{2}}\| \leq C_{24} \|\{\varepsilon^l\}_k\|. \quad (8.17)$$

Используя (8.8), оценим

$$\|\chi^k\|^2 = \sum_{i=1}^{J-1} \sum_{j=1}^{J-1} h^2 (\chi_{i,j}^k)^2 \leq \sum_{i=1}^{J-1} \sum_{j=1}^{J-1} h^2 C_{19}^2 \Delta^2 \leq C_{19}^2 \Delta^2 (2X)^2,$$

откуда

$$\|\chi^k\| \leq C_{25} \Delta. \quad (8.18)$$

Аналогично из (8.12) следует

$$\|\hat{\psi}^k\| \leq C_{26} (\Delta + h^2). \quad (8.19)$$

Из оценок (8.14)–(8.19) вытекает

$$\|\varepsilon^{k+1}\| \leq \|\varepsilon^k\| + C_{27} \Delta \|\{\varepsilon^l\}_k\| + C_{28} \Delta (\Delta + h^2).$$

Так как $\|\{\varepsilon^l\}_{k+1}\| = \max\{\|\{\varepsilon^l\}_{k+1}\|, \|\varepsilon^{k+1}\|\}$, то

$$\|\{\varepsilon^l\}_{k+1}\| \leq \|\{\varepsilon^l\}_k\| (1 + \Delta C_{27}) + C_{28} \Delta (\Delta + h^2). \quad (8.20)$$

Из оценки (8.20) стандартным методом выводится оценка

$$\|\{\varepsilon^l\}_k\| \leq \frac{C_{28}}{C_{27}} (e^{C_{27}T} - 1) (\Delta + h^2) \quad (8.21)$$

для всех $k = 1, \dots, K$. Отсюда следует заключение теоремы. $\square$

Вариант 2.

Теорема 8.2. Пусть выполняются условия теоремы 6.3 и схема (5.6) устойчива, тогда метод (5.6), где операторы определяются формулами (5.7), (5.8), (5.9), сходится с порядком $h^2 + \Delta^2$.

Доказательство проводится по тому же плану, что и доказательство предыдущей теоремы с заменой $u_{i,j}^k$ на $\tilde{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}u_{i,j}^k - \frac{1}{2}u_{i,j}^{k-1}$ и $u(x_i, y_j, t_k)$ на $\hat{u}_{i,j}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}u(x_i, y_j, t_k) - \frac{1}{2}u(x_i, y_j, t_{k-1})$ в операторах A , B , Λ_x и Λ_y . Вместо теоремы 6.2 используется теорема 6.4. Отметим, что в [3] приведено доказательство этого варианта теоремы для случая отсутствия конвекции $a_x = a_y = 0$.

9. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Пример 2. Рассмотрим тестовое уравнение с двумя переменными запаздываниями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} &= d(u) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + a_x(u) \frac{\partial u}{\partial x} + a_y(u) \frac{\partial u}{\partial y} + e^t \sin \frac{\pi x}{4} \left(\frac{y^3}{3} - 4y \right) - \\ &- d(u) e^t \sin \frac{\pi x}{4} \left(2y - \left(\frac{y^3}{3} - 4y \right) \frac{\pi^2}{16} \right) - a_x(u) e^t \cos \frac{\pi x}{4} \left(\frac{y^3}{3} - 4y \right) \frac{\pi}{4} - a_y(u) e^t \sin \frac{\pi x}{4} (y^2 - 4) + \\ &+ u^2(x, y, t - \tau_1(t)) + u^2(x, y, t - \tau_2(t)) - \left(e^{t-\tau_1(t)} \sin \frac{\pi x}{4} \left(\frac{y^3}{3} - 4y \right) \right)^2 - \left(e^{t-\tau_2(t)} \sin \frac{\pi x}{4} \left(\frac{y^3}{3} - 4y \right) \right)^2,\end{aligned}$$

где $x \in [-2, 2]$, $y \in [-2, 2]$, $t \in [0, 1]$, $\tau_1(t) = \sqrt{2} \frac{t+1}{3}$, $\tau_2(t) = \sqrt{3} \frac{t+1}{3}$, $d(u) = 1 + u^2$, $a_x(u) = a_y(u) = u^2$.

