

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. И. КАМЕНСКИЙ, Г. Г. ПЕТРОСЯН, М. С. СОРОКА

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В настоящей работе доказываются локальная и глобальная теоремы о существовании интегральных решений задачи Коши для класса полулинейных дифференциальных включений смешанного типа с отклоняющимся аргументом в банаховых пространствах. Для доказательства используются топологические методы нелинейного анализа для многозначных уплотняющих отображений.

Ключевые слова: дробная производная, дифференциальное включение, полугруппа операторов, многозначное отображение, уплотняющий мультиоператор, неподвижная точка, запаздывание.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Каменский М. И. — концепция исследования, построение разрешающего мультиоператора; Петросян Г. Г. — вывод формулы интегрального решения; Сорока М. С. — исследование свойств разрешающего мультиоператора.

Для цитирования: Каменский М. И., Петросян Г. Г., Сорока М. С. О задаче Коши для функционально-дифференциальных включений смешанного типа в банаховых пространствах // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 3. С. 484–498. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-484-498](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-484-498) EDN: [QMEICY](https://www.edn.ru/qmeicy)

*Посвящается 100-летию со дня рождения
выдающегося математика Г. А. Каменского*

1. ВВЕДЕНИЕ

В современной математике существенную роль играют исследования в области дробного анализа, а также дифференциальных уравнений и включений дробного порядка. Актуальность этих направлений обусловлена большим количеством приложений в прикладной математике, физике, технических науках, биологии, экономике и других областях (см., например, монографии [18–20] и имеющуюся в них библиографию). На сегодняшний день разработаны различные методы исследования начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений и включений дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$ (см. статьи [3–5, 8, 10, 13, 15, 17] и ссылки в них). В отличие от хорошо изученных задач для дифференциальных включений дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$, аналогичные исследования для случая порядка из интервала $(1, 2)$ пока не получили столь широкого развития. Тем не менее, в последнее время в данном направлении уже достигнуты определенные научные результаты, о чем свидетельствуют публикации [7, 9, 14, 21]. Большой научный интерес представляют

исследования дифференциальных уравнений и включений смешанного типа, содержащих как дробные, так и целочисленные производные. В скалярном случае подобные задачи были решены, что отражено, в частности, в пятой главе монографии [18]. Однако изучение вопросов разрешимости таких уравнений и включений в бесконечномерных пространствах остается перспективной и актуальной научной проблемой, требующей дальнейших исследований (см., например, монографию [12]). Особый интерес представляет случай, когда нелинейность, стоящая в правой части исследуемого уравнения или включения зависит в явном виде от предыстории процесса, то есть описывается членами с запаздыванием по классификации Г. А. Каменского (см. [6]).

В настоящей статье в сепарабельном банаховом пространстве E мы исследуем задачу Коши для нелинейного функционально-дифференциального включения

$$x'(t) + {}^{GC}D_0^\alpha x(t) \in Ax(t) + F(t, x_t), \quad t \in [0, a], \quad (1.1)$$

$$x(s) = \vartheta(s), \quad s \in [-h, 0], \quad (1.2)$$

где ${}^{GC}D_0^\alpha$ — дробная производная Герасимова—Капуто порядка $0 < \alpha < 1$, $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ — линейный замкнутый оператор (необязательно ограниченный), порождающий равномерно ограниченную C_0 -полугруппу операторов $\{T(t)\}_{t \in [0, a]}$. Многозначное отображение $F : [0, a] \times C([-h, 0]; E) \rightarrow E$ имеет выпуклые компактные значения, $x_t \in C([-h, 0]; E)$ — предыстория функции до момента $t \in [0, a]$, т. е. $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$, и функция $\vartheta \in C([-h, 0]; E)$ наперед задана.

С помощью теории топологической степени уплотняющих многозначных отображений (см., например, [16]) в настоящей статье доказывается существование интегральных решений задачи (1.1)-(1.2). Идея решения состоит в следующем: исходная задача сводится к задаче о существовании неподвижных точек соответствующего разрешающего интегрального мультиоператора в пространстве непрерывных функций. Для доказательства существования неподвижных точек разрешающего мультиоператора будет использоваться теорема типа теоремы Б. Н. Садовского о неподвижной точке (см., например, [1, 16]). Для этого мы показываем, что разрешающий интегральный мультиоператор является уплотняющим относительно векторной меры некомпактности в пространстве непрерывных функций и преобразует замкнутый шар в этом пространстве в себя.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть E — банахово пространство. Кратко напомним определения (см. [18, 20]).

Определение 2.1. Дробным интегралом порядка $\alpha > 0$ функции $g \in L^1([0, a]; E)$ называется функция

$$I_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Определение 2.2. Дробной производной Герасимова — Капуто порядка $\alpha \geq 0$ функции $g \in C^n([0, a]; E)$ называется функция ${}^{GC}D_0^\alpha g$ следующего вида:

$${}^{GC}D_0^\alpha g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} g^{(n)}(s) ds, \quad n = [\alpha] + 1.$$

В дальнейшем нам потребуется бета-функция

$$B(z, w) = \int_0^1 x^{z-1} (1-x)^{w-1} dx, \quad z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}, \quad (2.1)$$

связанная с гамма-функцией посредством известного равенства (см., например, [18, п. 1.5])

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}. \quad (2.2)$$

В дробном исчислении важное значение имеют *функция Миттаг-Леффлера*

$$E_{\alpha}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad \alpha > 0, t \in \mathbb{C},$$

и так называемая *функция Райта–Маинарди* (см. [19, формула (B.28)])

$$\Phi_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{-\alpha k - 1}}{k! \Gamma(-\alpha k)}.$$

Многозначные отображения и меры некомпактности. Напомним некоторые понятия и утверждения из многозначного анализа (см., монографии [2, 16]). Введем следующие обозначения:

- $P(E) = \{A \subseteq E : A \neq \emptyset\}$;
- $Pb(E) = \{A \in P(E) : A \text{ — ограничено}\}$;
- $Pv(E) = \{A \in P(E) : A \text{ — выпукло}\}$;
- $K(E) = \{A \in P(E) : A \text{ — компактно}\}$;
- $Kv(E) = Pv(E) \cap K(E)$.

Определение 2.3 (см., например, [1, 16]). Пусть $(\mathcal{A}, \geq)$ — частично упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(E) \rightarrow \mathcal{A}$ называется *мерой некомпактности* (далее МНК) в E , если для любого $\Omega \in Pb(E)$ выполняется $\beta(\overline{\text{co}} \Omega) = \beta(\Omega)$, где $\overline{\text{co}} \Omega$ обозначает замыкание выпуклой оболочки Ω .

МНК β называется:

- (а) *монотонной*, если для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(E)$, из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;
- (б) *несингулярной*, если для любого $a \in E$ и любого $\Omega \in Pb(E)$ выполнено $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$;
- (с) *вещественной*, если $\mathcal{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным упорядочением.

Если $\mathcal{A}$ — конус в банаховом пространстве, то β называется:

- (д) *алгебраически полуаддитивной*, если $\beta(\Omega_0 + \Omega_1) \leq \beta(\Omega_0) + \beta(\Omega_1)$ для любых $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(E)$;
- (е) *правильной*, если $\beta(\Omega) = 0$ равносильно относительной компактности Ω .

Примером вещественной меры некомпактности в пространстве E , обладающей всеми выше перечисленными свойствами, является *МНК Хаусдорфа*:

$$\chi_E(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{ для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть}\}.$$

Пусть X — метрическое пространство.

