Современная математика. Фундаментальные направления. Том 72, № 3 (2026). С. 553–564
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-553-564 УДК 517.929:57
EDN: QSOUAQ *Научная статья*

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В БИОЛОГИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

Н. В. Перцев[1], **М. В. Мулюков**[2,3], **А. Н. Пичугина**[4]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия*
[2] *Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия*
[3] *Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия*
[4] *Санкт-Петербургский электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, Россия*

Аннотация. Изучается нелинейная система из трех дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием и неотрицательными начальными данными. Первые два уравнения описывают численность двух взаимодействующих популяций, третье уравнение — численность комплексов, образованных в результате контактных взаимодействий пар индивидуумов. Длительность существования комплексов задается функцией распределения на конечном промежутке времени. Возникающая задача Коши имеет единственное решение на полуоси, и компоненты решения неотрицательны. Система дифференциальных уравнений имеет одно положение равновесия с неотрицательными компонентами, и это положение равновесия является локально асимптотически устойчивым. Аналогичные результаты установлены для систем уравнений, содержащих сосредоточенное запаздывание, и без запаздывания.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, распределенное запаздывание, устойчивость положений равновесия, корни характеристического уравнения, динамика взаимодействующих популяций.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа Н. В. Перцева выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2026-0033.

Вклад авторов. *Н. В. Перцев* — построение системы уравнений и методология исследования, написание текста; *М. В. Мулюков* — изучение корней характеристического уравнения; *А. Н. Пичугина* — анализ системы уравнений без запаздывания.

Для цитирования: *Перцев Н. В., Мулюков М. В., Пичугина А. Н.* Устойчивость положения равновесия системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, возникающей в биологических приложениях // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. **72**, № 3. С. 553–564. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-553-564 EDN: QSOUAQ

1. Введение и постановка задачи

Дифференциальные уравнения с запаздыванием широко используются при построении математических моделей живых систем. В настоящее время имеется большое количество журнальных статей, обзоров и монографий, посвященных разработке и исследованию математических моделей динамики популяций в иммунологии, эпидемиологии, экологии и демографии на основе дифференциальных уравнений с запаздыванием.

© Н. В. Перцев, М. В. Мулюков, А. Н. Пичугина, 2026
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Важным аспектом изучения динамики некоторых популяций A_1 и A_2 является учет контактного взаимодействия индивидуумов. В результате осуществления контактного взаимодействия из пары индивидуумов популяций A_1 и A_2 образуется комплекс K, существующий некоторое конечное время. При распаде комплекса K индивидуум популяции A_1 погибает, индивидуум популяции A_2 либо погибает, либо возвращается обратно в эту популяцию.

Типичным примером контактного взаимодействия индивидуумов являются межклеточные взаимодействия в иммунных процессах. Так, в частности, при моделировании врожденного иммунитета требуется построение уравнений, описывающих контактное взаимодействие зараженных клеток и NK-клеток (естественных клеток-киллеров). NK-клетки разрушают зараженные клетки в результате контактного цитолиза, длительность которого составляет 1-2 часа [10, с. 160]. При исследовании динамики ВИЧ-1 инфекции в лимфоузле необходимо учитывать контактные взаимодействия размножающихся CD4+ Т-лимфоцитов и зараженных CD4+ Т-лимфоцитов, производящих вирусные частицы. Контактное взаимодействие указанных клеток приводит к формированию неких «каналов» или «трубочек», по которым в еще не зараженную клетку переносятся отдельные компоненты, необходимые для сборки вирусных частиц. Длительность переноса компонент, необходимых для сборки вирусных частиц, может составлять от нескольких десятков минут до нескольких часов in vitro [11, с. 559].

Описанная выше специфика контактных взаимодействий индивидуумов требует привлечения соответствующего математического аппарата. В детерминированной постановке здесь могут быть использованы дифференциальные уравнения с распределенным запаздыванием.

Рассмотрим один из вариантов указанной системы дифференциальных уравнений. Обозначим через $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y(t)$ численность популяций A_1, A_2 и численность комплексов K в момент времени t. Изучаемая система уравнений модели имеет вид

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \rho_1 - \mu_1 x_1(t) - \gamma x_1(t) x_2(t), \tag{1.1}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \rho_2 - \mu_2 x_2(t) - \gamma x_1(t) x_2(t) + \delta \int\limits_0^\omega \gamma x_1(t-s) x_2(t-s) dR(s), \tag{1.2}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \gamma x_1(t) x_2(t) - \int\limits_0^\omega \gamma x_1(t-s) x_2(t-s) dR(s), \quad t \geqslant 0, \tag{1.3}$$

и дополняется начальными данными

$$x_1(a) = x_1^{(0)}(a), \quad x_2(a) = x_2^{(0)}(a), \quad a \in [-\omega, 0], \tag{1.4}$$

$$y(0) = \int\limits_0^\omega \big(1 - R(s)\big) \gamma x_1^{(0)}(-s) x_2^{(0)}(-s) ds. \tag{1.5}$$

Параметры модели имеют следующую интерпретацию. Популяции A_1, A_2 пополняются из внешних источников с постоянными скоростями $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$. Индивидуумы популяций A_1 и A_2 подвержены миграционному оттоку или гибели по естественными причинам с постоянными интенсивностями $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$. Контактное взаимодействие индивидуумов популяций A_1, A_2 осуществляется с постоянной интенсивностью $\gamma > 0$ в расчете на одну пару этих индивидуумов. Каждый образованный из пары индивидуумов комплекс K существует некоторое время $\eta \in (0, \omega]$, $0 < \omega < \infty$. Длительность η существования комплекса K задается функцией распределения $R(s)$ на промежутке $s \in [0, \omega]$, такой, что $R(0) = 0$, $R(\omega) = 1$. При распаде комплекса индивидуум популяции A_1 погибает, тогда как индивидуум популяции A_2 либо погибает (доля погибающих $1 - \delta$), либо возвращается обратно в эту популяцию (доля возвращающихся $0 < \delta \leqslant 1$).

