

О ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В. В. Малыгина, И. Ю. Постановова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

Аннотация. Работа посвящена вопросам устойчивости (равномерной, асимптотической, экспоненциальной) линейных автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Перечисленные виды устойчивости предлагается интерпретировать как свойства интегрального функционала, определенного на лебеговых пространствах измеримых функций. При таком подходе удастся провести тонкий анализ наиболее сложного вида устойчивости — асимптотической, и разделить случаи совпадения и не совпадения ее с экспоненциальной устойчивостью. Второй случай реализуется, когда оператор при производной необратим, и у рассматриваемого уравнения проявляются свойства, которые отличают его от дифференциальных уравнений запаздывающего типа. Специальный раздел посвящен исследованию равномерной устойчивости, для проверки которой получен легко проверяемый признак.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, фундаментальное решение, экспоненциальная устойчивость, оценка показателя экспоненты.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Все авторы участвовали в разработке концепции исследования, сборе, обработке и анализе данных, написании текста рукописи, формулировке выводов.

Для цитирования: Малыгина В. В., Постановова И. Ю. О задаче устойчивости для линейных автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 3. С. 524–540. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-524-540](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-524-540) EDN: QONIV

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача об асимптотическом поведении решений автономных уравнений нейтрального типа традиционно считается одной из наиболее трудных задач в теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ). Причина в том, что у уравнения нейтрального типа характеристическая функция имеет сложную структуру, и движение ее нулей вблизи мнимой оси не имеет простого аналитического описания. Этим объясняется существование большого количества контрпримеров, разрушающих множество естественных гипотез: в частности, расположение всех корней характеристической функции слева от мнимой оси не гарантирует не только асимптотической, но даже и равномерной устойчивости решений уравнений нейтрального типа.

На техническую сложность задачи накладывается отсутствие единых, принятых всеми исследователями, определений устойчивости. Формальный перенос на ФДУ классических определений устойчивости (с заменой начального вектора на начальную функцию) был успешно применен к уравнениям запаздывающего типа, но оказался недостаточно тонким инструментом при работе

с уравнениями нейтрального типа. В результате авторы, принадлежащие к разным научным школам, стали использовать разные определения устойчивости, которые не всегда легко сопоставить.

В настоящей работе предлагается перевести определения устойчивости для ФДУ на язык операторов, действующих в функциональных пространствах. Такой подход позволяет применить хорошо разработанные методы теории линейных операторов, а единообразие форм записи дает возможность сравнивать различные виды устойчивости, упорядочивать их по силе и находить эффективно проверяемые критерии.

2. ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА

Пусть $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{C}$ — множества вещественных, вещественных неотрицательных и комплексных чисел соответственно. Для измеримого множества E обозначим через $L_p(E)$ пространство функций, суммируемых на E со степенью p , $1 \leq p < \infty$, а через $L_\infty(E)$ — пространство измеримых и ограниченных в существенном на E функций (с естественными нормами). Для случая $E = \mathbb{R}_+$ будем использовать обозначения L_p и L_∞ . Символами I и Θ обозначим соответственно тождественный и нулевой операторы. Через $\chi_E(t)$ будем обозначать характеристическую функцию множества E , через $\chi(t)$ — характеристическую функцию множества $\mathbb{R}_+$.

Рассмотрим линейное автономное ФДУ нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^K a_k \dot{x}(t - h_k) = \int_0^H x(t - \xi) dr(\xi), \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

с начальными условиями $x(\zeta) = \varphi(\zeta)$, $\dot{x}(\zeta) = \psi(\zeta)$ при $\zeta < 0$. Здесь $a_k \in \mathbb{R}$, $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_K$, интеграл понимается в смысле Римана—Стилтьеса, $H > 0$, функция r имеет ограниченную вариацию, причем $r(0) = 0$.

Наряду с уравнением (2.1) рассмотрим уравнение

$$(I - S)\dot{x}(t) = Tx(t) + f(t), \quad (2.2)$$

где S — оператор внутренней суперпозиции, задаваемый формулой $S = \sum_{k=1}^K a_k S_{h_k}$, S_h — оператор сдвига на число h

$$(S_h x)(t) = \begin{cases} x(t - h), & t \geq h, \\ 0, & t < h, \end{cases} \quad (Tx)(t) = \int_0^H (S_\xi x)(t) dr(\xi).$$

Под решением $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (2.2) мы понимаем локально (т. е. на каждом конечном отрезке) абсолютно непрерывную функцию, считаем оператор S_h действующим в пространстве локально суммируемых функций, и предполагаем функцию внешнего возмущения $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ локально суммируемой.

Определим функцию σ равенством

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^K a_k \psi(t - h_k) \chi_{(-\infty, h_k)}(t) + \int_0^H \varphi(t - \xi) \chi_{(-\infty, \xi)}(t) dr(\xi), \quad t \geq 0.$$

Из построения следует, что функция σ отлична от нуля лишь на конечном отрезке. Если положить $f(t) = \sigma(t)$, то уравнение (2.1) с заданными начальными функциями φ и ψ представляется в виде (2.2). При таком подходе начальные функции становятся частью внешнего возмущения, и это определяет условия, которым мы их подчиняем. Очевидно, что нет необходимости требовать от функций φ и ψ непрерывности, необязательны также условие «непрерывной стыковки» $x(0) = \varphi(0)$ и условие согласования $\dot{\varphi} = \psi$. Мы будем предполагать, что обе начальные функции локально суммируемы, откуда следует локальная суммируемость функции σ .

В указанных условиях, как известно [1, с. 84], уравнение (2.2) с заданным начальным значением $x(0) \in \mathbb{R}$ однозначно разрешимо, и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t Y(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

Представление (2.3) по аналогии с известным представлением решения обыкновенного дифференциального уравнения называют *формулой Коши*. Функция $X: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ называется *фундаментальным решением*, а $Y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ — *функцией Коши* уравнения (2.2). На отрицательной полуоси фундаментальное решение и функцию Коши доопределим нулем. Функции X и Y не зависят ни от начального значения $x(0)$, ни от внешнего возмущения f .

В работе [2] показано, что фундаментальное решение уравнения (2.2) выражается через функцию Коши:

$$X(t) = (I - S)Y(t). \quad (2.4)$$

Таким образом, решение уравнения (2.2) задается формулой (2.3), где фундаментальное решение и функция Коши связаны соотношением (2.4). Следовательно, свойства любого решения уравнения (2.2) (равно как и уравнения (2.1)) определяются свойствами функции Коши, которую можно считать основным объектом исследования.

К функции Y применимо преобразование Лапласа; возможность его применения обоснована в [2]. Обозначим Лаплас-образ функции Y через $L_Y(p)$. В [2] также показано, что

$$L_Y(p) = \frac{1}{g(p)}, \quad (2.5)$$

где

$$g(p) = p(1 - g_S(p)) - g_T(p),$$

$$g_S(p) = \sum_{k=1}^K a_k e^{-h_k p}, \quad g_T(p) = \int_0^H e^{-p\xi} dr(\xi).$$

Функция $g(p)$ называется *характеристической* для уравнения (2.2). Как будет показано ниже, расположение нулей характеристической функции на комплексной плоскости определяет асимптотическое поведение решений исходного уравнения.

3. ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ: ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПЕРЕФОРМУЛИРОВКИ

Переход от обыкновенных дифференциальных уравнений к функционально-дифференциальным требует заменить начальное значение $x(0) \in \mathbb{R}$ на начальные функции, которые естественно рассматривать как элементы некоторых функциональных пространств. Определяя устойчивость как непрерывную зависимость решения от начальных функций, следует иметь в виду, что пространства начальных функций можно выбирать по-разному и снабжать различными нормами. Следовательно, в определениях устойчивости зависимость от выбора класса начальных функций должна быть отражена явно.

