Современная математика. Фундаментальные направления. Том 72, № 3 (2026). С. 541–552
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-541-552 УДК 517.929.4
EDN: QRKWWT *Научная статья*

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И. И. Матвеева, В. А. Каравайкин

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. В работе рассматривается класс систем нелинейных разностных уравнений с переменным запаздыванием. Указаны условия асимптотической устойчивости нулевого решения, получены оценки для множеств притяжения и оценки, характеризующие скорость убывания решений на бесконечности. При исследовании используется дискретный функционал Ляпунова—Красовского специального вида.

Ключевые слова: разностные уравнения, переменное запаздывание, асимптотическая устойчивость, множество притяжения, оценка решения.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Вклад авторов. Все авторы участвовали в получении результатов и написании текста рукописи.

Для цитирования: *Матвеева И. И., Каравайкин В. А.* Устойчивость решений одного класса систем нелинейных разностных уравнений с переменным запаздыванием // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. **72**, № 3. С. 541–552. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-541-552 EDN: QRKWWT

1. Введение

В работе рассматриваются системы нелинейных разностных уравнений вида

$$x_{n+1} = Ax_n + Bx_{n-\tau(n)} + F(n, x_n, \dots, x_{n-\tau}), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

где A, B — постоянные матрицы $m \times m$, $\tau(n) \in \mathbb{N}$ — переменное запаздывание, $1 \leqslant \tau(n) \leqslant \tau < \infty$, $F(n, u_0, \dots, u_\tau)$ — вектор-функция, удовлетворяющая оценке

$$\|F(n, u_0, \dots, u_\tau)\| \leqslant \sum_{j=0}^{\tau} q_j \|u_j\|^{1+\omega_j}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad q_j \geqslant 0, \quad \omega_j \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Наша цель — исследовать асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (1.1), а также получить оценки решений начальной задачи для системы (1.1) с заданными начальными векторами

$$x_0, x_{-1}, \dots, x_{-\tau} \in \mathbb{C}^m. \tag{1.3}$$

© И. И. Матвеева, В. А. Каравайкин, 2026
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Очевидно, что систему уравнений (1.1) можно записать в виде:

$$x_{n+1} = Ax_n + \sum_{j=1}^{\tau} B_j(n)x_{n-j} + F(n, x_n, \dots, x_{n-\tau}), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1.4}$$

где

$$B_j(n) = I(n,j)B, \quad I(n,j) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = \tau(n), \\ 0 & \text{при} \quad j \neq \tau(n). \end{cases} \tag{1.5}$$

Если бы функция, определяющая запаздывание, была постоянной или периодической, то систему (1.4) можно было бы свести к системе обыкновенных разностных уравнений с постоянными коэффициентами в линейной части и применить известные результаты. Поскольку запаздывание является переменным, то система (1.4) является системой нелинейных разностных уравнений с переменными коэффициентами. По сравнению с автономным случаем изучение устойчивости решений неавтономных нелинейных разностных уравнений представляет более сложную задачу.

Отметим, что последние тридцать лет проводятся активные исследования проблемы устойчивости решений различных классов разностных уравнений с запаздыванием (см., например, [3, 4, 6–17] и ссылки в этих работах). При изучении асимптотических свойств решений применяются аналоги методов, используемых в теории функционально-дифференциальных уравнений, в том числе подход, основанный на построении подходящих функционалов Ляпунова—Красовского. Однако в настоящее время крайне мало работ, в которых рассматриваются нелинейные разностные уравнения с переменным запаздыванием.

Для изучения асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.1) мы будем использовать функционал Ляпунова—Красовского следующего вида:

$$v(n,x) = \langle Hx_n, x_n \rangle + \sum_{j=1}^{\tau} \langle K_{j-1}x_{n-j}, x_{n-j} \rangle, \tag{1.6}$$

где H, $K_0, K_1, \dots, K_{\tau-1}$ — некоторые эрмитовы положительно определенные матрицы. Этот функционал был введен в работе [1] и является дискретным аналогом функционала Ляпунова—Красовского, предложенного в [2] для исследования асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений запаздывающего типа. Используя функционал (1.6), мы установим оценки для множеств притяжения нулевого решения системы (1.1) и получим оценки на скорость убывания решений начальной задачи (1.1), (1.3) при $n \to \infty$. В следующем разделе мы приведем вспомогательные результаты, которые будем использовать при получении основных результатов в третьем разделе.

2. Предварительные сведения

В работе [1] была исследована асимптотическая устойчивость линейной системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами и ограниченным переменным запаздыванием вида

$$x_{n+1} = Ax_n + Bx_{n-\tau(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.1}$$

где A, B — постоянные матрицы $m \times m$, $\tau(n) \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant \tau(n) \leqslant \tau < \infty$. Рассмотрим для этой системы начальную задачу с начальными векторами (1.3). С использованием функционала (1.6) были получены следующие результаты для системы (2.1).

Теорема 2.1 (см. [1]). *Предположим, что существуют эрмитовы положительно определенные матрицы*

$$H, \quad K_j, \quad j = 0, 1, \dots, \tau,$$

такие, что

$$\Delta_j = K_{j-1} - K_j > 0, \quad j = 1, \dots, \tau,$$

и составные матрицы

$$C(n) = -\begin{pmatrix} C_{00}(n) & A^*HB_1(n) & \dots & A^*HB_\tau(n) \\ B_1^*(n)HA & C_{11}(n) & \dots & B_1^*(n)HB_\tau(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_\tau^*(n)HA & B_\tau^*(n)HB_1(n) & \dots & C_{\tau\tau}(n) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

с элементами

$$C_{00}(n) = A^*HA - H + K_0,$$
$$C_{jj}(n) = B_j^*(n)HB_j(n) - \frac{1}{2}\Delta_j, \quad j = 1, \dots, \tau - 1,$$
$$C_{\tau\tau}(n) = B_\tau^*(n)HB_\tau(n) - K_\tau,$$

положительно определены. Тогда нулевое решение системы (2.1) *асимптотически устойчиво.*

По условию теоремы 2.1 все матрицы $C(n)$ являются положительно определенными, причем среди матриц $C(n)$ не более чем τ различных, поэтому выполнена оценка

$$\left\langle C(n)\begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau} \end{pmatrix} \right\rangle \geqslant c_1 \sum_{i=0}^{\tau} \|x_{n-i}\|^2, \tag{2.3}$$

где $c_1 > 0$ — минимальное среди минимальных собственных чисел матриц $C(n)$.