При $t = 0$ под производными переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y(t)$ понимаются их правосторонние производные, интеграл в (1.2), (1.3) понимается как интеграл Римана—Стилтьеса. В (1.4) начальные функции $x_1^{(0)}(a)$, $x_2^{(0)}(a)$ неотрицательны и непрерывны. В (1.5) начальное значение $y(0)$ согласовано с формальным переходом от дифференциального уравнения (1.3) к интегральному

уравнению для $y(t)$ в форме свертки

$$y(t) = \int\limits_0^\omega \big(1 - R(s)\big)\gamma x_1(t-s)x_2(t-s)ds, \quad t \geqslant 0. \tag{1.6}$$

Уравнения (1.3), (1.6) и начальное условие (1.5) носят вспомогательный характер, а динамика популяций A_1, A_2 определяется уравнениями (1.1), (1.2) и начальным условием (1.4). Дополнительно отметим, что в уравнении (1.6) выражение $\int\limits_0^\omega \big(1 - R(s)\big)ds$ интерпретируется как среднее время существования комплекса, состоящего из пары индивидуумов популяций A_1, A_2.

В задачи настоящей работы входит:

1) исследование разрешимости задачи Коши для построенной системы уравнений;
2) нахождение неотрицательных положений равновесия системы уравнений модели и изучение их устойчивости;
3) анализ частных случаев системы уравнений модели (варианты модели, содержащие сосредоточенное запаздывание, и без запаздывания).

2. Глобальная разрешимость модели

Модель (1.1), (1.2), (1.4) будем рассматривать как задачу Коши для систем функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, исследованных в [7]. *Решением* задачи Коши (1.1), (1.2), (1.4) на конечном промежутке $[0, \tau)$ назовем непрерывные на промежутке $[-\omega, 0] \cup [0, \tau)$ функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, непрерывно дифференцируемые на промежутке $[0, \tau)$, удовлетворяющие начальному условию (1.4) и уравнениям (1.1), (1.2) для всех $t \in [0, \tau)$; при $t = 0$ под производными $x_1(t)$, $x_2(t)$ понимаем правосторонние производные этих переменных [3, с. 25].

Будем говорить, что задача Коши (1.1), (1.2), (1.4) является *однозначно разрешимой* на полуоси $[0, \infty)$ (*глобально разрешимой*), если эта задача имеет единственное решение на каждом конечном промежутке $[0, \tau)$.

Предполагая неотрицательность и непрерывность $x_1(t)$, $x_2(t)$ на полуоси $[0, \infty)$, из (1.1), находим верхнюю оценку для $x_1(t)$ в форме константы:

$$x_1(t) \leqslant c_1 = \max\Big(\sup_{a\in[-\omega,0]} x_1^{(0)}(a), \frac{\rho_1}{\mu_1}\Big), \quad t \in [-\omega, 0] \cup [0, \infty). \tag{2.1}$$

Используя (2.1), получаем верхнюю линейную оценку на слагаемые в (1.2), описывающие приток индивидуумов популяции A_2:

$$\rho_2 + \delta \int\limits_0^\omega \gamma x_1(t-s)x_2(t-s)dR(s) \leqslant \rho_2 + \delta \int\limits_0^\omega \gamma c_1 x_2(t-s)dR(s), \quad t \in [0, \infty). \tag{2.2}$$

Опираясь на структуру уравнений (1.1), (1.2) и оценки (2.1), (2.2), устанавливаем, что для изучаемой задачи Коши выполнено сочетание предположений H2 и H3 из [7, с. 149]. Тогда, используя теорему 1 из [7, с. 153], получаем, что задача Коши (1.1), (1.2), (1.4) является глобально разрешимой и компоненты решения являются неотрицательными на полуоси $[0, \infty)$.

3. Положения равновесия и линеаризованная система уравнений

Рассмотрим положения равновесия $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$ системы (1.1), (1.2) с неотрицательными компонентами. Учитывая, что $\int\limits_0^\omega dR(s) = 1$, и полагая в системе (1.1), (1.2) $x_1(t) = x_1 = \text{const} \geqslant 0$, $x_2(t) = x_2 = \text{const} \geqslant 0$, приходим к системе

$$\rho_1 - \mu_1 x_1 - \gamma x_1 x_2 = 0, \tag{3.1}$$

$$\rho_2 - \mu_2 x_2 - (1-\delta)\gamma x_1 x_2 = 0. \tag{3.2}$$

Решение системы (3.1), (3.2) имеет вид

$$x_1^{(*)} = \frac{\rho_1}{\mu_1 + \gamma x_2^{(*)}}, \tag{3.3}$$

где $x_2^{(*)}$ — единственный положительный корень уравнения

$$\rho_2 - \mu_2 x_2 = \frac{\gamma(1-\delta)\rho_1 x_2}{\mu_1 + \gamma x_2}. \tag{3.4}$$

Заметим, что $x_2^{(*)}$ может быть выписан явно как положительный корень квадратного уравнения, вытекающего из (3.4) при $\delta < 1$, или $x_2^{(*)} = \rho_2/\mu_2 > 0$ при $\delta = 1$.