Заданы начальные и граничные условия

$$u(x, y, t) = e^t \sin \frac{\pi x}{4} \left(\frac{y^3}{3} - 4y \right), \quad x \in [-2, 2], \quad y \in [-2, 2], \quad t \in [-1, 0],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, -2, t) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 2, t) = 0, \quad x \in [-2, 2], \quad t \in [0, 1],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-2, y, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(2, y, t) = 0, \quad y \in [-2, 2], \quad t \in [0, 1].$$

$$u(x, y, t) = e^t \sin \frac{\pi x}{4} \left(\frac{y^3}{3} - 4y \right) \text{ — точное решение.}$$

Введем следующие обозначения:

$$E(\Delta, h) = \max_{0 \leq k \leq K} \|U^k - u^k\|,$$

$$U^k = (u(x_1, y_1, t_k), u(x_1, y_2, t_k), \dots, u(x_J, y_J, t_k)), \quad u^k = (u_{11}^k, u_{12}^k, \dots, u_{JJ}^k).$$

Метод тестировался для различных шагов Δ и h . Были получены вычислительные порядки сходимости $order_\Delta = \log_2 \left(\frac{E(2\Delta, h)}{E(\Delta, h)} \right)$, $order_h = \log_2 \left(\frac{E(\Delta, 2h)}{E(\Delta, h)} \right)$ по Δ и h соответственно.

В табл. 1 показан вычислительный порядок сходимости по h . Выбран второй вариант алгоритма, то есть $d(u)$, $a_x(u)$, $a_y(u)$ приближается с помощью $\frac{3}{2}u_{i,j}^k - \frac{1}{2}u_{i,j}^{k-1}$ и производится кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением для вычисления слагаемых с запаздыванием.

ТАБЛИЦА 1. Зависимость погрешностей и вычислительных порядков сходимости от h

TABLE 1. Dependence of errors and computational orders of convergence on h

Δ	h	$E(\Delta, h)$	$order_h$
1/1000	4/10	0,553721709725025	
1/1000	2/10	0,136136544584237	2,0241
1/1000	1/10	0,032805906747109	2,0530

В табл. 2 показан вычислительный порядок сходимости по h для варианта 1, то есть при приближении $d(u)$, $a_x(u)$, $a_y(u)$ с помощью значения функции только на предыдущем слое $u_{i,j}^k$ и с кусочно-постоянной интерполяцией для вычисления слагаемых с запаздыванием. Результаты получаются очень похожи со случаем, когда $d(u)$ приближается с помощью $\frac{3}{2}u(x_i, y_j, t_k) - \frac{1}{2}u(x_i, y_j, t_{k-1})$.

ТАБЛИЦА 2. Зависимость погрешностей и вычислительных порядков сходимости от h

TABLE 2. Dependence of errors and computational orders of convergence on h

Δ	h	$E(\Delta, h)$	$order_h$
1/1000	4/10	0,553658959811877	
1/1000	2/10	0,136106515181824	2,0243
1/1000	1/10	0,032797404101700	2,0531

Таблица 3 показывает вычислительный порядок сходимости по Δ в варианте 2.

В табл. 4 показан вычислительный порядок сходимости в варианте 1. Результаты для этого примера получаются очень похожи со случаем варианта 2.

ТАБЛИЦА 3. Зависимость погрешностей и вычислительных порядков сходимости от Δ TABLE 3. Dependence of errors and computational orders of convergence on Δ

h	Δ	$E(\Delta, h)$	$order_{\Delta}$
4/250	1/40	0,227213737431525	
4/250	1/80	0,058875312300948	1,9483
4/250	1/160	0,014615117754886	2,0102

ТАБЛИЦА 4. Зависимость погрешностей и вычислительных порядков сходимости от Δ TABLE 4. Dependence of errors and computational orders of convergence on Δ

h	Δ	$E(\Delta, h)$	$order_{\Delta}$
4/250	1/40	0,221775228851482	
4/250	1/80	0,058124855291259	1,9319
4/250	1/160	0,014518001636356	2,0013

