

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

А. С. КИРИЛЕНКО

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. В работе исследуется спектральная задача для разностного оператора с несоизмеримыми сдвигами на конечном интервале. Такие операторы возникают при изучении краевых задач для дифференциально-разностных уравнений. Для исследования спектральной задачи используется переход к дискретной задаче на целочисленной решетке в полосе. На основе анализа геометрии этой полосы и связанных с ней рекуррентных соотношений получена оценка расположения собственных значений на комплексной плоскости. Установлено, что модуль каждого ненулевого собственного значения строго больше единицы и строго меньше $(1 + \sqrt{5})/2$. Кроме того, доказано, что нуль является собственным значением бесконечной кратности.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, разностный оператор, несоизмеримые сдвиги аргументов, спектральная задача, локализация собственных значений.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор выражает искреннюю благодарность А. Л. Скубачевскому, С. Б. Куксину и Л. Е. Россовскому за ценные советы и внимание к работе. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект FSSF-2026-0013).

Для цитирования: Кириленко А. С. О спектральных свойствах одного разностного оператора с несоизмеримыми сдвигами на конечном интервале // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 3. С. 499–523. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-499-523](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-499-523) EDN: [QMNBXW](https://www.edn.ru/2026-72-3-499-523)

1. ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений обладают рядом особенностей, существенно отличающих их от краевых задач для классических дифференциальных уравнений. Одна из таких особенностей связана с регулярностью обобщенных решений. Обобщенные решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с целочисленными или несоизмеримыми сдвигами на конечном интервале впервые рассматривались в работах [6, 7]. В этих работах было установлено, что гладкость таких решений может нарушаться во внутренних точках интервала, даже если правая часть уравнения бесконечно дифференцируема. При этом точки нарушения гладкости связаны со значениями сдвигов в дифференциально-разностном операторе.

Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений возникают в теории управления системами с последействием [1, 10, 11, 17, 20], а также в работах, посвященных гипотезе Т. Като о квадратном корне из оператора [13, 21].

Основы теории краевых задач для дифференциально-разностных уравнений заложены в монографии [20]. В работах [8, 14, 15, 20] были получены необходимые и достаточные условия для правых частей дифференциально-разностных уравнений, которые гарантируют существование обобщенных решений, сохраняющих гладкость на всем интервале. Гладкость обобщенных собственных функций дифференциально-разностных операторов исследовалась в [2, 22]. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами впервые рассматривались в [12, 19], а затем в [3–5, 13, 18, 20]. Однако большинство работ, посвященных краевым задачам для дифференциально-разностных уравнений, было сосредоточено на дифференциально-разностных операторах с соизмеримыми сдвигами, в то время как дифференциально-разностные операторы с несоизмеримыми сдвигами остаются менее изученными.

Ввиду специфики задач для операторов с несоизмеримыми сдвигами прямое применение методов, разработанных для операторов с целочисленными сдвигами, невозможно. Однако в работах [5, 18] были описаны методы исследования таких задач в случае, когда орбита границы является конечной. В этом случае получены условия сильной эллиптичности [5] и показан способ сведения исходной задачи к нелокальной [18]. Случаи симметрических разностных операторов в краевых задачах для дифференциально-разностных уравнений с бесконечной орбитой границы исследовались в работах [3, 4].

В данной работе получена оценка расположения собственных значений заданного разностного оператора с несоизмеримыми сдвигами. Используемый подход может быть применен и к изучению дифференциально-разностных операторов.

В разделе 2 приводится постановка задачи. В разделе 3 исходная спектральная задача сводится к вспомогательной дискретной задаче на решетке. В разделах 4 и 5 исследуются геометрия решетчатой полосы и свойства решений дискретной задачи. В разделе 6 доказывается оценка собственных значений, а в разделе 7 рассматривается случай $\lambda = 0$.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [20] была рассмотрена краевая задача

$$-(v - \varepsilon Rv)''(t) = f_0(t) \quad (t \in (0, \pi)), \quad (2.1)$$

$$v(t) = 0 \quad (t \in [-1, 0] \cup [\pi, \pi + 1]), \quad (2.2)$$

где $(Rv)(t) = v(t - 1) + v(t + \tau)$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $0,9 < \tau < 1$, $\varepsilon \neq 0$ и для всех $p, q \in \mathbb{Z}$: $p - q\tau \neq \pi$, $f_0 \in L_2(0, \pi)$.

Для достаточно малых ε было доказано, что обобщенное решение v задачи (2.1), (2.2) при $f_0(t) \equiv 1$ не принадлежит $W_2^2(a, b)$ для всех $(a, b) \subset (0, \pi)$. Однако открытым остается вопрос о справедливости этого результата, если ε не является малым.

Разделим (2.1) на ε и обозначим $\lambda := \frac{1}{\varepsilon}$, $f(t) := \frac{f_0(t)}{\varepsilon}$. Тогда уравнение (2.1) примет вид

$$-(\lambda v - Rv)''(t) = f(t) \quad (t \in (0, \pi)). \quad (2.3)$$

Будем полагать, что $\lambda \in \mathbb{C}$. Обозначим $Q := (0, \pi)$.

Введем оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(0, \pi) \rightarrow L_2(0, \pi)$, где $I_Q : L_2(0, \pi) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ и $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(0, \pi)$ задаются формулами

$$(I_Q v)(t) = v(t) \quad (t \in Q), \quad (I_Q v)(t) = 0 \quad (t \notin Q), \\ (P_Q v)(t) = v(t) \quad (t \in Q).$$

Определение 2.1. Функция $v \in \dot{W}_2^1(Q)$ называется *обобщенным решением задачи* (2.3) (2.2), если $(\lambda v - Rv) \in W_2^2(Q)$ и

$$-(\lambda v - R_Q v)''(t) = f(t) \quad (t \in Q).$$

Это определение эквивалентно следующему.

Определение 2.2. Функция $v \in \dot{W}_2^1(0, \pi)$ называется *обобщенным решением задачи* (2.3), (2.2), если для всех φ из $\dot{W}_2^1(Q)$ выполнено равенство

$$(\lambda v' - (R_Q v)', \varphi')_{L_2(Q)} = (f, \varphi)_{L_2(Q)}. \quad (2.4)$$

Так как $R_Q : \dot{W}_2^1(Q) \rightarrow W_2^1(Q)$ ограничен, по теореме Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существуют ограниченные операторы $B : \dot{W}_2^1(Q) \rightarrow \dot{W}_2^1(Q)$ и $G : L_2(Q) \rightarrow \dot{W}_2^1(Q)$ такие, что

$$((R_Q v)', \varphi')_{L_2(Q)} = (Bv, \varphi)'_{\dot{W}_2^1(Q)}, \quad (2.5)$$

$$(f, \varphi)_{L_2(Q)} = (Gf, \varphi)'_{\dot{W}_2^1(Q)}. \quad (2.6)$$

Здесь $(u, w)'_{\dot{W}_2^1(Q)} = (u', w')_{L_2(Q)}$ — эквивалентное скалярное произведение в $\dot{W}_2^1(Q)$.

Лемма 2.1. Оператор $B : \dot{W}_2^1(Q) \rightarrow \dot{W}_2^1(Q)$ представляется в виде

$$(Bv)(t) = (R_Q v)(t) + \frac{v(\tau) - v(\pi - 1)}{\pi} t - v(\tau). \quad (2.7)$$

Доказательство. Найдем явный вид оператора B из (2.5). Для любых φ из $C_0^\infty(Q)$ имеем

$$0 = ((R_Q v)', \varphi')_{L_2(Q)} - ((Bv)', \varphi')_{L_2(Q)} = ((R_Q v - Bv)', \varphi')_{L_2(Q)} = -(R_Q v - Bv, \varphi'')_{L_2(Q)} = 0.$$

Таким образом, почти всюду на Q выполнено $(R_Q v - Bv)'' = 0$. Следовательно,

$$Bv = R_Q v + at + b.$$

Так как оператор $B : \dot{W}_2^1(Q) \rightarrow \dot{W}_2^1(Q)$, имеем

$$(Bv)(0) = v(\tau) + b = 0, \quad \text{т. е.} \quad b = -v(\tau).$$

Аналогично

$$(Bv)(\pi) = v(\pi - 1) + a\pi - v(\tau) = 0.$$

Следовательно,

$$(Bv)(t) = (R_Q v)(t) + \frac{v(\tau) - v(\pi - 1)}{\pi} t - v(\tau).$$

Значения $v(\tau)$ и $v(\pi - 1)$ корректно определены в силу вложения $W_2^1(0, \pi) \subset C[0, \pi]$. $\square$

Для исследования свойств оператора B далее рассматривается спектральная задача для оператора R_Q .

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА НА РЕШЕТКЕ

Рассмотрим спектральную задачу для оператора $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $Q = (0, \pi)$,

$$R_Q v = \lambda v. \quad (3.1)$$

Это эквивалентно следующей задаче для функции $v(t) \in L_2(\mathbb{R})$:

$$(Rv)(t) = v(t - 1) + v(t + \tau) = \lambda v(t) \quad (\text{почти всюду на } Q), \quad (3.2)$$

$$v(t) = 0 \quad (\text{почти всюду на } \mathbb{R} \setminus Q). \quad (3.3)$$

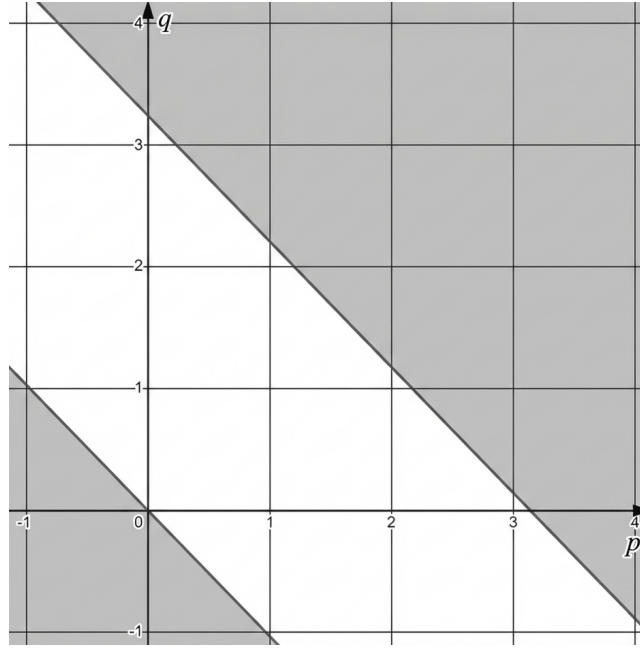
Определение 3.1. При фиксированном $\delta \in \overline{Q}$ решетчатой полосой Π_Q^δ будем называть множество

$$\Pi_Q^\delta = \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 : p + q\tau + \delta \in Q\}.$$

Для наглядности на рис. 1 приведен частный случай. Точки целочисленной двумерной сетки, лежащие в белой области, являются точками полосы Π_Q^0 . Вдоль горизонтальной оси изменяется p , вдоль вертикальной — q .

Предложение 3.1. Для любого иррационального числа $0,9 < \tau < 1$ и произвольного $\delta > 0$ существуют $p, q \in \mathbb{N}$ такие, что $p < q$ и $0 < \frac{p}{q} - \tau < q^{-2}$, $q^{-1} < \delta$. Отсюда следует плотность в $\mathbb{R}$ множества $\{t \in \mathbb{R} \mid \exists p, q \in \mathbb{Z} : t = p + \tau q\}$.

Доказательство этого хорошо известного факта можно найти в [16].

Рис. 1. Модельный пример Π_Q^0 для некоторого τ .FIG. 1. A model example of Π_Q^0 for some τ .

Лемма 3.1. Пусть функция $v \in L_2(\mathbb{R})$ — решение задачи (3.2)–(3.3). Зададим для фиксированной функции v (из класса эквивалентных) и некоторого δ из $\overline{Q}$ функцию $w_\delta(p, q)$ равенством

$$w_\delta(p, q) = v(p + \tau q + \delta). \quad (3.4)$$

Тогда для почти всех δ из $\overline{Q}$ функция $w_\delta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ является решением следующей задачи:

$$w_\delta(p-1, q) + w_\delta(p, q+1) = \lambda w_\delta(p, q) \quad ((p, q) \in \Pi_Q^\delta), \quad (3.5)$$

$$w_\delta(p, q) = 0, \quad ((p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Pi_Q^\delta). \quad (3.6)$$

Доказательство. Зафиксируем $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ и положим $t = p + \tau q + \delta$, где $\delta \in \overline{Q}$. Тогда соотношения (3.2), (3.3) принимают вид

$$v(p + \tau q + \delta - 1) + v(p + \tau q + \delta + \tau) = \lambda v(p + \tau q + \delta) \quad ((p, q) \in \Pi_Q^\delta),$$

$$v(p + \tau q + \delta) = 0 \quad ((p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \Pi_Q^\delta)$$

для почти всех $\delta \in \overline{Q}$.

Для фиксированной пары (p, q) эти соотношения выполняются для почти всех $\delta \in \overline{Q}$. Поскольку $\mathbb{Z}^2$ счетно, они выполняются одновременно для всех $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ при почти всех $\delta \in \overline{Q}$. Полагая $w_\delta(p, q) = v(p + \tau q + \delta)$, получаем (3.5), (3.6). $\square$

4. РЕТЧЧАТЫЕ ЛИНИИ И ЧИСЛА СУЖЕНИЯ

Введем несколько определений, связанных с геометрией решетчатых полос.