От системы (1.1), (1.2) перейдем к системе линейного приближения в окрестности пары $(x_1^{(*)}, x_2^{(*)})$. Выполняя стандартные выкладки, введем переменные

$$\widetilde{x}_1(t) = x_1(t) - x_1^{(*)}, \quad \widetilde{x}_2(t) = x_2(t) - x_2^{(*)},$$

для которых получаем систему уравнений

$$\frac{d\widetilde{x}_1(t)}{dt} = -(\mu_1 + \gamma x_2^{(*)})\widetilde{x}_1(t) - \gamma x_1^{(*)}\widetilde{x}_2(t) - \gamma\widetilde{x}_1(t)\widetilde{x}_2(t), \tag{3.5}$$

$$\frac{d\widetilde{x}_2(t)}{dt} = -\gamma x_2^{(*)}\widetilde{x}_1(t) - (\mu_2 + \gamma x_1^{(*)})\widetilde{x}_2(t) + \delta\gamma x_2^{(*)}\int_0^\omega \widetilde{x}_1(t-s)dR(s) +$$
$$+ \delta\gamma x_1^{(*)}\int_0^\omega \widetilde{x}_2(t-s)dR(s) - \gamma\widetilde{x}_1(t)\widetilde{x}_2(t) + \delta\int_0^\omega \gamma\widetilde{x}_1(t-s)\widetilde{x}_2(t-s)dR(s), \quad t \geqslant 0, \tag{3.6}$$

дополненную начальными данными

$$\widetilde{x}_1(a) = x_1^{(0)}(a) - x_1^{(*)}, \quad \widetilde{x}_2(a) = x_2^{(0)}(a) - x_2^{(*)}, \quad a \in [-\omega, 0]. \tag{3.7}$$

Система (3.5), (3.6) имеет нулевое (тривиальное) положение равновесия $\widetilde{x}_1 = 0$, $\widetilde{x}_2 = 0$, исследование устойчивости которого равносильно исследованию устойчивости положения равновесия $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$ системы (1.1), (1.2).

Отбрасывая в (3.5), (3.6) нелинейные слагаемые и используя прежние обозначения переменных, получим линейную систему дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -(\mu_1 + \gamma x_2^{(*)})x_1(t) - \gamma x_1^{(*)}x_2(t), \tag{3.8}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\gamma x_2^{(*)}x_1(t) - (\mu_2 + \gamma x_1^{(*)})x_2(t) + \delta\gamma x_2^{(*)}\int_0^\omega x_1(t-s)dR(s) + \delta\gamma x_1^{(*)}\int_0^\omega x_2(t-s)dR(s). \tag{3.9}$$

Обозначим

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t))^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} -(\mu_1 + \gamma x_2^{(*)}) & -\gamma x_1^{(*)} \\ -\gamma x_2^{(*)} & -(\mu_2 + \gamma x_1^{(*)}) \end{pmatrix},$$

$$B(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta\gamma x_2^{(*)}R(s) & \delta\gamma x_1^{(*)}R(s) \end{pmatrix}, \quad s \in [0, \omega].$$

Опираясь на (3.8), (3.9), перейдем к линеаризованной системе (1.1), (1.2), записанной в форме

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + \int_0^\omega dB(s)x(t-s). \tag{3.10}$$

4. Устойчивость положения равновесия

Для изучения устойчивости положения равновесия $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$ рассмотрим предварительно линейную систему (3.10), а потом перейдем к нелинейной системе (1.1), (1.2).

4.1. Анализ линейной системы. Обратимся к исследованию асимптотической устойчивости тривиального (нулевого) положения равновесия системы (3.10). Следуя [3, с. 50], частные решения системы (3.10) будем искать в форме

$$x(t) = e^{zt}c, \tag{4.1}$$

где $c = (c_1, c_2)^T$ — постоянный вектор, $c \neq 0$, z — некоторое комплексное число. Подставляя в (3.10) выражение (4.1), приходим к характеристическому уравнению для z:

$$\det\Big(A + \int\limits_0^\omega e^{-zs}dB(s) - zE\Big) = 0, \tag{4.2}$$

где E — единичная матрица размера 2×2. Введем набор коэффициентов

$$q_1 = \mu_1 + \mu_2 + \gamma(x_1^{(*)} + x_2^{(*)}), \quad q_4 = \delta\gamma x_1^{(*)},$$
$$q_2 = \mu_1\mu_2 + \gamma(\mu_1 x_1^{(*)} + \mu_2 x_2^{(*)}), \quad q_3 = \mu_1\delta\gamma x_1^{(*)}. \tag{4.3}$$

Отметим, что для коэффициентов (4.3) выполнены неравенства

$$q_1 > q_4 > 0, \quad q_2 > q_3 > 0. \tag{4.4}$$

Преобразуя (4.2), получаем характеристическое уравнение

$$z^2 + q_1 z + q_2 - (q_3 + q_4 z)\int\limits_0^\omega e^{-z\,s}dR(s) = 0. \tag{4.5}$$

Отметим, что система (3.10) является линейной автономной системой, в которой $R(s)$ такова, что $R(s) = 1$ для всех $s \geqslant \omega$. Тогда функция, стоящая в левой части уравнения (4.5), является целой функцией переменной z, и уравнение (4.5) имеет либо конечное, либо бесконечное число корней $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$, и $\operatorname{Re} z_k \to -\infty$ при $k \to \infty$, см. [3, с. 51].