Теорема 2.2 (см. [1]). *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2.1. *Пусть* $æ_j \in (0,1)$, $j = 1, \dots, \tau$, *такие, что*

$$-\frac{1}{2}\Delta_i + æ_i K_{i-1} \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, \tau - 1, \quad -\Delta_\tau + æ_\tau K_{\tau-1} \leqslant 0. \tag{2.4}$$

Тогда для решения начальной задачи (2.1), (1.3) *справедлива оценка*

$$\|x_n\|^2 \leqslant (h_1)^{-1}(1-\varepsilon)^n v(0,x),$$

где $h_1 > 0$ — *минимальное собственное значение матрицы* H,

$$v(0,x) = \langle Hx_0, x_0\rangle + \sum_{j=1}^{\tau} \langle K_{j-1}x_{-j}, x_{-j}\rangle, \tag{2.5}$$

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{c_1}{\|H\|}, æ_1, \dots, æ_\tau\right\}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{2.6}$$

В работе [5] был рассмотрен частный случай системы нелинейных разностных уравнений вида (1.1), где $F(n, u_0, \dots, u_\tau)$ удовлетворяет оценке (1.2) при $q_j = 0$, $j = 1, \dots, \tau$. С использованием функционала Ляпунова—Красовского (1.6) в работе [5] установлены оценки на множество притяжения нулевого решения системы (1.1) и на скорость стабилизации решений при $n \to \infty$.

В данной работе мы исследуем асимптотическую устойчивость нулевого решения более общих систем вида (1.1). В следующем разделе мы сформулируем и докажем основные результаты.

3. Основные результаты

Рассмотрим нелинейную систему разностных уравнений вида (1.1) с вектор-функцией $F(n, u_0, \dots, u_\tau)$, удовлетворяющей оценке (1.2). Будем предполагать, что выполнены условия теоремы 2.1, гарантирующие асимптотическую устойчивость нулевого решения линейной системы (2.1). Используя матрицы H, K_j, определенные в теореме 2.1, введем следующие обозначения:

$$R_0 = \frac{h_1^{\frac{\omega_0}{2}}}{q_0\rho_0 Q}\left(\sqrt{\|A\|^2 + \frac{c_1\rho_0}{\|H\|}} - \|A\|\right), \tag{3.1}$$

$$R_j = \frac{k_{j-1}^{\frac{\omega_j}{2}}}{q_j^{1-\beta_j}\rho_1 Q}\left(\sqrt{\|B\|^2 + \frac{c_1\rho_1}{\|H\|}} - \|B\|\right), \quad j = 1, \dots, \tau, \tag{3.2}$$

где $h_1 > 0$, $k_0 > 0, \dots, k_{\tau-1} > 0$ — минимальные собственные значения матриц H, $K_0, \dots, K_{\tau-1}$ соответственно, $\beta_j \in (0,1)$, $j = 1, \dots, \tau$,

$$\rho_0 = 1 + \frac{\|H\|\,\|B\|^2}{c_1}, \quad \rho_1 = \rho_0 + \frac{\|H\|\,\|A\|^2}{c_1}, \quad Q = 1 + \sum_{j=1}^{\tau} q_j^{\beta_j}. \tag{3.3}$$

Если при вычислении R_j возникает деление на 0, то соответствующее R_j полагаем равным $+\infty$. Отметим, что параметрами β_j можно управлять.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Если выполнены следующие неравенства*:

$$\big(v(0,x)\big)^{\omega_0/2} < R_0, \tag{3.4}$$

$$\big(v(0,x)\big)^{\omega_j/2} \leqslant R_j, \quad j = 1,\dots,\tau, \tag{3.5}$$

то для решения начальной задачи (1.1), (1.3) *верна оценка*

$$\|x_n\|^2 \leqslant h_1^{-1}(1-\widetilde{\varepsilon})^n v(0,x), \tag{3.6}$$

где $\widetilde{\varepsilon} = \min\left\{\dfrac{\gamma}{\|H\|}, æ_1,\dots,æ_\tau\right\}$, $0<\widetilde{\varepsilon}<1$,

$$\gamma = \frac{c_1}{Q} - 2q_0\|H\|\,\|A\|h_1^{-\omega_0/2}(v(0,x))^{\omega_0/2} - \|H\|q_0^2 Q\rho_0 h_1^{-\omega_0}(v(0,x))^{\omega_0}, \tag{3.7}$$

$v(0,x)$ *определено в* (2.5).

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — решение начальной задачи (1.1), (1.3). Будем проводить рассуждения по схеме из работы [5]. Рассмотрим на этом решении функционал (1.6). Оценим разность $v(n+1,x)-v(n,x)$. Используя обозначения для матриц Δ_j, имеем

$$v(n+1,x)-v(n,x) = \langle Hx_{n+1},x_{n+1}\rangle - \langle Hx_n,x_n\rangle + \sum_{j=1}^{\tau}\langle K_{j-1}x_{n+1-j},x_{n+1-j}\rangle -$$

$$-\sum_{j=1}^{\tau}\langle K_{j-1}x_{n-j},x_{n-j}\rangle = \langle Hx_{n+1},x_{n+1}\rangle - \langle Hx_n,x_n\rangle + \langle K_0x_n,x_n\rangle -$$

$$-\Big(\langle K_0x_{n-1},x_{n-1}\rangle - \langle K_1x_{n-1},x_{n-1}\rangle\Big) - \cdots$$

$$-\Big(\langle K_{\tau-1}x_{n-\tau},x_{n-\tau}\rangle - \langle K_\tau x_{n-\tau},x_{n-\tau}\rangle\Big) - \langle K_\tau x_{n-\tau},x_{n-\tau}\rangle =$$

$$= \langle Hx_{n+1},x_{n+1}\rangle - \langle Hx_n,x_n\rangle + \langle K_0x_n,x_n\rangle - \sum_{j=1}^{\tau}\langle \Delta_j x_{n-j},x_{n-j}\rangle - \langle K_\tau x_{n-\tau},x_{n-\tau}\rangle.$$