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пименов В. Г. Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. — Екатеринбург: Урал. унив., 2014.
2. Пименов В. Г., Лекомцев А. В. Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Тр. ИММ УрО РАН. — 2010. — 16, № 1. — С. 102–118.
3. Пименов В. Г., Лекомцев А. В. Метод переменных направлений для нелинейного диффузионного уравнения с запаздыванием // Изв. Инст. мат. и инф. Удмурт. гос. унив. — 2025. — 66. — С. 87–102. — DOI: [10.35634/2226-3594-2025-66-07](https://doi.org/10.35634/2226-3594-2025-66-07).
4. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
5. Шевкун И. А., Масловская А. Г. Гибридный подход к моделированию и оценке структурных особенностей паттернов культивированных бактерий // Мат. модел. — 2024. — 34, № 6. — С. 59–73. — DOI: [10.20948/mm-2024-06-04](https://doi.org/10.20948/mm-2024-06-04).
6. Arenas A., Gonzalez-Parra G., Caraballo B. A nonstandard finite difference scheme for a nonlinear Black–Scholes equation // Math. Comput. Model. Dyn. Syst. — 2013. — 57, № 7. — С. 1663–1670. — DOI: [10.1016/j.mcm.2011.11.009](https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.11.009).
7. Horger T., Kuttler Ch., Wohlmuth B., Zhigun A. Analysis of a bacterial model with nutrient-dependent degenerate diffusion // Math. Methods Appl. Sci. — 2015. — 38, № 17. — С. 3851–3865. — DOI: [10.1002/mma.3322](https://doi.org/10.1002/mma.3322).
8. Maslovskaya A., Kuttler Ch., Shevkun I., Chebotarev A., Kovtanyuk A. Quorum sensing model for nutrient-dependent evolution of cultured bacteria: theoretical framework and in silico study // Nonlinear Dynam. — 2025. — 113. — С. 7519–7534. — DOI: [10.1007/s11071-024-10721-9](https://doi.org/10.1007/s11071-024-10721-9).
9. Srivastava V., Kumar S., Awasthi M., Singh B. Two-dimensional time fractional-order biological population model and its analytical solution // Egyptian J. Basic Appl. Sci. — 2014. — 1, № 1. — С. 71–76. — DOI: [10.1016/j.ejbas.2014.03.001](https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2014.03.001).

В. Г. Пименов

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

E-mail: v.g.pimenov@urfu.ru, РИНЦ SPIN-код: 4678-1515, РИНЦ AuthorID: [9783](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=9783), ResearcherID: [N-9894-2017](https://orcid.org/0000-0002-4042-6079), Scopus: [36841480600](https://orcid.org/0000-0002-4042-6079), ORCID: [0000-0002-4042-6079](https://orcid.org/0000-0002-4042-6079)

А. В. Лекомцев

Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

E-mail: avlekomtsev@urfu.ru, РИНЦ AuthorID: [506726](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=506726), Scopus: [37091007600](https://orcid.org/0000-0003-0176-1306), ORCID: [0000-0003-0176-1306](https://orcid.org/0000-0003-0176-1306)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-565-584](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-565-584)EDN: [QTNNBY](https://www.edn.ru/QTNNBY)

UDC 519.63

Research article

Alternating-direction algorithms for solving equations with nonlinear diffusion, convection, and delay

V. G. Pimenov and A. V. Lekomtsev

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia

Abstract. A diffusion–convection equation with two spatial variables and multiple time-delay variables is considered. The diffusion and convection coefficients are assumed to depend on the unknown function. The problem is discretized, and interpolation–extrapolation procedures are introduced to account for the time delays. Two variants of an alternating-direction method analog are constructed: one using piecewise-constant interpolation, and the other using piecewise-linear interpolation combined with extrapolation by continuation. Consequently, the method reduces to solving two three-diagonal systems of linear algebraic equations at each time step; these systems exhibit diagonal dominance given a sufficiently small discretization step. The order of the method’s error is analyzed: the first variant is of the first order with respect to the time step Δ and the second order with respect to the spatial step h , whereas the second variant is of the second order with respect to both Δ and h . Stability issues are investigated. Under certain assumptions, the method’s convergence is justified, and the order of convergence is established. Numerical simulation results are presented for a diffusion equation with two time-delay variables. The computed convergence orders for each discretization step in the examples were found to be close to the theoretically derived orders of convergence for the corresponding steps.