Определение 2.4 (см. монографии [2, 16]). Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathcal{F} : X \rightarrow P(E)$ называется:

- (i) *полу непрерывным сверху (п.н.св.)*, если $\mathcal{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathcal{F}(x) \subset V\}$ — открытое подмножество X для любого открытого множества $V \subset E$;
- (ii) *замкнутым*, если график $\Gamma_{\mathcal{F}} = \{(x, y) : y \in \mathcal{F}(x)\}$ — замкнутое подмножество $X \times E$;
- (iii) *компактным*, если $\mathcal{F}(X)$ относительно компактно в E ;
- (iv) *квазикompактным*, если сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Лемма 2.1 (см. [16, теорема 1.1.12]). Пусть X и Y — метрические пространства и $\mathcal{F} : X \rightarrow K(Y)$ — замкнутое квазикompактное мультиотображение, тогда $\mathcal{F}$ — п.н.св.

Определение 2.5. Мультиотображение $\mathcal{F} : M \subseteq E \rightarrow K(E)$ называется *уплотняющим* относительно МНК β (β -уплотняющим), если для любого ограниченного множества $\Omega \subseteq M$, не являющегося относительно компактным, выполнено $\beta(\mathcal{F}(\Omega)) \not\leq \beta(\Omega)$.

Справедливы следующие теоремы для уплотняющих мультиотображений, обобщающие известную теорему о неподвижной точке Б. Н. Садовского (см., [1, теорема 1.5.11]).

Теорема 2.1 (см. [16, следствие 3.3.1]). Пусть M — выпуклое замкнутое подмножество E и $\mathcal{F} : M \rightarrow Kv(M)$ — замкнутое β -уплотняющее мультиотображение, где β — несингулярная МНК в E . Тогда множество $\text{Fix } \mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ неподвижных точек $\mathcal{F}$ есть непустое множество.

Теорема 2.2 (см. [16, предложение 3.5.1]). Пусть $\mathcal{M}$ — выпуклое замкнутое подмножество E и $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow K(E)$ — замкнутое β -уплотняющее мультиотображение, где β — монотонная МНК в E . Если множество $\text{Fix } \mathcal{F} := \{x : x \in \mathcal{F}(x)\}$ неподвижных точек $\mathcal{F}$ ограничено, то оно компактно.

Отметим, что если мультиотображение определено на числовом множестве, то его называют *мультифункцией*. Мультифункция $G : [0, a] \rightarrow K(E)$ называется *измеримой*, если $G^{-1}(V)$ измеримо (относительно меры Лебега на отрезке $[0, a]$) для любого открытого подмножества $V \subset E$.

Известно, что измеримая мультифункция $G : [0, a] \rightarrow K(E)$ допускает измеримое сечение, т. е., существует измеримая функция $g : [0, a] \rightarrow E$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0, a]$ (см., например, [16, п. 1.3.1]).

Определение 2.6. Измеримая мультифункция $G : [0, a] \rightarrow K(E)$, для $1 \leq p \leq \infty$, называется:

- L^p -интегрируемой, если она допускает L^p -интегрируемое по Бохнеру сечение, т. е. существует функция $g \in L^p([0, a]; E)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п. в. $t \in [0, a]$;
- L^p -интегрально ограниченной, если существует функция $v \in L^p_+[0, a]$ такая, что:

$$\|G(t)\| := \sup \{\|g(t)\|_E : g(t) \in G(t)\} \leq v(t),$$

для п. в. $t \in [0, a]$.

Множество всех L^p -интегрируемых сечений мультифункции $G : [0, a] \rightarrow K(E)$ обозначается $\mathcal{S}_G^p$.

Определение 2.7. Последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^p([0, a]; E)$ называется L^p -полукомпактной, если она L^p -интегрально ограничена и множество $\{\xi_n(t)\}$ относительно компактно в E для п.в. $t \in [0, a]$.

Для L^p -интегрально ограниченной мультифункции $G : [0, a] \rightarrow K(E)$ интеграл определяется следующим образом:

$$\int_0^t G(s)ds := \left\{ \int_0^t g(s)ds : g \in \mathcal{S}_G^p \right\}$$

для любого $t \in [0, a]$.

Лемма 2.2 (см. [16, теорема 4.2.1]). Пусть последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^1([0, a]; E)$ является L^1 -ограниченной и

$$\chi_E(\{\xi_n(t)\}) \leq v(t) \quad \text{п.в. } t \in [0, a], \quad (2.3)$$

для всех $n = 1, 2, \dots$, где $v \in L^1_+[0, a]$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует компактное множество $K_\delta \subset E$, множество $m_\delta \subset [0, a]$ с мерой Лебега $\text{meas } m_\delta < \delta$ и множество функций $G_\delta \subset L^1([0, a]; E)$ со значениями в K_δ , такие, что для каждого $n \geq 1$ существует функция $b_n \in G_\delta$ для которой

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leq 2v(t) + \delta, \quad t \in [0, a] \setminus m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на m_δ , и эта последовательность слабо компактна.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Перейдем к решению задачи (1.1)-(1.2), полагая, что оператор $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ удовлетворяет условию

(А) оператор A порождает равномерно ограниченную C_0 -полугруппу $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ линейных операторов в E .

Обозначим через $\{T(t)\}_{t \in [0, a]}$ сужение C_0 -полугруппы $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ на $[0, a]$, а через M — константу, определенную по формуле:

$$M = \sup \{\|T(t)\| : t \in [0, a]\}. \quad (3.1)$$

Пусть мультиотображение $F : [0, a] \times E \rightarrow Kv(E)$ таково, что:

- (F1) для каждого $x \in E$ мультифункция $F(\cdot, x) : [0, a] \rightarrow Kv(E)$ допускает измеримое сечение;
- (F2) для п.в. $t \in [0, a]$ мультиоператор $F(t, \cdot) : E \rightarrow Kv(E)$ п.н.св.;

(F3) для каждого $r > 0$ существует функция $\omega_r \in L_+^\infty[0, a]$ такая, что для каждого $\xi \in C([-h, 0]; E)$ с $\|\xi\|_{C([-h, 0]; E)} \leq r$ мы имеем

$$\|F(t, \xi)\|_E \leq \omega_r(t),$$

для п.в. $t \in [0, a]$;

(F4) существует функция $\mu \in L_+^\infty[0, a]$ такая, что для каждого ограниченного множества $\Delta \subset C([-h, 0]; E)$ мы имеем

$$\chi_E(F(t, \Delta)) \leq \mu(t)\varphi(\Delta), \text{ для п.в. } t \in [0, a],$$

где $\varphi(\Delta) = \sup_{s \in [-h, 0]} \chi_E(\Delta(s))$, χ_E — МНК Хаусдорфа в E , и $\Delta(s) = \{y(s), y \in \Delta\}$.