Обозначим $\omega = \max\{H, h_K\}$. Начальные условия для уравнения (2.1) задаются на множестве $[-\omega, 0]$. Функции φ и ψ в силу формулы (2.3) и определения функции σ не выходят из пространства $L_1[-\omega, 0]$, но могут принадлежать его подмножеству, не совпадающему с ним и снабженному собственной нормой. Применительно к введенной выше функции σ это означает выбор аналогичного подмножества $\mathbb{X} \subseteq L_1[0, \omega]$.

В большинстве работ (например, в монографиях [8, 14, 15]) полагается $\mathbb{X} = C[0, \omega]$. В работах [5, 17] используется техника гильбертовых пространств, поэтому $\mathbb{X} = L_2[0, \omega]$. В работе [13] $\mathbb{X} = L_1[0, \omega]$, в работах [9, 10] рассматривались случаи $\mathbb{X} = L_p[0, \omega]$ для всех $p \geq 1$.

Пусть $\mathbb{X}$ — линейное нормированное пространство, непрерывно вложенное в $L_1[0, \omega]$.

Обозначим $K_t \sigma = \int_0^t Y(t-s)\sigma(s)ds$.

Рассмотрим семейство линейных функционалов $\{K_t: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}\}_{t \geq 0}$ и семейство линейных преобразований $\{X_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}_{t \geq 0}$, заданных равенствами $X_t \alpha = X(t) \alpha$. Нормы функционалов K_t и X_t определим традиционно: $\|K_t\| = \sup_{\|\sigma\|=1} |K_t \sigma|$, $\|X_t\| = \sup_{|\alpha|=1} |X_t \alpha|$.

Решение $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (2.1), определяемое значением $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ и начальной функцией $\sigma \in \mathbb{X}$, будем называть *соответствующим* данным x_0 и σ . Для него из формулы (2.3) получаем:

$$x(t) = X_t x_0 + K_t \sigma, \quad t \geq 0.$$

Заметим, что для всех $t \geq \omega$ имеем

$$K_t \sigma = \int_0^\omega Y(t-s) \sigma(s) ds.$$

Определение 3.1. Уравнение (2.1) называется $\mathbb{X}$ -устойчивым (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\sigma \in \mathbb{X}$, таких что $|x_0| < \delta$ и $\|\sigma\|_{\mathbb{X}} < \delta$, для соответствующего решения $x = x(t)$ уравнения (2.1) справедлива оценка $\sup_{t \geq 0} |x(t)| < \varepsilon$.

Укажем эквивалентную переформулировку этого определения.

Теорема 3.1. Уравнение (2.1) $\mathbb{X}$ -устойчиво, если и только если справедливы оценки $\sup_{t \geq 0} |X(t)| < \infty$ и $\sup_{t \geq 0} \|K_t\| < \infty$.

Очевидно, что L_1 -устойчивость является самым сильным видом устойчивости. В работе [11] для нее получен следующий критерий.

Теорема 3.2. Уравнение (2.1) L_1 -устойчиво, если и только если

$$\sup_{t \geq 0} |Y(t)| < \infty.$$

Следствие 3.1. Если функция Коши уравнения (2.1) ограничена, то уравнение (2.1) L_p -устойчиво для всех p , $1 \leq p \leq \infty$.

Определение 3.2. Уравнение (2.1) называется асимптотически $\mathbb{X}$ -устойчивым, если оно $\mathbb{X}$ -устойчиво и для любых $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ соответствующее решение $x = x(t)$ уравнения (2.1) обладает свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Теорема 3.3. Пусть $\mathbb{X}$ — банахово пространство. Уравнение (2.1) асимптотически $\mathbb{X}$ -устойчиво, если и только если справедливы предельные соотношения $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} K_t \sigma = 0$.

Обратим внимание на условие $\lim_{t \rightarrow \infty} K_t \sigma = 0$: оно означает сходимостъ семейства функционалов на каждом элементе $\sigma \in \mathbb{X}$. Но в пространстве линейных ограниченных функционалов есть и другие виды сходимости, в частности, сходимостъ по норме $\|K_t\|$, которая влечет поточечную сходимостъ, но не эквивалентна ей.

В связи с этим в работе [11] было введено новое понятие.

Определение 3.3. Назовем уравнение (2.1) *сильно асимптотически $\mathbb{X}$ -устойчивым*, если $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \|K_t\| = 0$.

Следует подчеркнуть, что в исследованиях асимптотической устойчивости линейных ФДУ, как правило, речь идет именно о сильной асимптотической устойчивости в смысле определения 3.3, что не всегда согласуется с формальными определениями вследствие их неточности или даже отсутствия.

Для сильной асимптотической L_1 -устойчивости в работе [11] также получен критерий.

Теорема 3.4. Уравнение (2.1) *сильно асимптотически L_1 -устойчиво* тогда и только тогда, когда $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$.

Следствие 3.2. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$, то уравнение (2.1) *сильно асимптотически L_p -устойчиво* для всех p , $1 \leq p \leq \infty$.

Обратное неверно: в работе [10] приведены примеры уравнений, являющихся сильно асимптотически L_p -устойчивыми при всех $p > 1$, но теряющих это свойство при $p = 1$. Наличие таких примеров может служить обоснованием введения определения сильной асимптотической устойчивости.

Определение 3.4. Уравнение (2.1) называется экспоненциально $\mathbb{X}$ -устойчивым, если существуют такие постоянные $N, \gamma > 0$, что при любых $x_0 \in \mathbb{R}$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ для соответствующего решения $x = x(t)$ уравнения (2.1) справедлива оценка $|x(t)| \leq N e^{-\gamma t} (|x_0| + \|\sigma\|_{\mathbb{X}})$.

Теорема 3.5. Уравнение (2.1) экспоненциально $\mathbb{X}$ -устойчиво, если и только если существуют такие $N, \gamma > 0$, что для всех $t \geq 0$ имеем $|X(t)| \leq N e^{-\gamma t}$ и $\|K_t\| \leq N e^{-\gamma t}$.

Экспоненциальная L_p -устойчивость исследовалась в работе [11], где был установлен следующий критерий.

Теорема 3.6. Следующие утверждения эквивалентны.

1. Уравнение (2.1) экспоненциально L_p -устойчиво хотя бы при одном p , $1 \leq p \leq \infty$.
2. Уравнение (2.1) экспоненциально L_p -устойчиво при всех p , $1 \leq p \leq \infty$.
3. Функция Коши при некоторых $M, \gamma > 0$ подчинена экспоненциальной оценке

$$|Y(t)| \leq M e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0. \quad (3.1)$$

Отметим, что тонкое разделение решений уравнения (2.1) на асимптотически устойчивые и сильно асимптотически устойчивые, а также зависимость этих свойств от выбора пространства $\mathbb{X}$ перестают быть актуальными, если оператор $I - S$ обратим.

Теорема 3.7. Пусть оператор $I - S$ обратим хотя бы в одном из пространств L_p , $1 \leq p \leq \infty$, а $\mathbb{X}$ — линейное нормированное пространство, непрерывно вложенное в $L_1[0, \omega]$. Тогда эквивалентны следующие утверждения.

1. Уравнение (2.1) асимптотически $\mathbb{X}$ -устойчиво.
2. Уравнение (2.1) сильно асимптотически $\mathbb{X}$ -устойчиво.
3. Уравнение (2.1) экспоненциально $\mathbb{X}$ -устойчиво.
4. $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$.
5. $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$.

Аналогичное утверждение справедливо и для $\mathbb{X}$ -устойчивости.

