

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СДВИГОМ В МЛАДШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Н. В. ЗАЙЦЕВА^{1,2}, А. Б. МУРАВНИК¹

¹Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

²Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. В полуплоскости исследован вопрос разрешимости краевой задачи для дифференциально-разностного эллиптического уравнения, содержащего оператор сдвига в младших производных. Решение задачи построено в явном виде, доказана его гладкость в каждой точке полуплоскости. Найдены условия на коэффициенты уравнения, гарантирующие разрешимость задачи.

Ключевые слова: задача Дирихле, эллиптическое уравнение, дифференциально-разностное уравнение, оператор сдвига, преобразование Фурье.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование второго автора выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSSF-2026-0013).

Вклад авторов. *Зайцева Н. В.* — построение решения задачи, формулировка и доказательство вспомогательных утверждений (леммы 1.1, 3.1). *Муравник А. Б.* — постановка задачи, идея построения решения с помощью интегральных преобразований, формулировка и доказательство основного результата статьи (теорема 3.1, замечание 3.1 к ней).

Для цитирования: *Зайцева Н. В., Муравник А. Б.* Задача Дирихле для эллиптического уравнения со сдвигом в младших производных // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 3. С. 469–483. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-469-483](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-469-483) EDN: [QLMEAR](https://www.edn.ru/QLMEAR)

*Посвящается 100-летию со дня рождения
Георгия Александровича Каменского*

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одним из развивающихся направлений современной теории дифференциальных уравнений с частными производными является теория дифференциально-разностных уравнений — уравнений, содержащих дифференциальные операторы и операторы сдвига. При этом в различных приложениях играют важную роль задачи для уравнений со сдвигами как по времени (так называемые уравнения с запаздываниями), так и по пространственным переменным.

Разработка теории краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченных областях принадлежит А. Л. Скубачевскому [12–14, 17]. В работах [9–11] получены результаты по исследованию задач для таких уравнений в неограниченных областях. Существенные результаты для параболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих операторы сдвига по пространственным переменным, и начальных задач для них изложены в монографии [8]. В обширной статье [3] рассматриваются гиперболические уравнения с оператором сдвига по времени, а в [5, 6, 16] — с операторами сдвига по пространственным переменным.

В данной статье исследуется вопрос разрешимости следующей краевой задачи:

$$\Delta u(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k u_x(x - h_k, y) + b u(x, y), \quad (x, y) \in D; \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

где область $D = \{(x, y): x \in \mathbb{R}, y > 0\}$; $\Delta := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа; a_k, h_k ($k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$), b — не равные нулю действительные числа; $u_0(x)$ — непрерывная и ограниченная функция.

Задачи для линейных эллиптических уравнений с младшими членами вызывают отдельный интерес как ввиду их многочисленных приложений, так и возникновением существенных особенностей при их исследовании. Отметим здесь недавние работы [1, 2] и литературу в них. Краевая задача для эллиптического уравнения с линейной комбинацией младших производных с оператором сдвига рассматривается впервые.

Определение 1.1. Функция $u(x, y)$ называется *классическим решением уравнения* (1.1), если в каждой точке области D существуют классические производные u_x, u_{xx}, u_{yy} и выполняется соотношение (1.1).

Пусть для любого значения $\xi \in \mathbb{R}$ выполняется следующее неравенство:

$$\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b > 0, \quad (1.3)$$

где a_k, b и h_k ($k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$) — соответственно, коэффициенты и сдвиги в уравнении (1.1). Выполнение условия (1.3) для любого $\xi \in \mathbb{R}$ означает эллиптичность (см. [14]) дифференциально-разностного оператора в уравнении (1.1).

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. Условие (1.3) выполняется для любого значения $\xi \in \mathbb{R}$, если коэффициенты a_k ($k = \overline{1, n}$) и b в уравнении (1.1) удовлетворяют соотношению

$$4b > n \sum_{k=1}^n a_k^2. \quad (1.4)$$

Доказательство. Преобразуем левую часть неравенства (1.3) с учётом неравенства Коши—Буняковского:

$$\begin{aligned} \xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b &= \left(\xi + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) \right)^2 + b - \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) \right)^2 \geq \\ &\geq \left(\xi + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) \right)^2 + b - \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \sin^2(h_k \xi) \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Так как $\left(\xi + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) \right)^2 \geq 0$, а $0 \leq \sin^2(h_k \xi) \leq 1$ для всех $k = \overline{1, n}$, то для выполнения неравенства (1.3) для любого значения $\xi \in \mathbb{R}$ достаточно, чтобы коэффициенты a_k ($k = \overline{1, n}$, n — заданное натуральное число) и b уравнения (1.1) удовлетворяли условию (1.4). $\square$