Учитывая, что $\{x_n\}$ является решением эквивалентной системы (1.4), получаем

$$v(n+1,x)-v(n,x) = \langle A^*HAx_n,x_n\rangle - \langle Hx_n,x_n\rangle + \langle K_0x_n,x_n\rangle +$$

$$+\sum_{j=1}^{\tau}\langle A^*HB_j(n)x_{n-j},x_n\rangle + \sum_{j=1}^{\tau}\langle B_j^*(n)HAx_n,x_{n-j}\rangle + \sum_{j,i=1}^{\tau}\langle B_j^*(n)HB_i(n)x_{n-i},x_{n-j}\rangle -$$

$$-\sum_{j=1}^{\tau}\langle \Delta_j x_{n-j},x_{n-j}\rangle - \langle K_\tau x_{n-\tau},x_{n-\tau}\rangle + 2\mathrm{Re}\,\langle HAx_n, F(n,x_n,\dots,x_{n-\tau})\rangle +$$

$$+2\sum_{j=1}^{\tau}\mathrm{Re}\,\langle HB_j(n)x_{n-j}, F(n,x_n,\dots,x_{n-\tau})\rangle + \langle HF(n,x_n,\dots,x_{n-1}), F(n,x_n,\dots,x_{n-1})\rangle,$$

где матрицы $B_j(n)$ определены в (1.5). Используя заданную в (2.2) матрицу $C(n)$, имеем

$$v(n+1,x)-v(n,x) = -\left\langle C(n)\begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau}\end{pmatrix}\right\rangle -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\tau-1}\langle \Delta_j x_{n-j},x_{n-j}\rangle - \langle \Delta_\tau x_{n-\tau},x_{n-\tau}\rangle + W(n,x), \tag{3.8}$$

где

$$W(n,x) = 2\mathrm{Re}\,\langle HAx_n, F(n,x_n,\dots,x_{n-\tau})\rangle + 2\sum_{j=1}^{\tau}\mathrm{Re}\,\langle HB_j(n)x_{n-j}, F(n,x_n,\dots,x_{n-\tau})\rangle +$$

$$+\langle HF(n,x_n,\dots,x_{n-1}), F(n,x_n,\dots,x_{n-1})\rangle.$$

Оценим каждое из слагаемых в (3.8). Первое слагаемое оценим, используя неравенство (2.3). Из условий теоремы 2.2 вытекает неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\tau-1}\langle\Delta_j x_{n-j}, x_{n-j}\rangle + \langle\Delta_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle \geqslant \sum_{j=1}^{\tau-1}æ_j\langle K_{j-1}x_{n-j}, x_{n-j}\rangle + æ_\tau\langle K_{\tau-1}x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle.$$

Следовательно,

$$v(n+1,x) - v(n,x) \leqslant -c_1\sum_{j=0}^{\tau}\|x_{n-j}\|^2 - \sum_{j=1}^{\tau}æ_j\langle K_{j-1}x_{n-j}, x_{n-j}\rangle + W(n,x). \tag{3.9}$$

В силу (1.2) имеем

$$\|W(n,x)\| \leqslant W_1 + W_2 + W_3,$$

где

$$W_1 = \sum_{j=0}^{\tau}2q_j\|H\|\,\|A\|\,\|x_n\|\,\|x_{n-j}\|^{1+\omega_j}, \quad W_2 = \sum_{j=0}^{\tau}2q_j\|H\|\,\|B\|\,\|x_{n-\tau(n)}\|\,\|x_{n-j}\|^{1+\omega_j},$$

$$W_3 = \|H\|\left(\sum_{j=0}^{\tau}q_j\|x_{n-j}\|^{1+\omega_j}\right)^2.$$

Для оценки каждого слагаемого W_j воспользуемся следующей технической леммой.

Лемма 3.1. *Пусть $\alpha, \beta \geqslant 0$, $u, v \in \mathbb{R}^d$. Тогда выполняется неравенство*

$$2\alpha\beta\langle u, v\rangle \leqslant \alpha^2\langle Mu, u\rangle + \beta^2\langle M^{-1}v, v\rangle,$$

где M — симметричная положительно определенная матрица.

Рассмотрим вначале W_1 и запишем

$$W_1 = 2q_0\|H\|\,\|A\|\,\|x_n\|^{2+\omega_0} + \widehat{W}_1,$$

где

$$\widehat{W}_1 = 2\|H\|\,\|A\|\,\|x_n\|\sum_{j=1}^{\tau}q_j\|x_{n-j}\|^{1+\omega_j}.$$

Мы оценим $\widehat{W}_1$ с использованием леммы 3.1, выбрав $\alpha = \|x_n\|$, $\beta = \|H\|\,\|A\|$, $M = \xi I$, $\xi > 0$, I — единичная матрица,

$$u = \begin{pmatrix} q_1^{\beta_1/2} \\ \vdots \\ q_\tau^{\beta_\tau/2}\end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} q_1^{1-\beta_1/2}\|x_{n-1}\|^{1+\omega_1} \\ \vdots \\ q_\tau^{1-\beta_\tau/2}\|x_{n-\tau}\|^{1+\omega_\tau}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\tau,$$

$\beta_j \in (0,1)$, $j = 1, \ldots, \tau$. Очевидно, $\widehat{W}_1 = 2\alpha\beta\langle u, v\rangle$. В силу леммы получаем

$$W_1 \leqslant 2q_0\|H\|\,\|A\|\,\|x_n\|^{2+\omega_0} + \xi\|x_n\|^2\sum_{j=1}^{\tau}q_j^{\beta_j} + \xi^{-1}\|H\|^2\|A\|^2\sum_{j=1}^{\tau}q_j^{2-\beta_j}\|x_{n-j}\|^{2+2\omega_j}. \tag{3.10}$$

Далее рассмотрим W_2, которое перепишем в виде:

$$W_2 = 2q_{\tau(n)}\|H\|\,\|B\|\,\|x_{n-\tau(n)}\|^{2+\omega_{\tau(n)}} + \widehat{W}_2,$$

где

$$\widehat{W}_2 = 2\|H\|\,\|B\|\,\|x_{n-\tau(n)}\|\sum_{j=0,\ j\neq\tau(n)}^{\tau}q_j\|x_{n-j}\|^{1+\omega_j}.$$