Для функции $x \in C([-h, \tau]; E)$, $\tau \in (0, a]$, рассмотрим мультифункцию

$$\Phi_F^x : [0, \tau] \rightarrow Kv(E), \quad \Phi_F^x(t) = F(t, x_t).$$

Пусть $\mathcal{D} \subset C([0, \tau]; E)$ — выпуклое замкнутое подмножество, определенное по формуле

$$\mathcal{D} = \{\xi \in C([0, \tau]; E), \xi(0) = \vartheta(0)\},$$

и для заданного $\xi \in \mathcal{D}$ обозначим через $\xi[\vartheta] \in C([-h, \tau]; E)$ функцию

$$\xi[\vartheta](t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in [-h, 0], \\ \xi(t), & t \in [0, \tau]. \end{cases}$$

Из условий (F1)–(F3) следует (см. [16, теорема 1.3.5]), что мультифункция Φ_F^x является L^∞ -интегрируемой. Поэтому мы можем утверждать, что суперпозиционный мультиоператор $\mathcal{P}_F^\infty : \mathcal{D} \rightarrow P(L^\infty([0, \tau]; E))$, заданный по формуле

$$\mathcal{P}_F^\infty(x) = \{f \in L^\infty([0, \tau]; E) : f(t) \in F(t, x[\vartheta]_t) \text{ п.в. } t \in [0, \tau]\},$$

корректно определен.

Определение 3.1. Интегральным решением задачи Коши (1.1)–(1.2) на промежутке $[-h, \tau]$, $\tau \in (0, a]$, называется функция $x \in C([-h, \tau]; E)$, которая может быть представлена в виде:

$$x(t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in [-h, 0], \\ (\sigma(t) + I_0^{1-\alpha}\sigma(t))\vartheta(0) + \int_0^t \sigma(t-s)f(s)ds, & t \in [0, \tau], \end{cases}$$

где $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$, $I_0^{1-\alpha}$ — дробный интеграл порядка $1 - \alpha$, оператор-функция

$$\sigma(t) = \int_0^{t^{\frac{1}{\alpha}}} \alpha s^{\alpha-2} \Phi_\alpha\left(\frac{t-s^\alpha}{s}\right) T(s^\alpha) ds,$$

и $\Phi_\alpha(\cdot)$ — функция Райта—Маинарди.

Лемма 3.1. Оператор-функция $\sigma(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) для каждого $t \in [0, a]$ $\sigma(t)$ — линейный оператор, более того, для каждого $x \in E$ справедлива оценка

$$\|\sigma(t)x\|_E \leq M E_{1-\alpha}(-t^{1-\alpha}) \|x\|_E, \quad (3.2)$$

где M — константа из формулы (3.1).

2) оператор-функция $\sigma(\cdot)$ сильно непрерывна, т. е. функция $t \in [0, a] \rightarrow \sigma(t)x$ непрерывна для каждого $x \in E$.

Доказательство. Начнем с первого свойства. Линейность оператора σ очевидна, покажем справедливость оценки (3.2). Используя (3.1), для каждого $x \in E$ мы получаем:

$$\|\sigma(t)x\|_E = \left\| \int_0^{t^{\frac{1}{\alpha}}} \alpha s^{\alpha-2} \Phi_\alpha\left(\frac{t-s^\alpha}{s}\right) T(s^\alpha)x ds \right\|_E \leq M \int_0^{t^{\frac{1}{\alpha}}} \alpha s^{\alpha-2} \Phi_\alpha\left(\frac{t-s^\alpha}{s}\right) ds \|x\|_E.$$

Вычислим интеграл, стоящий в правой части последнего выражения:

$$\begin{aligned} \int_0^{t^{\frac{1}{\alpha}}} \alpha s^{\alpha-2} \Phi_{\alpha} \left(\frac{t-s^{\alpha}}{s} \right) ds &= \int_0^{t^{\frac{1}{\alpha}}} \alpha s^{\alpha-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{t-s^{\alpha}}{s} \right)^{-\alpha k-1}}{k! \Gamma(-\alpha k)} ds = \\ &= \int_0^{t^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha (t-s^{\alpha})^{-\alpha k-1} s^{\alpha(k+1)-1}}{k! \Gamma(-\alpha k)} ds. \quad (3.3) \end{aligned}$$

Так как ряд в формуле (3.3) сходится равномерно на отрезке $[0, t^{1/\alpha}]$, то мы можем перейти к интегрированию произведения степенных функций в числителе, используя замену $s = t^{1/\alpha} \tau$:

$$\begin{aligned} \int_0^{t^{\frac{1}{\alpha}}} (t-s^{\alpha})^{-\alpha k-1} s^{\alpha(k+1)-1} ds &= \int_0^1 (t-t\tau^{\alpha})^{-\alpha k-1} t^{k+1-1/\alpha} \tau^{\alpha(k+1)-1} t^{1/\alpha} d\tau = \\ &= t^{k-\alpha k} \int_0^1 (1-\tau^{\alpha})^{-\alpha k-1} \tau^{\alpha(k+1)-1} d\tau. \end{aligned}$$

Введем новую замену переменной $\theta = \tau^{\alpha}$ и воспользуемся формулами (2.1) и (2.2), тогда получим

$$\begin{aligned} t^{k-\alpha k} \int_0^1 (1-\tau^{\alpha})^{-\alpha k-1} \tau^{\alpha(k+1)-1} d\tau &= 1/\alpha t^{k-\alpha k} \int_0^1 (1-\theta)^{-\alpha k-1} \theta^{k+1-1} d\theta = \\ &= 1/\alpha t^{k-\alpha k} B(k+1, -\alpha k) = 1/\alpha t^{k-\alpha k} \frac{\Gamma(k+1) \Gamma(-\alpha k)}{\Gamma(k+1-\alpha k)}. \end{aligned}$$

Теперь подставим найденное выражение в последний ряд из формулы (3.3), тогда имеем

$$\int_0^{t^{\frac{1}{\alpha}}} \alpha s^{\alpha-2} \Phi_{\alpha} \left(\frac{t-s^{\alpha}}{s} \right) ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha k)} \frac{(-1)^k t^{(1-\alpha)k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{(1-\alpha)k}}{\Gamma(1+(1-\alpha)k)} = E_{1-\alpha}(-t^{1-\alpha}).$$

Таким образом, оценка (3.2) установлена.

Используя оценку (3.2), докажем второе утверждение леммы. Для каждого $x \in E$ и $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq a$ имеем:

$$\|\sigma(t_2)x - \sigma(t_1)x\|_E \leq M |E_{1-\alpha}((-t_2)^{1-\alpha}) - E_{1-\alpha}((-t_1)^{1-\alpha})| \|x\|_E.$$

В силу непрерывности функции Миттаг-Леффлера последнее стремится к 0 при $t_2 \rightarrow t_1$. $\square$

Введем в рассмотрение интегральный оператор $S : L^{\infty}([0, \tau]; E) \rightarrow C([0, \tau]; E)$, заданный по формуле

$$S(f)(t) = \int_0^t \sigma(t-s) f(s) ds.$$

Разрешимость задачи (1.1)-(1.2) во многом обеспечивается за счет следующих утверждений относительно оператора S .

Лемма 3.2. *Оператор S обладает следующими свойствами:*

(S₁)

$$\|S(\xi)(t) - S(\eta)(t)\|_E \leq M \int_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_E ds, \quad \xi, \eta \in L^{\infty}([0, \tau]; E), \quad (3.4)$$

где M — константа из формулы (3.1);

(S₂) для каждого компактного множества $K \subset E$ и ограниченной последовательности $\{\eta_n\} \subset L^\infty([0, \tau]; E)$ такой, что $\{\eta_n(t)\} \subset K$ для п.в. $t \in [0, \tau]$, слабая сходимость $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ в $L^1([0, \tau]; E)$ влечет сходимость $S(\eta_n) \rightarrow S(\eta_0)$ в $C([0, \tau]; E)$.