Keywords: diffusion, convection, nonlinear coefficients, time delay, alternating-direction method, interpolation, extrapolation, stability, convergence.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project No. 075-02-2026-1315 “Ural Mathematical Center”.

Authors’ contribution. All authors participated in the development of the study concept, collection, processing and analysis of data, writing of the manuscript, and formulation of the conclusions.

For citation: V. G. Pimenov, A. V. Lekomtsev, “Alternating-direction algorithms for solving equations with nonlinear diffusion, convection, and delay,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 3, 565–584. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-565-584](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-565-584) EDN: [QTNNBY](https://www.edn.ru/QTNNBY)

REFERENCES

1. V. G. Pimenov, *Raznostnye metody resheniya uravneniy v chastnykh proizvodnykh s nasledstvennost'yu* [Finite-Difference Methods for Solving Partial Differential Equations with Memory Effects], Ural. Univ., Ekaterinburg, 2014 (in Russian).
2. V. G. Pimenov and A. V. Lekomtsev, “Skhodimost’ metoda peremennykh napravleniy chislennogo resheniya uravneniya teploprovodnosti s zapazdyvaniem” [Convergence of the alternating-direction method for the numerical solution of the heat equation with delay], *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch RAS], 2010, **16**, No. 1, 102–118 (in Russian).
3. V. G. Pimenov and A. V. Lekomtsev, “Metod peremennykh napravleniy dlya nelineynogo diffuzionnogo uravneniya s zapazdyvaniem” [Alternating-direction method for a nonlinear diffusion equation with delay], *Izv. Inst. Mat. i Inf. Udmurt. Gos. Univ.* [Bull. Inst. Math. Inf. Udmurt. State Univ.], 2025, **66**, 87–102 (in Russian), DOI: [10.35634/2226-3594-2025-66-07](https://doi.org/10.35634/2226-3594-2025-66-07).



4. A. A. Samarskii, *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
5. I. A. Shevkun and A. G. Maslovskaya, “Gibridnyy podkhod k modelirovaniyu i otsenke strukturnykh osobennostey patternov kul’tivirovannykh bakteriy” [A hybrid approach to modeling and evaluating the structural features of cultured bacterial patterns], *Mat. Model.* [Math. Model.], 2024, **34**, No. 6, 59–73 (in Russian), DOI: [10.20948/mm-2024-06-04](https://doi.org/10.20948/mm-2024-06-04).
6. A. Arenas, G. Gonzalez-Parra, and B. Caraballo, “A nonstandard finite difference scheme for a nonlinear Black–Scholes equation,” *Math. Comput. Model. Dyn. Syst.*, 2013, **57**, No. 7, 1663–1670, DOI: [10.1016/j.mcm.2011.11.009](https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.11.009).
7. T. Horger, Ch. Kuttler, B. Wohlmuth, and A. Zhigun, “Analysis of a bacterial model with nutrient-dependent degenerate diffusion,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2015, **38**, No. 17, 3851–3865, DOI: [10.1002/mma.3322](https://doi.org/10.1002/mma.3322).
8. A. Maslovskaya, Ch. Kuttler, I. Shevkun, A. Chebotarev, and A. Kovtanyuk, “Quorum sensing model for nutrient-dependent evolution of cultured bacteria: theoretical framework and in silico study,” *Nonlinear Dynam.*, 2025, **113**, 7519–7534, DOI: [10.1007/s11071-024-10721-9](https://doi.org/10.1007/s11071-024-10721-9).
9. V. Srivastava, S. Kumar, M. Awasthi, and B. Singh, “Two-dimensional time fractional-order biological population model and its analytical solution,” *Egyptian J. Basic Appl. Sci.*, 2014, **1**, No. 1, 71–76, DOI: [10.1016/j.ejbas.2014.03.001](https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2014.03.001).

V. G. Pimenov

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia

E-mail: v.g.pimenov@urfu.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4678-1515, eLIBRARY AuthorID: [9783](#),

ResearcherID: [N-9894-2017](#), Scopus: [36841480600](#), ORCID: [0000-0002-4042-6079](#)

A. V. Lekomtsev

Ural Federal University, Ekaterinburg, Russia

E-mail: avlekomtsev@urfu.ru, eLIBRARY AuthorID: [506726](#), Scopus: [37091007600](#), ORCID: [0000-0003-0176-1306](#)