Теорема 3.8. Пусть оператор $I - S$ обратим хотя бы в одном из пространств L_p , $1 \leq p \leq \infty$, а $\mathbb{X}$ — линейное нормированное пространство, непрерывно вложенное в $L_1[0, \omega]$. Тогда эквивалентны следующие утверждения.

1. Уравнение (2.1) $\mathbb{X}$ -устойчиво.
2. $\sup_{t \geq 0} |X(t)| < \infty$.
3. $\sup_{t \geq 0} |Y(t)| < \infty$.

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ СИЛЬНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

Из теоремы 3.7 следует, что в предположении обратимости оператора $I - S$ нет различий между асимптотической, сильной асимптотической и экспоненциальной устойчивостью, и это существенно упрощает исследование. В случае, когда в уравнении (2.1) оператор при производной необратим, картина качественно меняется: в работах [9, 16] предъявлены примеры автономных уравнений нейтрального типа, у которых есть решения, стремящиеся к нулю медленнее любой экспоненты. Анализ таких примеров, однако, показывает, что они возможны либо когда асимптотически устойчивое уравнение не является сильно асимптотически устойчивым, либо когда пространство $\mathbb{X}$ начальных функций не совпадает с $L_1[0, \omega]$. Если же уравнение сильно асимптотически L_1 -устойчиво, то, как будет показано в этом разделе, оно с необходимостью оказывается экспоненциально устойчивым. В терминах функции Коши это означает, что стремление к нулю этой функции может происходить только по экспоненциальному закону.

Теорема 4.1. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$, то существуют такие $M, \gamma > 0$, что для функции Коши уравнения (2.2) справедлива экспоненциальная оценка (3.1).

Доказательство. По условию теоремы $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$. Из равенства (2.4) следует, что тогда и $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем $T > 0$, такое, что при всех $t \geq T$ справедливы неравенства $|Y(t)| < \varepsilon$ и $|X(t)| < \varepsilon$.

Положим $T_0 = T + \omega$. Из формулы (2.3) получаем, что любое решение, соответствующее данным x_0 и σ , подчинено оценке

$$|x(t)| \leq \varepsilon(|x_0| + \|\sigma\|_1), \quad t \geq T_0.$$

Следуя обозначениям [14, с. 196], введем семейство операторов $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ по правилу: $U(t)(\sigma, x_0) = x_t(\varphi)$, т. е. при любом $\zeta \in [0, \omega]$ имеет место равенство $U(t)(\sigma(\zeta), x_0) = x(t + \zeta)$. Легко видеть, что операторы $U(t)$ обладают свойством $U(t + s) = U(t)U(s)$.

Из определения $U(t)$ следует, что $\|U(T_0)\| < \varepsilon$ и $\|U(t)\| \leq N = \text{const}$ при $t < T_0$.

Не нарушая общности, можем считать, что $0 < \varepsilon < 1$. Для любого $t \geq T_0$ найдутся натуральное n и $\tau \in [0, T_0)$, такие, что $t = nT_0 + \tau$. Тогда, с учетом свойств оператора $U(t)$, получаем:

$$\|U(t)\| = \|U(nT_0)U(\tau)\| = \|U^n(T_0)U(\tau)\| \leq N\|U(T_0)\|^n \leq N\varepsilon^n.$$

Ссылка на определение экспоненциальной устойчивости и теорему 3.6 завершает доказательство. $\square$

Таким образом, условие $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$ может служить критерием экспоненциальной устойчивости уравнения (2.2).

Дополним полученный результат известным [2, теорема 4] критерием экспоненциальной устойчивости.

Предложение 4.1. Функция Коши $Y(t)$ уравнения (2.2) имеет оценку (3.1) тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

1. Оператор $I - S$ обратим в L_p хотя бы при одном p , $1 \leq p \leq \infty$.
2. Все нули характеристической функции лежат слева от мнимой оси.

Соединяя результаты теоремы 4.1 и предложения 4.1, получаем два следствия.

Следствие 4.1. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$, то оператор $I - S$ обратим в любом из пространств L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

Следствие 4.2. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 0$, то все нули характеристической функции лежат слева от мнимой оси (и отделены от нее).

5. РАВНОМЕРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Исследуем вопрос об устойчивости по Ляпунову уравнения (2.1) в условиях обратимости оператора $I - S$. Из теоремы 3.8 следует, что в этом случае подпространство $\mathbb{X}$ начальных функций можно варьировать от $\{0\}$ до $L_1[0, \omega]$. Кроме того, в силу автономности уравнения (2.1) устойчивость по Ляпунову для него не зависит от выбора начальной точки. Поэтому $\mathbb{X}$ -устойчивость по Ляпунову уравнения (2.1) для всех подпространств $\mathbb{X} \subseteq L_1[0, \omega]$ соединим в общем термине *равномерная устойчивость*.

Ниже будут приведены примеры, которые показывают, что для равномерной устойчивости условие обратимости оператора $I - S$, не являясь необходимым, оказывается существенным: отказаться от него, вообще говоря, нельзя.

Сформулируем и докажем ряд вспомогательных утверждений.

Предложение 5.1 (см. [4, теорема 12.6]). Пусть P — множество нулей функции $1 - g_S(p)$, а переменная p равномерно удалена от P . Тогда модуль $|1 - g_S(p)|$ равномерно отделен от нуля.

Лемма 5.1. Пусть P — множество нулей функции $1 - g_S(p)$ и $\lambda > \sup_{p \in P} \{\text{Re } p\}$. Тогда в плоскости $\{p \in \mathbb{C} \mid \text{Re } p \geq \lambda\}$ лежит не более чем конечное число нулей функции $g(p)$.

Доказательство. Представим $g(p)$ в следующем виде:

$$g(p) = p \left(1 - g_S(p) - \frac{g_T(p)}{p} \right).$$

Пусть $\operatorname{Im} p \rightarrow \infty$ при условии, что $\operatorname{Re} p \geq \lambda$. Тогда, во-первых, очевидно, $|p| \rightarrow \infty$. Во-вторых, из предложения 5.1 следует, что существует такое число $\mu > 0$, что $|1 - g_S(p)| \geq \mu > 0$. Наконец, функция $g_T(p)$ ограничена в рассматриваемой области, поэтому $\left| \frac{g_T(p)}{p} \right| \rightarrow 0$.

Следовательно, при достаточно больших значениях $|\operatorname{Im} p|$ и $\operatorname{Re} p \geq \lambda$ справедливо неравенство

$$|g(p)| \geq |p| \left(|1 - g_S(p)| - \left| \frac{g_T(p)}{p} \right| \right) > 0.$$

Поскольку нули функции $g(p)$ изолированы, отсюда следует, что в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p \geq \lambda\}$ может быть лишь конечное число нулей функции $g(p)$. $\square$

Воспользуемся также следующим фактом о разложении функции $\frac{1}{1 - g_S(p)}$ в ряд Дирихле [12, лемма 1].

Предложение 5.2. Пусть функция $1 - g_S(p)$ не имеет нулей при $\operatorname{Re} p > \lambda$. Тогда при $\operatorname{Re} p > \lambda$ справедливо разложение в ряд Дирихле

$$\frac{1}{1 - g_S(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} (g_S(p))^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-d_n p}, \quad (5.1)$$

где d_n — всевозможные различные комбинации вида (6.2). При этом ряд (5.1) сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \lambda$ и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq \lambda + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.

Лемма 5.2. Пусть функция $1 - g_S(p)$ не имеет нулей при $\operatorname{Re} p > \lambda$. Тогда для любого $\mu > \lambda$ верно, что если функция $g(p)$ не имеет нулей на прямой $\operatorname{Re} p = \mu$, то

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left| \int_{\mu - iy}^{\mu + iy} \frac{e^{pt}}{g(p)} dp \right| \leq M e^{\mu t}, \quad M > 0.$$

Доказательство. Пусть $\beta \in (\lambda, \mu)$. Из леммы 5.2 следует, что при $\operatorname{Re} p > \beta$ справедливо разложение (5.1), причем ряд сходится абсолютно и равномерно.