Доказательство.

(S₁) Используя первое свойство из леммы 3.1, для любых $\xi, \eta \in L^\infty([0, \tau]; E)$ имеем:

$$\|S(\xi)(t) - S(\eta)(t)\|_E \leq \int_0^t \|\sigma(t-s)(\xi(s) - \eta(s))\|_E ds \leq M \int_0^t E_{1-\alpha}((s-t)^{1-\alpha}) \|\xi(s) - \eta(s)\|_E ds.$$

Заметим, что функция Миттаг-Леффлера $E_{1-\alpha}(-t^{1-\alpha})$ является положительной и убывающей, поэтому на промежутке $[0, \tau]$ ее наибольшее значение равно 1. Учитывая этот факт, мы приходим к неравенству (3.4).

(S₂) Так как последовательности $\{\eta_n(t)\}$ принимают свои значения в K для п.в. $t \in [0, \tau]$, то мы получаем оценку:

$$\chi_E\left(\{S(\eta_n)(t)\}\right) \leq \int_0^t \chi_E(\{\sigma(t-s)\eta_n(s)\}) ds = 0,$$

где χ_E — МНК Хаусдорфа в E . Это означает, что последовательность $\{S(\eta_n)(t)\}_{n=1}^\infty \subset E$ относительно компактна для каждого $t \in [0, \tau]$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и $t_1, t_2 \in [0, \tau]$ такие, что $0 < t_1 < t_2 \leq \tau \leq a$, тогда для $\{\eta_n\}$ мы имеем:

$$\begin{aligned} \left\| S(\eta_n)(t_2) - S(\eta_n)(t_1) \right\|_E &= \left\| \int_0^{t_2} \sigma(t_2-s)\eta_n(s)ds - \int_0^{t_1} \sigma(t_1-s)\eta_n(s)ds \right\|_E \leq \\ &\leq \left\| \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t_2-s)\eta_n(s)ds \right\|_E + \left\| \int_0^{t_1} (\sigma(t_2-s) - \sigma(t_1-s))\eta_n(s)ds \right\|_E = Z_1 + Z_2, \end{aligned}$$

где

$$Z_1 = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t_2-s)\eta_n(s)ds \right\|_E, \quad Z_2 = \left\| \int_0^{t_1} (\sigma(t_2-s) - \sigma(t_1-s))\eta_n(s)ds \right\|_E.$$

Используя неравенство (3.4) и условие (F3), мы можем для $\varepsilon > 0$ подобрать $\delta_1 > 0$ такое, что как только $|t_2 - t_1| < \delta_1$, будет справедлива следующая оценка:

$$Z_1 \leq M \|\omega_K\|_\infty (t_2 - t_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Учитывая, что операторы $\sigma(t)$ сильно непрерывны, по $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$, для которого в свою очередь существует $\delta_2 > 0$ такое, что как только $|t_2 - t_1| < \delta_2$, выполнено:

$$\|\sigma(t_2-s)x - \sigma(t_1-s)x\|_E < \gamma, \quad x \in K,$$

и мы имеем следующую оценку:

$$Z_2 \leq \gamma\tau < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ такое, что:

$$\left\| S(\eta_n)(t_2) - S(\eta_n)(t_1) \right\|_E \leq Z_1 + Z_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поэтому последовательность $\{S(\eta_n)\}$ равномерно непрерывна. Из теоремы Арцела—Асколи получаем, что последовательность $\{S(\eta_n)\} \subset C([0, \tau]; E)$ относительно компактна.

Из (S₁) следует, что оператор S является линейным ограниченным, поэтому он непрерывен относительно топологии слабой секвенциальной сходимости, следовательно, из слабой сходимости $\eta_n \rightharpoonup \eta_0$ в $L^1([0, \tau]; E)$ вытекает $S(\eta_n) \rightharpoonup S(\eta_0)$. Теперь, учитывая, что $\{S(\eta_n)\}$ относительно компактно, мы получаем сходимость $S(\eta_n) \rightarrow S(\eta_0)$ в $C([0, \tau]; E)$. $\square$

Введем теперь в рассмотрение мультиоператор $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, заданный следующим образом:

$$G(x) = g + S \circ \mathcal{P}_F^\infty(x),$$

где

$$g(t) = (\sigma(t) + I_0^{1-\alpha} \sigma(t)) \vartheta(0). \quad (3.5)$$

Нетрудно видеть, что функция $x \in \mathcal{D}$ является неподвижной точкой мультиоператора G тогда и только тогда, когда $x[\vartheta] \in C([-h, \tau]; E)$ — интегральное решение задачи (1.1)-(1.2). Поэтому мы вправе свести исходную задачу к задаче о существовании неподвижных точек G .

В дальнейшем нам будет полезна следующая лемма.

Лемма 3.3. Пусть $\Omega \subset C([0, \tau]; E)$ — непустое ограниченное множество и $\Omega(t)$ относительно компактно в E при каждом $t \in [0, \tau]$. Тогда множество

$$\left\{ S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)(t) = \int_0^t \sigma(t-s) f(s) ds : f \in \mathcal{P}_F^\infty(\Omega) \right\}$$

является равномерно непрерывным в $C([0, \tau]; E)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и $t_1, t_2 \in [0, \tau]$ такие, что $0 < t_1 < t_2 \leq \tau \leq a$, тогда для всякой функции $f \in \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)$ мы имеем:

$$\begin{aligned} \left\| S(f)(t_2) - S(f)(t_1) \right\|_E &= \left\| \int_0^{t_2} \sigma(t_2-s) f(s) ds - \int_0^{t_1} \sigma(t_1-s) f(s) ds \right\|_E \leq \\ &\leq \left\| \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t_2-s) f(s) ds \right\|_E + \left\| \int_0^{t_1} (\sigma(t_2-s) - \sigma(t_1-s)) f(s) ds \right\|_E = Z_1 + Z_2, \end{aligned}$$

где

$$Z_1 = \left\| \int_{t_1}^{t_2} \sigma(t_2-s) f(s) ds \right\|_E, \quad Z_2 = \left\| \int_0^{t_1} (\sigma(t_2-s) - \sigma(t_1-s)) f(s) ds \right\|_E.$$

Используя свойство (S1) и условие (F3), можно подобрать $\delta_1 > 0$ такое, что неравенство $|t_2 - t_1| < \delta_1$, для $f \in \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)$ влечет следующую оценку:

$$Z_1 \leq M \|\omega_{r\Omega}\|_\infty (t_2 - t_1) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Поскольку $\Omega(t)$ относительно компактно при каждом $t \in [0, \tau]$, мы получаем, что $\chi_E(\Omega(t)) \equiv 0$. Тогда по лемме 2.2 для любого $\delta_2 > 0$ существует множество $m_{\delta_2} \subseteq [0, \tau]$ с лебеговой мерой $\text{mes}(m_{\delta_2}) < \delta_2$, компактное множество $K_{\delta_2} \subset E$ и множество $\Delta \subset L^1([0, \tau]; E)$ со значениями в K_{δ_2} такие, что найдется функция $b \in \Delta$, для которой

$$\|f(t) - b(t)\|_E \leq \delta_2, t \in [0, \tau] \setminus m_{\delta_2}. \quad (3.6)$$

Более того, функция $b \in \Delta$ может быть выбрана такой, что $b(t) \equiv 0$ на m_{δ_2} и множество Δ слабо компактно в $L^1([0, \tau]; E)$.