Полагаем $\alpha = \|x_{n-\tau(n)}\|$, $\beta = \|H\|\,\|B\|$, $M = \xi I$, $\xi > 0$,

$$\widetilde{u} = \begin{pmatrix} 1, \\ q_1^{\beta_1/2} \\ \vdots \\ q_\tau^{\beta_\tau/2} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{v} = \begin{pmatrix} q_0\|x_n\|^{1+\omega_0} \\ q_1^{1-\beta_1/2}\|x_{n-1}\|^{1+\omega_1} \\ \vdots \\ q_\tau^{1-\beta_\tau/2}\|x_{n-\tau}\|^{1+\omega_\tau} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\tau,$$

где β_j определены выше, векторы $\widetilde{u}$, $\widetilde{v}$ не содержат компоненты, соответствующие индексу $\tau(n)$. Очевидно, $\widehat{W}_2 = 2\alpha\beta\langle\widetilde{u},\widetilde{v}\rangle$. Используя лемму 3.1, имеем

$$W_2 \leqslant 2q_{\tau(n)}\|H\|\,\|B\|\,\|x_{n-\tau(n)}\|^{2+\omega_{\tau(n)}} + \xi\|x_{n-\tau(n)}\|^2\Big(1 + \sum_{j=1, j\neq\tau(n)}^{\tau} q_j^{\beta_j}\Big) + \\ + \xi^{-1}\|H\|^2\|B\|^2 q_0^2\|x_n\|^{2+2\omega_0} + \xi^{-1}\|H\|^2\|B\|^2 \sum_{j=1, j\neq\tau(n)}^{\tau} q_j^{2-\beta_j}\|x_{n-j}\|^{2+2\omega_j}. \quad (3.11)$$

Теперь оценим W_3. Очевидно, $W_3 = \|H\|\langle\widehat{u},\widehat{v}\rangle^2$, где

$$\widehat{u} = \begin{pmatrix} 1, \\ q_1^{\beta_1/2} \\ \vdots \\ q_\tau^{\beta_\tau/2} \end{pmatrix}, \quad \widehat{v} = \begin{pmatrix} q_0^2\|x_n\|^{1+\omega_0} \\ q_1^{1-\beta_1/2}\|x_{n-1}\|^{1+\omega_1} \\ \vdots \\ q_\tau^{1-\beta_\tau/2}\|x_{n-\tau}\|^{1+\omega_\tau} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tau+1},$$

β_j определены выше. Используя неравенство Коши—Буняковского, получаем

$$W_3 \leqslant \|H\|\,\|\widehat{u}\|^2\|\widehat{v}\|^2 = \|H\|\Big(1 + \sum_{j=1}^{\tau} q_j^{\beta_j}\Big)\Big(q_0^2\|x_n\|^{2+2\omega_0} + \sum_{j=1}^{\tau} q_j^{2-\beta_j}\|x_{n-j}\|^{2+2\omega_j}\Big). \quad (3.12)$$

Полагаем $Q = 1 + \sum\limits_{j=1}^{\tau} q_j^{\beta_j}$ и $\xi = \dfrac{c_1}{Q}$. Тогда из (3.10)–(3.12) имеем

$$W_1 \leqslant 2q_0\|H\|\,\|A\|\,\|x_n\|^{2+\omega_0} + \frac{c_1(Q-1)}{Q}\|x_n\|^2 + \frac{Q\|H\|^2\|A\|^2}{c_1}\sum_{j=1}^{\tau} q_j^{2-\beta_j}\|x_{n-j}\|^{2+2\omega_j}, \quad (3.13)$$

$$W_2 \leqslant 2q_{\tau(n)}\|H\|\,\|B\|\,\|x_{n-\tau(n)}\|^{2+\omega_{\tau(n)}} + \frac{c_1(Q - q_{\tau(n)}^{\beta_{\tau(n)}})}{Q}\|x_{n-\tau(n)}\|^2 + \\ + \frac{q_0^2 Q\|H\|^2\|B\|^2}{c_1}\|x_n\|^{2+2\omega_0} + \frac{Q\|H\|^2\|B\|^2}{c_1}\sum_{j=1, j\neq\tau(n)}^{\tau} q_j^{2-\beta_j}\|x_{n-j}\|^{2+2\omega_j}, \quad (3.14)$$

$$W_3 \leqslant q_0^2 Q\|H\|\,\|x_n\|^{2+2\omega_0} + Q\|H\|\sum_{j=1}^{\tau} q_j^{2-\beta_j}\|x_{n-j}\|^{2+2\omega_j}. \quad (3.15)$$

Используя (3.13)–(3.15), из (3.9) получаем

$$v(n+1,x) - v(n,x) \leqslant -\sum_{j=1}^{\tau} æ_j\langle K_{j-1}x_{n-j}, x_{n-j}\rangle + \Bigg(2q_0\|H\|\,\|A\|\,\|x_n\|^{2+\omega_0} + \\ + q_0^2 Q\|H\|\Big(1 + \frac{\|H\|\,\|B\|^2}{c_1}\Big)\|x_n\|^{2+2\omega_0} - \frac{c_1}{Q}\|x_n\|^2\Bigg) + \Bigg(2q_{\tau(n)}\|H\|\,\|B\|\,\|x_{n-\tau(n)}\|^{2+\omega_{\tau(n)}} + \\ + q_{\tau(n)}^{2-\beta_{\tau(n)}} Q\|H\|\Big(1 + \frac{\|H\|\,\|A\|^2}{c_1}\Big)\|x_{n-\tau(n)}\|^{2+2\omega_{\tau(n)}} - \frac{q_{\tau(n)}^{\beta_{\tau(n)}} c_1}{Q}\|x_{n-\tau(n)}\|^2\Bigg) +$$

$$+\sum_{j=1,\ j\neq\tau(n)}^{\tau}\left(q_j^{2-\beta_j}Q\|H\|\Big(1+\frac{\|H\|\,\|A\|^2}{c_1}+\frac{\|H\|\,\|B\|^2}{c_1}\Big)\|x_{n-j}\|^{2+2\omega_j}-c_1\|x_{n-j}\|^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant-\sum_{j=1}^{\tau}æ_j\langle K_{j-1}x_{n-j},x_{n-j}\rangle+\left(2q_0\|H\|\,\|A\|\,\|x_n\|^{2+\omega_0}+\right.$$