Опираясь на (4.3), (4.4), введем две константы:

$$\alpha_0 = q_1^2 - 2q_2 - q_4^2 > 0, \quad \beta_0 = q_2^2 - q_3^2 > 0. \tag{4.6}$$

Лемма 4.1. *Уравнение* (4.5) *не имеет корней* z *таких, что* $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $z = b + i\varphi$ — предполагаемый корень уравнения (4.5) при $b \geqslant 0$. Подставляя z в (4.5), получаем:

$$b^2 - \varphi^2 + 2b\varphi i + q_1(b + i\varphi) + q_2 = (q_3 + q_4(b + i\varphi))\int\limits_0^\omega e^{-(b+i\varphi)s}dR(s). \tag{4.7}$$

Из (4.7) следует, что

$$|b^2 - \varphi^2 + 2b\varphi i + q_1(b + i\varphi) + q_2| = |q_3 + q_4(b + i\varphi)|\left|\int\limits_0^\omega e^{-(b+i\varphi)s}dR(s)\right| \leqslant$$
$$\leqslant |q_3 + q_4(b + i\varphi)|\int\limits_0^\omega |e^{-(b+i\varphi)s}|dR(s) = |q_3 + q_4(b + i\varphi)|\int\limits_0^\omega e^{-bs}dR(s) \leqslant |q_3 + q_4(b + i\varphi)|. \tag{4.8}$$

От (4.8) приходим к неравенству

$$(b^2 - \varphi^2 + q_1 b + q_2)^2 + (2b + q_1)^2\varphi^2 \leqslant (q_3 + q_4 b)^2 + q_4^2\varphi^2. \tag{4.9}$$

Обозначим

$$\beta_b = (b^2 + q_1 b + q_2)^2 - (q_3 + q_4 b)^2 = (b^2 + (q_1 - q_4)b + q_2 - q_3)(b^2 + (q_1 + q_4)b + q_2 + q_3) > 0,$$
$$\alpha_b = (2b + q_1)^2 - 2(b^2 + q_1 b + q_2) - q_4^2 = 2b(b + q_1) + \alpha_0 > 0,$$

где $\alpha_0 > 0$ приведено в (4.6). Используя указанные обозначения, запишем (4.9) в следующей форме:

$$\varphi^4 + \alpha_b\varphi^2 + \beta_b \leqslant 0. \tag{4.10}$$

Полагая $\theta = \varphi^2$, получаем неравенство

$$\theta^2 + \alpha_b\theta + \beta_b \leqslant 0. \tag{4.11}$$

Поскольку в (4.11) коэффициенты α_b и β_b положительны, то θ либо не вещественно, либо отрицательно. Отсюда следует, что для каждого фиксированного $b \geqslant 0$ неравенство (4.10) неразрешимо относительно φ. Приходим к противоречию, что завершает доказательство леммы. □

Лемма 4.2. *Существует $b_* < 0$ такое, что уравнение* (4.5) *не имеет корней z, удовлетворяющих неравенствам $b_* < \operatorname{Re} z < 0$.*

Доказательство. Пусть $z = b + i\varphi$ — некоторый корень уравнения (4.5) при $b < 0$. Подставляя z в (4.5), получаем:

$$b^2 - \varphi^2 + 2b\varphi i + q_1(b + i\varphi) + q_2 = (q_3 + q_4(b + i\varphi)) \int\limits_0^\omega e^{-(b+i\varphi)s} dR(s). \tag{4.12}$$

Из (4.12) следует, что

$$|b^2 - \varphi^2 + 2b\varphi i + q_1(b + i\varphi) + q_2| = |q_3 + q_4(b + i\varphi)| \left| \int\limits_0^\omega e^{-(b+i\varphi)s} dR(s) \right| \leqslant$$

$$\leqslant |q_3 + q_4(b + i\varphi)| \int\limits_0^\omega |e^{-(b+i\varphi)s}| dR(s) = |q_3 + q_4(b + i\varphi)| \int\limits_0^\omega e^{|b|s} dR(s) \leqslant |q_3 + q_4(b + i\varphi)| e^{|b|\omega}. \tag{4.13}$$

От (4.13) приходим к неравенству

$$(b^2 - \varphi^2 + q_1 b + q_2)^2 + (2b + q_1)^2\varphi^2 \leqslant e^{2|b|\omega}((q_3 + q_4 b)^2 + q_4^2\varphi^2). \tag{4.14}$$

По аналогии с (4.9), (4.10), перепишем (4.14) в форме

$$\varphi^4 + \alpha_b^{(+)}\varphi^2 + \beta_b^{(+)} \leqslant 0, \tag{4.15}$$

где

$$\beta_b^{(+)} = (b^2 + q_1 b + q_2)^2 - e^{2|b|\omega}(q_3 + q_4 b)^2 =$$

$$= (b^2 + (q_1 - e^{|b|\omega}q_4)b + q_2 - e^{|b|\omega}q_3)(b^2 + (q_1 + e^{|b|\omega}q_4)b + q_2 + e^{|b|\omega}q_3),$$

$$\alpha_b^{(+)} = (2b + q_1)^2 - 2(b^2 + q_1 b + q_2) - e^{|b|\omega}q_4^2 = 2b(b + q_1) + \alpha_0 + q_4^2(1 - e^{2|b|\omega}).$$