Тогда для Z_2 получаем оценку:

$$\begin{aligned} Z_2 &= \left\| \int_0^{t_1} (\sigma(t_2-s) - \sigma(t_1-s)) (f(s) - b(s) + b(s)) ds \right\|_E \leq \\ &\leq \left\| \int_0^{t_1} (\sigma(t_2-s) - \sigma(t_1-s)) (f(s) - b(s)) ds \right\|_E + \left\| \int_0^{t_1} (\sigma(t_2-s) - \sigma(t_1-s)) b(s) ds \right\|_E \leq \\ &\leq \left\| \int_{[0, t_1] \setminus m_{\delta_2}} (\sigma(t_2-s) - \sigma(t_1-s)) (f(s) - b(s)) ds \right\|_E + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \int_{[0, t_1] \cap m_{\delta_2}} (\sigma(t_2 - s) - \sigma(t_1 - s)) (f(s) - b(s)) ds \right\|_E + \\
& + \left\| \int_{[0, t_1] \setminus m_{\delta_2}} (\sigma(t_2 - s) - \sigma(t_1 - s)) b(s) ds \right\|_E + \left\| \int_{[0, t_1] \cap m_{\delta_2}} (\sigma(t_2 - s) - \sigma(t_1 - s)) b(s) ds \right\|_E = \\
& = \left\| \int_{[0, t_1] \setminus m_{\delta_2}} (\sigma(t_2 - s) - \sigma(t_1 - s)) (f(s) - b(s)) ds \right\|_E + \\
& + \left\| \int_{[0, t_1] \cap m_{\delta_2}} (\sigma(t_2 - s) - \sigma(t_1 - s)) (f(s) - b(s)) ds \right\|_E + \\
& + \left\| \int_{[0, t_1] \setminus m_{\delta_2}} (\sigma(t_2 - s) - \sigma(t_1 - s)) b(s) ds \right\|_E = L_1 + L_2 + L_3,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
L_1 &= \left\| \int_{[0, t_1] \setminus m_{\delta_2}} (\sigma(t_2 - s) - \sigma(t_1 - s)) (f(s) - b(s)) ds \right\|_E, \\
L_2 &= \left\| \int_{[0, t_1] \cap m_{\delta_2}} (\sigma(t_2 - s) - \sigma(t_1 - s)) (f(s) - b(s)) ds \right\|_E, \\
L_3 &= \left\| \int_{[0, t_1] \setminus m_{\delta_2}} (\sigma(t_2 - s) - \sigma(t_1 - s)) b(s) ds \right\|_E.
\end{aligned}$$

Теперь, используя (3.6), подберем $\delta_2 > 0$ таким, что

$$\delta_2 < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{4M\tau}; \frac{\varepsilon}{4M(\|\omega_{r\Omega}\|_\infty + R)} \right\},$$

где R — радиус замкнутого шара в E , содержащего K_{δ_2} .

Тогда

$$L_1 \leq M\tau\delta_2 < \frac{\varepsilon}{4}, \quad L_2 \leq M \operatorname{mes}(m_{\delta_2})(\|\omega_{r\Omega}\|_\infty + R) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как операторы $\sigma(t)$ сильно непрерывны, то по $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$, для которого, в свою очередь, существует $\delta_3 > 0$ такое, что как только $|t_2 - t_1| < \delta_3$, выполнено:

$$\|\sigma(t_2 - s)b(s) - \sigma(t_1 - s)b(s)\|_E < \gamma, \quad b \in \Delta,$$

и мы имеем следующую оценку:

$$L_3 \leq \gamma\tau < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем подобрать $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ такое, что

$$\left\| S(f)(t_2) - S(f)(t_1) \right\|_E \leq Z_1 + Z_2 \leq Z_1 + L_1 + L_2 + L_3 < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

для $f \in \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)$ и $|t_2 - t_1| < \delta$, то есть множество $S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)$ равномерно непрерывно. $\square$

Введем в пространстве $C([0, \tau]; E)$, $\tau(0, a]$, МНК $\nu : Pb(C([0, \tau]; E)) \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ со значениями в конусе $\mathbb{R}_+^2$, определенную как

$$\nu(\Omega) = (\varphi(\Omega), \operatorname{mod}_C(\Omega)),$$

где $\varphi(\Omega) = \sup_{t \in [0, \tau]} \chi_E(\Omega(t))$ — модуль послышной некомпактности, а вторая компонента — модуль равномерной непрерывности

$$\operatorname{mod}_C(\Omega) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \max_{x \in \Omega} \max_{|t_1 - t_2| \leq \delta} \|x(t_1) - x(t_2)\|.$$

Известно (см. [16, п. 2.1.3]), что МНК ν — монотонная, несингулярная, алгебраически полуаддитивная и правильная.

Сформулируем условия, при которых мультиоператор G является уплотняющим.

Теорема 3.1. *При выполнении условий (A), (F1)–(F4) и условия*

$$\rho = M\|\mu\|_\infty a < 1 \quad (3.7)$$

мультиоператор G является ν -уплотняющим.

Доказательство. Пусть $\Omega \subset \mathcal{D}$ — непустое ограниченное множество, такое, что $\|\Omega\| \leq r_\Omega$ при $r_\Omega \geq \|\vartheta\|_{C([-h,0];E)}$. Предположим, что

$$\nu(G(\Omega)) \geq \nu(\Omega). \quad (3.8)$$

Покажем, что Ω относительно компактно. Заметим, что теорему достаточно доказать для оператора $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$, поскольку g , определенное по формуле (3.5), является однозначной непрерывной функцией.

Так как МНК ν несингулярна, мы имеем

$$\nu(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)) \geq \nu(\Omega). \quad (3.9)$$

Из (3.9) следует, что

$$\varphi(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)) \geq \varphi(\Omega). \quad (3.10)$$

Применяя условие (F4), мы для $0 \leq s \leq \tau \leq a$ получаем оценку:

$$\begin{aligned} \chi_E(\mathcal{P}_F^\infty(\Omega)(s)) &= \chi_E(\{f(s) : f \in \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)\}) \leq \mu(s) \cdot \varphi(\{x[\vartheta]_s : x \in \Omega\}) \leq \\ &\leq \mu(s) \cdot \sup_{s \in [0, \tau]} \chi_E(\{x(s) : x \in \Omega\}) = \mu(s)\varphi(\Omega). \end{aligned}$$

Далее, применяя свойство (S2) для $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$, имеем оценку:

$$\chi_E(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)(t)) \leq M \int_0^t \mu(s)\varphi(\Omega)ds \leq M\|\mu\|_\infty a \varphi(\Omega).$$

Тогда

$$\sup_{t \in [0, \tau]} \chi_E(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)(t)) \leq M\|\mu\|_\infty a \varphi(\Omega) = \rho \cdot \varphi(\Omega).$$

Таким образом,

$$\varphi(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)) \leq \rho \varphi(\Omega) \quad (3.11)$$

при $\rho < 1$.

Сравнивая неравенства (3.10) и (3.11), мы приходим к равенству $\varphi(\Omega) = 0$.

Перейдем теперь к оценке модуля равностепенной непрерывности. Из (3.9) следует, что

$$\text{mod}_C(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)) \geq \text{mod}_C(\Omega). \quad (3.12)$$

В тоже время, благодаря лемме 3.3, можно утверждать, что множество $\{S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)\}$ равностепенно непрерывно, поэтому $\text{mod}_C(S \circ \mathcal{P}_F^\infty(\Omega)) = 0$. Итак, мы получаем $\text{mod}_C(\Omega) = 0$.