Определение 4.1. Решетчатой m -линией будем называть множество:

$$l^m = \{(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \mid q - p = m\}.$$

Эти множества соответствуют прямым $q = p + m$ на $\mathbb{Z}^2$. Так, на рис. 2 точки $(0, 1)$ и $(1, 2)$ прямой $q = p + 1$ являются элементами решетчатой 1-линии l^1 .

Важную роль для дальнейшего рассмотрения играют решетчатые m -линии всего с одной точкой (p, q) из решетчатой полосы Π_Q^δ . Поэтому введем следующее определение.

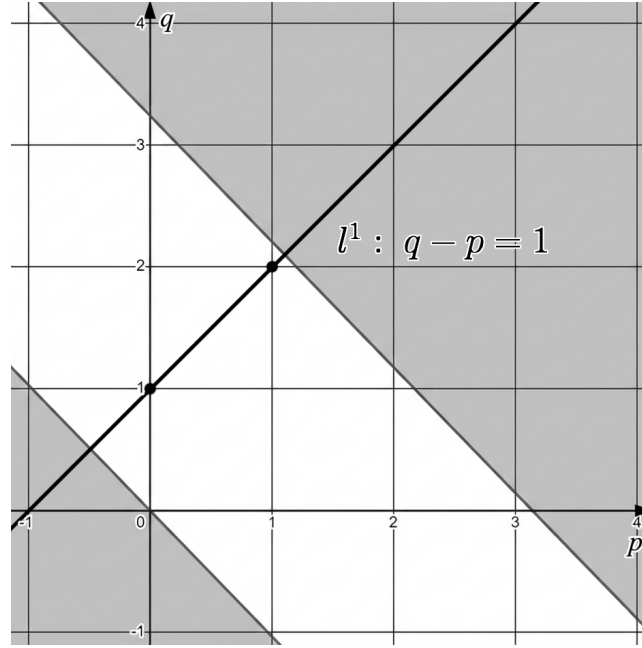


Рис. 2. Модельный пример решетчатой m -линии l^1 ($m = 1$) и решетчатой полосы Π_Q^0 для некоторого τ .

FIG. 2. A model example of a lattice m -line l^1 ($m = 1$) and a lattice strip Π_Q^0 for a certain τ .

Определение 4.2. Числами сужения мы будем называть такие числа $g \in \mathbb{Z}$, что на решетчатой g -линии существует лишь одна точка из решетчатой полосы Π_Q^δ . Множество таких чисел обозначим следующим образом:

$$G = \{g \in \mathbb{Z} \mid \text{существует единственная точка } (p, q) \in l^g \cap \Pi_Q^\delta\}.$$

Модельным примером такого g для рис. 2 является $g = 0$. Действительно, решетчатой 0-линии l^0 принадлежит лишь одна точка из решетчатой полосы Π_Q^0 — это точка $(1, 1)$.

Лемма 4.1. Для любого $\delta \in \overline{Q}$ и фиксированного $m \in \mathbb{Z}$ верны следующие утверждения:

- 1). Пересечение решетчатой m -линии l^m с полосой Π_Q^δ содержит либо одну, либо две точки.
- 2). Пусть m и $m + 1$ не являются числами сужения, то есть существуют целые p_1 и p_2 такие, что

$$(p_1, p_1 + m), (p_1 + 1, p_1 + 1 + m) \in \Pi_Q^\delta;$$

$$(p_2, p_2 + (m + 1)), (p_2 + 1, p_2 + 1 + (m + 1)) \in \Pi_Q^\delta.$$

Тогда либо $p_2 = p_1$, либо $p_2 + 1 = p_1$.

- 3). Пусть m и $m + 2$ не являются числами сужения, то есть существуют целые p_1 и p_2 такие, что

$$(p_1, p_1 + m), (p_1 + 1, p_1 + 1 + m) \in \Pi_Q^\delta.$$

$$(p_2, p_2 + (m + 2)), (p_2 + 1, p_2 + 1 + (m + 2)) \in \Pi_Q^\delta.$$

Тогда $p_2 + 1 = p_1$.

- 4). Множество чисел сужения G счетно и не ограничено ни сверху, ни снизу. То есть для любых $M, m \in \mathbb{Z}$ существуют числа сужения $g_M, g_m \in G$ такие, что $g_M > M$ и $g_m < m$.

Доказательство.

- 1). Сначала заметим, что расстояние между соседними точками $(p, p + m)$ и $(p + 1, (p + 1) + m)$ одной решетчатой m -линии есть $\sqrt{2} = \sqrt{(p + 1 - p)^2 + (p + 1 + m - p - m)^2}$.

При этом расстояние между точками пересечения прямой $y - x = m$ и прямыми $x + \tau y + \delta = 0$, $x + \tau y + \delta = \pi$ постоянно для любых m, δ и равно $\frac{\sqrt{2}\pi}{1+\tau}$.

Очевидна следующая оценка:

$$\sqrt{2} < \frac{\sqrt{2}\pi}{1+1} < \frac{\sqrt{2}\pi}{1+\tau} < \frac{\sqrt{2}\pi}{1+0,9} < 2\sqrt{2}.$$

Следовательно, для любых фиксированных $m \in \mathbb{Z}$ и $\delta \in \overline{Q}$ существует либо одна точка $(p_1, p_1 + m) \in \Pi_Q^\delta$, либо две точки $(p_2, p_2 + m) \in \Pi_Q^\delta$ и $(p_2 + 1, (p_2 + 1) + m) \in \Pi_Q^\delta$. Это завершает доказательство первого пункта.

2). Докажем, что если m и $m + 1$ не являются числами сужения, то есть существуют целые p_1 и p_2 такие, что

$$(p_1, p_1 + m), (p_1 + 1, p_1 + 1 + m) \in \Pi_Q^\delta, \quad (4.1)$$

$$(p_2, p_2 + (m + 1)), (p_2 + 1, p_2 + 1 + (m + 1)) \in \Pi_Q^\delta, \quad (4.2)$$

то $p_2 = p_1$ или $p_2 + 1 = p_1$.

Из (4.1) следует, что

$$0 < p_1 + \tau(p_1 + m) + \delta < \pi, \quad (4.3)$$

$$0 < (p_1 + 1) + \tau(p_1 + 1 + m) + \delta < \pi. \quad (4.4)$$

Убедимся, что для всех $i, j \in \mathbb{N}$ случаи $p_2 = p_1 - 1 - j$ и $p_2 = p_1 + i$ невозможны. Для этого подставим эти значения в формулы для точек из $l^{m+1} \cap \Pi_Q^\delta$.

Пусть $p_2 = p_1 - 1 - j$. Тогда из (4.2) получим

$$(p_1 - 1 - j, p_1 - 1 - j + (m + 1)), (p_1 - 1 - j + 1, p_1 - 1 - j + 1 + (m + 1)) \in \Pi_Q^\delta.$$

Следовательно,

$$(p_1 - 1 - j, p_1 - j + m), (p_1 - j, p_1 - j + m + 1) \in \Pi_Q^\delta. \quad (4.5)$$

Докажем, что точка $(p_1 - 1 - j, p_1 - j + m)$ не принадлежит Π_Q^δ . В силу неравенства (4.4)

$$(p_1 + 1) + \tau(p_1 + 1 + m) < \pi. \quad (4.6)$$

С другой стороны, из (4.5) следует, что

$$0 < (p_1 - 1 - j) + \tau(p_1 - j + m) + \delta \quad (4.7)$$

Прибавляя $2 + j + \tau(j + 1)$ к левой и правой частям неравенства (4.7) и используя неравенство (4.4), получим

$$2 + j + \tau(j + 1) \leq (p_1 + 1) + \tau(p_1 + 1 + m) + \delta < \pi.$$

Поскольку $0,9 < \tau$ и $j \geq 1$, мы имеем

$$\pi < 3 + 1,8 < 3 + 2\tau \leq 2 + j + \tau(j + 1).$$

Из последних двух неравенств мы получим противоречие: $\pi < \pi$. Следовательно, для всех $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$p_2 \neq p_1 - 1 - j.$$

Аналогично рассмотрим случай $p_2 = p_1 + i$:

$$(p_1 + i, p_1 + i + (m + 1)), (p_1 + i + 1, p_1 + i + 1 + (m + 1)) \in \Pi_Q^\delta.$$

Выражения (4.2) примут вид

$$(p_1 + i, p_1 + i + m + 1), (p_1 + i + 1, p_1 + i + m + 2) \in \Pi_Q^\delta. \quad (4.8)$$

Докажем, что вторая точка не принадлежит решетчатой полосе Π_Q^δ . Воспользуемся вторым из соотношений (4.8). Тогда получим следующее неравенство

$$p_1 + i + 1 + \tau(p_1 + i + m + 2) + \delta < \pi. \quad (4.9)$$

Прибавляя $i + 1 + \tau(i + 2)$ слева и справа к неравенству (4.3), получим

$$(i + 1) + \tau(i + 2) < p_1 + i + 1 + \tau(p_1 + m + i + 2) + \delta. \quad (4.10)$$

Очевидно, $\pi < 2 + 2,7 < 2 + 3\tau \leq i + 1 + \tau(i + 2)$. Отсюда и из (4.10) имеем

$$\pi < p_1 + i + 1 + \tau(p_1 + m + i + 2) + \delta < \pi.$$

Получено противоречие, следовательно для всех натуральных i имеем $p_2 \neq p_1 + i$.

3). Подобно пункту 2, докажем, что если m и $m + 2$ не являются числами сужения, то есть существуют целые p_1 и p_2 такие, что

$$\begin{aligned} (p_1, p_1 + m), (p_1 + 1, p_1 + 1 + m) &\in \Pi_Q^\delta, \\ (p_2, p_2 + (m + 2)), (p_2 + 1, p_2 + 1 + (m + 2)) &\in \Pi_Q^\delta, \end{aligned} \quad (4.11)$$

то $p_2 + 1 = p_1$.

Предположим, что $p_2 = p_1 - k$. Подставим это выражение для p_2 в соотношения (4.11):

$$\begin{aligned} (p_1, p_1 + m), (p_1 + 1, p_1 + m + 1) &\in \Pi_Q^\delta, \\ (p_1 - k, p_1 - k + m + 2), (p_1 - k + 1, p_1 - k + m + 3) &\in \Pi_Q^\delta. \end{aligned}$$

Рассмотрим неравенства, которые следуют из вышеописанной принадлежности:

$$p_1 + 1 + \tau(p_1 + m + 1) + \delta < \pi, \quad (4.12)$$

$$0 < p_1 - k + \tau(p_1 - k + m + 2) + \delta, \quad (4.13)$$

$$0 < p_1 + \tau(p_1 + m) + \delta, \quad (4.14)$$

$$p_1 - k + 1 + \tau(p_1 - k + m + 3) + \delta < \pi. \quad (4.15)$$

Пусть $k \geq 2$. Тогда, прибавляя $k + 1 + \tau(k - 1)$ к левой и правой частям неравенства (4.13) и пользуясь неравенством (4.12), получим

$$\pi < 3 + 0,9 < 3 + \tau \leq k + 1 + \tau(k - 1) < p_1 + 1 + \tau(p_1 + m + 1) + \delta < \pi.$$

Пусть $k \leq 0$. Тогда, прибавляя $1 - k + \tau(3 - k)$ к левой и правой частям неравенства (4.14) и пользуясь неравенством (4.15), получим

$$\pi < 1 + 2,7 < 1 + 3\tau \leq 1 - k + \tau(3 - k) < p_1 - k + 1 + \tau(p_1 - k + m + 3) + \delta < \pi.$$

В силу полученных противоречий имеем, что $k = 1$, следовательно, $p_2 + 1 = p_1$.

4). Докажем, что множество чисел сужения G не ограничено сверху, аналогично доказывается неограниченность снизу.

Действительно, предположим противное. Пусть, начиная с некоторого $\tilde{m}$, пересечения $l^m \cap \Pi_Q^\delta$ (для всех $m \geq \tilde{m}$) принадлежат по две точки.

Из доказанного в пункте 3 следует, что для координат последовательности точек из пересечения решетчатых линий l^{m+2k} ($k \in \mathbb{N}$) с полосой Π_Q^δ верно следующее

$$(p_{m+2k}, q_{m+2k}) = (p_m - k, q_m + k).$$

Таким образом, построенная бесконечная последовательность точек лежит на одной прямой с угловым коэффициентом -1 . Однако угловой коэффициент прямых, ограничивающих полосу Π_Q^δ , равен $-\frac{1}{\tau}$. Значит, прямая, содержащая последовательность точек (p_{m+2k}, q_{m+2k}) , выходит за границы полосы, ограниченной прямыми $x + \tau y + \delta = 0$ и $x + \tau y + \delta = \pi$.

Таким образом, мы получили, что существуют точки, не принадлежащие полосе Π_Q^δ , что противоречит построению этих точек. Следовательно, множество чисел сужения не ограничено сверху. Неограниченность снизу доказывается аналогичным образом — все рассуждения сохраняются для перехода от решетчатой m -линии к $(m - 2)$ -линии. $\square$

Определение 4.3. В дальнейшем очками $h_m := (p_m, q_m)$ будем обозначать точки из пересечения решетчатых m -линий l^m и полосы Π_Q^δ . При этом, если m не является числом сужения, то h_m мы будем выбирать так, что точка $h_m + (1, 1) = (p_m + 1, q_m + 1)$ также принадлежит полосе Π_Q^δ . Для вектора $h = (p, q) \in \mathbb{Z}^2$ будем использовать обозначение $w_\delta(h) = w_\delta(p, q)$.