Из условия (1.3) следует, что коэффициент уравнения $b > 0$, а из представления (1.5) вытекает неравенство

$$\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \geq \frac{1}{4} \left(4b - n \sum_{k=1}^n a_k^2 \right), \quad (1.6)$$

справедливое для любого $\xi \in \mathbb{R}$.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Применим к уравнению (1.1) и к условию (1.2) преобразование Фурье F_x по переменной x , определяемое правилом

$$\widehat{u}(\xi, y) := F_x[u(x, y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y) e^{i\xi x} dx$$

(тем самым перейдём от переменной x к двойственной переменной ξ). С учётом известных формул

$$F_x \left[\frac{\partial^{\alpha+\beta} u(x, y)}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} \right] = (-i\xi)^\alpha \frac{\partial^\beta \widehat{u}(\xi, y)}{\partial t^\beta}, \quad \alpha, \beta = 0, 1, \dots, \quad F_x[u(x-h, y)] = e^{ih\xi} \widehat{u}(\xi, y),$$

здесь i — мнимая единица, получим задачу в образах Фурье для $y > 0$ с параметром $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d^2 \widehat{u}}{dy^2} = \left(\xi^2 - i\xi \sum_{k=1}^n a_k e^{ih_k \xi} + b \right) \widehat{u}, \quad (2.1)$$

$$u(\xi, 0) = \widehat{u}_0(\xi). \quad (2.2)$$

Корни характеристического уравнения для уравнения (2.1) имеют вид

$$\pm \left[\xi^2 - i\xi \sum_{k=1}^n a_k e^{ih_k \xi} + b \right]^{1/2} = \pm \left[\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b - i\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right]^{1/2} = \pm \rho(\xi) e^{-i\theta(\xi)},$$

где введены обозначения

$$\rho(\xi) := \left[\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right)^2 + \left(\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right)^2 \right]^{1/4}, \quad (2.3)$$

$$\theta(\xi) := \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi)}{\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b}. \quad (2.4)$$

Тогда общее решение уравнения (2.1) определяется по формуле

$$\widehat{u}(\xi, y) = C_1(\xi) e^{y\rho(\xi)[\cos \theta(\xi) - i \sin \theta(\xi)]} + C_2(\xi) e^{-y\rho(\xi)[\cos \theta(\xi) - i \sin \theta(\xi)]},$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ — произвольные постоянные, зависящие от параметра $\xi \in \mathbb{R}$. Чтобы эта функция удовлетворяла условию (2.2), выберем такие значения констант: $C_1(\xi) = 0$, $C_2(\xi) = \widehat{u}_0(\xi)$. Таким образом, решение задачи (2.1), (2.2) имеет вид

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{u}_0(\xi) e^{-y\rho(\xi)[\cos \theta(\xi) - i \sin \theta(\xi)]}. \quad (2.5)$$

Применим теперь к функции (2.5) обратное преобразование Фурье, определяемое как

$$u(x, y) = F_\xi^{-1}[\widehat{u}(\xi, y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(\xi, y) e^{-ix\xi} d\xi,$$

и получим

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}_0(\xi) e^{-y\rho(\xi)[\cos \theta(\xi) - i \sin \theta(\xi)]} e^{-ix\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau) e^{i\xi\tau} d\tau \right) e^{-y\rho(\xi)[\cos \theta(\xi) - i \sin \theta(\xi)]} e^{-ix\xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau) e^{-i(x-\tau)\xi} e^{-y\rho(\xi)[\cos \theta(\xi) - i \sin \theta(\xi)]} d\xi d\tau = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y\rho(\xi) \cos \theta(\xi)} [\cos(y\rho(\xi) \sin \theta(\xi) - (x - \tau)\xi) + i \sin(y\rho(\xi) \sin \theta(\xi) - (x - \tau)\xi)] d\xi d\tau.$$

Далее преобразуем внутренний интеграл с учётом чётности функции (2.3) и нечётности функции (2.4):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y\rho(\xi) \cos \theta(\xi)} [\cos(y\rho(\xi) \sin \theta(\xi) - (x - \tau)\xi) + i \sin(y\rho(\xi) \sin \theta(\xi) - (x - \tau)\xi)] d\xi = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-y\rho(\xi) \cos \theta(\xi)} \cos(y\rho(\xi) \sin \theta(\xi) - (x - \tau)\xi) d\xi = \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-y\rho(\xi) \cos \theta(\xi)} \cos((x - \tau)\xi - y\rho(\xi) \sin \theta(\xi)) d\xi, \end{aligned}$$