Рассмотрим сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\beta(t - \alpha_n)} \chi(t - \alpha_n) = e^{\beta t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\beta \alpha_n} \chi(t - \alpha_n). \quad (5.2)$$

Этот ряд сходится, так как ряд (5.1) сходится при $\operatorname{Re} p \geq \beta$. Кроме того, к нему применимо преобразование Лапласа, так как при $\operatorname{Re} p \geq \beta$ функция $\frac{1}{1 - g_S(p)}$ ограничена, так что $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\beta \alpha_n} \chi(t - \alpha_n) \leq M_1$. Применим к (5.2) преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[e^{\beta t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\beta \alpha_n} \chi(t - \alpha_n) \right] &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\beta(t - \alpha_n)} \chi(t - \alpha_n) e^{-pt} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^{\infty} e^{\beta(t - \alpha_n)} \chi(t - \alpha_n) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n e^{-\alpha_n p}}{p - \beta} = \frac{1}{p - \beta} \cdot \frac{1}{1 - g_S(p)}. \end{aligned}$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа, имеем

$$e^{\beta t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\beta \alpha_n} \chi(t - \alpha_n) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p - \beta} \cdot \frac{1}{1 - g_S(p)} \right] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{\mu - iy}^{\mu + iy} \frac{e^{pt}}{(1 - g_S(p))(p - \beta)} dp \leq M_1 e^{\beta t},$$

поэтому

$$\left| \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{\mu-iy}^{\mu+iy} \frac{e^{pt}}{(1-g_S(p))(p-\beta)} dp \right| \leq 2\pi M_1 e^{\beta t}.$$

Теперь оценим интеграл из условия теоремы. Очевидно, что он не превышает суммы

$$\left| \int_{\mu-iy}^{\mu+iy} \frac{e^{pt}}{(1-g_S(p))(p-\beta)} dp \right| + \left| \int_{\mu-iy}^{\mu+iy} \frac{e^{pt}}{g(p)} dp - \int_{\mu-iy}^{\mu+iy} \frac{e^{pt}}{(1-g_S(p))(p-\beta)} dp \right|.$$

Первое слагаемое, как показано выше, при $y \rightarrow \infty$ не больше, чем $2\pi M_1 e^{\beta t}$. Оценим второе слагаемое. На прямой $\operatorname{Re} p = \mu$ функции $\frac{1}{1-g_S(p)}$ и $\frac{g_T(p)}{1-g_S(p)}$ ограничены; пусть там выполнены неравенства $\left| \frac{1}{1-g_S(p)} \right| \leq A_1 < \infty$ и $\left| \frac{g_T(p)}{1-g_S(p)} \right| \leq A_2 < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mu-iy}^{\mu+iy} \frac{e^{pt}}{g(p)} dp - \int_{\mu-iy}^{\mu+iy} \frac{e^{pt}}{(1-g_S(p))(p-\beta)} dp \right| &\leq \int_{\mu-iy}^{\mu+iy} \left| \frac{e^{pt} \left(\frac{g_T(p)}{1-g_S(p)} - \beta \right)}{(1-g_S(p)) \left(p - \frac{g_T(p)}{1-g_S(p)} \right) (p-\beta)} \right| dp \leq \\ &\leq A_1(A_2 + |\beta|) e^{\mu t} \int_{\mu-iy}^{\mu+iy} \frac{dp}{\left| \left(p - \frac{g_T(p)}{1-g_S(p)} \right) (p-\beta) \right|}. \end{aligned}$$

На прямой $\operatorname{Re} p = \mu$ знаменатель не обращается в нуль, так как функция $g(p)$ не имеет нулей на этой прямой и $\beta > \mu$. Следовательно,

$$\int_{\mu-iy}^{\mu+iy} \frac{dp}{\left| \left(p - \frac{g_T(p)}{1-g_S(p)} \right) (p-\beta) \right|} = \int_{-y}^y O\left(\frac{1}{w^2}\right) dw.$$

При $y \rightarrow \infty$ этот интеграл сходится, поэтому можно выбрать такое число M_2 , что

$$\left| \int_{\mu-iy}^{\mu+iy} \frac{e^{pt}}{g(p)} dp - \int_{\mu-iy}^{\mu+iy} \frac{e^{pt}}{(1-g_S(p))(p-\beta)} dp \right| \leq M_2 e^{\beta t}.$$

Окончательно, выбрав $M = 2\pi M_1 + M_2$, получим

$$\left| \int_{\mu-iy}^{\mu+iy} \frac{e^{pt}}{g(p)} dp \right| \leq M e^{\beta t} \leq M e^{\mu t}.$$

□

Теорема 5.1. Пусть оператор $I - S$ обратим в L_p хотя бы при одном p , где $1 \leq p \leq \infty$. Уравнение (2.2) равномерно устойчиво тогда и только тогда, когда у функции $g(p)$ нет нулей справа от мнимой оси, а нули, лежащие на мнимой оси, простые.

Доказательство.

Необходимость. Если уравнение (2.2) равномерно устойчиво, то существует такое число $M > 0$, что $|Y(t)| \leq M$, а для функции $L_Y(p)$ справедлива оценка

$$|L_Y(p)| = \left| \int_0^\infty Y(t) e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^\infty |Y(t)| e^{-\operatorname{Re} p \cdot t} dt \leq M \int_0^\infty e^{-\operatorname{Re} p \cdot t} dt = \frac{M}{\operatorname{Re} p}.$$

При $\operatorname{Re} p > 0$ функция $L_Y(p)$ аналитическая, поэтому из формулы (2.5) следует, что $g(p)$ не имеет корней справа от мнимой оси.

Теперь покажем, что корни, лежащие на мнимой оси, могут быть только простыми. Пусть $g(p)$ имеет на мнимой оси корень $p = i\varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$) кратности $k > 1$. Тогда

$$g(i\varphi) = i\varphi \left(1 - \sum_{k=1}^K a_k e^{-i\varphi h_k} \right) - \int_0^\omega e^{-i\varphi \xi} dr(\xi) = 0;$$

$$g'(i\varphi) = 1 - \sum_{k=1}^K a_k e^{-i\varphi h_k} + i\varphi \sum_{k=1}^K a_k h_k e^{-i\varphi h_k} + \int_0^\omega \xi e^{-i\varphi \xi} dr(\xi) = 0.$$

Рассмотрим уравнение (2.1) и доопределим решение начальными условиями $\varphi(\xi) = \xi e^{i\varphi \xi}$, $\psi(\xi) = \dot{\varphi}(\xi)$, $\xi \in [-\omega, 0]$. С помощью подстановки можно убедиться, что оно имеет неограниченное решение $x(t) = t e^{i\varphi t}$. Действительно, для него $\dot{x}(t) = e^{i\varphi t}(1 + i\varphi t)$ и тогда

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \sum_{k=1}^K a_k \dot{x}(t - h_k) &= e^{i\varphi t}(1 + i\varphi t) - \sum_{k=1}^K a_k e^{i\varphi(t-h_k)}(1 + i\varphi(t - h_k)) = \\ &= e^{i\varphi t} \left(g'(i\varphi) - \int_0^\omega \xi e^{-i\varphi \xi} dr(\xi) + t \cdot \left(g(i\varphi) + \int_0^\omega e^{-i\varphi \xi} dr(\xi) \right) \right) = \\ &= \int_0^\omega (t - \xi) e^{i\varphi(t-\xi)} dr(\xi) = \int_0^\omega x(t - \xi) dr(\xi). \end{aligned}$$

Итак, если на мнимой оси есть корни характеристического уравнения кратности $k > 1$, у уравнения (2.1) существуют неограниченные решения, следовательно, оценка $|Y(t)| \leq M$ невозможна.