Из пункта 4 леммы 4.1 имеем, что множество чисел сужения G счетно и не ограничено ни сверху, ни снизу. Тогда проиндексируем его целыми числами $k \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $g_k < g_{k+1}$ для любого k . Полученное множество чисел сужения разделяет множество решетчатых m -линий l^m на целочисленные отрезки, где $g_k < m < g_{k+1}$. Оказывается, что для задачи (3.5) (3.6) решение для таких m будет иметь специальный вид, который описывает лемма 5.1. Однако сначала сделаем следующее предложение.

Предложение 4.1. *Множество чисел сужения G обладает следующими свойствами:*

- 1). Для всех $k \in \mathbb{Z}$ верно, что $1 + g_k < g_{k+1}$. Иными словами, для всех $k \in \mathbb{Z}$ существует $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $g_k < m < g_{k+1}$.
- 2). Существует не зависящая от δ верхняя грань у множества разностей соседних чисел сужения $\{r_{k+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $r_{k+1} := g_{k+1} - g_k$.

Доказательство.

1). Предположим, что существует $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ такое, что $g_{\tilde{k}} + 1 = g_{\tilde{k}+1}$. Рассмотрим точки $(p_{g_{\tilde{k}}}, q_{g_{\tilde{k}}})$ и $(p_{g_{\tilde{k}+1}}, q_{g_{\tilde{k}+1}})$ из пересечений решетчатых полосы Π_Q^δ с $g_{\tilde{k}}$ -линией и $g_{\tilde{k}+1}$ -линией соответственно. Для них справедливо одно из следующих равенств:

$$(p_{g_{\tilde{k}+1}}, q_{g_{\tilde{k}+1}}) = (p_{g_{\tilde{k}}}, q_{g_{\tilde{k}}} + 1) \text{ или } (p_{g_{\tilde{k}+1}}, q_{g_{\tilde{k}+1}}) = (p_{g_{\tilde{k}}} - 1, q_{g_{\tilde{k}}}).$$

Рассмотрим оба случая.

а). Пусть $(p_{g_{\tilde{k}+1}}, q_{g_{\tilde{k}+1}}) = (p_{g_{\tilde{k}}}, q_{g_{\tilde{k}}} + 1)$. Тогда из определения чисел сужения $(p_{g_{\tilde{k}}} - 1, q_{g_{\tilde{k}}})$, $(p_{g_{\tilde{k}}} + 1, q_{g_{\tilde{k}}} + 1) \notin \Pi_Q^\delta$.

Имеем $(p_{g_{\tilde{k}}} - 1) + \tau q_{g_{\tilde{k}}} + \delta \leq 0$. При этом для второй точки выполняется неравенство

$$0 < (p_{g_{\tilde{k}}} + 1) + \tau(q_{g_{\tilde{k}}} + 1) + \delta = ((p_{g_{\tilde{k}}} - 1) + \tau q_{g_{\tilde{k}}} + \delta) + 2 + \tau \leq 2 + \tau < 3 < \pi.$$

Таким образом, $(p_{g_{\tilde{k}}} + 1, q_{g_{\tilde{k}}} + 1) \in \Pi_Q^\delta$, что противоречит предположению.

б). Пусть $(p_{g_{\tilde{k}+1}}, q_{g_{\tilde{k}+1}}) = (p_{g_{\tilde{k}}} - 1, q_{g_{\tilde{k}}})$. Тогда, из определения чисел сужения $(p_{g_{\tilde{k}}} - 1, q_{g_{\tilde{k}}} - 1)$, $(p_{g_{\tilde{k}}}, q_{g_{\tilde{k}}} + 1) \notin \Pi_Q^\delta$.

Имеем $(p_{g_{\tilde{k}}} - 1) + \tau(q_{g_{\tilde{k}}} - 1) + \delta \leq 0$. Тогда для второй точки выполняется неравенство

$$0 < p_{g_{\tilde{k}}} + \tau(q_{g_{\tilde{k}}} + 1) + \delta = ((p_{g_{\tilde{k}}} - 1) + \tau(q_{g_{\tilde{k}}} - 1) + \delta) + 1 + 2\tau \leq 1 + 2\tau < 3 < \pi.$$

Таким образом, $(p_{g_{\tilde{k}}}, q_{g_{\tilde{k}}} + 1) \in \Pi_Q^\delta$, что противоречит предположению. Следовательно, исходное предположение неверно, что завершает доказательство первого пункта.

2). Докажем теперь, что множество разностей $\{r_{k+1}\} := \{(g_{k+1} - g_k)\}$ имеет верхнюю грань, не зависящую от δ . Доказательство этого факта использует идею доказательства пункта 4 леммы 4.1.

Предположим противное: пусть множество $\{r_{k+1}\}$ не ограничено сверху. Тогда для любого натурального $N \geq 4$ найдется отрезок $[g_k, g_{k+1}]$ такой, что

$$g_{k+1} - g_k > N.$$

Для всех $m \in (g_k, g_{k+1})$ решетчатая m -линия пересекает полосу Π_Q^δ в двух точках. Выберем на каждой такой линии точку $h_m = (p_m, q_m) \in \Pi_Q^\delta$. Из пункта 3 леммы 4.1 следует, что при переходе через одну линию координаты изменяются как

$$h_{m+2} = h_m + (-1, 1).$$

Таким образом, для всех $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, для которых $g_k + 1 + 2j < g_{k+1}$, точки h_{g_k+1+2j} лежат на прямой с угловым коэффициентом -1 , т. е. на прямой вида $y = -x + b$. Границы же полосы Π_Q^δ задаются прямыми $x + \tau y + \delta = 0$ и $x + \tau y + \delta = \pi$ с угловым коэффициентом $-\frac{1}{\tau}$. Поскольку $\tau \neq 1$, эти прямые не параллельны.

Рассмотрим функцию $F(x, y) = x + \tau y + \delta$. Для точки h_{g_k+1+2j} имеем

$$F(h_{g_k+1+2j}) = F(h_{g_k+1}) - j(1 - \tau).$$

Так как $h_{g_k+1} \in \Pi_Q^\delta$, то $0 < F(h_{g_k+1}) < \pi$.

Если разность $g_{k+1} - g_k$ сколь угодно велика, то число j может быть выбрано настолько большим, что

$$F(h_{g_k+1+2j}) = F(h_{g_k+1}) - j(1 - \tau) < 0,$$

поскольку $1 - \tau > 0$. Но это противоречит тому, что точка h_{g_k+1+2j} должна принадлежать полосе (т. е. F должна быть между 0 и π).

Следовательно, наше предположение неверно, и множество $\{r_{k+1}\}$ ограничено сверху. При этом верхняя грань может быть выбрана независимо от δ . Действительно, если $j = \left\lfloor \frac{r_{k+1} - 2}{2} \right\rfloor$, то $g_k + 1 + 2j < g_{k+1}$, поэтому из приведенной выше оценки следует

$$j(1 - \tau) < \pi.$$

Кроме того, $r_{k+1} \leq 2j + 3$. Следовательно,

$$r_{k+1} < \frac{2\pi}{1 - \tau} + 3.$$

□

Предложение 4.2. Для любого числа сужения g_k верны следующие утверждения:

- 1). существует $h_{g_k-1} \in \Pi_Q^\delta$;
- 2). вектор $h_{g_k-1} + (1, 1)$ также принадлежит Π_Q^δ ;
- 3). имеет место представление $h_{g_k-1} = h_{g_k} + (0, -1)$.

Доказательство. Пусть $h_{g_k} = (p, q)$. Так как g_k — число сужения, на линии l^{g_k} лежит единственная точка полосы Π_Q^δ , поэтому точки $(p-1, q-1)$ и $(p+1, q+1)$ не принадлежат Π_Q^δ . Для функции $F(x, y) = x + \tau y + \delta$ это означает

$$F(p-1, q-1) \leq 0, \quad F(p+1, q+1) \geq \pi. \quad (4.16)$$

Из предложения 4.1 следует, что $g_k - 1$ не является числом сужения. Значит, на линии l^{g_k-1} пересечение с полосой состоит из двух точек. Следовательно, существует точка h_{g_k-1} , для которой $h_{g_k-1} + (1, 1) \in \Pi_Q^\delta$. Остается установить явный вид этой точки.

Рассмотрим точки $(p, q-1)$ и $(p+1, q)$, принадлежащие линии l^{g_k-1} . Вычислим значения F в этих точках:

$$F(p, q-1) = p + \tau(q-1) + \delta = (p + \tau q + \delta) - \tau, \quad (4.17)$$

$$F(p+1, q) = p+1 + \tau q + \delta = (p + \tau q + \delta) + 1. \quad (4.18)$$

Из (4.16) получаем оценки для $p + \tau q + \delta$:

$$p + \tau q + \delta \leq 1 + \tau, \quad p + \tau q + \delta \geq \pi - 1 - \tau. \quad (4.19)$$

Проверим принадлежность точек $(p, q-1)$ и $(p+1, q)$ полосе. Для $(p, q-1)$ из (4.17) и (4.19):

$$F(p, q-1) \leq 1 + \tau - \tau = 1 < \pi, \quad F(p, q-1) \geq \pi - 1 - \tau - \tau = \pi - 1 - 2\tau.$$

Поскольку $\tau < 1$, имеем $\pi - 1 - 2\tau > \pi - 1 - 2 > 0$. Таким образом, $0 < F(p, q-1) < \pi$, т. е. $(p, q-1) \in \Pi_Q^\delta$.

Для $(p+1, q)$ из (4.18) и (4.19):

$$F(p+1, q) \leq 1 + \tau + 1 = 2 + \tau < 3 < \pi, \quad F(p+1, q) \geq \pi - 1 - \tau + 1 = \pi - \tau > 0.$$

Следовательно, $(p+1, q) \in \Pi_Q^\delta$.

При этом для $(p, q-1)$ имеем $(p, q-1) + (1, 1) = (p+1, q) \in \Pi_Q^\delta$. Следовательно, $h_{g_k-1} = (p, q-1) = h_{g_k} + (0, -1)$. □

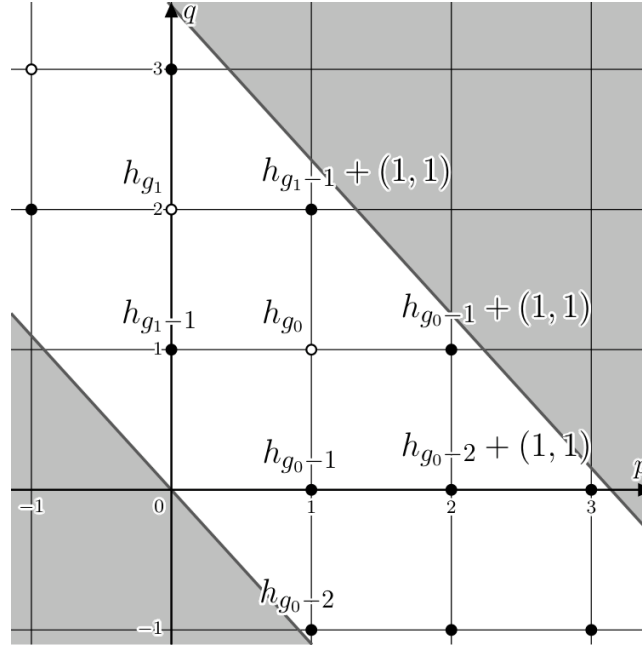


Рис. 3. Фрагмент решетчатой полосы Π_Q^0 для некоторого τ .

FIG. 3. A fragment of the lattice strip Π_Q^0 for some τ .

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ В РЕШЕТЧАТОЙ ПОЛОСЕ Π_Q^δ

Для пояснения технического доказательства следующей леммы приведен рис. 3. На нем изображен фрагмент решетчатой полосы Π_Q^0 . Кружками отмечены точки пересечения полосы с решетчатыми m -линиями; незакрашенными кружками выделены точки, соответствующие числам сужения.

Поясним на примере точки сужения $h_{g_0} = (p_{g_0}, q_{g_0})$, как используется соотношение (3.5). В этой точке оно имеет вид

$$w_\delta(p_{g_0} - 1, q_{g_0}) + w_\delta(p_{g_0}, q_{g_0} + 1) = \lambda w_\delta(p_{g_0}, q_{g_0}).$$

В ситуации, изображенной на рис. 3, выполнено $g_0 + 1 = g_1 - 1$, и две точки левой части равенства можно записать как h_{g_1-1} и $h_{g_1-1} + (1, 1)$. Поэтому уравнение принимает вид

$$w_\delta(h_{g_1-1}) + w_\delta(h_{g_1-1} + (1, 1)) = \lambda w_\delta(h_{g_0}).$$

Иными словами, значение функции в точке $h = (p, q) \in l^m \cap \Pi_Q^\delta$ связывается со значениями в двух точках соседней решетчатой линии l^{m+1} . Если одна из этих точек не принадлежит полосе Π_Q^δ , то соответствующее слагаемое равно нулю в силу условия (3.6). Именно такой переход между соседними решетчатыми линиями используется ниже при выводе формул для значений w_δ в полосе.