Пусть $b \to 0$, $b < 0$. Тогда

$$\beta_b^{(+)} \to \beta_0 > 0, \quad \alpha_b^{(+)} \to \alpha_0 > 0, \tag{4.16}$$

где β_0, α_0 приведены в (4.6). По аналогии с леммой 4.1 получаем, что если для некоторого $b < 0$ верно $\beta_b^{(+)} > 0$, $\alpha_b^{(+)} > 0$, то уравнение (4.15) неразрешимо относительно φ. В силу непрерывности функций $\beta_b^{(+)}$, $\alpha_b^{(+)}$ по b и выполнения неравенств (4.16) получаем, что существует промежуток $(b_*, 0)$, $b_* < 0$ такой, что уравнение (4.5) не имеет корней z таких, что $\operatorname{Re} z \in (b_*, 0)$. Последнее утверждение завершает доказательство. □

Исходя из лемм 4.1, 4.2, устанавливаем, что все корни характеристического уравнения (4.5) таковы, что их вещественные части отрицательны и отделены от нуля. В соответствии с [3, с. 50–54], приходим к следующему результату.

Теорема 4.1. *Тривиальное* (*нулевое*) *решение линейной системы* (3.10) *асимптотически устойчиво.*

4.2. Анализ нелинейной системы. Перейдем к изучению устойчивости положения равновесия $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$, используя систему (3.5), (3.6) с начальным условием (3.7). Применим теорему 33.2 из [4, с. 194] об устойчивости по первому приближению (см. также ссылки на указанную теорему в [3, с. 106-107] и в [2]). Опираясь на приведенные выше леммы 4.1, 4.2 и теорему 4.1, имеем, что линейная часть системы (3.5), (3.6) в форме системы (3.10) удовлетворяет первому из условий теоремы 33.2 из [4, с. 194].

Учитывая, что изучается локальная асимптотическая устойчивость положения равновесия $x_1^{(*)}, x_2^{(*)}$, построим оценки нелинейных слагаемых из системы (3.5), (3.6) в достаточно малой окрестности нуля. Для дальнейшего изложения введем обозначение, используемое в [4, с. 157]. Пусть $\widetilde{x}(t) = (\widetilde{x}_1(t), \widetilde{x}_2(t))$ — значение решения системы (3.5), (3.6) с начальным условием (3.7) в некоторый момент времени t. Положим, что $\widetilde{x}_t$ — отрезок решения $\widetilde{x}(t)$, заданный соотношением

$$\widetilde{x}_t = \widetilde{x}_t(s) = \widetilde{x}(t-s) = (\widetilde{x}_1(t-s),\ \widetilde{x}_2(t-s)), \quad s \in [0, \omega].$$

Отметим, что для $\widetilde{x}_t$ можно было бы использовать и другую общепринятую запись, а именно: $\widetilde{x}_t = \widetilde{x}_t(\theta) = \widetilde{x}(t+\theta)$, $\theta \in [-\omega, 0]$ (см., например, [3, с. 87] и [8, с. 50]). Но тогда интегральные слагаемые в уравнениях (1.2), (1.3), (1.6) изучаемой модели следовало бы представлять немного в другой форме.

Нелинейные слагаемые из системы (3.5), (3.6) обозначим через

$$f_1(\widetilde{x}_t) = -\gamma \widetilde{x}_1(t)\widetilde{x}_2(t),$$

$$f_2(\widetilde{x}_t) = -\gamma \widetilde{x}_1(t)\widetilde{x}_2(t) + \delta \int\limits_0^\omega \gamma \widetilde{x}_1(t-s)\widetilde{x}_2(t-s)dR(s).$$

Используем далее известные соотношения: если u, v — две вещественные переменные, то

$$|u||v| \leqslant 0{,}5(|u|^2 + |v|^2) \leqslant 0{,}5(|u| + |v|)^2,$$

$$\frac{|u||v|}{|u| + |v|} \to 0 \text{ при } |u| + |v| \to 0.$$

Тогда для достаточно малых $|u| + |v|$ имеет место цепочка неравенств

$$|u||v| \leqslant \alpha_1(|u| + |v|) \leqslant \alpha_2 \max(|u|, |v|), \tag{4.17}$$

где α_1, α_2 — некоторые (достаточно малые) положительные константы.

Следуя [4, с. 8, 151], положим

$$||\widetilde{x}_t||^{(\omega)} = \max\Big(\sup_{0 \leqslant s \leqslant \omega} |\widetilde{x}_1(t-s)|, \sup_{0 \leqslant s \leqslant \omega} |\widetilde{x}_2(t-s)|\Big). \tag{4.18}$$

Опираясь на (4.17), (4.18), оценим

$$|f(\widetilde{x}_t)| = |(f_1(\widetilde{x}_t), f_2(\widetilde{x}_t))| = \max(|f_1(\widetilde{x}_t)|, |f_2(\widetilde{x}_t)|),$$