Таким образом, $\nu(\Omega) = (0, 0)$, и мы заключаем, что Ω — относительно компактное множество, а мультиоператор G — уплотняющий относительно МНК ν . $\square$

Теорема 3.2. *Мультиоператор G — п.н.св.*

Доказательство. Так как g , определенное по формуле (3.5), является однозначной непрерывной функцией, то утверждение теоремы достаточно доказать для мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$.

Покажем, что мультиотображение $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$ является квазикompактным. Возьмем непустое компактное множество $U \subset \mathcal{D}$ и рассмотрим произвольную последовательность $\{z_n\} \subset S \circ \mathcal{P}_F^\infty(U)$. Тогда $z_n = S(f_n)$, где $f_n \in \mathcal{P}_F^\infty(x_n)$ для некоторой последовательности $\{x_n\} \subset U$. Положим, без ограничения общности, что $x_n \rightarrow x_0 \in U$. Из условия (F4) следует, что последовательность $\{f_n(t)\} \subset E$ относительно компакна для п.в. $t \in [0, \tau]$ и поэтому последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ является L^1 -полукомпактной. По критерию Дистеля слабой относительной компактности (см. [11]) мы можем предположить, что $f_{n_k} \xrightarrow{L^1} f_0$ для некоторой подпоследовательности $\{f_{n_k}\}$.

Теперь, воспользовавшись известным свойством замкнутости суперпозиционного мультиоператора (см. [16, лемма 5.1.1]), мы получаем, что $f_0 \in \mathcal{P}_F^\infty(x_0)$. Применяя лемму 3.2, мы получаем для соответствующей подпоследовательности: $z_{n_k} \rightarrow z_0 = S(f_0) \in S \circ \mathcal{P}_F^\infty(x_0)$.

Таким образом, мы обосновывали замкнутость мультиоператора $S \circ \mathcal{P}_F^\infty$, и поэтому нам остается лишь сослаться на лемму 2.1. $\square$

Докажем локальную теорему существования решений.

Теорема 3.3. *При выполнении условий (A), (F1)–(F4) и (3.7) существует $\tau \in (0, a]$ такое, что множество $\Sigma_\vartheta^F[-h, \tau]$ интегральных решений задачи (1.1)–(1.2) на промежутке $[-h, \tau]$ является непустым подмножеством пространства $C([-h, \tau]; E)$.*

Доказательство. Возьмем число $r > 0$. Поскольку оператор-функция $\sigma(t)$ сильно непрерывна, то мы можем выбрать $0 < \tau_1 < a$ таким, что

$$\|(\sigma(t) - \sigma(0))\vartheta(0)\|_E < r/3 \text{ для всех } t \in [0, \tau_1]. \quad (3.13)$$

Далее подберем $0 < \tau_2 < a$ таким образом, чтобы

$$\frac{M\|\vartheta(0)\|_E\tau_2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \leq r/3, \quad (3.14)$$

где M — константа из (3.1).

Пусть $\overline{B}_r(\sigma(0)\vartheta(0))$ — замкнутый шар с центром $\sigma(0)\vartheta(0)$ и радиусом r , а $R = \|\sigma(0)\vartheta(0)\|_E + r$. Выберем $\tau_3 \in (0, a]$ так, чтобы

$$M\|\omega_R\|_\infty\tau_3 \leq r/3, \quad (3.15)$$

где ω_R — функция из условия (F3).

Возьмем $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ и рассмотрим шар $\overline{B}_r(x^0) \subset C([0, \tau]; E)$, где x^0 — функция, тождественно равная $\sigma(0)\vartheta(0)$. Покажем, что мультиоператор G преобразует шар $\overline{B}_r(x^0)$ в себя. Если $x \in \overline{B}_r(x^0)$, тогда $\|x\|_{C([0, \tau]; E)} \leq R$. Из условия (F3) тогда получаем

$$\|f(t)\|_E \leq \omega_R(t) \text{ для п.в. } t \in [0, \tau],$$

где $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$. Теперь рассмотрим функцию $y \in G(x)$:

$$y(t) = (\sigma(t) + I_0^{1-\alpha}\sigma(t))\vartheta(0) + \int_0^t \sigma(t-s)f(s)ds.$$

Применяя неравенство (S1) и условие (F3), для $t \in [0, \tau]$ получим

$$\begin{aligned} \|y(t) - \vartheta(0)\|_E &\leq \|(\sigma(t) - \sigma(0))\vartheta(0)\|_E + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|\sigma(s)\vartheta(0)\|_E ds + \int_0^t \|\sigma(t-s)f(s)\|_E ds \leq \\ &\leq \|(\sigma(t) - \sigma(0))\vartheta(0)\|_E + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{M\|\vartheta(0)\|_E\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha} + M\|\omega_R\|_\infty\tau = \\ &= \|(\sigma(t) - \sigma(0))\vartheta(0)\|_E + \frac{M\|\vartheta(0)\|_E\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + M\|\omega_R\|_\infty\tau \leq r/3 + r/3 + r/3 = r, \end{aligned}$$

откуда следует, что $y \in \overline{B}_r(x^0)$. Из теоремы 3.1 известно, что мультиоператор G — ν -уплотняющий, поэтому остается применить теорему 2.1. $\square$

Для доказательства глобальной теоремы о существовании решений задачи (1.1)–(1.2) нам потребуется следующее условие подлинейного роста:

(F'3) *существует функция $\varsigma \in L_+^\infty[0, a]$ такая, что*

$$\|F(t, \xi)\|_E \leq \varsigma(t)(1 + \|\xi\|_{C([-h, 0]; E)}), \text{ для п.в. } t \in [0, a].$$

Теперь мы можем доказать главное утверждение настоящей статьи.

Теорема 3.4. При выполнении условий (A), (F1), (F2), (F'3), (F4), если

$$Mha < 1,$$

где $h = \max\{\|\mu\|_\infty, \|\varsigma\|_\infty\}$, задача (1.1)-(1.2) имеет интегральное решение на промежутке $[-h, a]$; более того, множество интегральных решений компактно в пространстве $C([-h, a]; E)$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $x \in C([0, a]; E)$ и $z \in G(x)$. Используя свойство (S1) и условие (F'3), для произвольного $f \in \mathcal{P}_F^\infty(x)$ и $t \in [0, a]$ мы имеем оценку:

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_E &\leq \|\sigma(t)\vartheta(0)\|_E + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|\sigma(s)\vartheta(0)\|_E ds + \int_0^t \|\sigma(t-s)f(s)\|_E ds \leq \\ &\leq M \|\vartheta(0)\|_E + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{M \|\vartheta(0)\|_E t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + M \int_0^t \varsigma(t)(1 + \|x_s\|_{C([-h, 0]; E)}) ds = \\ &= M \|\vartheta(0)\|_E + \frac{M \|\vartheta(0)\|_E t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + M \int_0^t \varsigma(t)(1 + \sup_{s \in [0, t]} \|x(s)\|_E) ds \leq \\ &\leq M \|\vartheta(0)\|_E + \frac{M \|\vartheta(0)\|_E a^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + M \|\varsigma\|_\infty t + M \|\varsigma\|_\infty \|x\|_{C([0, a]; E)} t \leq \\ &\leq M \|\vartheta(0)\|_E + \frac{M \|\vartheta(0)\|_E a^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + M \|\varsigma\|_\infty a + M \|\varsigma\|_\infty \|x\|_{C([0, a]; E)} a = k + m \|x\|_{C([0, a]; E)}, \end{aligned}$$