Лемма 5.1. Пусть в задаче (3.5), (3.6) параметр $\lambda \neq 0$. Тогда решение $w_\delta(h) = w_\delta(p, q)$, для $h \in l^m \cap \Pi_Q^\delta$, $m \in \overline{g_k, g_{k+1}}$ и некоторого $k \in \mathbb{Z}$, удовлетворяет следующей формуле:

$$\begin{cases} w_\delta(h_{g_{k+1}-j} + \vec{s}(j + \beta)) = \frac{F_{j+1}}{\lambda^j} a, \\ w_\delta(h_{g_{k+1}-j} + \vec{s}(j + \beta + 1)) = \frac{F_j}{\lambda^j} a, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$w_\delta(h_{g_k}) = \frac{F_{g_{k+1}-g_k+1}}{\lambda^{g_{k+1}-g_k}} a, \quad (5.2)$$

где $a := w_\delta(h_{g_{k+1}})$, параметр $\beta = 0, 1$ зависит от k , $j \in \overline{1, g_{k+1} - g_k - 1}$: $m = g_{k+1} - j$, вектор-функция $\vec{s}(x) = \frac{1}{2} (1 + (-1)^x) \cdot (1, 1)$, $a \{F_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ — последовательность чисел Фибоначчи,

заданная стандартным образом:

$$\{F_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} = \{F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \ (2 \leq n \in \mathbb{N})\}. \quad (5.3)$$

Доказательство. Пусть $w_\delta(h)$ — решение задачи (3.5) (3.6). В таком случае для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим набор значений $m \in \overline{g_k, g_{k+1}}$.

Пусть решение $w_\delta(h)$ принимает в точке $h_{g_{k+1}} \in l^{g_{k+1}} \cap \Pi_Q^\delta$ значение $a \in \mathbb{C}$. Рассмотрим значения в точках решетчатой полосы из предыдущей решетчатой линии $l^{g_{k+1}-1} \cap \Pi_Q^\delta$.

Из предложения 4.2 следует, что эти точки имеют следующий вид:

$$(p_{g_{k+1}}, q_{g_{k+1}} - 1), (p_{g_{k+1}} + 1, q_{g_{k+1}}) \in l^{g_{k+1}-1} \cap \Pi_Q^\delta. \quad (5.4)$$

То есть

$$\begin{aligned} (p_{g_{k+1}-1}, q_{g_{k+1}-1}) &= (p_{g_{k+1}}, q_{g_{k+1}} - 1), \\ (p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1} + 1) &= (p_{g_{k+1}} + 1, q_{g_{k+1}}). \end{aligned} \quad (5.4')$$

Из (3.5) и (5.4') получим

$$\begin{aligned} a + 0 &= \lambda w_\delta(p_{g_{k+1}}, q_{g_{k+1}} - 1), \\ 0 + a &= \lambda w_\delta(p_{g_{k+1}} + 1, q_{g_{k+1}}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$w_\delta(p_{g_{k+1}}, q_{g_{k+1}} - 1) = w_\delta(p_{g_{k+1}} + 1, q_{g_{k+1}}) = \frac{a}{\lambda}. \quad (5.5)$$

В силу (5.4) число $g_{k+1} - 1$ не является числом сужения. Поэтому, если $g_k \neq g_{k+1} - 2$, то $g_k < g_{k+1} - 2$, т. е. $g_{k+1} - 2$ не является числом сужения. Таким образом, множество $l^{g_{k+1}-2} \cap \Pi_Q^\delta$ состоит из двух точек, см. пункт 1 леммы 4.1. Следовательно, существуют точки

$$\begin{aligned} (p_{g_{k+1}-2}, q_{g_{k+1}-2}), (p_{g_{k+1}-2} + 1, q_{g_{k+1}-2} + 1) &\in l^{g_{k+1}-2} \cap \Pi_Q^\delta, \\ (p_{g_{k+1}-1}, q_{g_{k+1}-1}), (p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1} + 1) &\in l^{g_{k+1}-1} \cap \Pi_Q^\delta \end{aligned}$$

такие, что

$$(p_{g_{k+1}-2}, q_{g_{k+1}-2}) = (p_{g_{k+1}-1} + \beta, q_{g_{k+1}-1} - 1 + \beta), \quad (5.6)$$

$$(p_{g_{k+1}-2} + 1, q_{g_{k+1}-2} + 1) = (p_{g_{k+1}-1} + 1 + \beta, q_{g_{k+1}-1} + \beta), \quad (5.7)$$

где $\beta = \beta(k)$ принимает значения 0 или 1.

Теперь найдем значения w_δ на линии $l^{g_{k+1}-2}$.

Случай $\beta = 0$. Тогда из (5.6), (5.7) имеем

$$\begin{aligned} h_{g_{k+1}-2} &= (p_{g_{k+1}-1}, q_{g_{k+1}-1} - 1), \\ h_{g_{k+1}-2} + (1, 1) &= (p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Рассмотрим уравнение (3.5) в точке $h_{g_{k+1}-2} + (1, 1)$. Тогда в силу (5.8)

$$w_\delta((p_{g_{k+1}-1} + 1) - 1, q_{g_{k+1}-1}) + w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1} + 1) = \lambda w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1}).$$

Учитывая (5.5), получаем

$$\frac{a}{\lambda} + \frac{a}{\lambda} = \lambda w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1}),$$

откуда

$$w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1}) = \frac{2a}{\lambda^2}.$$

Но в силу (5.7)

$$w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1}) = w_\delta(p_{g_{k+1}-2} + 1, q_{g_{k+1}-2} + 1) = \frac{2a}{\lambda^2}. \quad (\star)$$

Теперь рассмотрим (3.5) в точке $h_{g_{k+1}-2}$. Тогда в силу (5.8)

$$w_\delta(p_{g_{k+1}-1} - 1, q_{g_{k+1}-1} - 1) + w_\delta(p_{g_{k+1}-1}, q_{g_{k+1}-1}) = \lambda w_\delta(p_{g_{k+1}-1}, q_{g_{k+1}-1}).$$

Точка $(p_{g_{k+1}-1} - 1, q_{g_{k+1}-1} - 1)$ не принадлежит полосе Π_Q^δ (иначе на линии $l^{g_{k+1}-2}$ было бы три точки), поэтому w_δ в этой точке равно 0. Следовательно,

$$0 + \frac{a}{\lambda} = \lambda w_\delta(p_{g_{k+1}-1}, q_{g_{k+1}-1} - 1),$$

откуда в силу (5.6)

$$w_\delta(p_{g_{k+1}-1}, q_{g_{k+1}-1} - 1) = w_\delta(p_{g_{k+1}-2}, q_{g_{k+1}-2}) = \frac{a}{\lambda^2}. \quad (\star\star)$$

Таким образом, при $\beta = 0$, в силу $(\star)$, $(\star\star)$, имеем

$$\begin{cases} w_\delta(p_{g_{k+1}-2}, q_{g_{k+1}-2}) = \frac{a}{\lambda^2}, \\ w_\delta(p_{g_{k+1}-2} + 1, q_{g_{k+1}-2} + 1) = \frac{2a}{\lambda^2}. \end{cases}$$

Случай $\beta = 1$. Тогда из (5.6), (5.7) следует, что

$$\begin{aligned} h_{g_{k+1}-2} &= (p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1}), \\ h_{g_{k+1}-2} + (1, 1) &= (p_{g_{k+1}-1} + 2, q_{g_{k+1}-1} + 1). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Рассмотрим уравнение (3.5) в точке $h_{g_{k+1}-2}$. Тогда в силу (5.9) имеем

$$w_\delta((p_{g_{k+1}-1} + 1) - 1, q_{g_{k+1}-1}) + w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1} + 1) = \lambda w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1}).$$

Отсюда, согласно (5.5), получим

$$\frac{a}{\lambda} + \frac{a}{\lambda} = \lambda w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1}) \Rightarrow w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1}) = \frac{2a}{\lambda^2},$$

что в силу (5.9) равно $w_\delta(p_{g_{k+1}-2}, q_{g_{k+1}-2})$.

Рассмотрим теперь (3.5) в точке $h_{g_{k+1}-2} + (1, 1)$:

$$w_\delta((p_{g_{k+1}-1} + 2) - 1, q_{g_{k+1}-1} + 1) + w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 2, q_{g_{k+1}-1} + 2) = \lambda w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 2, q_{g_{k+1}-1} + 1).$$

Точка $(p_{g_{k+1}-1} + 2, q_{g_{k+1}-1} + 2)$ не принадлежит полосе, поэтому w_δ в этой точке равно 0. В силу (5.5) получим

$$\begin{aligned} w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 1, q_{g_{k+1}-1} + 1) + 0 &= \lambda w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 2, q_{g_{k+1}-1} + 1), \\ \frac{a}{\lambda} &= \lambda w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 2, q_{g_{k+1}-1} + 1) \Rightarrow w_\delta(p_{g_{k+1}-1} + 2, q_{g_{k+1}-1} + 1) = \frac{a}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

что в силу (5.9) равно $w_\delta(p_{g_{k+1}-2} + 1, q_{g_{k+1}-2} + 1)$.

Таким образом, при $\beta = 1$

$$\begin{cases} w_\delta(p_{g_{k+1}-2}, q_{g_{k+1}-2}) = \frac{2a}{\lambda^2}, \\ w_\delta(p_{g_{k+1}-2} + 1, q_{g_{k+1}-2} + 1) = \frac{a}{\lambda^2}. \end{cases}$$

Объединяя оба случая, получаем

$$\begin{cases} w_\delta(p_{g_{k+1}-2}, q_{g_{k+1}-2}) = \frac{a}{\lambda^2}, \\ w_\delta(p_{g_{k+1}-2} + 1, q_{g_{k+1}-2} + 1) = \frac{2a}{\lambda^2}, & (\text{при } \beta = 0) \\ w_\delta(p_{g_{k+1}-2}, q_{g_{k+1}-2}) = \frac{2a}{\lambda^2}, \\ w_\delta(p_{g_{k+1}-2} + 1, q_{g_{k+1}-2} + 1) = \frac{a}{\lambda^2}. & (\text{при } \beta = 1) \end{cases} \quad (5.10)$$

Обозначим $j := g_{k+1} - m$, тогда $j \in \overline{0, g_{k+1} - g_k}$ при $m \in \overline{g_k, g_{k+1}}$. Отметим, что при $j = 0$ и $j = g_{k+1} - g_k$ соответствующие $m = g_{k+1} - j$ являются числами сужения. Для $j \in \overline{1, g_{k+1} - g_k - 1}$ введем вектор-столбец V_j , составленный из значений w_δ в точках из $l^{g_{k+1}-j} \cap \Pi_Q^\delta$ по следующему правилу:

$$\begin{aligned} V_j &= \begin{pmatrix} w_\delta(h_{g_{k+1}-j} + (1, 1)) \\ w_\delta(h_{g_{k+1}-j}) \\ w_\delta(h_{g_{k+1}-j}) \\ w_\delta(h_{g_{k+1}-j} + (1, 1)) \end{pmatrix}, & \text{если число } j + \beta \text{ четно;} \\ V_j &= \begin{pmatrix} w_\delta(h_{g_{k+1}-j} + (1, 1)) \\ w_\delta(h_{g_{k+1}-j}) \\ w_\delta(h_{g_{k+1}-j} + (1, 1)) \end{pmatrix}, & \text{если число } j + \beta \text{ нечетно.} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Перепишем соотношения (5.11) в следующем виде:

$$V_j = \begin{pmatrix} w_\delta(h_{g_{k+1}-j} + \vec{s}(j + \beta)) \\ w_\delta(h_{g_{k+1}-j} + \vec{s}(j + \beta + 1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_\delta(h_m + \vec{s}(j + \beta)) \\ w_\delta(h_m + \vec{s}(j + \beta + 1)) \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

где $m = g_{k+1} - j$, а $\vec{s}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — вектор-функция, заданная правилом

$$\vec{s}(x) = \begin{cases} (0, 0), & \text{для нечетных } x, \\ (1, 1), & \text{для четных } x. \end{cases} \quad (5.13)$$

Эту функцию также можно представить в виде $\vec{s}(x) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^x) \cdot (1, 1)$.

По определениям (5.12) и (5.3), выражения (5.5) и (5.10) преобразуются к виду

$$V_1 = \frac{a}{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{a}{\lambda} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \frac{a}{\lambda^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{a}{\lambda^2} \begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Предположим, что V_j и V_{j+1} определены. Докажем формулу

$$V_{j+1} = \frac{1}{\lambda} T V_j. \quad (5.15)$$

Для этого докажем следующее равенство:

$$h_{m-1} = h_m + \vec{s}(j + \beta) + (0, -1), \quad (5.16)$$

что, в силу определения $m = g_{k+1} - j$, соответствует

$$h_{g_{k+1}-(j+1)} = h_{g_{k+1}-j} + \vec{s}(j + \beta) + (0, -1).$$

Воспользуемся (5.6), тогда для точек $h_{g_{k+1}-2}$ и $h_{g_{k+1}-1}$ верно равенство

$$h_{g_{k+1}-2} = h_{g_{k+1}-1} + \beta \cdot (1, 1) + (0, -1). \quad (5.17)$$

Из пункта 3 леммы 4.1 следует, что если отрезок $[n, n + 2r]$ не содержит чисел сужения, то справедливы равенства

$$(p_{n+2r}, q_{n+2r}) = (p_n - r, q_n + r), \quad \text{и тогда} \quad h_n = h_{n+2r} + r \cdot (1, -1). \quad (5.18)$$

Рассмотрим два случая в зависимости от четности j .