предполагая малость $|\widetilde{x}_1(t)| + |\widetilde{x}_2(t)|$ и $|\widetilde{x}_1(t-s)| + |\widetilde{x}_2(t-s)|$, включая соответствующие выражения и для начальных функций (3.7). Имеем, что

$$|f(\widetilde{x}_t)| \leqslant \gamma|\widetilde{x}_1(t)||\widetilde{x}_2(t)| + \delta\gamma \int\limits_0^\omega |\widetilde{x}_1(t-s)||\widetilde{x}_2(t-s)|dR(s) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma(1+\delta) \sup_{0 \leqslant s \leqslant \omega} |\widetilde{x}_1(t-s)| \cdot \sup_{0 \leqslant s \leqslant \omega} |\widetilde{x}_2(t-s)| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma(1+\delta)\alpha_1(\sup_{0 \leqslant s \leqslant \omega} |\widetilde{x}_1(t-s)| + \sup_{0 \leqslant s \leqslant \omega} |\widetilde{x}_2(t-s)|) \leqslant$$

$$\leqslant \gamma(1+\delta)\alpha_2 \max\Big(\sup_{0 \leqslant s \leqslant \omega} |\widetilde{x}_1(t-s)|, \sup_{0 \leqslant s \leqslant \omega} |\widetilde{x}_2(t-s)|\Big) = \beta||\widetilde{x}_t||^{(\omega)}, \tag{4.19}$$

где константа $\beta > 0$ может быть выбрана достаточно малой. Оценка (4.19) обеспечивает выполнение второго из условий теоремы 33.2 из [4, с. 194] в окрестности нулевого положения равновесия системы (3.5), (3.6).

В итоге приходим к окончательному результату.

Теорема 4.2. *Положение равновесия* $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$ *системы* (1.1), (1.2) *является асимптотически устойчивым.*

5. Случай сосредоточенного запаздывания

В приложениях обычно рассматриваются модели (1.1)–(1.5) в относительно простой форме. Одна из таких моделей для (1.1)–(1.5) представляет собой систему дифференциальных уравнений с запаздыванием, сосредоточенным в точке $s = \omega > 0$:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \rho_1 - \mu_1 x_1(t) - \gamma x_1(t) x_2(t), \tag{5.1}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \rho_2 - \mu_2 x_2(t) - \gamma x_1(t) x_2(t) + \delta\gamma x_1(t-\omega) x_2(t-\omega), \tag{5.2}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \gamma x_1(t) x_2(t) - \gamma x_1(t-\omega) x_2(t-\omega), \quad t \geqslant 0, \tag{5.3}$$

$$x_1(a) = x_1^{(0)}(a), \quad x_2(a) = x_2^{(0)}(a), \quad a \in [-\omega, 0], \tag{5.4}$$

$$y(0) = \int\limits_{-\omega}^{0} \gamma x_1^{(0)}(s) x_2^{(0)}(s) ds. \tag{5.5}$$

Уравнение (5.3) с учетом (5.5) сводится к интегральному

$$y(t) = \int\limits_{t-\omega}^{t} \gamma x_1(s) x_2(s) ds, \quad t \geqslant 0.$$

Система (5.1), (5.2) имеет положение равновесия $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$, указанное в разделе 3. Система уравнений линейного приближения записывается в форме

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bx(t-\omega), \tag{5.6}$$

где матрица A приведена в разделе 3, матрица B такова:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta\gamma x_2^{(*)} & \delta\gamma x_1^{(*)} \end{pmatrix}.$$

Получаем, что характеристическое уравнение для системы (5.6)

$$z^2 + q_1 z + q_2 - (q_3 + q_4 z) e^{-\omega z} = 0 \tag{5.7}$$

представляет собой частный случай уравнения (4.5).

Система вида (5.6), содержащая матрицы A и B с произвольными вещественными элементами, впервые изучалась в [1]. Современное исследование корней характеристического уравнения (5.7) для произвольных вещественных матриц A и B из (5.6) выполнено, например, в [5, 12]. Здесь коэффициенты $q_1, \ldots, q_4$ уравнения (5.7) зависят от восьми элементов матриц A и B, что приводит к достаточно сложным соотношениям, обеспечивающим условия асимптотической устойчивости или неустойчивости тривиального (нулевого) положения равновесия системы (5.6).

В настоящем исследовании существенно важно, что для системы (5.6) с матрицами A, B конкретного вида используются связи между элементами этих матриц, возникающие из изучаемой модели. Как показано выше, указанные связи между элементами матриц A, B (соотношения (4.4)) обеспечивают отрицательность вещественных частей корней уравнения (5.7) и их отделимость от нуля. Нетрудно заметить, что отброшенные при линеаризации системы (5.1), (5.2) слагаемые представляют собой квадратичные функции

$$-\gamma \widetilde{x}_1(t) \widetilde{x}_2(t), \quad -\gamma \widetilde{x}_1(t) \widetilde{x}_2(t) + \delta\gamma \widetilde{x}_1(t-\omega) \widetilde{x}_2(t-\omega)$$

и имеют порядок выше первого относительно совокупности переменных $\widetilde{x}_1(t)$, $\widetilde{x}_2(t)$, $\widetilde{x}_1(t-\omega)$, $\widetilde{x}_2(t-\omega)$. Используя леммы 4.1, 4.2 и опираясь на [9, с. 148-149], приходим к следующему результату.

Теорема 5.1. *Положение равновесия* $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$ *системы* (5.1), (5.2) *является асимптотически устойчивым.*

6. Дополнительный вариант модели

В качестве простейшего дополнительного варианта модели приведем систему уравнений без запаздывания:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \rho_1 - \mu_1 x_1(t) - \gamma x_1(t) x_2(t), \tag{6.1}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \rho_2 - \mu_2 x_2(t) - \gamma x_1(t) x_2(t) + \delta r y(t), \tag{6.2}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \gamma x_1(t) x_2(t) - r y(t), \quad t \geqslant 0, \tag{6.3}$$

$$x_1(0) = x_1^{(0)}, \quad x_2(0) = x_2^{(0)}, \quad y(0) = y^{(0)}. \tag{6.4}$$

В уравнениях (6.2), (6.3) параметр $r > 0$ задает интенсивность распада комплексов K, состоящих из пар индивидуумов. Начальные данные (6.4) содержат неотрицательные константы. По аналогии с разделом 2 нетрудно показать, что задача Коши (6.1)–(6.4) является глобально разрешимой и компоненты ее решения являются неотрицательными на полуоси $[0, \infty)$.