Достаточность. Пусть все нули функции g лежат в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} p \leq 0\}$, причем все нули, расположенные на мнимой оси, простые. Известно [2], что если оператор $I - S$ обратим в L_p , то все корни уравнения

$$1 - g_S(p) = 0 \tag{5.3}$$

лежат слева от мнимой оси и отделены от нее. Через P , как и выше, будем обозначать множество корней уравнения (5.3). Выберем число $c > 0$, такое, что $\sup_{p \in P} \{\operatorname{Re} p\} < -c$. Тогда, согласно

лемме 5.1, в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq -c$ может быть лишь конечное число нулей функции $g(p)$. Обозначим через $p_1, \dots, p_n$ нули функции $g(p)$, лежащие на мнимой оси.

Выберем число $\alpha > 0$ так, чтобы в полосе $-\alpha < \operatorname{Re} p < 0$ не было нулей функции $g(p)$, а число $\mu_0 > 0$ — так, чтобы все нули функции $g(p)$ вида $p = i\varphi$ лежали внутри интервала $(-i\mu_0, i\mu_0)$. Тогда внутри прямоугольника $ABCD$ с вершинами $A = \alpha - i\mu$, $B = \alpha + i\mu$, $C = -\alpha + i\mu$, $D = -\alpha - i\mu$ при любом $\mu \geq \mu_0$ лежат все нули функции $g(p)$, расположенные на мнимой оси, и только они.

Заметим, что, поскольку $\alpha < c$, то, согласно предложению 5.1, существует такое число $m_S > 0$, что внутри $ABCD$ и на его границе выполнено неравенство $|1 - g_S(p)| > m_S$. Функция $g_T(p)$ не имеет особых точек внутри этого прямоугольника и на его границе, поэтому она ограничена там некоторой константой M_T : $|g_T(p)| \leq M_T$.

Рассмотрим интеграл $\int_{ABCD} e^{pt} L_Y(p) dp$. Разобьем его на сумму четырех интегралов

$$I_0 = \int_{ABCD} e^{pt} L_Y(p) dp = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{AB} e^{pt} L_Y(p) dp; \quad I_2 = \int_{BC} e^{pt} L_Y(p) dp; \quad I_3 = \int_{CD} e^{pt} L_Y(p) dp; \quad I_4 = \int_{DA} e^{pt} L_Y(p) dp.$$

По теореме Коши о вычетах сумма интегралов $I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ выражается через сумму вычетов подынтегральной функции в особых точках внутри прямоугольника $ABCD$:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p_k}(e^{pt} L_Y(p)).$$

По условию теоремы, все особые точки — это простые полюсы функции $L_Y(p)$; вычеты в них равны

$$\operatorname{res}_{p_k}(e^{pt} L_Y(p)) = \frac{e^{p_k t}}{g'(p_k)} < \infty.$$

Поэтому $I_0 < \infty$, причем значение I_0 не зависит от выбора μ (при условии, что $\mu \geq \mu_0$).

Исследуем поведение интегралов I_1, I_2, I_3, I_4 при $\mu \rightarrow \infty$. Так как $L_Y(p) = \mathcal{L}[Y(t)]$, то, применяя обратное преобразование Лапласа, получаем, что $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} I_1 = 2\pi i Y(t)$. Далее,

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} |I_4| &= \lim_{\mu \rightarrow \infty} \left| \int_{-\alpha-i\mu}^{\alpha-i\mu} \frac{e^{pt}}{p(1-g_S(p)) - g_T(p)} dp \right| \leq \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{-\alpha-i\mu}^{\alpha-i\mu} \frac{|e^{pt}|}{||p||1-g_S(p)| - |g_T(p)||} dp \leq \\ &\leq e^{\alpha t} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{-\alpha-i\mu}^{\alpha-i\mu} \frac{dp}{||p||m_S - M_T|} = e^{\alpha t} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dx}{|m_S \sqrt{\mu^2 + x^2} - M_T|} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, $\lim_{\mu \rightarrow \infty} |I_2| = 0$. Из леммы 5.2 следует, что можно найти такое число $M > 0$, что

$\lim_{\mu \rightarrow \infty} |I_3| \leq M e^{-\alpha t}$. Окончательно, $|Y(t)| \leq \frac{1}{2\pi} (|I_0| + M e^{-\alpha t})$, т. е. функция Коши ограничена на полюсы. Достаточность доказана. $\square$

Заметим, что условие обратимости оператора $I - S$ не является необходимым для равномерной устойчивости уравнения (2.2). Это демонстрирует следующий пример.

Пример 5.1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + (S_1 \dot{x})(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Для него оператор $I - S$ не обратим ни в одном из пространств L_p , так как функция $1 - g_S(p) = 1 + e^{-p}$ имеет на мнимой оси корень $p = \pi i$. С другой стороны, поскольку $Y(t) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$ при $t \in (n, n+1)$, то $Y(t)$ — ограниченная функция, следовательно, это уравнение равномерно устойчиво.

Требование обратимости оператора $I - S$, тем не менее, существенно. Остановимся подробнее на условиях, при которых обратимость оператора $I - S$ нарушается.

Известно [2], что оператор $I - S$ необратим в двух случаях:

1. Уравнение (5.3) имеет корни справа от мнимой оси.
2. Уравнение (5.3) не имеет корней справа от мнимой оси, но его корни не отделены от нее (либо есть корни на мнимой оси, либо есть последовательность корней, неограниченно приближающихся к ней).

Первый случай исчерпывается следующим утверждением, которое можно считать дополнением к теореме 5.1.

Теорема 5.2. Если уравнение (5.3) имеет корни справа от мнимой оси, то уравнение (2.1) не является равномерно устойчивым.

Доказательство. Пусть уравнение (5.3) имеет корень r_0 с положительной действительной частью. Тогда, как показано в [2], существует такая последовательность $\{p_k\}$ нулей функции $g(p)$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Re} p_k = \operatorname{Re} r_0$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{Im} p_k = \infty$. Поэтому у функции $g(p)$ также существует нуль p_0 , действительная часть которого положительна.

Рассмотрим уравнение (2.1) с начальными условиями $\varphi(\xi) = e^{p_0 \xi}$, $\psi(\xi) = \dot{\varphi}(\xi)$, $\xi \in [-\omega, 0]$. Нетрудно видеть, что в таком случае это уравнение имеет неограниченное решение $x(t) = e^{p_0 t}$.

Предположим, что (2.1) равномерно устойчиво. Тогда его функция Коши ограничена, то есть существует такое число N , что для любого $t > 0$ выполнено неравенство $|Y(t)| \leq N$. Из формулы (2.4) следует, что и фундаментальное решение тоже ограничено некоторым числом M . Но тогда, согласно формуле Коши,

$$|x(t)| \leq |X(t)||x(0)| + \int_0^t |Y(t-s)||\sigma(s)| ds \leq M|x(0)| + N \int_0^t |\sigma(s)| ds, \quad t \geq 0,$$

то есть любое решение $x(t)$ должно быть ограниченным. Следовательно, предположение неверно, и уравнение (2.1) неустойчиво. $\square$

Второй случай (если исключить наличие кратных корней на мнимой оси) намного сложнее. В работах [6, 19] приведены примеры уравнений нейтрального типа, имеющих неограниченные решения, у которых все корни соответствующего характеристического уравнения лежат слева от мнимой оси, но не отделены от нее; при построении примеров существенно использовалось, что корни, приближающиеся к мнимой оси, являются кратными.