и в результате будем иметь

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau) \int_0^{+\infty} e^{-y\rho(\xi) \cos \theta(\xi)} \cos((x - \tau)\xi - y\rho(\xi) \sin \theta(\xi)) d\xi d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x - \tau) \int_0^{+\infty} e^{-y\rho(\xi) \cos \theta(\xi)} \cos(\tau\xi - y\rho(\xi) \sin \theta(\xi)) d\xi d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x - \tau) \int_0^{+\infty} e^{-yG_1(\xi)} \cos(\tau\xi - yG_2(\xi)) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где введены обозначения

$$G_1(\xi) := \rho(\xi) \cos \theta(\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi) \sin \theta(\xi). \quad (2.7)$$

Далее будет показано, что интегральное представление (2.6) удовлетворяет уравнению (1.1) и граничному условию (1.2).

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Лемма 3.1. При выполнении условия (1.3) для любого значения $\xi \in \mathbb{R}$ функция

$$E(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-yG_1(\xi)} \cos(x\xi - yG_2(\xi)) d\xi, \quad (3.1)$$

где $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определены в (2.7), удовлетворяет уравнению (1.1) в области D .

Доказательство. Подынтегральная функция в (3.1) (функция переменной ξ при любых значениях её параметров $(x, y) \in D$) определена и непрерывна на промежутке $\xi \in [0, +\infty)$ как композиция непрерывных функций. Действительно, функция (2.3), входящая в $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$, определена корректно при любых значениях a_k, b, h_k ($k = \overline{1, n}$) и ξ , так как сумма квадратов всегда неотрицательна и корень 4-й степени из этого выражения существует. Функция (2.4), также входящая в $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$, определена корректно при выполнении условия (1.3), так как знаменатель аргумента арктангенса не обращается в нуль.

Исследуем вопрос сходимости интеграла (3.1). Сначала преобразуем функцию $G_1(\xi)$ с учётом формулы $\arctg x = \arccos(1/\sqrt{1+x^2})$ и условия (1.3) следующим образом:

$$G_1(\xi) = \rho(\xi) \cos \theta(\xi) = \rho(\xi) \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta(\xi))}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho(\xi)}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos \left(\arctg \frac{\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi)}{\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b} \right)} = \frac{\rho(\xi)}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\left(\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right)^2}{\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right)^2}}}} = \\
&= \frac{\rho(\xi)}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\left| \xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right|}{\sqrt{\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right)^2 + \left(\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right)^2}}} = \\
&= \frac{\rho(\xi)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\rho^2(\xi) + \xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b}{\rho^2(\xi)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\rho^2(\xi) + \xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b}. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Очевидно, что $G_1(\xi) \rightarrow +\infty$ при $\xi \rightarrow +\infty$. Вычислив предел

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{G_1(\xi)}{\xi} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\xi} \left[\sqrt{\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right)^2 + \left(\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right)^2} + \right. \\
&\quad \left. + \xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right]^{1/2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\frac{\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right)^2 + \left(\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right)^2}{\xi^4}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b}{\xi^2} \right]^{1/2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{\left(1 + \frac{\sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi)}{\xi} + \frac{b}{\xi^2} \right)^2 + \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi)}{\xi} \right)^2} + \right. \\
&\quad \left. + 1 + \frac{\sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi)}{\xi} + \frac{b}{\xi^2} \right]^{1/2} = 1,
\end{aligned}$$

приходим к выводу, что на интервале $(\xi_0, +\infty)$, где ξ_0 — достаточно большое положительное число, функции $G_1(\xi)$ и ξ имеют одинаковый порядок роста.

С учётом этого факта далее воспользуемся частным признаком сходимости несобственных интегралов [7, с. 102]: а именно, если существует конечный предел $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} |f(\xi)| \xi^k$ при $k > 1$, то

интеграл $\int_a^{+\infty} f(\xi) d\xi$ сходится. Так как

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{|\cos(x\xi - yG_2(\xi))|}{e^{yG_1(\xi)}} \xi^{1+\varepsilon} = 0$$

для любого числа $\varepsilon > 0$ и любых фиксированных параметрах $(x, y) \in D$, то интеграл (3.1) сходится.