Система (6.1)–(6.3) имеет положение равновесия $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$, $y^{(*)}$, где $y^{(*)} = \gamma x_1^{(*)} x_2^{(*)}/r > 0$, а компоненты $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$ указаны в разделе 3. Переходя от (6.1)–(6.3) к системе уравнений линейного приближения и применяя к ней критерий Рауса—Гурвица, устанавливаем асимптотическую устойчивость положения равновесия $x_1^{(*)}$, $x_2^{(*)}$, $y^{(*)}$.

Параметр r, используемый в (6.2), (6.3), можно интерпретировать как параметр экспоненциального распределения длительности η существования комплекса, состоящего из пары индивидуумов, полагая, что $R(s)$ заменяется функцией

$$F(s) = 1 - \exp(-rs), \quad s \in [0, \infty). \tag{6.5}$$

Примем, что в (6.4) $y^{(0)} = 0$ и выполним ряд формальных преобразований. Интегрируя (6.3), находим, что

$$y(t) = \int_0^t e^{-r(t-a)} \gamma x_1(a) x_2(a) da = \int_0^t e^{-rs} \gamma x_1(t-s) x_2(t-s) ds, \quad t \geqslant 0. \tag{6.6}$$

Подставляя (6.6) в (6.2), (6.3) и учитывая (6.5), приходим к системе

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \rho_1 - \mu_1 x_1(t) - \gamma x_1(t) x_2(t), \tag{6.7}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \rho_2 - \mu_2 x_2(t) - \gamma x_1(t) x_2(t) + \delta \int_0^t \gamma x_1(t-s) x_2(t-s) dF(s), \tag{6.8}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \gamma x_1(t) x_2(t) - \int_0^t \gamma x_1(t-s) x_2(t-s) dF(s), \quad t \geqslant 0, \tag{6.9}$$

дополненной начальными данными

$$x_1(0) = x_1^{(0)}, \quad x_2(0) = x_2^{(0)}, \quad y(0) = 0. \tag{6.10}$$

Получаем, что для начальных данных (6.10) система (6.1)–(6.3) может быть записана в форме (6.6)–(6.9), близкой к исходной системе (1.1)–(1.3). В случае $y^{(0)} > 0$ требуется учитывать дополнительные слагаемые в уравнениях (6.8), (6.9). Один из возможных способов построения изучаемых систем уравнений приведен в [6].

Если для системы (6.7)–(6.9) вместо (6.5) использовать произвольную функцию распределения $F_0(s)$, отличную от $R(s)$, $s \in [0, \infty)$, то возникает еще один вариант модели, учитывающий неограниченную длительность η существования комплекса, состоящего из пары индивидуумов

популяций A_1, A_2. Система (6.7), (6.8) с функцией $F(s) \equiv F_0(s)$ требует отдельного исследования. С биологической точки зрения интерес представляет случай $\int\limits_0^\infty \big(1 - F_0(s)\big)ds < \infty$, означающий, что среднее время существования комплекса является конечным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А. А., Майер А. Т.* Простейшие линейные системы с запаздыванием // Авт. и телемех. — 1946. — *7*, № 2-3. — С. 95–106.
2. *Колмановский В. Б.* Об устойчивости нелинейных систем с запаздыванием // Мат. заметки. — 1970. — *7*, № 6. — С. 743–752.
3. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981.
4. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.
5. *Мулюков М. В.* Устойчивость трехпараметрических систем двух линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Часть I // Сиб. электрон. мат. изв. — 2019. — *16*. — С. 2019–2054. — DOI: 10.33048/semi.2019.16.145.
6. *Перцев Н. В.* Об условиях корректности интегральных моделей некоторых живых систем // Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 9. — С. 1162–1179. — DOI: 10.1134/S0374064117090047.
7. *Перцев Н. В.* Глобальная разрешимость и оценки решений задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, используемых в моделях живых систем // Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 1. — С. 143–157. — DOI: 10.17377/smzh.2018.59.113.
8. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
9. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
10. *Ярилин А. А.* Иммунология. — М.: Гэотар-Медиа, 2010.
11. *Graw F., Perelson A. S.* Modeling viral spread // Annu. Rev. Virol. — 2016. — *3*. — С. 555–572. — DOI: 10.1146/annurev-virology-110615-042249.
12. *Malakhovski E., Mirkin L.* On stability of second-order quasi-polynomials with a single delay // Automatica. — 2006. — *42*. — С. 1041–1047. — DOI: 10.1016/j.automatica.2006.01.024.