а) Пусть $j = 2r$ для некоторого натурального r . Тогда, в силу (5.18), имеем

$$h_{g_{k+1}-2r} = h_{g_{k+1}-2-2(r-1)} = h_{g_{k+1}-2} + (r-1) \cdot (1, -1), \quad (5.19)$$

$$h_{g_{k+1}-(2r+1)} = h_{g_{k+1}-1-2r} = h_{g_{k+1}-1} + r \cdot (1, -1). \quad (5.20)$$

Пользуясь (5.17), перепишем (5.19) в виде

$$h_{g_{k+1}-2r} = (h_{g_{k+1}-1} + \beta \cdot (1, 1) + (0, -1)) + (r-1) \cdot (1, -1). \quad (5.21)$$

Подставим выражение $h_{g_{k+1}-1}$ из (5.21) в равенство (5.20):

$$h_{g_{k+1}-(2r+1)} = (h_{g_{k+1}-2r} - \beta \cdot (1, 1) - (0, -1) - (r-1) \cdot (1, -1)) + r \cdot (1, -1).$$

Следовательно,

$$h_{g_{k+1}-(2r+1)} = h_{g_{k+1}-2r} - \beta \cdot (1, 1) + (1, 0) = h_{g_{k+1}-2r} + (1 - \beta) \cdot (1, 1) + (0, -1). \quad (*)$$

б) Пусть теперь $j = 2r - 1$ для некоторого натурального r . Воспользуемся (5.18), получим

$$h_{g_{k+1}-(2r-1)} = h_{g_{k+1}-1-2(r-1)} = h_{g_{k+1}-1} + (r-1) \cdot (1, -1), \quad (5.22)$$

$$h_{g_{k+1}-2r} = h_{g_{k+1}-2-2(r-1)} = h_{g_{k+1}-2} + (r-1) \cdot (1, -1). \quad (5.23)$$

Пользуясь (5.17), перепишем (5.22):

$$h_{g_{k+1}-(2r-1)} = (h_{g_{k+1}-2} - \beta \cdot (1, 1) - (0, -1)) + (r-1) \cdot (1, -1). \quad (5.24)$$

Подставим выражение $h_{g_{k+1}-2}$ из (5.24) в равенство (5.23):

$$h_{g_{k+1}-2r} = (h_{g_{k+1}-(2r-1)} + \beta \cdot (1, 1) + (0, -1) - (r-1) \cdot (1, -1)) + (r-1) \cdot (1, -1).$$

Следовательно,

$$h_{g_{k+1}-2r} = h_{g_{k+1}-(2r-1)} + \beta \cdot (1, 1) + (0, -1). \quad (**)$$

Таким образом, из (*) и (**) получим

$$h_{g_{k+1}-(j+1)} = h_{g_{k+1}-j} + (1 - \beta) \cdot (1, 1) + (0, -1), \quad \text{для } j = 2r,$$

$$h_{g_{k+1}-(j+1)} = h_{g_{k+1}-j} + \beta \cdot (1, 1) + (0, -1), \quad \text{для } j = 2r - 1.$$

Полученный результат совпадает с формулой (5.16):

$$h_{g_{k+1}-(j+1)} = h_{g_{k+1}-j} + \vec{s}(j + \beta) + (0, -1),$$

поскольку в силу $\beta = 0, 1$ и определения (5.13) выполняется равенство

$$\vec{s}(j + \beta) = \begin{cases} (1, 1), & \text{если } j + \beta \text{ четно,} \\ (0, 0), & \text{если } j + \beta \text{ нечетно;} \end{cases} = \begin{cases} \beta \cdot (1, 1), & \text{если } j \text{ нечетно,} \\ (1 - \beta) \cdot (1, 1), & \text{если } j \text{ четно.} \end{cases}$$

Вектор V_{j+1} по определению (5.12) имеет вид

$$V_{j+1} = \begin{pmatrix} w_\delta(h_{g_{k+1}-(j+1)} + \vec{s}((j+1) + \beta)) \\ w_\delta(h_{g_{k+1}-(j+1)} + \vec{s}((j+1) + \beta + 1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_\delta(h_{m-1} + \vec{s}(j+1 + \beta)) \\ w_\delta(h_{m-1} + \vec{s}(j + \beta)) \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

так как $m - 1 = g_{k+1} - (j + 1)$ и $\vec{s}(x) = \vec{s}(x + 2)$.

Используя результат (5.16) и учитывая, что для любых целых x верно $\vec{s}(x) + \vec{s}(x + 1) = (1, 1)$, перепишем (5.25). Получим следующее выражение для V_{j+1} :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_\delta(h_{m-1} + \vec{s}(j+1 + \beta)) \\ w_\delta(h_{m-1} + \vec{s}(j + \beta)) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} w_\delta(h_m + \vec{s}(j + \beta) + (0, -1) + \vec{s}(j+1 + \beta)) \\ w_\delta(h_m + \vec{s}(j + \beta) + (0, -1) + \vec{s}(j + \beta)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} w_\delta(h_m + (1, 1) + (0, -1)) \\ w_\delta(h_m + 2\vec{s}(j + \beta) + (0, -1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_\delta(h_m + (1, 0)) \\ w_\delta(h_m + 2\vec{s}(j + \beta) + (0, -1)) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Уравнение (3.5) в точке h имеет вид

$$\lambda w_\delta(h) = w_\delta(h + (-1, 0)) + w_\delta(h + (0, 1)). \quad (5.27)$$

Тогда из (5.26) и (5.27) следует равенство

$$\lambda V_{j+1} = \begin{pmatrix} w_\delta(h_m) + w_\delta(h_m + (1, 1)) \\ w_\delta(h_m + 2\vec{s}(j + \beta) + (-1, -1)) + w_\delta(h_m + 2\vec{s}(j + \beta)) \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

При этом выполнены равенства

$$w_\delta(h_m) + w_\delta(h_m + (1, 1)) = w_\delta(h_m + \vec{s}(j + \beta)) + w_\delta(h_m + \vec{s}(j + \beta + 1)), \quad (5.29)$$

$$w_\delta(h_m + 2\vec{s}(j + \beta) + (-1, -1)) + w_\delta(h_m + 2\vec{s}(j + \beta)) = w_\delta(h_m + \vec{s}(j + \beta)). \quad (5.30)$$

Тождество (5.29) очевидно в силу коммутативности сложения, так как множества точек $\{h_m, h_m + (1, 1)\}$ и $\{h_m + \vec{s}(j + \beta), h_m + \vec{s}(j + \beta + 1)\}$ совпадают. Равенство (5.30) докажем, рассмотрев возможные значения вектора $\vec{s}(j + \beta)$:

$$\begin{cases} w_\delta(h_m + (-1, -1)) + w_\delta(h_m) = w_\delta(h_m), & \text{при } \vec{s}(j + \beta) = (0, 0), \\ w_\delta(h_m + (1, 1)) + w_\delta(h_m + (2, 2)) = w_\delta(h_m + (1, 1)), & \text{при } \vec{s}(j + \beta) = (1, 1), \end{cases}$$

при этом слагаемые $w_\delta(h_m + (-1, -1))$ и $w_\delta(h_m + (2, 2))$ равны нулю в силу (3.6), так как пересечению $l^m \cap \Pi_Q^\delta$ по определению 4.3 принадлежат только h_m и $h_m + (1, 1)$.

Таким образом, из (5.12) и (5.28)–(5.30) имеем

$$\lambda V_{j+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} V_j, \quad \text{т. е.} \quad V_{j+1} = \frac{1}{\lambda} T V_j,$$

что соответствует тождеству (5.15).

Последовательно применяя (5.15) к V_1 и воспользовавшись (5.14), получим

$$V_j = \frac{1}{\lambda^{j-1}} T^{j-1} V_1 = \frac{a}{\lambda^j} T^{j-1} \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Непосредственно проверяется, что T является матрицей сдвига индексов для чисел Фибоначчи. То есть для любого натурального n имеет место свойство

$$T \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n + F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Последовательно применяя свойство (5.32) к вектору V_1 , приходим к явному виду для (5.31)

$$V_j = \frac{a}{\lambda^j} \begin{pmatrix} F_{j+1} \\ F_j \end{pmatrix},$$

что в точности совпадает с формулой (5.1) для всех $j \in \overline{1, g_{k+1} - g_k - 1}$.

Наконец, рассмотрим точку сужения h_{g_k} . Докажем, что

$$h_{g_k} = (p_{g_k}, q_{g_k}) = h_{g_{k+1}} + (1, 0).$$

По определению множества чисел сужения G , на линии l^{g_k} лежит единственная точка, принадлежащая полосе Π_Q^δ . То есть точки $(p_{g_k} - 1, q_{g_k} - 1)$ и $(p_{g_k} + 1, q_{g_k} + 1)$ лежат вне полосы Π_Q^δ . Рассмотрим функцию $F(p, q) = p + \tau q + \delta$. Имеет место следующее свойство: $(p, q) \in \Pi_Q^\delta$, если и только если $0 < F(p, q) < \pi$. Для точек на линии l^{g_k} имеем

$$F(p_{g_k} - 1, q_{g_k} - 1) \leq 0 \quad \text{и} \quad F(p_{g_k} + 1, q_{g_k} + 1) \geq \pi. \quad (5.33)$$

Учитывая, что $F(p \pm 1, q \pm 1) = F(p, q) \pm (1 + \tau)$, из неравенств (5.33) получаем двустороннюю оценку для значения функции в точке h_{g_k} :

$$\pi - 1 - \tau \leq F(p_{g_k}, q_{g_k}) \leq 1 + \tau. \quad (5.34)$$

Проверим принадлежность пересечению $l^{g_{k+1}} \cap \Pi_Q^\delta$ двух точек: $(p_{g_k} - 1, q_{g_k})$ и $(p_{g_k}, q_{g_k} + 1)$. Разность их координат равна $q_{g_k} - (p_{g_k} - 1) = (q_{g_k} - p_{g_k}) + 1 = g_k + 1$, осталось проверить принадлежность Π_Q^δ .

Вычислим значения функции F в этих точках:

$$F(p_{g_k} - 1, q_{g_k}) = F(p_{g_k}, q_{g_k}) - 1, \quad (5.35)$$

$$F(p_{g_k}, q_{g_k} + 1) = F(p_{g_k}, q_{g_k}) + \tau. \quad (5.36)$$

Используя (5.34), (5.35) и условие $0,9 < \tau < 1$, оценим $F(p_{g_k} - 1, q_{g_k})$:

$$0 < \pi - 3 < (\pi - 1 - \tau) - 1 \leq F(p_{g_k} - 1, q_{g_k}) < \pi - 1 < \pi.$$

Следовательно, $(p_{g_k} - 1, q_{g_k}) \in \Pi_Q^\delta$.

Аналогично, используя (5.34), (5.36) и условие $0,9 < \tau < 1$, оценим $F(p_{g_k}, q_{g_k} + 1)$:

$$0 < 0 + \tau < F(p_{g_k}, q_{g_k} + 1) \leq (1 + \tau) + \tau < 3 < \pi.$$

Следовательно, $(p_{g_k}, q_{g_k} + 1) \in \Pi_Q^\delta$. Таким образом, точки $(p_{g_k} - 1, q_{g_k})$ и $(p_{g_k}, q_{g_k} + 1)$ принадлежат $l^{g_{k+1}} \cap \Pi_Q^\delta$. Из определения 4.3 получим $h_{g_{k+1}} = (p_{g_k} - 1, q_{g_k}) = h_{g_k} + (-1, 0)$.

Рассмотрим уравнение (3.5) в точке h_{g_k} :

$$\lambda w_\delta(h_{g_k}) = w_\delta(h_{g_k} + (-1, 0)) + w_\delta(h_{g_k} + (0, 1)).$$

Подставляя $h_{g_k} = h_{g_{k+1}} + (1, 0)$, получаем в правой части значения в точках $h_{g_{k+1}}$ и $h_{g_{k+1}} + (1, 1)$. Эти значения в точности образуют компоненты вектора $V_{g_{k+1}-g_k-1}$. Следовательно, используя (5.1), находим

$$w_\delta(h_{g_k}) = \frac{a}{\lambda \cdot \lambda^{g_{k+1}-g_k-1}} (F_{g_{k+1}-g_k-1+1} + F_{g_{k+1}-g_k-1}) = \frac{a}{\lambda^{g_{k+1}-g_k}} F_{g_{k+1}-g_k+1},$$

что соответствует (5.2) и полностью завершает доказательство. $\square$

Лемма 5.2. Пусть существует нетривиальное решение $v \in L_2(Q)$ задачи (3.1) с параметром $\lambda \neq 0$. Тогда найдется измеримое множество $E \subset Q$ положительной меры Лебега такое, что для всех $\delta \in E$ функция $w_\delta(p, q) = v(p + \tau q + \delta)$ корректно определена, принимает ненулевое значение в точке $(0, 0)$ ($w_\delta(0, 0) = v(\delta) \neq 0$) и удовлетворяет условиям леммы 5.1.