Проверим теперь, что функция (3.1) удовлетворяет уравнению (1.1). Для этого вычислим (пока формально) производные:

$$E_x(x, y) = - \int_0^{+\infty} \xi e^{-yG_1(\xi)} \sin(x\xi - yG_2(\xi)) d\xi,$$

отсюда имеем

$$E_x(x - h_k, y) = - \int_0^{+\infty} \xi e^{-yG_1(\xi)} \sin((x - h_k)\xi - yG_2(\xi)) d\xi, \quad k = \overline{1, n}; \quad (3.3)$$

$$E_{xx}(x, y) = - \int_0^{+\infty} \xi^2 e^{-yG_1(\xi)} \cos(x\xi - yG_2(\xi)) d\xi; \quad (3.4)$$

$$E_y(x, y) = \int_0^{+\infty} [-G_1(\xi) \cos(x\xi - yG_2(\xi)) + G_2(\xi) \sin(x\xi - yG_2(\xi))] e^{-yG_1(\xi)} d\xi,$$

$$E_{yy}(x, y) = \int_0^{+\infty} [(G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)) \cos(x\xi - yG_2(\xi)) - 2G_1(\xi)G_2(\xi) \sin(x\xi - yG_2(\xi))] e^{-yG_1(\xi)} d\xi. \quad (3.5)$$

Из представления (2.4) следует, что $|2\theta(\xi)| < \pi/2$, а значит, $\cos(2\theta(\xi)) > 0$. С учётом этого неравенства, формул (2.7) и условия (1.3) найдём

$$\begin{aligned} 2G_1(\xi)G_2(\xi) &= \rho^2(\xi) \sin(2\theta(\xi)) = \frac{\operatorname{tg}(2\theta(\xi))}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta(\xi))}} = \\ &= \rho^2(\xi) \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi)}{\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b} \right) \left[1 + \operatorname{tg}^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi)}{\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b} \right) \right]^{-1/2} = \\ &= \rho^2(\xi) \frac{\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi)}{\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b} \left[1 + \frac{\left(\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right)^2}{\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right)^2} \right]^{-1/2} = \\ &= \rho^2(\xi) \frac{\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi)}{\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b} \left[\frac{\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right)^2}{\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right)^2 + \left(\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right)^2} \right]^{1/2} = \\ &= \rho^2(\xi) \frac{\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi)}{\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b} \frac{\left| \xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right|}{\rho^2(\xi)} = \xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi); \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = \rho^2(\xi) \cos(2\theta(\xi)) = \frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta(\xi))}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho^2(\xi) \left[\frac{\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right)^2}{\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right)^2 + \left(\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right)^2} \right]^{1/2} = \\
&= \rho^2(\xi) \frac{\left| \xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right|}{\rho^2(\xi)} = \xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b.
\end{aligned}$$

Подставив найденные выражения $2G_1(\xi)G_2(\xi)$ и $G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi)$ в (3.5), будем иметь

$$\begin{aligned}
E_{yy}(x, y) &= \int_0^{+\infty} \left[\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right) \cos(x\xi - yG_2(\xi)) - \right. \\
&\quad \left. - \xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \sin(x\xi - yG_2(\xi)) \right] e^{-yG_1(\xi)} d\xi. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

Осталось подставить (3.1), (3.4) и (3.7) в уравнение (1.1) и получить в правой части выражение:

$$E_{xx}(x, y) + E_{yy}(x, y) - b E(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k E(x - h_k, y).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&E_{xx}(x, y) + E_{yy}(x, y) - b E(x, y) = \\
&= \int_0^{+\infty} \left[-\xi^2 \cos(x\xi - yG_2(\xi)) + \left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right) \cos(x\xi - yG_2(\xi)) - \right. \\
&\quad \left. - \xi \left(\sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right) \sin(x\xi - yG_2(\xi)) - b \cos(x\xi - yG_2(\xi)) \right] e^{-yG_1(\xi)} d\xi = \\
&= \int_0^{+\infty} \xi \sum_{k=1}^n a_k [\sin(h_k \xi) \cos(x\xi - yG_2(\xi)) - \cos(h_k \xi) \sin(x\xi - yG_2(\xi))] e^{-yG_1(\xi)} d\xi = \\
&= - \int_0^{+\infty} \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin((x - h_k)\xi - yG_2(\xi)) e^{-yG_1(\xi)} d\xi = \sum_{k=1}^n a_k E(x - h_k, y).
\end{aligned}$$

Отметим, что здесь мы пока формально поменяли операции интегрирования и суммирования. Далее будет показано, что такое действие было законным.

Проверим теперь сходимость интегралов (3.3), (3.4) и (3.7) с помощью того же признака сходимости [7, с. 102], как это было сделано для проверки сходимости интеграла (3.1).