$$\left.+q_0^2Q\|H\|\Big(1+\frac{\|H\|\,\|B\|^2}{c_1}\Big)\|x_n\|^{2+2\omega_0}-\frac{c_1}{Q}\|x_n\|^2\right)+\sum_{j=1}^{\tau}\left(2q_j\|H\|\,\|B\|\,\|x_{n-j}\|^{2+\omega_j}+\right.$$

$$\left.+q_j^{2-\beta_j}Q\|H\|\Big(1+\frac{\|H\|\,\|A\|^2}{c_1}+\frac{\|H\|\,\|B\|^2}{c_1}\Big)\|x_{n-j}\|^{2+2\omega_j}-\frac{q_j^{\beta_j}c_1}{Q}\|x_{n-j}\|^2\right). \tag{3.16}$$

Обозначим $\rho_0=1+\dfrac{\|H\|\,\|B\|^2}{c_1}$, $\rho_1=\rho_0+\dfrac{\|H\|\,\|A\|^2}{c_1}$. Тогда (3.16) можно переписать в следующем виде:

$$v(n+1,x)-v(n,x)\leqslant-\sum_{j=1}^{\tau}æ_j\langle K_{j-1}x_{n-j},x_{n-j}\rangle+$$

$$+\left(2q_0\|H\|\,\|A\|\,\|x_n\|^{\omega_0}+q_0^2Q\|H\|\rho_0\|x_n\|^{2\omega_0}-\frac{c_1}{Q}\right)\|x_n\|^2+$$

$$+\sum_{j=1}^{\tau}\left(2q_j\|H\|\,\|B\|\,\|x_{n-j}\|^{\omega_j}+q_j^{2-\beta_j}Q\|H\|\rho_1\|x_{n-j}\|^{2\omega_j}-\frac{q_j^{\beta_j}c_1}{Q}\right)\|x_{n-j}\|^2. \tag{3.17}$$

Очевидно, что для любого $\alpha\geqslant0$ имеют место неравенства

$$\|x_n\|^{\alpha}\leqslant(h_1)^{-\frac{\alpha}{2}}\langle Hx_n,x_n\rangle^{\frac{\alpha}{2}}\leqslant(h_1)^{-\frac{\alpha}{2}}(v(n,x))^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$\|x_{n-j}\|^{\alpha}\leqslant(k_{j-1})^{-\frac{\alpha}{2}}\langle K_{j-1}x_{n-j},x_{n-j}\rangle^{\frac{\alpha}{2}}\leqslant(k_{j-1})^{-\frac{\alpha}{2}}(v(n,x))^{\frac{\alpha}{2}},$$

где h_1 — минимальное собственное значение матрицы H, k_j — минимальное собственное значение матрицы K_j. Поэтому из (3.17) получаем

$$v(n+1,x)-v(n,x)\leqslant-\sum_{j=1}^{\tau}æ_j\langle K_{j-1}x_{n-j},x_{n-j}\rangle+$$

$$+\left(2q_0\|H\|\,\|A\|h^{-\omega_0/2}\big(v(n,x)\big)^{\omega_0/2}+q_0^2Q\|H\|\rho_0h^{-\omega_0}\big(v(n,x)\big)^{\omega_0}-\frac{c_1}{Q}\right)\|x_n\|^2+$$

$$+\sum_{j=1}^{\tau}\left(2q_j\|H\|\,\|B\|k_{j-1}^{-\omega_j/2}\big(v(n,x)\big)^{\omega_j/2}+q_j^{2-\beta_j}Q\|H\|\rho_1k_{j-1}^{-\omega_j}\big(v(n,x)\big)^{\omega_j}-\frac{q_j^{\beta_j}c_1}{Q}\right)\|x_{n-j}\|^2. \tag{3.18}$$

Введем обозначения:

$$P_0(s)=2q_0\|H\|\,\|A\|h^{-\omega_0/2}s+\|H\|q_0^2Q\rho_0h^{-\omega_0}s^2,\quad p_0=\frac{c_1}{Q},$$

$$P_j(s)=2q_j\|H\|\,\|B\|k_{j-1}^{-\omega_j/2}s+\|H\|q_j^{2-\beta_j}Q\rho_1k_{j-1}^{-\omega_j}s^2,\quad p_j=\frac{q_j^{\beta_j}c_1}{Q},\quad j=1,\dots,\tau.$$

Тогда (3.18) можно переписать в виде:

$$v(n+1,x)-v(n,x)\leqslant\left(P_0\Big(\big(v(n,x)\big)^{\omega_0/2}\Big)-p_0\right)\|x_n\|^2-$$

$$-\sum_{j=1}^{\tau}æ_j\langle K_{j-1}x_{n-j},x_{n-j}\rangle+\sum_{j=1}^{\tau}\left(P_j\Big(\big(v(n,x)\big)^{\omega_j/2}\Big)-p_j\right)\|x_{n-j}\|^2. \tag{3.19}$$

Несложно показать, что, если начальные данные (1.3) удовлетворяют условиям теоремы 3.1, то справедливы неравенства

$$P_0\left((v(0,x))^{\omega_0/2}\right)<p_0,\quad P_j\left((v(0,x))^{\omega_j/2}\right)\leqslant p_j,\quad j=1,\dots,\tau. \tag{3.20}$$

Действительно, уравнение $P_0(s) = p_0$ имеет корни

$$s_1^* = \frac{h_1^{\frac{\omega_0}{2}}}{q_0\rho_0 Q}\left(-\sqrt{\|A\|^2 + \frac{c_1\rho_0}{\|H\|}} - \|A\|\right) < 0,$$

$$s_2^* = \frac{h_1^{\frac{\omega_0}{2}}}{q_0\rho_0 Q}\left(\sqrt{\|A\|^2 + \frac{c_1\rho_0}{\|H\|}} - \|A\|\right) = R_0 > 0.$$