где

$$k = M \|\vartheta(0)\|_E + \frac{M \|\vartheta(0)\|_E a^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + M \|\varsigma\|_\infty a, \quad m = Mha, \quad h = \max\{\|\mu\|_\infty, \|\varsigma\|_\infty\}.$$

Если мы возьмем $R \geq k(1-m)^{-1}$, тогда неравенство $\|x\|_C \leq R$ влечет оценку $\|G(x)\|_C \leq R$. Поэтому мультиоператор G преобразует замкнутый шар $B_R(0) \subset C([0, a]; E)$ в себя. Из теорем 3.1 и 3.2 мы знаем, что мультиоператор G является ν -уплотняющим и п.н.св. Следовательно, по теореме 2.1 мы получаем существование интегрального решения задачи (1.1)-(1.2).

Из полученных выше оценок вытекает, что множество решений $\Sigma_\vartheta^F[-h, a]$ ограничено. Тогда, применяя теорему 2.2, мы получаем, что множество $\Sigma_\vartheta^F[-h, a]$ — компактно. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С. и др. Меры некомпактности и уплотняющие отображения. — Новосибирск: Наука, 1986.
2. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: Либроком, 2011.
3. Гомоюнов М. И. К теории дифференциальных включений с дробными производными Капуто // Дифф. уравн. — 2020. — 56, № 11. — С. 1419–1432. — DOI: [10.1134/S0374064120110011](https://doi.org/10.1134/S0374064120110011).
4. Гомоюнов М. И., Лукоянов Н. Ю. Построение решений задач управления линейными системами дробного порядка на основе аппроксимационных моделей // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2020. — 26, № 1. — С. 39–50. — DOI: [10.21538/0134-4889-2020-26-1-39-50](https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-39-50).
5. Гомоюнов М. И., Лукоянов Н. Ю. Об оптимальной обратной связи в линейно-квадратичной задаче оптимального управления системой дробного порядка // Дифф. уравн. — 2023. — 59, № 8. — С. 1110–1122. — DOI: [10.31857/S0374064123080101](https://doi.org/10.31857/S0374064123080101).
6. Мышкис А. Д. Смешанные функционально-дифференциальные уравнения // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2003. — 4. — С. 5–120.
7. Обуховский В. В., Петросян Г. Г., Сорока М. С. О начальной задаче для невыпуклозначных дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве // Мат. заметки. — 2024. — 115, № 3. — С. 392–407. — DOI: [10.4213/mzm13750](https://doi.org/10.4213/mzm13750).
8. Петросян Г. Г. О краевой задаче для класса дифференциальных уравнений дробного порядка типа Ланжевена в банаховом пространстве // Вестн. Удмурт. ун-ва. Мат. Мех. Комп. науки. — 2022. — 32, № 3. — С. 415–432. — DOI: [10.35634/vm220305](https://doi.org/10.35634/vm220305).

9. Петросян Г. Г. О топологической структуре множества решений задачи Коши для дифференциальных включений дробного порядка с полунепрерывной сверху правой частью // Докл. РАН. Мат., инф., проц. упр. — 2025. — 522. — С. 33–39. — DOI: [10.7868/s3034504925020064](https://doi.org/10.7868/s3034504925020064).
10. Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V. On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2017. — 20. — С. 1424–1446. — DOI: [10.1515/fca-2017-0075](https://doi.org/10.1515/fca-2017-0075).
11. Diestel J. Remarks on weak compactness in $L^1(\mu, X)$ // Glasgow Math. J. — 1977. — 18. — С. 87–91. — DOI: [10.1017/S0017089500003074](https://doi.org/10.1017/S0017089500003074).
12. Diethelm K. The analysis of fractional differential equations. — London—New York: Springer, 2004.
13. El-Borai M. M. Semigroups and some nonlinear fractional differential equations // Appl. Math. Comput. — 2004. — 149. — С. 823–831. — DOI: [10.1016/S0096-3003\(03\)00188-7](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00188-7).
14. He J. W., Liang Y., Ahmad B., Zhou Y. Nonlocal fractional evolution inclusions of order $\alpha \in (1, 2)$ // Mathematics. — 2019. — 7, № 2. — С. 1–17. — DOI: [10.3390/MATH7020209](https://doi.org/10.3390/MATH7020209).
15. Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V., Petrosyan G. G., Yao J. C. Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space // Appl. Anal. — 2017. — 97, № 4. — С. 571–591. — DOI: [10.1080/00036811.2016.1277583](https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1277583).
16. Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. — Berlin—New York: Walter de Gruyter, 2001. — DOI: [10.1515/9783110870893](https://doi.org/10.1515/9783110870893).
17. Ke T. D., Obukhovskii V., Wong N. C., Yao J. C. On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays // Appl. Anal. — 2013. — 92. — С. 115–137. — DOI: [10.1080/00036811.2011.601454](https://doi.org/10.1080/00036811.2011.601454).
18. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam: Elsevier, 2006.
19. Mainardi F., Paradisi P., Gorenflo R. Probability distributions generated by fractional diffusion equations // В сб.: «Econophysics: An Emerging Science». — Dordrecht: Kluwer, 2000. — С. 312–350.
20. Podlubny I. Fractional differential equations. — San Diego: Academic Press, 1999.
21. Zhou Y., He J. W. New results on controllability of fractional evolution systems with order $\alpha \in (1, 2)$ // Evol. Equ. Control Theory. — 2021. — 10, № 3. — С. 491–509. — DOI: [10.3934/eect.2020077](https://doi.org/10.3934/eect.2020077).

М. И. Каменский

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: mikhailkamenski@mail.ru, ПИНЦ SPIN-код: 3842-2200, ПИНЦ AuthorID: [14635](https://orcid.org/14635), ResearcherID: [O-5694-2015](https://orcid.org/O-5694-2015), Scopus: [26643406000](https://orcid.org/26643406000), ORCID: [0000-0001-5304-7636](https://orcid.org/0000-0001-5304-7636)

Г. Г. Петросян

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru, ПИНЦ SPIN-код: 2904-8459, ПИНЦ AuthorID: [783861](https://orcid.org/783861), ResearcherID: [N-3799-2016](https://orcid.org/N-3799-2016), Scopus: [57193087838](https://orcid.org/57193087838), ORCID: [0000-0001-8154-6299](https://orcid.org/0000-0001-8154-6299)

М. С. Сорока

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru, ПИНЦ SPIN-код: 9322-8888, ПИНЦ AuthorID: [955964](https://orcid.org/955964), ResearcherID: [AAB-5873-2022](https://orcid.org/AAB-5873-2022), Scopus: [58771119600](https://orcid.org/58771119600), ORCID: [0000-0001-8722-520X](https://orcid.org/0000-0001-8722-520X)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-484-498](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-484-498)EDN: [QMEICY](https://www.edn.ru/QMEICY)

UDC 517.929

Research article

On the Cauchy problem for mixed-type functional differential inclusions in Banach spaces

M. I. Kamenskii, G. G. Petrosyan, and M. S. Soroka

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. This paper establishes local and global existence theorems for integral solutions to the Cauchy problem for a class of semilinear differential inclusions of mixed type with deviating argument in Banach spaces. The proofs employ topological methods of nonlinear analysis for set-valued condensing mappings.