Так как

$$0 \leq \left| \frac{\xi \sin((x - h_k)\xi - yG_2(\xi))}{e^{yG_1(\xi)}} \xi^{1+\varepsilon} \right| \leq \frac{\xi^{2+\varepsilon}}{e^{yG_1(\xi)}},$$

функции $G_1(\xi)$ и ξ имеют одинаковый порядок роста при $\xi \rightarrow +\infty$, а тогда

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\xi^{2+\varepsilon}}{e^{yG_1(\xi)}} = 0,$$

то и

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left| \frac{\xi \sin((x - h_k)\xi - yG_2(\xi))}{e^{yG_1(\xi)}} \xi^{1+\varepsilon} \right| = 0$$

для любого значения $\varepsilon > 0$. Таким образом, интеграл (3.3) сходится при любых фиксированных параметрах $(x, t) \in D$.

Аналогично, так как

$$0 \leq \left| \frac{\xi^2 \cos(x\xi - yG_2(\xi))}{e^{yG_1(\xi)}} \xi^{1+\varepsilon} \right| \leq \frac{\xi^{3+\varepsilon}}{e^{yG_1(\xi)}},$$

а предел

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\xi^{3+\varepsilon}}{e^{yG_1(\xi)}} = 0$$

для любого значения $\varepsilon > 0$, то и

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left| \frac{\xi^2 \cos(x\xi - yG_2(\xi))}{e^{yG_1(\xi)}} \xi^{1+\varepsilon} \right| = 0,$$

и следовательно, интеграл (3.4) сходится.

Проверим теперь сходимость интеграла (3.7). Рассмотрим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right) \cos(x\xi - yG_2(\xi)) - \xi \left(\sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right) \sin(x\xi - yG_2(\xi))}{e^{yG_1(\xi)} \xi^{-1-\varepsilon}} \right| \leq \\ &\leq \frac{\left| \xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right|}{e^{yG_1(\xi)}} \xi^{1+\varepsilon} + \frac{\xi \sum_{k=1}^n |a_k|}{e^{yG_1(\xi)}} \xi^{1+\varepsilon} \leq \frac{\xi^{3+\varepsilon} + 2 \left(\sum_{k=1}^n |a_k| \right) \xi^{2+\varepsilon} + b \xi^{1+\varepsilon}}{e^{yG_1(\xi)}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\xi^{3+\varepsilon} + 2 \left(\sum_{k=1}^n |a_k| \right) \xi^{2+\varepsilon} + b \xi^{1+\varepsilon}}{e^{yG_1(\xi)}} = 0$$

для любого значения $\varepsilon > 0$. А значит (в силу функционального аналога принципа двустороннего ограничения), предел

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left| \frac{\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right) \cos(x\xi - yG_2(\xi)) - \xi \left(\sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right) \sin(x\xi - yG_2(\xi))}{e^{yG_1(\xi)} \xi^{-1-\varepsilon}} \right| = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$, и интеграл (3.7) при любых фиксированных параметрах $(x, t) \in D$ сходится. $\square$

Теорема 3.1. При выполнении условия (1.3) для любого значения $\xi \in \mathbb{R}$ функция

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(x - \xi, y) u_0(\xi) d\xi, \quad (3.8)$$

где функция $E(x, y)$ определена в (3.1), удовлетворяет в области D уравнению (1.1) в классическом смысле.

Доказательство. Согласно лемме 3.1 функция (3.1) определена в каждой точке $(x, y) \in D$ и удовлетворяет (формально) в области D уравнению (1.1). Проверим, что она удовлетворяет уравнению (1.1) в классическом смысле.

Для этого исследуем сначала на равномерную сходимость интеграл (3.3), применив признак Вейерштрасса. Оценим

$$|E_x(x - h_k, y)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{\xi |\sin((x - h_k)\xi - yG_2(\xi))|}{e^{yG_1(\xi)}} d\xi \leq \int_0^{+\infty} \frac{\xi}{e^{yG_1(\xi)}} d\xi.$$

Так как интеграл в правой части полученной цепочки соотношений сходится (см., например, частный признак сходимости несобственных интегралов), а подынтегральное выражение в нём не зависит от переменной x , то интеграл (3.3) сходится равномерно по переменной x на любом конечном отрезке $[x_1, x_2] \subset (-\infty, +\infty)$.

Аналогично проверяется, что интеграл (3.4) также сходится равномерно по переменной x на любом отрезке $[x_1, x_2] \subset (-\infty, +\infty)$. Таким образом, дифференцирование под знаком интеграла функции (3.1) по переменной x до второго порядка включительно было законным.