Обозначим через $g_0 = \min\{g \in G \mid g \geq 0\}$ минимальное число сужения, не меньшее нуля, а через $r_i = g_i - g_{i-1}$ ($i \in \mathbb{Z}$) — разности между соседними числами сужения. Пусть $s(x) = \frac{1 + (-1)^x}{2}$.

Для произвольной решетчатой линии l^m выберем $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $g_k < m \leq g_{k+1}$. Тогда значения функции w_δ в точках пересечения $l^m \cap \Pi_Q^\delta$ выражаются через значение в точке h_{g_0} следующим образом:

1). Значение в самой точке h_{g_0} можем выразить через $v(\delta)$ следующим образом:

$$w_\delta(h_{g_0}) = \begin{cases} v(\delta), & \text{если } g_0 = 0; \\ \frac{\lambda^{g_0} v(\delta)}{s(g_0 + \beta_0)F_{g_0} + s(g_0 + 1 + \beta_0)F_{g_0+1}}, & \text{если } (1, 1) \in \Pi_Q^\delta \text{ и } g_0 > 0; \\ \frac{\lambda^{g_0} v(\delta)}{s(g_0 + 1 + \beta_0)F_{g_0} + s(g_0 + \beta_0)F_{g_0+1}}, & \text{если } (-1, -1) \in \Pi_Q^\delta \text{ и } g_0 > 0, \end{cases} \quad (5.37)$$

где параметр $\beta_0 = 0, 1$ соответствует интервалу $[g_{-1}, g_0]$.

2). Значения в точках $h_{g_{k+1}}$, соответствующих другим числам сужения, выражаются через $w_\delta(h_{g_0})$:

$$w_\delta(h_{g_{k+1}}) = \begin{cases} w_\delta(h_{g_0}), & k + 1 = 0; \\ w_\delta(h_{g_0}) \prod_{i=0}^{-(k+2)} \frac{F_{r_{-i}+1}}{\lambda^{r_{-i}}}, & k + 1 < 0; \\ w_\delta(h_{g_0}) \prod_{i=1}^{k+1} \frac{\lambda^{r_i}}{F_{r_i+1}}, & k + 1 > 0. \end{cases} \quad (5.38)$$

3). Для таких m -линий, что $g_k < m < g_{k+1}$, пересечение $l^m \cap \Pi_Q^\delta$ состоит ровно из двух точек: h_m и $h_m + (1, 1)$. Значения функции в них задаются системой

$$\begin{cases} w_\delta(h_m) = \frac{s(j + \beta + 1)F_{j+1} + s(j + \beta)F_j}{\lambda^j} w_\delta(h_{g_{k+1}}), \\ w_\delta(h_m + (1, 1)) = \frac{s(j + \beta)F_{j+1} + s(j + \beta + 1)F_j}{\lambda^j} w_\delta(h_{g_{k+1}}), \end{cases} \quad (5.39)$$

где $j = g_{k+1} - m$, а параметр $\beta = 0, 1$ соответствует интервалу $[g_k, g_{k+1}]$.

Доказательство. По условию $v \neq 0$ в пространстве $L_2(Q)$. Следовательно, существуют константа $\varepsilon > 0$ и измеримое множество $E \subset Q$ с мерой $\mu(E) > 0$ такие, что $|v(\delta)| \geq \varepsilon$ для всех $\delta \in E$. В силу леммы 3.1 для почти всех $\delta \in Q$ функция $w_\delta(p, q) = v(p + \tau q + \delta)$ корректно определена и удовлетворяет задаче (3.5), (3.6). Пересекая множество E с множеством полной меры, на котором выполнена лемма 3.1, и сохраняя за пересечением обозначение E , считаем, что оба условия выполняются для всех $\delta \in E$. В частности, так как $\delta > 0$, начало координат $(0, 0)$ принадлежит $l^0 \cap \Pi_Q^\delta$, и $w_\delta(0, 0) = v(\delta) \neq 0$.

Определим $g_0 = \min\{g \in G \mid g \geq 0\}$. Выведем формулу (5.37). Если $g_0 = 0$, то, поскольку начало координат принадлежит полосе, оно обязано совпадать с точкой h_{g_0} , откуда $w_\delta(h_{g_0}) = v(\delta)$. Пусть $g_0 > 0$. В силу неограниченности множества G снизу существует предшествующее число сужения $g_{-1} < 0$. Следовательно, $0 \in (g_{-1}, g_0)$. Применим лемму 5.1, где $j = g_0 - 0 = g_0$. Воспользовавшись равенством (5.1), получим систему

$$\begin{cases} w_\delta(h_0 + \vec{s}(g_0 + \beta_0)) = \frac{F_{g_0+1}}{\lambda^{g_0}} w_\delta(h_{g_0}), \\ w_\delta(h_0 + \vec{s}(g_0 + \beta_0 + 1)) = \frac{F_{g_0}}{\lambda^{g_0}} w_\delta(h_{g_0}), \end{cases} \quad (5.40)$$

где параметр β_0 соответствует отрезку $[g_{-1}, g_0]$.

Из определения 4.3 для точки $(0, 0)$ получим

$$(0, 0) = \begin{cases} h_0, & \text{если } (1, 1) \in \Pi_Q^\delta; \\ h_0 + (1, 1), & \text{если } (-1, -1) \in \Pi_Q^\delta. \end{cases} \quad (5.41)$$

Введем функцию $s: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$, принимающую значение 0 для нечетных аргументов и значение 1 для четных: $s(x) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^x)$. Отметим, что $\vec{s}(x) = s(x) \cdot (1, 1)$. Используя результат (5.41), перепишем систему (5.40) в следующем виде:

$$w_\delta(0, 0) = \begin{cases} \frac{s(g_0 + \beta_0)F_{g_0} + s(g_0 + 1 + \beta_0)F_{g_0+1}}{\lambda^{g_0}} w_\delta(h_{g_0}), & (1, 1) \in \Pi_Q^\delta; \\ \frac{s(g_0 + 1 + \beta_0)F_{g_0} + s(g_0 + \beta_0)F_{g_0+1}}{\lambda^{g_0}} w_\delta(h_{g_0}), & (-1, -1) \in \Pi_Q^\delta. \end{cases}$$

Разрешая данное уравнение относительно $w_\delta(h_{g_0})$ и учитывая, что $w_\delta(0, 0) = v(\delta)$, получаем соотношения (5.37).

Для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ ($k + 1 \neq 0$) рассмотрим значения в точках, соответствующих числам сужения. Из леммы 5.1 имеем рекуррентное соотношение

$$w_\delta(h_{g_{i-1}}) = \frac{F_{r_i+1}}{\lambda^{r_i}} w_\delta(h_{g_i}), \quad r_i = g_i - g_{i-1}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим случай $k + 1 < 0$. Последовательно применяя это соотношение для индексов $i = 0, -1, \dots, k + 2$ (т. е. переходя от $i = 0$ к $i = -1$, затем к $i = -2$ и так далее до $i = k + 2$), получаем цепочку равенств, связывающих $w_\delta(h_{g_{k+1}})$ с $w_\delta(h_{g_0})$. Выполнив замену индекса $b = -i$, приходим к выражению

$$w_\delta(h_{g_{k+1}}) = \left(\prod_{b=0}^{-(k+2)} \frac{F_{r_{-b}+1}}{\lambda^{r_{-b}}} \right) w_\delta(h_{g_0}),$$

что соответствует случаю $k + 1 < 0$ в формуле (5.38).

В случае $k + 1 > 0$ обратим рекуррентное соотношение:

$$w_\delta(h_{g_i}) = \frac{\lambda^{r_i}}{F_{r_i+1}} w_\delta(h_{g_{i-1}}).$$

Применяя его последовательно $k + 1$ раз для $i = 1, 2, \dots, k + 1$, находим

$$w_\delta(h_{g_{k+1}}) = \left(\prod_{i=1}^{k+1} \frac{\lambda^{r_i}}{F_{r_i+1}} \right) w_\delta(h_{g_0}),$$

что доказывает случай $k + 1 > 0$ в формуле (5.38).

Наконец, рассмотрим произвольную m -линию. Если $m = g_{k+1}$, пересечение $l^m \cap \Pi_Q^\delta$ содержит единственную точку $h_{g_{k+1}}$, значение в которой уже определено. Если m таково, что $g_k < m < g_{k+1}$, то по определению 4.3 пересечение $l^m \cap \Pi_Q^\delta$ состоит ровно из двух точек: h_m и $h_m + (1, 1)$. Согласно лемме 5.1, значения функции в этих точках для $j = g_{k+1} - m$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} w_\delta(h_m + \vec{s}(j + \beta)) = \frac{F_{j+1}}{\lambda^j} w_\delta(h_{g_{k+1}}), \\ w_\delta(h_m + \vec{s}(j + \beta + 1)) = \frac{F_j}{\lambda^j} w_\delta(h_{g_{k+1}}). \end{cases}$$

Заметив, что верно представление $\vec{s}(x) = s(x) \cdot (1, 1)$, приходим к системе (5.39)

$$\begin{cases} w_\delta(h_m) = \left(s(j + \beta + 1) \frac{F_{j+1}}{\lambda^j} + s(j + \beta) \frac{F_j}{\lambda^j} \right) w_\delta(h_{g_{k+1}}), \\ w_\delta(h_m + (1, 1)) = \left(s(j + \beta) \frac{F_{j+1}}{\lambda^j} + s(j + \beta + 1) \frac{F_j}{\lambda^j} \right) w_\delta(h_{g_{k+1}}). \end{cases}$$

Лемма доказана. $\square$

Предложение 5.1. *Существуют константы $d_1, d_2 > 0$ такие, что для любого вещественного $a > 0$ и любого натурального $m \geq 2$ выполняются неравенства:*

- 1). если $a \leq 1$, то $\frac{F_{m+1}}{a^m} \geq 1 + d_1$;
- 2). если $a \geq \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, то $\frac{a^m}{F_{m+1}} \geq 1 + d_2$.

Доказательство.

1). Пусть $a \leq 1$. Поскольку $a > 0$, для любого натурального $m \geq 2$ справедливо $0 < a^m \leq 1$. Последовательность чисел Фибоначчи строго возрастает, начиная с индекса $n = 3$, поэтому $F_{m+1} \geq F_3 = 2$. Следовательно:

$$\frac{F_{m+1}}{a^m} \geq \frac{2}{1} = 2 = 1 + 1.$$

Полагая $d_1 = 1 > 0$, получаем требуемое неравенство.

2). Пусть $a \geq \varphi$. Тогда $a^m \geq \varphi^m$, и искомое отношение можно оценить снизу:

$$\frac{a^m}{F_{m+1}} \geq \frac{\varphi^m}{F_{m+1}}.$$

Выразим F_{m+1} по формуле Бине, учитывая, что $F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}$:

$$\frac{\varphi^m}{F_{m+1}} = \frac{\sqrt{5}\varphi^m}{\varphi^{m+1} - (-\varphi)^{-(m+1)}} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi + (-1)^m \varphi^{-2m-1}}.$$

Исследуем знаменатель $D(m) = \varphi + (-1)^m \varphi^{-2m-1}$ на множестве $m \geq 2$. Так как $\varphi > 1$, величина φ^{-2m-1} строго положительна и монотонно убывает с ростом m . Следовательно, своего максимума знаменатель $D(m)$ достигает при наименьшем четном значении аргумента, то есть при $m = 2$:

$$D(m) \leq D(2) \quad \text{для всех } m \geq 2.$$

Поскольку знаменатель ограничен сверху величиной $D(2)$, рассматриваемое отношение ограничено снизу своим точным значением при $m = 2$

$$\frac{a^m}{F_{m+1}} \geq \frac{\varphi^m}{F_{m+1}} \geq \frac{\varphi^2}{F_3} = \frac{\varphi^2}{2}.$$

Подставляя $\varphi^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, окончательно находим

$$\frac{a^m}{F_{m+1}} \geq \frac{3 + \sqrt{5}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Поскольку $\sqrt{5} > 1$, величина $d_2 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ строго больше нуля. □

6. ОЦЕНКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Теорема 6.1. Все собственные значения оператора R_Q принадлежат множеству $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \in \{0\} \cup (1, \varphi)\}$. Здесь и далее $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует нетривиальное решение $v(t) \in L_2(Q)$ задачи (3.1) при $|\lambda| \notin \{0\} \cup (1, \varphi)$. Из нашего предположения следует, что либо $0 < |\lambda| \leq 1$, либо $|\lambda| \geq \varphi$. Продолжим функцию $v(t)$ нулем вне интервала Q .

В силу леммы 5.2 существуют константа $\varepsilon > 0$ и измеримое множество $E \subset Q$ с мерой Лебега $\mu(E) > 0$ такие, что для всех $\delta \in E$ функция $w_\delta(p, q) = v(p + \tau q + \delta)$ корректно определена на решетке $\mathbb{Z}^2$, $|w_\delta(0, 0)| = |v(\delta)| \geq \varepsilon$, и для нее справедливы формулы (5.37), (5.38) и (5.39).