Попытка найти уравнение с неограниченным решением в условиях, когда характеристическое уравнение имеет простые корни на мнимой оси, была предпринята в работе [7], где рассматривалось уравнение

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t-1) = -a(x(t) + x(t-1)), \quad t \geq 0, \quad (5.4)$$

дополненное начальными условиями $x(t) = \varphi(t)$, $\dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t)$, $t \leq 0$. Для задачи (5.4) характеристическое уравнение обладает интересной особенностью: если $a > 0$, то все его корни лежат на мнимой оси, и среди них нет кратных. Авторы работы [7] показали, что можно так подобрать параметр $a > 0$ и начальную функцию φ , что решение задачи (5.4) будет неограниченным. Казалось бы, отсюда следует, что функция Коши для уравнения (5.4) неограниченна, то есть уравнение (5.4) не является равномерно устойчивым. Однако построение начальной функции в [7] неконструктивно, и не дает ответа на вопрос, какому классу принадлежит функция $\dot{\varphi}$ (не исключено, что она не попадает в класс $L_1[-1, 0]$). В работе [9] было показано, что при любом $a > 0$ фундаментальное решение уравнения (5.4) ограничено, но осталось неизвестным, будет ли ограничена его функция Коши.

6. ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАТОРА $I - S$

Обратимость оператора $I - S$ в любом из лебеговых пространств требует специального изучения: в разделах 4 и 5 было показано, что она является необходимым условием для экспоненциальной устойчивости, и существенным — для равномерной. При этом задачу об обратимости оператора $I - S$ можно ставить и решать независимо от исходного уравнения, связывая ее с разрешимостью соответствующих функциональных уравнений и расположением на комплексной плоскости нулей функции $1 - g_S(p)$.

Как отмечалось выше, функция Коши Y и фундаментальное решение X связаны соотношением (2.4). На каждом конечном отрезке оператор $I - S$ обратим и $(I - S)^{-1} = I + S + S^2 + \dots + S^m$, где m определяется как наименьшее натуральное число, такое что $S^{m+1} = \Theta$. Поскольку при любом натуральном n оператор S^n также представляет собой линейную комбинацию операторов сдвига, наименьший из которых равен nh_1 , такое m всегда существует. Следовательно, на любом конечном отрезке $[0, l]$ можно определить функцию Коши как

$$Y(t) = (I + S + S^2 + \dots + S^m)X(t). \quad (6.1)$$

Фундаментальное решение X — абсолютно непрерывная функция, поэтому из формулы (6.1) следует, что функция Y на любом конечном отрезке имеет конечное число разрывов первого рода. Эти разрывы могут находиться лишь в точках вида

$$t = \sum_{k=1}^K n_k h_k, \quad n_k \in \mathbb{N}_0. \quad (6.2)$$

Определим функцию скачков $H = H(t)$ для функции Коши:

$$H(t) = Y(t+0) - Y(t-0).$$

Теорема 6.1. *Функция скачков H является решением функционального уравнения*

$$H(t) = \sum_{k=1}^K a_k H(t - h_k), \quad t > 0, \quad (6.3)$$

с начальными условиями $H(0) = 1$, $H(\zeta) = 0$, $\zeta < 0$.

Доказательство. Если некоторая точка $t > 0$ не представляется в виде (6.2), то в таком виде не представляются и точки $t + \sum_{k=1}^K m_k h_k$, где $m_k \in \mathbb{N}_0$, поэтому в них $H(t) = 0$ и утверждение теоремы для них справедливо.

Рассмотрим точки, представимые в виде (6.2). При $t = 0$ имеем $H(0) = 1$, так как согласно определению $Y(\zeta) = 0$ при $\zeta < 0$ и $Y(0) = 1$. Рассмотрим произвольное $t > 0$, представимое в виде (6.2), и воспользуемся формулой (6.1) для вычисления $H(t)$. Поскольку X непрерывна и $X(0) = 1$, то функция SX имеет в точках $t = h_k$, $k = 1, \dots, K$, скачки величиной соответственно a_k . Далее,

$$S^2 = \left(\sum_{k=1}^K a_k S_{h_k} \right)^2 = \sum_{k=1}^K a_k^2 S_{2h_k} + \sum_{j < k} 2a_j a_k S_{h_j + h_k},$$

поэтому функция $S^2 X$ имеет разрывы в точках $h_j + h_k$, $j, k = 1, \dots, K$, причем величина скачка в точке $t = h_j + h_k$ равна a_j^2 , если $j = k$, и $2a_j a_k$, если $j \neq k$. Сдвиги $h_1, \dots, h_K$ произвольны, поэтому некоторые из точек разрыва функций SX и $S^2 X$ могут совпадать.

Аналогично, используя полиномиальную формулу, можно вычислить любую натуральную степень n оператора S :

$$S^n = \left(\sum_{k=1}^K a_k S_{h_k} \right)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_K = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_K!} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_K^{n_K} \cdot S_h,$$

где

$$h = \sum_{k=1}^K n_k h_k.$$

При этом некоторые из сдвигов h могут совпадать со сдвигами операторов S^j при $j < n$.

Рассмотрим некоторую точку $t > 0$, представимую в виде (6.2) J разными способами, то есть

$$t = \sum_{k=1}^K n_k^{(1)} h_k = \dots = \sum_{k=1}^K n_k^{(J)} h_k.$$

Каждому представлению соответствует скачок, образованный некоторой степенью оператора S . Для j -го представления степень $n^{(j)}$ равна сумме соответствующих коэффициентов $n_k^{(j)}$, поэтому функция $S^{n_j} X$ в точке t будет иметь скачок, равный

$$H_j(t) = \frac{(n_1^{(j)} + n_2^{(j)} + \dots + n_K^{(j)})!}{n_1^{(j)}! n_2^{(j)}! \dots n_K^{(j)}!} a_1^{n_1^{(j)}} a_2^{n_2^{(j)}} \dots a_K^{n_K^{(j)}}. \quad (6.4)$$

Для полиномиальных коэффициентов справедлива следующая рекуррентная формула:

$$\begin{aligned} \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_K)!}{n_1! n_2! \dots n_K!} &= \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_K - 1)!}{(n_1 - 1)! n_2! \dots n_K!} + \\ &+ \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_K - 1)!}{n_1! (n_2 - 1)! \dots n_K!} + \dots + \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_K - 1)!}{n_1! n_2! \dots (n_K - 1)!}, \end{aligned}$$

применив которую к выражению (6.4), получаем равенство

$$H_j(t) = \sum_{k=1}^K a_k H_j(t - h_k).$$

Тогда скачок $H(t)$ функции Коши в точке t представляется как сумма скачков для каждого из представлений, поэтому

$$H(t) = \sum_{j=1}^J H_j(t) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K a_k H_j(t - h_k) = \sum_{k=1}^K a_k \sum_{j=1}^J H_j(t - h_k) = \sum_{k=1}^K a_k H(t - h_k).$$

□

Пример 6.1. Если $S = aS_1 + bS_{\sqrt{2}} + cS_2$, то

$$S^2 = a^2 S_2 + b^2 S_{2\sqrt{2}} + c^2 S_4 + 2abS_{1+\sqrt{2}} + 2acS_3 + 2bcS_{2+\sqrt{2}},$$

Если применить оператор S к непрерывной функции $X = X(t)$, для которой $X(0) = 1$, $X(\xi) = 0$, $\xi < 0$, то образуются разрывы в точках $t = 1$ со скачком a , в точке $t = \sqrt{2}$ со скачком b и в точке $t = 2$ со скачком c . Оператор S^2 , действуя на функцию $X(t)$, также добавит скачок величиной a^2 в точке $t = 2$. Поэтому функция $Y(t)$ будет иметь в точке $t = 2$ скачок величиной $c + a^2$. Нетрудно видеть, что это значение совпадает со значением, полученным по формуле (6.3): $H(2) = aH(1) + cH(0)$.