Проверим теперь равномерную сходимость интеграла (3.7) по переменной y на любом конечном отрезке $[y_1, y_2] \subset (0, +\infty)$. Оценим

$$\begin{aligned} |E_{yy}(x, y)| &\leq \int_0^{+\infty} \left| \left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right) \cos(x\xi - yG_2(\xi)) - \right. \\ &\quad \left. - \xi \left(\sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right) \sin(x\xi - yG_2(\xi)) \right| e^{-yG_1(\xi)} d\xi \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{\left| \xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right| + \xi \sum_{k=1}^n |a_k|}{e^{yG_1(\xi)}} d\xi \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{\xi^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n |a_k| \right) \xi + b}{e^{yG_1(\xi)}} d\xi \leq \int_0^{+\infty} \frac{\xi^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n |a_k| \right) \xi + b}{e^{y_1 G_1(\xi)}} d\xi. \end{aligned}$$

Так как подынтегральная функция в последнем сходящемся интеграле не зависит от y , то по признаку Вейерштрасса интеграл (3.7) сходится равномерно по y на любом конечном отрезке $[y_1, y_2] \subset (0, +\infty)$, а значит, дифференцирование под знаком интеграла в (3.1) по переменной y до второго порядка включительно было законным.

Таким образом, функция (3.1) удовлетворяет в области D уравнению (1.1) в классическом смысле.

Далее, чтобы выяснить корректность определения функции (3.8), оценим поведение функции (3.1) при $x \rightarrow \infty$ и фиксированном $y \in (0, +\infty)$. Представим (3.1) в виде

$$E(x, y) = E_1(x, y) + E_2(x, y),$$

где

$$E_1(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-yG_1(\xi)} \cos(x\xi) \cos(yG_2(\xi)) d\xi, \quad (3.9)$$

$$E_2(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-yG_1(\xi)} \sin(x\xi) \sin(yG_2(\xi)) d\xi. \quad (3.10)$$

Покажем, что функции (3.9) и (3.10) стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $y \in (0, +\infty)$ и параметров a_k ($k = \overline{1, n}$), b уравнения (1.1), удовлетворяющих условиям (1.4).

После замены переменной $\eta = x\xi$ в (3.9) получим

$$E_1(x, y) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-yG_1(\eta/x)} \cos \eta \cos(yG_2(\eta/x)) d\eta.$$

Так как функции $\cos \tau \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, $e^{-yG_1(\tau)} \cos(yG_2(\tau)) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, а преобразование Меллина функции $e^{-yG_1(\tau)}$ определено на $\mathbb{R}$ и не имеет вещественных нулей, то в силу тауберовой теоремы Винера (см. [4, с. 163]) $E_1(x, y) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ для любого фиксированного $y \in (0, +\infty)$ и параметров a_k ($k = \overline{1, n}$), b , удовлетворяющих (1.4).

С помощью той же замены $\eta = x\xi$ в (3.10) и аналогичных рассуждений приходим к выводу, что и $E_2(x, y) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. Таким образом, для любого фиксированного $y \in (0, +\infty)$ и параметров a и b уравнения (1.1), удовлетворяющих условиям (1.4), справедливо соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E(x, y) = 0.$$

Теперь оценим скорость стремления к нулю при $x \rightarrow \infty$ функций (3.9) и (3.10). Проинтегрировав по частям (3.9), будем иметь

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-yG_1(\xi)} \cos(yG_2(\xi)) (\sin(x\xi))' d\xi = \\ &= \frac{1}{x} \left[e^{-yG_1(\xi)} \cos(yG_2(\xi)) \sin(x\xi) \Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(e^{-yG_1(\xi)} \cos(yG_2(\xi)) \right)' \sin(x\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{y}{x} \int_0^{+\infty} e^{-yG_1(\xi)} \left[G_1'(\xi) \cos(yG_2(\xi)) + G_2'(\xi) \sin(yG_2(\xi)) \right] \sin(x\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.11)$$

С учётом представления (3.2) и неравенства (1.6) оценим:

$$\begin{aligned} |G_1'(\xi)| &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left| \frac{(\rho^2(\xi))' + 2\xi + \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + \xi \sum_{k=1}^n a_k h_k \cos(h_k \xi)}{\sqrt{\rho^2(\xi) + \xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b}} \right| = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\left| (\rho^2(\xi))' + 2\xi + \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + \xi \sum_{k=1}^n a_k h_k \cos(h_k \xi) \right|}{\sqrt{\sqrt{\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right)^2 + \left(\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right)^2} + \xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b}} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \frac{\left| (\rho^2(\xi))' + 2\xi + \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + \xi \sum_{k=1}^n a_k h_k \cos(h_k \xi) \right|}{\sqrt{\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b}} \leq \\ &\leq \frac{\left| (\rho^2(\xi))' + 2\xi + \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + \xi \sum_{k=1}^n a_k h_k \cos(h_k \xi) \right|}{2\sqrt{4b - n \sum_{k=1}^n a_k^2}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |(\rho^2(\xi))'| &= \left| \left(2 + \sum_{k=1}^n a_k h_k \cos(h_k \xi) \right) \xi^3 + 3 \left(\sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) \right) \xi^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + 2b + b \sum_{k=1}^n a_k h_k \cos(h_k \xi) \right) \xi + b \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) \right| \times \\ &\quad \times \left[\left(\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right)^2 + \left(\xi \sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right)^2 \right]^{-1/2} \leq \\ &\leq \left| \left(2 + \sum_{k=1}^n a_k h_k \cos(h_k \xi) \right) \xi^3 + 3 \left(\sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) \right) \xi^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + 2b + b \sum_{k=1}^n a_k h_k \cos(h_k \xi) \right) \xi + b \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) \right| \left[\xi^2 + \xi \sum_{k=1}^n a_k \sin(h_k \xi) + b \right]^{-1} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\left(2 + \sum_{k=1}^n |a_k h_k|\right) \xi^3 + 3 \left(\sum_{k=1}^n |a_k|\right) \xi^2 + \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + 2b + b \sum_{k=1}^n |a_k h_k|\right) \xi + 2 \sum_{k=1}^n |a_k|}{b - \frac{n}{4} \sum_{k=1}^n a_k^2}.$$

Таким образом, функция $G'_1(\xi)$ имеет степенной рост (порядка 3) на бесконечности и не имеет особенностей ни в одной точке. Кроме того, $G'_1(0) = 0$, что будет учтено в дальнейшем.

Для нахождения $G'_2(\xi)$ воспользуемся полученным ранее равенством (3.6):

$$G'_2(\xi) = \frac{\frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) - \xi \sum_{k=1}^n a_k h_k \sin(h_k \xi) \right] G_1(\xi) - \xi \left(\sum_{k=1}^n a_k \cos(h_k \xi) \right) G'_1(\xi)}{G_1^2(\xi)}.$$

Отсюда заключаем, что функция $G'_2(\xi)$ имеет не более чем степенной рост на бесконечности, а также не имеет особенностей.

В силу сказанного выше интеграл (3.11) сходится. Далее проинтегрируем его по частям:

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &= -\frac{y}{x^2} \int_0^{+\infty} e^{-yG_1(\xi)} \left[G'_1(\xi) \cos(yG_2(\xi)) + G'_2(\xi) \sin(yG_2(\xi)) \right] (\cos(x\xi))' d\xi = \\ &= \frac{y}{x^2} \left[\int_0^{+\infty} \left(e^{-yG_1(\xi)} \left[G'_1(\xi) \cos(yG_2(\xi)) + G'_2(\xi) \sin(yG_2(\xi)) \right] \right)' \cos(x\xi) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - e^{-yG_1(\xi)} \left[G'_1(\xi) \cos(yG_2(\xi)) + G'_2(\xi) \sin(yG_2(\xi)) \right] \cos(x\xi) \Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} \right] = \\ &= \frac{y}{x^2} \int_0^{+\infty} \left(e^{-yG_1(\xi)} \left[G'_1(\xi) \cos(yG_2(\xi)) + G'_2(\xi) \sin(yG_2(\xi)) \right] \right)' \cos(x\xi) d\xi \end{aligned}$$

(внеинтегральное слагаемое обращается в нуль при $\xi = 0$, так как $G'_1(0) = 0$ и $G_2(0) = 0$).

По аналогии с рассуждениями для функций $G'_1(\xi)$ и $G'_2(\xi)$, нетрудно убедиться, что функция (после непосредственного дифференцирования)

$$\varphi(\xi) := \left(e^{-yG_1(\xi)} \left[G'_1(\xi) \cos(yG_2(\xi)) + G'_2(\xi) \sin(yG_2(\xi)) \right] \right)'$$

имеет не более чем степенной рост на бесконечности и не имеет особенностей, т. е. $\varphi(\xi) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и

$$x^2 E_1(x, y) = y \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \cos(x\xi) d\xi = \frac{y}{x} \int_0^{+\infty} \varphi(\eta/x) \cos \eta d\eta,$$

где функции $\varphi(\tau)$ и $\cos \eta$ удовлетворяют условиям тауберовой теоремы Винера. Таким образом, для любого фиксированного $y \in (0, +\infty)$ и коэффициентов a_k и b уравнения (1.1), удовлетворяющих условиям (1.4), справедливо соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 E_1(x, y) = 0. \quad (3.12)$$