1) В зависимости от λ построим последовательность $\{(p^{(i)}, q^{(i)})\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^2$ такую, что

- 1). $x_i := p^{(i)} + \tau q^{(i)} \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, причем $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ строго убывает;
- 2). $\lim_{i \rightarrow \infty} (q^{(i)} - p^{(i)}) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } |\lambda| \geq \varphi, \\ -\infty, & \text{если } 0 < |\lambda| \leq 1. \end{cases}$

Для этого воспользуемся теорией цепных дробей [16]. Разложим иррациональное число $\tau \in (0, 9, 1)$ в бесконечную цепную дробь. Пусть P_n/Q_n — последовательность ее подходящих дробей. Известно, что $0 < |Q_n \tau - P_n| < 1/Q_n$, причем разность $Q_n \tau - P_n$ знакоперебывает: для четных n она положительна, а для нечетных — отрицательна.

В случае $|\lambda| \geq \varphi$ выберем последовательность четных подходящих дробей. Положим $q^{(i)} = Q_{n_i}$ и $p^{(i)} = -P_{n_i}$. Тогда $x_i = Q_{n_i} \tau - P_{n_i} > 0$, $x_i \rightarrow 0^+$, а $q^{(i)} - p^{(i)} = Q_{n_i} + P_{n_i} \rightarrow +\infty$.

В случае $0 < |\lambda| \leq 1$ выберем последовательность нечетных подходящих дробей. Положим $q^{(i)} = -Q_{n_i}$ и $p^{(i)} = P_{n_i}$. Тогда $x_i = -(Q_{n_i} \tau - P_{n_i}) > 0$, $x_i \rightarrow 0^+$, а $q^{(i)} - p^{(i)} = -Q_{n_i} - P_{n_i} \rightarrow -\infty$.

В обоих случаях выберем подпоследовательности так, чтобы $x_i \searrow 0$. При этом свойства $\lim_{i \rightarrow \infty} (q^{(i)} - p^{(i)})$ сохраняются.

II) Оценим снизу модуль значения $|w_\delta(p^{(i)}, q^{(i)})|$ для $\delta \in E$ таких, что $\delta + x_i \in Q$. Воспользуемся формулой (5.37). Поскольку функция s принимает только значения 0 и 1, знаменатели в дробях не превосходят $F_{g_0} + F_{g_0+1} = F_{g_0+2}$. Оценивая модуль $w_\delta(h_{g_0})$, находим:

$$|w_\delta(h_{g_0})| \geq \begin{cases} \varepsilon, & g_0 = 0; \\ \frac{|\lambda|^{g_0}}{F_{g_0+2}} \varepsilon, & g_0 > 0. \end{cases}$$

В силу предложения 4.1 выберем не зависящую от δ общую верхнюю грань R для всех r_k . Поскольку $g_{-1} < 0 \leq g_0$ и $g_0 - g_{-1} = r_0 \leq R$, имеем $0 \leq g_0 < R$. Следовательно, множество возможных значений g_0 конечно. Тогда, обозначив $c := \min_{0 \leq g \leq R} \left\{ 1, \frac{|\lambda|^g}{F_{g+2}} \right\} > 0$, получаем равномерную по δ оценку

$$|w_\delta(h_{g_0})| \geq c\varepsilon. \quad (6.1)$$

Точка $(p^{(i)}, q^{(i)})$ лежит на m_i -линии, где $m_i = q^{(i)} - p^{(i)}$. Для каждого δ выберем $k_i = k_i(\delta) \in \mathbb{Z}$ так, что $g_{k_i} < m_i \leq g_{k_i+1}$; далее зависимость k_i от δ в обозначениях опускаем. Положим $j = g_{k_i+1} - m_i$, тогда $0 \leq j \leq g_{k_i+1} - g_{k_i} - 1 < R$.

Если $j = 0$, то $m_i = g_{k_i+1}$, и $|w_\delta(p^{(i)}, q^{(i)})| = |w_\delta(h_{g_{k_i+1}})|$. Если $j \geq 1$, то воспользуемся системой (5.39) леммы 5.2. Числители ограничены снизу F_j , отсюда верна оценка

$$|w_\delta(p^{(i)}, q^{(i)})| \geq \frac{F_j}{|\lambda|^j} |w_\delta(h_{g_{k_i+1}})|.$$

Введем не зависящую от δ константу $c_1 := \min_{1 \leq j < R} \left\{ 1, \frac{F_j}{|\lambda|^j} \right\} > 0$. Тогда для всех i выполняется

$$|w_\delta(p^{(i)}, q^{(i)})| \geq c_1 |w_\delta(h_{g_{k_i+1}})|. \quad (6.2)$$

Далее применим формулы (5.38). Переходя к модулям и учитывая оценку (6.1), находим

$$|w_\delta(h_{g_{k_i+1}})| \geq \begin{cases} c\varepsilon, & k_i + 1 = 0; \\ c\varepsilon \prod_{b=0}^{-(k_i+2)} \frac{F_{r_{-b}+1}}{|\lambda|^{r_{-b}}}, & k_i + 1 < 0; \\ c\varepsilon \prod_{b=1}^{k_i+1} \frac{|\lambda|^{r_b}}{F_{r_b+1}}, & k_i + 1 > 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

Из построения последовательности $(p^{(i)}, q^{(i)})$ имеем $m_i \rightarrow +\infty$ при $|\lambda| \geq \varphi$ и $m_i \rightarrow -\infty$ при $0 < |\lambda| \leq 1$. Поскольку $0 \leq g_0 < R$ и $r_k \leq R$ равномерно по δ , для всех достаточно больших i знак $k_i + 1$ совпадает со знаком m_i , причем

$$|k_i + 1| > \frac{|m_i|}{R} - 1$$

равномерно по δ .

Для достаточно больших i объединим оценки (6.2) и (6.3), и получим

$$|w_\delta(p^{(i)}, q^{(i)})| \geq \begin{cases} c_1 c\varepsilon \prod_{b=0}^{-(k_i+2)} \frac{F_{r_{-b}+1}}{|\lambda|^{r_{-b}}}, & \text{если } 0 < |\lambda| \leq 1 \text{ } (k_i + 1 < 0); \\ c_1 c\varepsilon \prod_{b=1}^{k_i+1} \frac{|\lambda|^{r_b}}{F_{r_b+1}}, & \text{если } |\lambda| \geq \varphi \text{ } (k_i + 1 > 0). \end{cases} \quad (6.4)$$

По предложению 5.1 каждый множитель в (6.4) строго больше $1 + d$ для некоторого $d > 0$, не зависящего от i и δ . При этом количество сомножителей равно $|k_i + 1|$, следовательно, справедлива оценка

$$|v(\delta + x_i)| = |w_\delta(p^{(i)}, q^{(i)})| \geq c_1 c\varepsilon (1 + d)^{\frac{|m_i|}{R} - 1} =: M_i. \quad (6.5)$$

Поскольку $|m_i| \rightarrow \infty$, последовательность не зависящих от δ констант M_i стремится к бесконечности при $i \rightarrow \infty$.

III) Получим противоречие, используя свойства интеграла Лебега. Рассмотрим множества $E_i := (E + x_i) \cap Q$, где

$$E + x_i = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \delta_x \in E : x = \delta_x + x_i\}.$$

Отметим, что на E_i справедлива оценка модуля функции (6.5), так как $(\delta + x_i) \in E_i$. Сдвинем эти множества обратно на x_i , обозначим

$$\tilde{E}_i := E_i - x_i = E \cap (Q - x_i).$$

Поскольку $Q = (0, \pi)$ и $x_i > 0$, имеем $Q - x_i = (-x_i, \pi - x_i)$. В силу $E \subset (0, \pi)$ пересечение принимает вид $\tilde{E}_i = E \cap (0, \pi - x_i)$. В силу строгой монотонности убывания $x_i \searrow 0$ правые границы интервалов $(0, \pi - x_i)$ строго возрастают, образуя цепочку вложенных измеримых множеств

$$\tilde{E}_1 \subset \tilde{E}_2 \subset \dots \subset \tilde{E}_i \subset \dots \subset E,$$

при этом $\bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{E}_i = E$. В силу инвариантности относительно сдвига меры Лебега ($\mu(E_i) = \mu(\tilde{E}_i)$) и ее непрерывности снизу для счетного объединения вложенных измеримых множеств [9], получаем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(\tilde{E}_i) = \mu(E) > 0.$$

Оценим норму функции v в пространстве $L_2(Q)$. Интегрируя квадрат модуля по измеримому множеству $E_i \subset Q$ и делая замену переменной $t = \delta + x_i$, находим

$$\int_{E_i} |v(t)|^2 dt = \int_{\tilde{E}_i} |v(\delta + x_i)|^2 d\delta.$$

Для $v(\delta + x_i)$ при $\delta \in \tilde{E}_i$ верна оценка (6.5); отсюда получим

$$\int_{\tilde{E}_i} |v(\delta + x_i)|^2 d\delta \geq \int_{\tilde{E}_i} M_i^2 d\delta = M_i^2 \mu(\tilde{E}_i).$$

Так как при достаточно больших i мера множества интегрирования $\mu(\tilde{E}_i)$ отделена от нуля (стремится к $\mu(E) > 0$), а $M_i \rightarrow +\infty$, интеграл Лебега неограниченно возрастает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{E_i} |v(t)|^2 dt = +\infty.$$

Однако $E_i \subset Q$, поэтому для функции из $L_2(Q)$ должно выполняться $\int_{E_i} |v(t)|^2 dt \leq \|v\|_{L_2(Q)}^2 < +\infty$.

Полученное противоречие означает, что функция v не может принадлежать пространству $L_2(Q)$. Следовательно, изначальное предположение о существовании нетривиального решения неверно, что завершает доказательство. $\square$

7. СЛУЧАЙ $\lambda = 0$

Рассмотрим теперь случай $\lambda = 0$. Найдем все функции $v \in L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющие разностному уравнению

$$v(t - 1) + v(t + \tau) = 0, \quad t \in Q \tag{7.1}$$

и граничному условию

$$v(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus Q, \tag{7.2}$$

где $Q = (0, \pi)$, τ — такое иррациональное число, что $0,9 < \tau < 1$.

Лемма 7.1. *Множество решений $v \in L_2(\mathbb{R})$ задачи (7.1)–(7.2) непусто и исчерпывается функциями вида*

$$v(t) = \begin{cases} f(t), & t \in (\pi - 2 - \tau, \tau); \\ -f(t - 1 - \tau), & t \in (\pi - 1, 1 + 2\tau); \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus ((\pi - 2 - \tau, \tau) \cup (\pi - 1, 1 + 2\tau)), \end{cases} \tag{7.3}$$

где $f \in L_2(\pi - 2 - \tau, \tau)$ — произвольная функция. Таким образом, $\lambda_0 = 0$ является собственным значением бесконечной кратности.

Доказательство. Исследуем носитель функции v . В силу граничного условия (7.2), если один из смещенных аргументов в уравнении (7.1) выходит за пределы интервала $(0, \pi)$, то соответствующее слагаемое обнуляется. Это, в свою очередь, влечет обнуление функции и в другой точке, так как имеет место равенство

$$v(t - 1) = -v(t + \tau). \quad (7.4)$$

Воспользуемся граничными условиями (7.2). Для этого рассмотрим разбиение интервала $(0, \pi) = (0, 1) \cup (\pi - \tau, \pi) \cup [1, \pi - \tau]$.

Пусть $t \in (0, 1)$. Тогда $t - 1 \in (-1, 0)$, следовательно, $v(t - 1) = 0$ почти всюду. Из уравнения (7.4) получим, что $v(t + \tau) = 0$. Выполнив замену переменной $s = t + \tau$, получаем, что $v(s) = 0$ почти всюду на интервале $s \in (\tau, 1 + \tau)$.

Пусть $t \in (\pi - \tau, \pi)$. Тогда $t + \tau \in (\pi, \pi + \tau)$, следовательно, $v(t + \tau) = 0$ почти всюду. Из уравнения (7.4) получаем $v(t - 1) = 0$. Тогда при $s = t - 1$ имеем, что $v(s) = 0$ почти всюду на интервале $s \in (\pi - 1 - \tau, \pi - 1)$.

Рассмотрим объединение полученных интервалов $(\tau, 1 + \tau) \cup (\pi - 1 - \tau, \pi - 1)$. Из оценок $0,9 < \tau < 1$ и $3,14 < \pi < 3,15$ вытекают следующие двусторонние неравенства:

$$1,14 < \pi - 1 - \tau < 1,25,$$

$$1,9 < 1 + \tau < 2.$$

Поскольку левый конец первого интервала ($\tau < 1$) строго меньше правого конца второго ($\pi - 1 > 2,14$), а левый конец второго ($\pi - 1 - \tau < 1,25$) строго меньше правого конца первого ($1 + \tau > 1,9$), их объединение образует единый сплошной интервал $(\tau, \pi - 1)$, для которого почти всюду верно равенство

$$v(t) = 0, \quad t \in (\tau, \pi - 1). \quad (7.5)$$

Рассмотрим теперь оставшиеся значения $t \in [1, \pi - \tau]$. Для них оба смещенных аргумента $t - 1$ и $t + \tau$ лежат внутри отрезка $[0, \pi]$. Воспользуемся установленным свойством (7.5).