Следовательно, неравенство $P_0(s) < p_0$ выполнено при $s \in (s_1^*, R_0)$. Аналогично, уравнения $P_j(s) = p_j$ имеют корни

$$s_{j,1}^* = \frac{k_{j-1}^{\frac{\omega_j}{2}}}{q_j^{1-\beta_j}\rho_1 Q}\left(-\sqrt{\|B\|^2 + \frac{c_1\rho_1}{\|H\|}} - \|B\|\right) < 0,$$

$$s_{j,2}^* = \frac{k_{j-1}^{\frac{\omega_j}{2}}}{q_j^{1-\beta_j}\rho_1 Q}\left(\sqrt{\|B\|^2 + \frac{c_1\rho_1}{\|H\|}} - \|B\|\right) = R_j > 0, \quad j = 1, \dots, \tau.$$

Поэтому неравенства $P_j(s) \leqslant p_j$ выполнены при $s \in [s_{1,j}^*, R_j]$. В силу условий (3.4), (3.5) имеем $\big(v(0,x)\big)^{\omega_0/2} < R_0$, $\big(v(0,x)\big)^{\omega_j/2} \leqslant R_j$, $j = 1, \dots, \tau$. По определению $v(0,x) \geqslant 0$, поэтому оценки (3.20) выполнены.

Рассмотрим неравенство (3.19) при $n = 0$. Поскольку $h_1\|z\|^2 \leqslant \langle Hz, z\rangle \leqslant \|H\|\,\|z\|^2$, то

$$v(1,x) \leqslant v(0,x) - \frac{\gamma}{\|H\|}\langle Hx_0, x_0\rangle - \sum_{j=1}^{\tau} æ_j \langle K_{j-1}x_{-j}, x_{-j}\rangle,$$

где

$$\gamma = p_0 - P_0\left(v(0,x)^{\omega_0/2}\right) > 0,$$

что соответствует обозначению (3.7). Тогда, используя определение функционала (1.6), имеем

$$v(1,x) \leqslant (1-\widetilde{\varepsilon})v(0,x) < v(0,x),$$

где

$$\widetilde{\varepsilon} = \min\left\{\frac{\gamma}{\|H\|}, æ_1, \dots, æ_\tau\right\} < 1.$$

Покажем, что для всех $n = 1, 2, \dots$ выполнено неравенство

$$v(n+1,x) \leqslant (1-\widetilde{\varepsilon})v(n,x). \tag{3.21}$$

Доказательство проведем методом индукции. Пусть (3.21) выполнено для всех $n < k$. Рассмотрим $n = k$. В силу (3.19) имеем

$$v(k+1,x) - v(k,x) \leqslant -\sum_{j=1}^{\tau} æ_j\langle K_{j-1}x_{k-j}, x_{k-j}\rangle +$$

$$+ \|x_k\|^2\left[P_0\left((v(k,x))^{\omega_0/2}\right) - p_0\right] + \sum_{j=1}^{\tau}\|x_{k-j}\|^2\left[P_j\left((v(k,x))^{\omega_j/2}\right) - p_j\right].$$

Заметим, что функции $P_j(s)$, $j = 0, \dots, \tau$, монотонно возрастают при $s \geqslant 0$ и

$$v(k,x) \leqslant (1-\widetilde{\varepsilon})v(k-1,x) \leqslant \ldots \leqslant (1-\widetilde{\varepsilon})^k v(0,x) < v(0,x).$$

Тогда

$$P_j\left((v(k,x))^{\omega_j/2}\right) < P_j\left((v(0,x))^{\omega_j/2}\right), \quad j = 0, \dots, \tau.$$

Следовательно,

$$\|x_k\|^2\left[P_0\left((v(k,x))^{\omega_0/2}\right) - p_0\right] + \sum_{j=1}^{\tau}\|x_{k-j}\|^2\left[P_j\left((v(k,x))^{\omega_j/2}\right) - p_j\right] \leqslant -\gamma\|x_k\|^2,$$

где γ определено в (3.7). Поэтому, используя определение функционала (1.6), получаем

$$v(k+1,x) \leqslant (1-\widetilde{\varepsilon})v(k,x),$$

что дает неравенство (3.21) при $n=k$.

Из определения функционала $v(n,x)$ имеем

$$h_1\|x_n\|^2 \leqslant v(n,x) \leqslant (1-\widetilde{\varepsilon})^n v(0,x),$$

что дает оценку (3.6) для решения начальной задачи (1.1), (1.3). Поскольку $0<\widetilde{\varepsilon}<1$, то решение стремится к нулю при $n\to\infty$, при этом скорость убывания определяется значением $\widetilde{\varepsilon}$. □

Сформулируем ряд следствий для различных значений q_j, ω_j.

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, $\omega_j>0$ *и* $q_j>0$, $j=0,\dots,\tau$. *Тогда нулевое решение системы* (1.1) *асимптотически устойчиво. Если начальные данные* (1.3) *такие, что*

$$v(0,x) < R_0^{2/\omega_0}, \tag{3.22}$$

$$v(0,x) \leqslant \min\left\{R_1^{2/\omega_1},\dots,R_\tau^{2/\omega_\tau}\right\},$$

тогда решение начальной задачи (1.1), (1.3) *удовлетворяет оценке* (3.6), *где* R_j *определены в* (3.1), (3.2), $v(0,x)$ *определено в* (2.5).

Следствие 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, $\omega_j=0$ *и* $q_j>0$, $j=0,\dots,\tau$. *Если выполнены неравенства*

$$\left(\sqrt{\|A\|^2+\frac{c_1\rho_0}{\|H\|}}-\|A\|\right) > q_0\rho_0 Q, \tag{3.23}$$

$$\left(\sqrt{\|B\|^2+\frac{c_1\rho_1}{\|H\|}}-\|B\|\right) \geqslant q_j^{1-\beta_j}\rho_1 Q, \quad \beta_j\in(0,1), \quad j=1,\dots\tau,$$

то нулевое решение системы (1.1) *асимптотически устойчиво. При этом для решения начальной задачи* (1.1), (1.3) *верна оценка*

$$\|x_n\|^2 \leqslant h_1^{-1}(1-\widehat{\varepsilon})^n v(0,x), \tag{3.24}$$

где $\widehat{\varepsilon}=\min\left\{\dfrac{\widehat{\gamma}}{\|H\|}, æ_1,\dots,æ_\tau\right\}$, $0<\widehat{\varepsilon}<1$,

$$\widehat{\gamma}=\frac{c_1}{Q}-2q_0\|H\|\,\|A\|-\|H\|q_0^2Q\rho_0,$$

$v(0,x)$ *определено в* (2.5), ρ_0, ρ_1, Q *определены в* (3.3).