Рассмотрим функциональное уравнение

$$\begin{cases} (I - S)y(t) = f(t), & t > 0, \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Как показано в теореме 6.1, функция H является решением уравнения (6.5) при специальном выборе f и y_0 . Покажем, что любое решение уравнения (6.5) выражается через функцию H .

Теорема 6.2. Для любой кусочно-непрерывной функции f решение функционального уравнения (6.5) может быть задано формулой

$$y(t) = y_0 H(t) + \sum_{t_s \leq t} f(t_s) H(t - t_s), \quad (6.6)$$

где суммирование ведется по всем таким точкам t_s , что $t - t_s$ представимо в виде (6.2).

Доказательство. Легко видеть, что уравнение (6.5) имеет единственное решение в классе кусочно-непрерывных функций, поэтому достаточно показать, что функция, определяемая формулой (6.6), удовлетворяет этому уравнению. Действительно,

$$(I - S)y(t) = (I - S) \left(y_0 H(t) + \sum_{t_s \leq t} f(t_s) H(t - t_s) \right) = y_0 (I - S)H(t) + \sum_{t_s \leq t} f(t_s) ((I - S)H(t - t_s)).$$

Если $t = 0$, получаем y_0 ; при $t > 0$ единственным ненулевым слагаемым окажется то, для которого $t_s = t$, тогда $(I - S)y(t) = f(t)$. □

Наряду с (6.5) рассмотрим функциональное уравнение

$$y(t) - \sum_{k=1}^K a_k y(t - h_k) = 0, \quad t \geq 0, \quad (6.7)$$

с начальными условиями $y(\zeta) = \varphi(\zeta)$ при $\zeta \leq 0$, где φ — кусочно-непрерывная на $[-h_K, 0]$ функция; при $t \notin [-h_K, 0]$ положим $\varphi(t) = 0$. Уравнению (6.7) можно придать вид (6.5). Для этого определим функцию

$$\sigma(t) = \sum_{k=1}^K a_k \varphi(t - h_k), \quad t \geq 0.$$

Из построения следует, что функция σ кусочно-непрерывна и отлична от нуля лишь на конечном отрезке. Полагая в (6.5) $f(t) = \sigma(t)$ при $t > 0$ и $y(0) = \varphi(0)$, получаем уравнение, эквивалентное (6.7).

Теорема 6.3. Следующие утверждения эквивалентны.

1. Оператор $I - S$ обратим в пространстве L_p хотя бы при одном p , $1 \leq p \leq \infty$.

2. Существуют такие $N, \alpha > 0$, что для любого решения уравнения (6.7) справедлива оценка

$$|y(t)| \leq N e^{-\alpha t} \sup_{\zeta \in [-h_K, 0]} |\varphi(\zeta)|, \quad t \geq 0.$$

3. Функция $H(t)$ при некоторых $M, \gamma > 0$ подчинена экспоненциальной оценке

$$|H(t)| \leq M e^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (6.8)$$

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1 и 2 установлена в работе [12], эквивалентность утверждений 2 и 3 следует из формулы (6.6). $\square$

В заключение остановимся на нескольких эффективных признаках обратимости оператора $I - S$ в лебеговых пространствах. Пусть все запаздывания h_k в операторе S соизмеримы. Тогда без ограничения общности можно считать, что они кратны, то есть

$$S = \sum_{k=1}^K a_k S_h^k. \quad (6.9)$$

Для оператора внутренней суперпозиции с кратными запаздываниями известен следующий результат [3].

Предложение 6.1. Если оператор S задается формулой (6.9), то следующие утверждения эквивалентны:

1. Оператор $I - S$ обратим в пространстве L_p хотя бы при одном p , $1 \leq p \leq \infty$.
2. Оператор $I - S$ обратим в пространстве L_p при всех p , $1 \leq p \leq \infty$.
3. Все корни многочлена $1 - \sum_{k=1}^K a_k z^k$ расположены вне единичного круга $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.

Таким образом, вопрос об обратимости оператора $I - S$ в случае кратных запаздываний сводится к классической задаче о расположении корней многочлена относительно единичного круга в комплексной плоскости.

Второй случай, для которого известен критерий обратимости $I - S$ — это случай линейно независимых относительно целых чисел запаздываний [18].

Определение 6.1. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются *линейно независимыми* относительно целых чисел, если равенство $l_1 \lambda_1 + l_2 \lambda_2 + \dots + l_n \lambda_n = 0$ при целых $l_1, l_2, \dots, l_n$ возможно лишь при $l_1 = l_2 = \dots = l_n = 0$.

Предложение 6.2. Если в операторе S запаздывания $h_1, h_2, \dots, h_K$ линейно независимы относительно целых чисел, то следующие утверждения эквивалентны:

1. Оператор $I - S$ обратим в пространстве L_p хотя бы при одном p , $1 \leq p \leq \infty$.
2. Оператор $I - S$ обратим в пространстве L_p при всех p , $1 \leq p \leq \infty$.
3. $\sum_{k=1}^K |a_k| < 1$.

Заметим, что условие $\sum_{k=1}^K |a_k| < 1$ является достаточным для обратимости $I - S$ при произвольных запаздываниях, но, вообще говоря, не является необходимым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. Баландин А. С. Экспоненциальная устойчивость автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. I // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2023. — № 3. — С. 12–28. — DOI: [10.26907/0021-3446-2023-3-12-28](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-12-28).
3. Баландин А. С. Экспоненциальная устойчивость автономных дифференциальных уравнений нейтрального типа. II // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2023. — № 4. — С. 3–14. — DOI: [10.26907/0021-3446-2023-4-3-14](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-4-3-14).
4. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.

5. Власов В. В., Медведев Д. А. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — 30. — С. 3–173.
6. Громова П. С. Устойчивость решений нелинейных уравнений нейтрального типа в асимптотически критическом случае // Мат. заметки. — 1967. — 1, № 6. — С. 715–726.
7. Громова П. С., Зверкин А. М. О тригонометрических рядах, суммой которых является непрерывная неограниченная на числовой оси функция — решение уравнения с отклоняющимся аргументом // Дифф. уравн. — 1968. — 4, № 10. — С. 1774–1784.
8. Колмановский В. Б., Носов В. Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981.
9. Малыгина В. В., Баландин А. С. Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа // Мат. тр. — 2020. — 23, № 2. — С. 3–49. — DOI: [10.33048/matruudy.2020.23.201](https://doi.org/10.33048/matruudy.2020.23.201).
10. Малыгина В. В., Баландин А. С. Асимптотическая устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа // Сиб. мат. ж. — 2021. — 62, № 1. — С. 106–116. — DOI: [10.33048/smzh.2021.62.109](https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.109).
11. Малыгина В. В., Чудинов К. М. Об асимптотических свойствах решений дифференциальных уравнений нейтрального типа // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — 69, № 1. — С. 116–133. — DOI: [10.22363/2413-3639-2023-69-1-116-133](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-116-133).
12. Постаногова И. Ю., Баландин А. С. Экспоненциальная устойчивость линейных функциональных уравнений с запаздыванием // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2026. — В печати.
13. Симонов П. М., Чистяков А. В. Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1997. — № 6. — С. 37–49.
14. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
15. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
16. Hahn W. Zur Stabilität der Lösungen von linearen Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten // Math. Ann. — 1956. — 131. — С. 151–166. — DOI: [10.1007/BF01343253](https://doi.org/10.1007/BF01343253).
17. Junca S., Lombard B. Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation // J. Differ. Equ. — 2014. — 256, № 7. — С. 2368–2391. — DOI: [10.1016/j.jde.2014.01.004](https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.01.004).
18. Postanogova I. On Invertibility of the operator at the derivative in a neutral type differential equation with linearly independent delays // Funct. Differ. Equ. — 2024. — 31, № 3-4. — С. 233–253. — DOI: [10.26351/fde/31/3-4/9](https://doi.org/10.26351/fde/31/3-4/9).
19. Snow W. Existence, uniqueness and stability for nonlinear differential-difference equations in the neutral case. — New York: New York Univ., 1965.