Если $t - 1 \in (\tau, \pi - 1)$, то $t \in (1 + \tau, \pi)$. Пересекая этот интервал с рассматриваемым отрезком $[1, \pi - \tau]$, получаем полуинтервал $(1 + \tau, \pi - \tau]$. Данное пересечение непусто в силу цепочки неравенств $1 < 1 + \tau < 2,14 < \pi - \tau < \pi$. Для таких t имеем $v(t - 1) = 0$, а значит, в силу равенства (7.4), $v(t + \tau) = 0$. Обозначая $s = t + \tau \in (1 + 2\tau, \pi]$, получаем

$$v(s) = 0, \quad s \in (1 + 2\tau, \pi]. \quad (7.6)$$

Аналогично, если $t + \tau \in (\tau, \pi - 1)$, то $t \in (0, \pi - 1 - \tau)$. Пересечение с отрезком $[1, \pi - \tau]$ дает множество $t \in [1, \pi - 1 - \tau)$. В этом случае $v(t + \tau) = 0$, откуда следует $v(t - 1) = 0$. Полагая $s = t - 1 \in [0, \pi - 2 - \tau)$, получаем

$$v(s) = 0, \quad s \in [0, \pi - 2 - \tau). \quad (7.7)$$

Объединяя результаты (7.5), (7.6) и (7.7) с граничным условием вне Q , заключаем, что функция $v(t)$ с точностью до множества меры нуль может быть отлична от нуля лишь на двух непересекающихся множествах

$$(\pi - 2 - \tau, \tau) \quad \text{и} \quad (\pi - 1, 1 + 2\tau).$$

Отметим, что первый интервал переходит во второй при сдвиге на $1 + \tau$. Пусть на первом из этих интервалов функция задается произвольной функцией $f \in L_2(\pi - 2 - \tau, \tau)$, то есть $v(t) = f(t)$.

Рассмотрим независимую переменную $s \in (\pi - 1, 1 + 2\tau)$. Представим ее в виде $s = t + \tau$, тогда $t - 1 = s - 1 - \tau \in (\pi - 2 - \tau, \tau)$. В силу (7.4) получаем

$$v(t - 1) = -v(t + \tau), \quad \text{что эквивалентно} \quad v(s) = -v(s - 1 - \tau).$$

Следовательно, значения функции для $s \in (\pi - 1, 1 + 2\tau)$ однозначно определяются значениями на $(\pi - 2 - \tau, \tau)$ и $v(s) = -f(s - 1 - \tau)$. Таким образом, из уравнения (7.1) и граничного условия (7.2) следует необходимость того, что любое нетривиальное решение v имеет вид (7.3).

Для доказательства достаточности убедимся, что любая функция вида (7.3) удовлетворяет исходной задаче. Действительно, прямая проверка показывает, что при подстановке (7.3) в уравнение (7.1) ненулевые слагаемые попарно сокращаются по построению, а в остальных точках обращаются в нуль.

Таким образом, точка $\lambda_0 = 0$ является собственным значением бесконечной кратности. $\square$

В заключение отметим возможные направления дальнейшего исследования. В частности, представляет интерес спектральная задача для операторов

$$(R_{a,b}v)(t) = av(t-1) + bv(t+\tau), \quad a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

В этом случае геометрия решетчатой полосы сохраняется, однако рекуррентные соотношения для значений решения зависят от коэффициентов a и b . Представляет интерес также исследование разностных операторов с большим числом несоизмеримых сдвигов, для которых соответствующая решетчатая структура становится существенно более сложной. Получение спектральных оценок в этих случаях выходит за рамки настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об успокоении системы управления с последствием нейтрального типа // Докл. РАН. Сер. Мат., инф., проц. упр. — 2020. — 490. — С. 81–84. — DOI: [10.31857/S2686954320010038](https://doi.org/10.31857/S2686954320010038).
2. Воротников Р. Ю., Скубачевский А. Л. Гладкость обобщенных собственных функций дифференциально-разностных операторов на конечном интервале // Мат. заметки. — 2023. — 114, № 5. — С. 679–701. — DOI: [10.4213/mzm14050](https://doi.org/10.4213/mzm14050).
3. Иванова Е. П. Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — 59. — С. 74–96.
4. Иванова Е. П. О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — 62. — С. 85–99.
5. Иванова Е. П. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с конечными и бесконечными орбитами границ // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — 69, № 4. — С. 664–675. — DOI: [10.22363/2413-3639-2023-69-4-664-675](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-664-675).
6. Каменский А. Г. Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами // Дифф. уравн. — 1976. — 12, № 5. — С. 815–824.
7. Каменский Г. А., Мышкис А. Д. К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами // Дифф. уравн. — 1974. — 10, № 3. — С. 409–418.
8. Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л. О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа // Укр. мат. ж. — 1985. — 37, № 5. — С. 581–589.
9. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
10. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
11. Осипов Ю. С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифф. уравн. — 1965. — 1, № 5. — С. 605–618.
12. Скубачевский А. Л. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами // Докл. РАН. — 1992. — 324, № 6. — С. 1155–1158.
13. Скубачевский А. Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Усп. мат. наук. — 2016. — 71, № 5. — С. 3–112. — DOI: [10.4213/rm9739](https://doi.org/10.4213/rm9739).
14. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений // Докл. РАН. Сер. Мат., инф., проц. упр. — 2021. — 500. — С. 74–77. — DOI: [10.31857/S2686954321050155](https://doi.org/10.31857/S2686954321050155).
15. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на интервале нецелой длины // Мат. заметки. — 2022. — 111, № 6. — С. 873–886. — DOI: [10.4213/mzm13439](https://doi.org/10.4213/mzm13439).
16. Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: Физматлит, 1961.
17. Adkhamova A. Sh., Skubachevskii A. L. Damping problem for a neutral control system with delay // Dokl. Math. — 2020. — 101, № 1. — С. 68–70. — DOI: [10.1134/S1064562420010032](https://doi.org/10.1134/S1064562420010032).

18. *Ivanova E. P.* Boundary-value problems for differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments reducible to nonlocal problems // *J. Math. Sci. (N. Y.)*. — 2022. — 265, № 5. — С. 781–790. — DOI: [10.1007/s10958-022-06084-4](https://doi.org/10.1007/s10958-022-06084-4).
19. *Skubachevskii A. L.* Boundary value problems for differential-difference equations with incommensurable shifts // *Dokl. Math.* — 1992. — 45, № 3. — С. 695–699.
20. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1997. — DOI: [10.1007/978-3-0348-9033-5](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9033-5).
21. *Skubachevskii A. L.* Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem // *Math. Nachr.* — 2018. — 291. — С. 2660–2692. — DOI: [10.1002/mana.201700475](https://doi.org/10.1002/mana.201700475).
22. *Vorotnikov R. Yu., Skubachevskii A. L.* Smoothness of generalized eigenfunctions of differential-difference operators on a finite interval // *Math. Notes*. — 2023. — 114, № 5. — С. 1002–1020. — DOI: [10.1134/s0001434623110329](https://doi.org/10.1134/s0001434623110329).

А. С. Кириленко

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: kirilenko-as@rudn.ru, РИНЦ SPIN-код: 6311-9225, РИНЦ AuthorID: [1343643](https://elibrary.ru/author_index.aspx?author_id=1343643),
ORCID: [0009-0009-3495-8093](https://orcid.org/0009-0009-3495-8093)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-499-523](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-499-523)
EDN: [QMHBXXW](https://elibrary.ru/qmhbxxw)

UDC 517.929.7
Research article

On the spectral properties of a difference operator with incommensurable shifts on a finite interval

A. S. Kirilenko

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. The paper studies the spectral problem for a difference operator with incommensurable shifts on a finite interval. Such operators arise in the analysis of boundary value problems for differential-difference equations. The spectral problem is investigated by passing to a discrete problem on a strip in the integer lattice. Using an analysis of the geometry of this strip and the associated recurrence relations, a localization estimate for the eigenvalues on the complex plane is obtained. It is established that the modulus of every nonzero eigenvalue is strictly greater than one and strictly less than $(1 + \sqrt{5})/2$. In addition, zero is proved to be an eigenvalue of infinite multiplicity.

Keywords: differential-difference equation, difference operator, incommensurable shifts of arguments, spectral problem, localization of eigenvalues.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author is sincerely grateful to A. L. Skubachevskii, S. B. Kuksin, and L. E. Rossovskii for their valuable advice and interest in this work. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the state assignment (project No. FSSF-2026-0013).

For citation: A. S. Kirilenko, “On the spectral properties of a difference operator with incommensurable shifts on a finite interval,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 3, 499–523. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-499-523](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-499-523) EDN: [QMHBXXW](https://elibrary.ru/qmhbxxw)



REFERENCES

1. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem neytral’nogo tipa” [Damping of a control system with aftereffect of neutral type], *Dokl. RAN. Ser. Mat., Inf., Prots. Upr.* [Rep. Russ. Acad. Sci. Math. Inf. Control], 2020, **490**, 81–84 (in Russian), DOI: [10.31857/S2686954320010038](https://doi.org/10.31857/S2686954320010038).
2. R. Yu. Vorotnikov and A. L. Skubachevskii, “Gladkost’ obobshchennykh sobstvennykh funktsiy differentsial’no-raznostnykh operatorov na konechnom intervale” [Smoothness of generalized eigenfunctions of differential–difference operators on a finite interval], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2023, **114**, No. 5, 679–701 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm14050](https://doi.org/10.4213/mzm14050).
3. E. P. Ivanova, “Nepreryvnaya zavisimost’ resheniy kraevykh zadach dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy ot sdvigo argumenta” [Continuous dependence on translations of the independent variable for solutions of boundary-value problems for differential–difference equations], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **59**, 74–96 (in Russian).
4. E. P. Ivanova, “O koertsitivnosti differentsial’no-raznostnykh uravneniy s nesoizmerimymi sdvigami argumentov” [On coercivity of differential–difference equations with incommensurable translations of arguments], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **62**, 85–99 (in Russian).
5. E. P. Ivanova, “Kraevye zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s konechnymi i beskonechnymi orbitami granits” [Boundary-value problems for differential–difference equations with finite and infinite orbits of boundaries], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 4, 664–675 (in Russian), DOI: [10.22363/2413-3639-2023-69-4-664-675](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-664-675).
6. A. G. Kamenskii, “Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal’no simmetrichnymi differentsial’no-raznostnymi operatorami” [Boundary value problems for equations with formally symmetric differential–difference operators], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **12**, No. 5, 815–824 (in Russian).
7. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, “K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom i neskol’kimi starshimi chlenami” [On the formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating argument and multiple higher-order terms], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, No. 3, 409–418 (in Russian).
8. G. A. Kamenskii, A. D. Myshkis, and A. L. Skubachevskii, “O gladkikh resheniyakh kraevoy zadachi dlya differentsial’no-raznostnogo uravneniya neytral’nogo tipa” [On smooth solutions of a boundary-value problem for a neutral-type differential–difference equation], *Ukr. Mat. Zh.* [Ukr. Math. J.], 1985, **37**, No. 5, 581–589 (in Russian).
9. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional’nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
10. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineynye sistemy* [Motion Control Theory. Linear Systems], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
11. Yu. S. Osipov, “O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem” [On the stabilization of control systems with time delay], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).
12. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s nesoizmerimymi sdvigami” [Boundary-value problems for differential–difference equations with incommensurable shifts], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1992, **324**, No. 6, 1155–1158 (in Russian).
13. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian), DOI: [10.4213/rm9739](https://doi.org/10.4213/rm9739).
14. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [Vtoraya kraevaya zadacha dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy], *Dokl. RAN. Ser. Mat., Inf., Prots. Upr.* [Rep. Russ. Acad. Sci. Math. Inf. Control], 2021, **500**, 74–77 (in Russian), DOI: [10.31857/S2686954321050155](https://doi.org/10.31857/S2686954321050155).
15. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, “Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami na intervale netseloy dliny” [Generalized solutions of the second boundary-value problem for differential–difference equations with variable coefficients on intervals of noninteger length], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2022, **111**, No. 6, 873–886 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm13439](https://doi.org/10.4213/mzm13439).
16. A. Ya. Khinchin, *Tsepnnye drobi* [Continued Fractions], Fizmatlit, Moscow, 1961 (in Russian).
17. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Damping problem for a neutral control system with delay,” *Dokl. Math.*, 2020, **101**, No. 1, 68–70, DOI: [10.1134/S1064562420010032](https://doi.org/10.1134/S1064562420010032).

18. E. P. Ivanova, “Boundary-value problems for differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments reducible to nonlocal problems,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2022, **265**, No. 5, 781–790, DOI: [10.1007/s10958-022-06084-4](https://doi.org/10.1007/s10958-022-06084-4).
19. A. L. Skubachevskii, “Boundary value problems for differential-difference equations with incommensurable shifts,” *Dokl. Math.*, 1992, **45**, No. 3, 695–699.
20. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 1997, DOI: [10.1007/978-3-0348-9033-5](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9033-5).
21. A. L. Skubachevskii, “Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem,” *Math. Nachr.*, 2018, **291**, 2660–2692, DOI: [10.1002/mana.201700475](https://doi.org/10.1002/mana.201700475).
22. R. Yu. Vorotnikov and A. L. Skubachevskii, “Smoothness of generalized eigenfunctions of differential-difference operators on a finite interval,” *Math. Notes*, 2023, **114**, No. 5, 1002–1020, DOI: [10.1134/s0001434623110329](https://doi.org/10.1134/s0001434623110329).

A. S. Kirilenko

RUDN University, Moscow, Russia

E-mail: kirilenko-as@rudn.ru, eLIBRARY SPIN-code: 6311-9225, eLIBRARY AuthorID: [1343643](https://elibrary.ru/1343643),

ORCID: [0009-0009-3495-8093](https://orcid.org/0009-0009-3495-8093)