Keywords: fractional derivative, differential inclusion, operator semigroup, multivalued mapping, condensing multioperator, fixed point, delay.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors' contribution. *M. I. Kamenskii* — research concept, construction of the resolving multioperator; *G. G. Petrosyan* — derivation of the integral solution formula; *M. S. Soroka* — investigation of the properties of the resolving multioperator.

For citation: M. I. Kamenskii, G. G. Petrosyan, M. S. Soroka, “On the Cauchy problem for mixed-type functional differential inclusions in Banach spaces,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 3, 484–498. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-484-498](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-484-498) EDN: [QMEICY](https://www.edn.ru/QMEICY)

REFERENCES

1. R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov et al., *Mery nekompaktnosti i uplotnyayushchie otobrazheniya* [Measures of Noncompactness and Condensing Mappings], Nauka, Novosibirsk, 1986 (in Russian).
2. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, and V. V. Obukhovskii, *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniye* [Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions], Librokom, Moscow, 2011 (in Russian).
3. M. I. Gomoyunov, “K teorii differentsial'nykh vklyucheniye s drobnymi proizvodnymi Kaputo” [On the theory of differential inclusions with Caputo fractional derivatives], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2020, **56**, No. 11, 1419–1432 (in Russian), DOI: [10.1134/S0374064120110011](https://doi.org/10.1134/S0374064120110011).
4. M. I. Gomoyunov and N. Yu. Lukoyanov, “Postroenie resheniy zadach upravleniya lineynymi sistemami drobnogo poryadka na osnove approksimatsionnykh modeley” [Construction of solutions of control problems for fractional-order linear systems based on approximative models], *Tr. Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2020, **26**, No. 1, 39–50 (in Russian), DOI: [10.21538/0134-4889-2020-26-1-39-50](https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-39-50).
5. M. I. Gomoyunov and N. Yu. Lukoyanov, “Ob optimal'noy obratnoy svyazi v lineyno-kvadrachnoy zadache optimal'nogo upravleniya sistemoy drobnogo poryadka” [On optimal feedback in the linear-quadratic optimal control problem for a fractional-order system], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2023, **59**, No. 8, 1110–1122 (in Russian), DOI: [10.31857/S0374064123080101](https://doi.org/10.31857/S0374064123080101).



6. A. D. Myshkis, “Smeshannyye funktsional’no-differentsial’nye uravneniya” [Mixed functional differential equations], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2003, **4**, 5–120 (in Russian).
7. V. V. Obukhovskii, G. G. Petrosyan, and M. S. Soroka, “O nachal’noy zadache dlya nevyypukloznachnykh differentsial’nykh vklyucheniyy drobnogo poryadka v banakhovom prostranstve” [On the initial-value problem for fractional-order differential inclusions with nonconvex values in a Banach space], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2024, **115**, No. 3, 392–407 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm13750](https://doi.org/10.4213/mzm13750).
8. G. G. Petrosyan, “O kraevoy zadache dlya klassa differentsial’nykh uravneniy drobnogo poryadka tipa Lanzhevena v banakhovom prostranstve” [On a boundary-value problem for a class of fractional-order differential equations of Langevin type in a Banach space], *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki* [Bull. Udmurt. Univ. Math. Mech. Comp. Sci.], 2022, **32**, No. 3, 415–432 (in Russian), DOI: [10.35634/vm220305](https://doi.org/10.35634/vm220305).
9. G. G. Petrosyan, “O topologicheskoy strukture mnozhestva resheniy zadachi Koshi dlya differentsial’nykh vklyucheniyy drobnogo poryadka s poluneperryvnoy sverkhu pravoy chast’yu” [On the topological structure of the solution set of the Cauchy problem for fractional-order differential inclusions with an upper semicontinuous right-hand side], *Dokl. RAN. Mat., Inf., Prots. Upr.* [Rep. Russ. Acad. Sci. Math. Inf. Control], 2025, **522**, 33–39 (in Russian), DOI: [10.7868/s3034504925020064](https://doi.org/10.7868/s3034504925020064).
10. I. Benedetti, V. Obukhovskii, and V. Taddei, “On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2017, **20**, 1424–1446, DOI: [10.1515/fca-2017-0075](https://doi.org/10.1515/fca-2017-0075).
11. J. Diestel, “Remarks on weak compactness in $L^1(\mu, X)$,” *Glasgow Math. J.*, 1977, **18**, 87–91, DOI: [10.1017/S0017089500003074](https://doi.org/10.1017/S0017089500003074).
12. K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations*, Springer, London—New York, 2004.
13. M. M. El-Borai, “Semigroups and some nonlinear fractional differential equations,” *Appl. Math. Comput.*, 2004, **149**, 823–831, DOI: [10.1016/S0096-3003\(03\)00188-7](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00188-7).
14. J. W. He, Y. Liang, B. Ahmad, and Y. Zhou, “Nonlocal fractional evolution inclusions of order $\alpha \in (1, 2)$,” *Mathematics*, 2019, **7**, No. 2, 1–17, DOI: [10.3390/MATH7020209](https://doi.org/10.3390/MATH7020209).
15. M. I. Kamenskii, V. V. Obukhovskii, G. G. Petrosyan, and J. C. Yao, “Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space,” *Appl. Anal.*, 2017, **97**, No. 4, 571–591, DOI: [10.1080/00036811.2016.1277583](https://doi.org/10.1080/00036811.2016.1277583).
16. M. Kamenskii, V. Obukhovskii, and P. Zecca, *Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces*, Walter de Gruyter, Berlin—New York, 2001, DOI: [10.1515/9783110870893](https://doi.org/10.1515/9783110870893).
17. T. D. Ke, V. Obukhovskii, N. C. Wong, and J. C. Yao, “On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays,” *Appl. Anal.*, 2013, **92**, 115–137, DOI: [10.1080/00036811.2011.601454](https://doi.org/10.1080/00036811.2011.601454).
18. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
19. F. Mainardi, P. Paradisi, and R. Gorenflo, “Probability distributions generated by fractional diffusion equations,” In: *Econophysics: An Emerging Science*, Kluwer, Dordrecht, 2000, pp. 312–350.
20. I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
21. Y. Zhou and J. W. He, “New results on controllability of fractional evolution systems with order $\alpha \in (1, 2)$,” *Evol. Equ. Control Theory*, 2021, **10**, No. 3, 491–509, DOI: [10.3934/eect.2020077](https://doi.org/10.3934/eect.2020077).

M. I. Kamenskii

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: mikhailkamenski@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 3842-2200, eLIBRARY AuthorID: 14635, ResearcherID: [O-5694-2015](https://orcid.org/05694-2015), Scopus: 26643406000, ORCID: 0000-0001-5304-7636

G. G. Petrosyan

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: garikpetrosyan@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 2904-8459, eLIBRARY AuthorID: 783861, ResearcherID: [N-3799-2016](https://orcid.org/N-3799-2016), Scopus: 57193087838, ORCID: 0000-0001-8154-6299

M. S. Soroka

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: marya.afanasowa@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 9322-8888, eLIBRARY AuthorID: 955964, ResearcherID: [AAB-5873-2022](https://orcid.org/AAB-5873-2022), Scopus: 58771119600, ORCID: 0000-0001-8722-520X