В. В. Малыгина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

E-mail: mavera@list.ru, РИНЦ SPIN-код: 2194-6910, РИНЦ AuthorID: [5483](https://elibrary.ru/author_index.action?id=5483), ResearcherID: [ABI-6471-2020](https://orcid.org/0000-0003-2194-680X), Scopus: [36775201200](https://orcid.org/36775201200), ORCID: [0000-0003-2194-680X](https://orcid.org/0000-0003-2194-680X)

И. Ю. Постаногова

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

E-mail: ipostanogova@psu.ru, РИНЦ SPIN-код: 4484-8498, РИНЦ AuthorID: [1354151](https://elibrary.ru/author_index.action?id=1354151), Scopus: [59706973300](https://orcid.org/59706973300)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-524-540](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-524-540)EDN: [QONIIV](https://www.edn.ru/qoniiv)

UDC 517.929

Research article

On the stability problem for linear autonomous differential equations of neutral type

V. V. Malygina and I. Yu. Postanogova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

Abstract. This work addresses the stability (uniform, asymptotic, and exponential) of linear autonomous differential equations of neutral type. These types of stability are interpreted as properties of an integral functional defined on Lebesgue spaces of measurable functions. This approach enables a refined analysis of the most complex form of stability — asymptotic stability — and allows for distinguishing between cases where it coincides with exponential stability and cases where it does not. The latter case arises when the operator acting on the derivative is noninvertible, causing the equation to exhibit properties that distinguish it from differential equations of retarded type. A dedicated section examines uniform stability, for which an easily verifiable criterion has been established.

Keywords: functional differential equation, fundamental solution, exponential stability, estimate of the exponential rate.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors' contribution. All authors participated in the development of the study concept, collection, processing and analysis of data, writing of the manuscript, and formulation of the conclusions.

For citation: V. V. Malygina, I. Yu. Postanogova, “On the stability problem for linear autonomous differential equations of neutral type,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 3, 524–540. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-524-540](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-524-540) EDN: [QONIIV](https://www.edn.ru/qoniiv)

REFERENCES

1. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatullina, *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional Differential Equations], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
2. A. S. Balandin, “Eksponentsial'naya ustoychivost' avtonomnykh differentsial'nykh uravneniy neytral'nogo tipa. I” [Exponential stability of autonomous differential equations of neutral type. I], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2023, No. 3, 12–28 (in Russian), DOI: [10.26907/0021-3446-2023-3-12-28](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-3-12-28).
3. A. S. Balandin, “Eksponentsial'naya ustoychivost' avtonomnykh differentsial'nykh uravneniy neytral'nogo tipa. II” [Exponential stability of autonomous differential equations of neutral type. II], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2023, No. 4, 3–14 (in Russian), DOI: [10.26907/0021-3446-2023-4-3-14](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-4-3-14).
4. R. Bellman and K. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Theory of Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
5. V. V. Vlasov and D. A. Medvedev, “Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i svyazannye s nimi voprosy spektral'noy teorii” [Functional-differential equations in sobolev spaces and related problems of spectral theory], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, 30, 3–173 (in Russian).



6. P. S. Gromova, “Ustoychivost’ resheniy nelineynykh uravneniy neytral’nogo tipa v asimptoticheski kriticheskom sluchae” [Stability of solutions to nonlinear neutral-type equations in the asymptotically critical case], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1967, **1**, No. 6, 715–726 (in Russian).
7. P. S. Gromova and A. M. Zverkin, “O trigonometricheskikh ryadakh, summoy kotorykh yavlyayetsya nepreryvnaya neogranichennaya na chislovoi osi funktsiya — reshenie uravneniya s otklonyayushchimsya argumentom” [On trigonometric series whose sum is a continuous function unbounded on the real line — a solution of an equation with a deviating argument], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1968, **4**, No. 10, 1774–1784 (in Russian).
8. V. B. Kolmanovskii and V. R. Nosov, *Ustoychivost’ i periodicheskie rezhimy reguliruemyykh sistem s posledeystviem* [Stability and Periodic Modes of Controlled Systems with Aftereffect], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
9. V. V. Malygina and A. S. Balandin, “Asimptoticheskie svoystva resheniy odnogo klassa differentsial’nykh uravneniy neytral’nogo tipa” [Asymptotic properties of solutions of onw class of neutral-type differential equations], *Mat. Tr.* [Math. Proc.], 2020, **23**, No. 2, 3–49 (in Russian), DOI: [10.33048/mattrudy.2020.23.201](https://doi.org/10.33048/mattrudy.2020.23.201).
10. V. V. Malygina and A. S. Balandin, “Asimptoticheskaya ustoychivost’ odnogo klassa uravneniy neytral’nogo tipa” [Asymptotic stability for a class of equations of neutral type], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2021, **62**, No. 1, 106–116 (in Russian), DOI: [10.33048/smzh.2021.62.109](https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.109).
11. V. V. Malygina and K. M. Chudinov, “Ob asimptoticheskikh svoystvakh resheniy differentsial’nykh uravneniy neytral’nogo tipa” [On asymptotic properties of solutions for differential equations of neutral type], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 1, 116–133 (in Russian), DOI: [10.22363/2413-3639-2023-69-1-116-133](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-116-133).
12. I. Yu. Postanogova and A. S. Balandin, “Eksponentsial’naya ustoychivost’ lineynykh funktsional’nykh uravneniy s zapazdyvaniem” [Exponential stability of linear functional equations with delay], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2026, to be published (in Russian).
13. P. M. Simonov and A. V. Chistyakov, “Ob eksponentsial’noy ustoychivosti lineynykh differentsial’no-raznostnykh sistem” [Ob eksponentsial’noy ustoychivosti lineynykh differentsial’no-raznostnykh sistem], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1997, No. 6, 37–49 (in Russian).
14. J. Hale, *Teoriya funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Theory of Functional Differential Equations], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
15. L. E. El’sgol’ts and S. B. Norkin, *Vvedenie v teoriyu differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom* [Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
16. W. Hahn, “Zur Stabilität der Lösungen von linearen Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten,” *Math. Ann.*, 1956, **131**, 151–166, DOI: [10.1007/BF01343253](https://doi.org/10.1007/BF01343253).
17. S. Junca and B. Lombard, “Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation,” *J. Differ. Equ.*, 2014, **256**, No. 7, 2368–2391, DOI: [10.1016/j.jde.2014.01.004](https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.01.004).
18. I. Postanogova, “On Invertibility of the operator at the derivative in a neutral type differential equation with linearly independent delays,” *Funct. Differ. Equ.*, 2024, **31**, No. 3-4, 233–253, DOI: [10.26351/fde/31/3-4/9](https://doi.org/10.26351/fde/31/3-4/9).
19. W. Snow, *Existence, uniqueness and stability for nonlinear differential-difference equations in the neutral case*, New York Univ., New York, 1965.

V. V. Malygina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

E-mail: mavera@list.ru, eLIBRARY SPIN-code: 2194-6910, eLIBRARY AuthorID: [5483](#), ResearcherID: [ABI-6471-2020](#), Scopus: [36775201200](#), ORCID: [0000-0003-2194-680X](#)

I. Yu. Postanogova

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

E-mail: ipostanogova@psu.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4484-8498, eLIBRARY AuthorID: [1354151](#), Scopus: [59706973300](#)