Введем множества индексов

$$I=\{i=1,\dots,\tau \mid q_i>0,\ \omega_i>0\}, \quad J=\{j=1,\dots,\tau \mid q_j>0,\ \omega_j=0\}.$$

Следствие 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, $q_0>0$ *и* $\omega_0>0$. *Если выполнены неравенства*

$$\left(\sqrt{\|B\|^2+\frac{c_1\rho_1}{\|H\|}}-\|B\|\right) \geqslant q_j^{1-\beta_j}\rho_1 Q, \quad \beta_j\in(0,1), \quad j\in J, \tag{3.25}$$

то нулевое решение системы (1.1) *асимптотически устойчиво. Если начальные данные* (1.3) *такие, что выполнено* (3.22) *и*

$$v(0,x) \leqslant \min\left\{R_i^{2/\omega_i} \mid i\in I\right\}, \tag{3.26}$$

тогда для решения начальной задачи (1.1), (1.3) *верна оценка* (3.6).

Следствие 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, $q_0>0$ *и* $\omega_0=0$. *Если выполнены неравенства* (3.23) *и* (3.25), *то нулевое решение системы* (1.1) *асимптотически устойчиво. Если начальные данные* (1.3) *такие, что верно* (3.26), *тогда для решения начальной задачи* (1.1), (1.3) *имеет место оценка* (3.24).

Следствие 3.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и* $q_0 = 0$. *Если выполнены неравенства* (3.25), *то нулевое решение системы* (1.1) *асимптотически устойчиво. Если начальные данные* (1.3) *такие, что верно* (3.26), *тогда для решения начальной задачи* (1.1), (1.3) *имеет место оценка*

$$\|x_n\|^2 \leqslant h_1^{-1}(1-\varepsilon)^n v(0,x),$$

где $\varepsilon = \min\left\{\dfrac{c_1}{\|H\|}, æ_1, \ldots, æ_\tau\right\}$, $0 < \varepsilon < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демиденко Г. В., Балданов Д. Ш.* Об асимптотической устойчивости решений разностных уравнений с запаздыванием // Вестн. НГУ. Сер. Мат., мех., инф. — 2015. — *15*, № 4. — С. 50–62. — DOI: 10.17377/PAM.2015.15.406.
2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Мат., мех., инф. — 2005. — *5*, № 3. — С. 20–28.
3. *Куликов А. Ю., Малыгина В. В.* Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2011. — *12*. — С. 30–41.
4. *Малыгина В. В., Чудинов К. М.* Асимптотика решений разностных уравнений с запаздываниями // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2016. — № 7. — С. 66–82.
5. *Матвеева И. И., Хмиль А. В.* Устойчивость решений одного класса нелинейных систем разностных уравнений с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. — 2021. — *28*, № 3. — С. 31–44. — DOI: 10.25587/SVFU.2021.56.29.003.
6. *Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В.* Исследование абсолютной устойчивости разностных системы с запаздыванием вторым методом Ляпунова // Журн. выч. прикл. мат. — 2010. — *4*, № 103. — С. 118–126.
7. *Agarwal R. P., Kim Y. H., Sen S. K.* Advanced discrete Halanay-type inequalities: stability of difference equations // J. Inequal. Appl. — 2009. — *2009*. — 535849. — DOI: 10.1155/2009/535849.
8. *Baštinec J., Demchenko H., Diblik J., Khusainov D. Ya.* Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays // Discrete Dyn. Nat. Soc. — 2018. — *2018*. — 9703919. — DOI: 10.1155/2018/9703919.
9. *Berezansky L., Braverman E.* Exponential stability of difference equations with several delays: recursive approach // Adv. Differ. Equ. — 2009. — *2009*. — 104310. — DOI: 10.1155/2009/104310.
10. *Diblik J.* Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays by degenerated Lyapunov–Krasovskii functionals // Appl. Math. Lett. — 2023. — *142*. — 108654. — DOI: 10.1016/j.aml.2023.108654.
11. *Erbe L. H., Xia H., Yu J. S.* Global stability of a linear nonautonomous delay difference equation // J. Differ. Equ. Appl. — 1995. — *1*. — С. 151–161. — DOI: 10.1080/10236199508808016.
12. *Gyori I., Hartung F.* Stability in delayed perturbed differential and difference equations // Fields Inst. Commun. — 2001. — *29*. — С. 181–194. — DOI: 10.1090/fic/029/14.
13. *Gyori I., Pituk M.* Asymptotic formulae for the solutions of a linear delay difference equation // J. Math. Anal. Appl. — 1995. — *136*. — С. 376–392.
14. *Ngoc P. H. A., Trinh H., Hieu L. T., Huy N. D.* On contraction of nonlinear difference equations with time-varying delays // Math. Nachr. — 2019. — *292*, №. 4. — С. 859–870. — DOI: 10.1002/mana.201700167.
15. *Park J. H., Lee T. H., Liu Y., Chen J.* Dynamic systems with time delays: stability and control. — Singapore: Springer, 2019. — DOI: 10.1007/978-981-13-9254-2.
16. *Stojanovic S. B., Debeljkovic D. L. J., Dimitrijevic N.* Stability of discrete-time systems with time-varying delay: delay decomposition approach // Int. J. Computers Commun. Control. — 2012. — *7*, № 4. — С. 775–783. — DOI: 10.15837/ijccc.2012.4.1375.
17. *Yu J. S.* Asymptotic stability of a linear difference equation with variable delay // Comp. Math. Appl. — 1998. — *36*, № 10–12. — С. 203–210. — DOI: 10.1016/S0898-1221(98)80021-7.