Н. В. Перцев
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: pertsevnv@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 9626-6689, РИНЦ AuthorID: 123164, ResearcherID: F-8086-2013, Scopus: 8964903300, ORCID: 0000-0002-5674-7096

М. В. Мулюков
Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия
E-mail: mulykoff@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 3449-7824, РИНЦ AuthorID: 754899, ResearcherID: AAQ-1475-2021, Scopus: 56040106000, ORCID: 0000-0001-5610-8035

А. Н. Пичугина
Санкт-Петербургский электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, Россия
E-mail: anna.pichugina@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 4196-6607, РИНЦ AuthorID: 409271, ResearcherID: W-5290-2018, Scopus: 55653900600

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-553-564
EDN: QSOUAQ

UDC 517.929:57
Research article

Stability of the equilibrium position of a system of delay differential equations that occurs in biological applications

N. V. Pertsev[1], **M. V. Mulyukov**[2,3], **and A. N. Pichugina**[4]

[1] *Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia*
[2] *Perm State National Research University, Perm, Russia*
[3] *Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia*
[4] *Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI», Saint-Petersburg, Russia*

Abstract. A nonlinear system of three differential equations with distributed delay and nonnegative initial data is studied. The first two equations describe the number of two interacting populations, and the third equation describes the number of complexes formed as a result of contact interactions between pairs of individuals. The duration of the complexes' existence is determined by a distribution function on a finite period of time. The resulting Cauchy problem has a unique solution on the semiaxis, and the components of the solution are nonnegative. The system of differential equations has one equilibrium position with nonnegative components, and this equilibrium position is locally asymptotically stable. Similar results have been established for systems of equations containing a concentrated delay and without delay.

Keywords: delay differential equations, distributed delay, stability of equilibrium positions, roots of the characteristic equation, population dynamics.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research by N. V. Pertsev was carried out within the framework of the state assignment of the Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, project FWNF-2026-0033.

Authors' contribution. *N. V. Pertsev* — formulation of the system of equations and research methodology, writing the text; *M. V. Mulyukov* — study of the roots of the characteristic equation; *A. N. Pichugina* — analysis of the system of equations without delay.

For citation: N. V. Pertsev, M. V. Mulyukov, A. N. Pichugina, "Stability of the equilibrium position of a system of delay differential equations that occurs in biological applications," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 3, 553–564. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-553-564 EDN: QSOUAQ

REFERENCES

1. A. A. Andronov and A. T. Mayer, "Prosteyshie lineynye sistemy s zapazdyvaniem" [Simplest linear systems with time delay], *Avt. i Telemekh.* [Automation Telemech.], 1946, **7**, No. 2-3, 95–106 (in Russian).
2. V. B. Kolmanovskii, "Ob ustoychivosti nelineynykh sistem s zapazdyvaniem" [On the stability of nonlinear systems with time delay], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1970, **7**, No. 6, 743–752 (in Russian).
3. V. B. Kolmanovskii and V. R. Nosov, *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemykh sistem s posledeystviem* [Stability and Periodic Modes of Controlled Systems with Aftereffect], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
4. N. N. Krasovskii, *Nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya* [Some Problems in the Theory of the Stability of Motion], Fizmatgiz, Moscow, 1959 (in Russian).

© N. V. Pertsev, M. V. Mulyukov, A. N. Pichugina, 2026

This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

5. M. V. Mulyukov, “Ustoychivost’ trekhparametricheskikh sistem dvukh lineynykh differentsial’nykh uravneniy s zapazdyvaniem. Chast’ I” [Stability of three-parameter systems of two linear delay differential equations. Part I], *Sib. Elektron. Mat. Izv.* [Sib. Electron. Math. Bull.], 2019, **16**, 2019–2054 (in Russian), DOI: 10.33048/semi.2019.16.145.
6. N. V. Pertsev, “Ob usloviyakh korrektnosti integral’nykh modeley nekotorykh zhivykh sistem” [Conditions for well-posedness of integral models of some living systems], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 9, 1162–1179 (in Russian), DOI: 10.1134/S0374064117090047.
7. N. V. Pertsev, “Global’naya razreshimost’ i otsenki resheniy zadachi Koshi dlya funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy s zapazdyvaniem, ispol’zuemykh v modelyakh zhivykh sistem” [Global solvability and estimates of solutions to the Cauchy problem for functional-differential equations with delay used in models of living systems], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 2018, **59**, No. 1, 143–157 (in Russian), DOI: 10.17377/smzh.2018.59.113.
8. J. Hale, *Teoriya funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Theory of Functional Differential Equations], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
9. L. E. El’sgol’ts and S. B. Norkin, *Vvedenie v teoriyu differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom* [Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
10. A. A. Yarilin, *Immunologiya* [Immunology], Geotar-Media, Moscow, 2010 (in Russian).
11. F. Graw and A. S. Perelson, “Modeling viral spread,” *Annu. Rev. Virol.*, 2016, **3**, 555–572, DOI: 10.1146/annurev-virology-110615-042249.
12. E. Malakhovski and L. Mirkin, “On stability of second-order quasi-polynomials with a single delay,” *Automatica*, 2006, **42**, 1041–1047, DOI: 10.1016/j.automatica.2006.01.024.

N. V. Pertsev
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia
E-mail: pertsevnv@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 9626-6689, eLIBRARY AuthorID: 123164, ResearcherID: F-8086-2013, Scopus: 8964903300, ORCID: 0000-0002-5674-7096

M. V. Mulyukov
Perm State National Research University, Perm, Russia
Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia
E-mail: mulykoff@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 3449-7824, eLIBRARY AuthorID: 754899, ResearcherID: AAQ-1475-2021, Scopus: 56040106000, ORCID: 0000-0001-5610-8035

A. N. Pichugina
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI», Saint-Petersburg, Russia
E-mail: anna.pichugina@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 4196-6607, eLIBRARY AuthorID: 409271, ResearcherID: W-5290-2018, Scopus: 55653900600