И. И. Матвеева
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: `i.matveeva@g.nsu.ru`, РИНЦ SPIN-код: 8973-3918, РИНЦ AuthorID: 5372, ResearcherID: J-7394-2013, Scopus: 7006445422, ORCID: 0000-0002-9390-2702

В. А. Каравайкин
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: `v.karavaikin@g.nsu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-541-552
EDN: QRKWWT

UDC 517.929.4
Research article

Stability of solutions for a class of systems of nonlinear difference equations with variable delay

I. I. Matveeva and V. A. Karavaikin

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

Abstract. This paper examines a class of systems of nonlinear difference equations with variable delay. Conditions for the asymptotic stability of the zero solution are established, and estimates are derived for the attraction sets as well as for the rate of decay of solutions at infinity. The study uses a discrete Lyapunov–Krasovskii functional of a special form.

Keywords: difference equations, variable delay, asymptotic stability, attraction set, estimate of solution.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was supported by the Mathematical Center in Akademgorodok, Agreement No. 075-15-2025-349 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

Authors' contribution. All authors contributed to obtaining the results and writing the manuscript.

For citation: I. I. Matveeva, V. A. Karavaikin, "Stability of solutions for a class of systems of nonlinear difference equations with variable delay," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 3, 541–552. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-541-552 EDN: QRKWWT

REFERENCES

1. G. V. Demidenko and D. Sh. Baldanov, "Ob asimptoticheskoy ustoychivosti resheniy raznostnykh uravneniy s zapazdyvaniem" [On the asymptotic stability of solutions to delay difference equations], *Vestn. NGU. Ser. Mat., Mekh., Inf.* [Bull. Novosib. State Univ. Ser. Math. Mech. Inf.], 2015, **15**, No. 4, 50–62 (in Russian), DOI: 10.17377/PAM.2015.15.406.
2. G. V. Demidenko and I. I. Matveeva, "Asimptoticheskie svoystva resheniy differentsial'nykh uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom" [Asymptotic properties of solutions to differential equations with a delayed argument], *Vestn. NGU. Ser. Mat., Mekh., Inf.* [Bull. Novosib. State Univ. Ser. Math. Mech. Inf.], 2005, **5**, No. 3, 20–28 (in Russian).
3. A. Yu. Kulikov and V. V. Malygina, "Ustoychivost' lineynogo raznostnogo uravneniya i otsenki ego fundamental'nogo resheniya" [Stability of a linear difference equation and estimates of its fundamental solution], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2011, **12**, 30–41 (in Russian).
4. V. V. Malygina and K. M. Chudinov, "Asimptotika resheniy raznostnykh uravneniy s zapazdyvaniyami" [Asymptotics of solutions to delay difference equations], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2016, No. 7, 66–82 (in Russian).
5. I. I. Matveeva and A. V. Khmil', "Ustoychivost' resheniy odnogo klassa nelineynykh sistem raznostnykh uravneniy s zapazdyvaniem" [Stability of solutions for a class of nonlinear systems of delay difference equations], *Mat. Zametki SVFU* [Math. Notes North-East. Fed. Univ.], 2021, **28**, No. 3, 31–44 (in Russian), DOI: 10.25587/SVFU.2021.56.29.003.
6. D. Ya. Khusainov and A. V. Shatyrko, "Issledovanie absolyutnoy ustoychivosti raznostnykh sistemy s zapazdyvaniem vtorym metodom Lyapunova" [Investigation of the absolute stability of difference systems

© I. I. Matveeva, V. A. Karavaikin, 2026

This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

with delay using Lyapunov's second method], *Zhurn. Vych. Prikl. Mat.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2010, **4**, No. 103, 118–126 (in Russian).

7. R. P. Agarwal, Y. H. Kim, and S. K. Sen, "Advanced discrete Halanay-type inequalities: stability of difference equations," *J. Inequal. Appl.*, 2009, **2009**, 535849, DOI: 10.1155/2009/535849.
8. J. Baštinec, H. Demchenko, J. Diblik, D. Ya. Khusainov, "Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays," *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, 2018, **2018**, 9703919, DOI: 10.1155/2018/9703919.
9. L. Berezansky and E. Braverman, "Exponential stability of difference equations with several delays: recursive approach," *Adv. Differ. Equ.*, 2009, **2009**, 104310, DOI: 10.1155/2009/104310.
10. J. Diblik, "Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays by degenerated Lyapunov–Krasovskii functionals" [Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays by degenerated Lyapunov–Krasovskii functionals], *Appl. Math. Lett.* [Appl. Math. Lett.], 2023, **142**, 108654 (in Russian), DOI: 10.1016/j.aml.2023.108654.
11. L. H. Erbe, H. Xia, and J. S. Yu, "Global stability of a linear nonautonomous delay difference equation," *J. Differ. Equ. Appl.*, 1995, **1**, 151–161, DOI: 10.1080/10236199508808016.
12. I. Gyori and F. Hartung, "Stability in delayed perturbed differential and difference equations," *Fields Inst. Commun.*, 2001, **29**, 181–194, DOI: 10.1090/fic/029/14.
13. I. Gyori and M. Pituk, "Asymptotic formulae for the solutions of a linear delay difference equation," *J. Math. Anal. Appl.*, 1995, **136**, 376–392.
14. P. H. A. Ngoc, H. Trinh, L. T. Hieu, and N. D. Huy, "On contraction of nonlinear difference equations with time-varying delays," *Math. Nachr.*, 2019, **292**, No.. 4, 859–870, DOI: 10.1002/mana.201700167.
15. J. H. Park, T. H. Lee, Y. Liu, and J. Chen, *Dynamic systems with time delays: stability and control*, Springer, Singapore, 2019, DOI: 10.1007/978-981-13-9254-2.
16. S. B. Stojanovic, D. L. J. Debeljkovic, and N. Dimitrijevic, "Stability of discrete-time systems with time-varying delay: delay decomposition approach," *Int. J. Computers Commun. Control*, 2012, **7**, No. 4, 775–783, DOI: 10.15837/ijccc.2012.4.1375.
17. J. S. Yu, "Asymptotic stability of a linear difference equation with variable delay," *Comp. Math. Appl.*, 1998, **36**, No. 10–12, 203–210, DOI: 10.1016/S0898-1221(98)80021-7.

I. I. Matveeva
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: `i.matveeva@g.nsu.ru`, eLIBRARY SPIN-code: 8973-3918, eLIBRARY AuthorID: 5372, ResearcherID: J-7394-2013, Scopus: 7006445422, ORCID: 0000-0002-9390-2702

V. A. Karavaikin
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: `v.karavaikin@g.nsu.ru`