Проинтегрировав теперь по частям функцию (3.10), будем иметь

$$\begin{aligned} E_2(x, y) &= -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-yG_1(\xi)} \sin(yG_2(\xi)) (\cos(x\xi))' d\xi = \\ &= -\frac{1}{x} \left[e^{-yG_1(\xi)} \sin(yG_2(\xi)) \cos(x\xi) \Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(e^{-yG_1(\xi)} \sin(yG_2(\xi)) \right)' \cos(x\xi) d\xi \right] = \\ &= \frac{y}{x} \int_0^{+\infty} e^{-yG_1(\xi)} \left[G'_2(\xi) \cos(yG_2(\xi)) - G'_1(\xi) \sin(yG_2(\xi)) \right] \cos(x\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Последний интеграл, ввиду отсутствия особенностей у $G'_1(\xi)$ и $G'_2(\xi)$, сходится, поэтому далее опять применим интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} E_2(x, y) &= \frac{y}{x^2} \int_0^{+\infty} e^{-yG_1(\xi)} \left[G'_2(\xi) \cos(yG_2(\xi)) - G'_1(\xi) \sin(yG_2(\xi)) \right] (\sin(x\xi))' d\xi = \\ &= \frac{y}{x^2} \left[e^{-yG_1(\xi)} \left[G'_2(\xi) \cos(yG_2(\xi)) - G'_1(\xi) \sin(yG_2(\xi)) \right] \sin(x\xi) \right]_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \left(e^{-yG_1(\xi)} \left[G'_2(\xi) \cos(yG_2(\xi)) - G'_1(\xi) \sin(yG_2(\xi)) \right] \right)' \sin(x\xi) d\xi = \\ &= \frac{y}{x^2} \int_0^{+\infty} \left(e^{-yG_1(\xi)} \left[G'_1(\xi) \sin(yG_2(\xi)) - G'_2(\xi) \cos(yG_2(\xi)) \right] \right)' \sin(x\xi) d\xi =: \frac{y}{x^2} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \sin(x\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где функция $\psi(\xi) = (e^{-yG_1(\xi)}[G'_1(\xi) \sin(yG_2(\xi)) - G'_2(\xi) \cos(yG_2(\xi))])' \in L_1(\mathbb{R}_+)$, функция $\sin(x\xi) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, поэтому условия тауберовой теоремы Винера выполнены, а значит, для любого фиксированного $y \in (0, +\infty)$ и параметров a_k и b уравнения (1.1), удовлетворяющих условиям (1.4), справедливо соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 E_2(x, y) = 0. \quad (3.13)$$

На основании (3.12) и (3.13) заключаем, что функция (3.1) при любом фиксированном $y \in (0, +\infty)$ настолько быстро убывает при $x \rightarrow \infty$, что для любой непрерывной и ограниченной функции $u_0(x)$ функция (3.8) определена корректно в области D .

Осталось выяснить поведение функций (3.3) и (3.4) при $x \rightarrow \infty$ (при любом фиксированном $y \in (0, +\infty)$). Разбив каждую из этих функций на два слагаемых, аналогично тому, как это было сделано для функции (3.1), но с заменой сомножителя $e^{-yG_1(\xi)}$ на $-\xi e^{-yG_1(\xi)}$ и $-\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}$ соответственно, проводим те же рассуждения с помощью интегрирования по частям. Так как функция $e^{-yG_1(\xi)}$ и её производные до второго порядка включительно не имеют особенностей, то не имеют их и функции $-\xi e^{-yG_1(\xi)}$ и $-\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}$ и их производные до второго порядка включительно; так как функция $e^{-yG_1(\xi)}$ и её производные до второго порядка включительно экспоненциально убывают на бесконечности, то и функции $-\xi e^{-yG_1(\xi)}$ и $-\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}$ и их производные до второго порядка включительно также убывают на бесконечности, при этом внеинтегральные члены при исследовании $E_x(x - h_k, y)$ ($k = \overline{1, n}$) и $E_{xx}(x, y)$ также обращаются в нуль при $\xi = 0$.

Таким образом, функции $E(x, y)$, $E_x(x - h_k, y)$ ($k = \overline{1, n}$) и $E_{xx}(x, y)$ убывают на бесконечности быстрее, чем функция x^{-2} , а значит, и функция $E_{yy}(x, y)$, являющаяся их линейной комбинацией (см. уравнение (1.1)), убывает на бесконечности быстрее, чем функция x^{-2} . Следовательно, функцию (3.8) можно дифференцировать по каждой из переменных дважды под знаком интеграла. А так как функция (3.1) удовлетворяет уравнению (1.1) в классическом смысле, то и функция (3.8) удовлетворяет в классическом смысле уравнению (1.1) в области D . $\square$

Замечание 3.1. Решение (3.8) удовлетворяет граничному условию (1.2) в следующем смысле: если рассматривать (3.8) как обобщённую функцию одной переменной x , зависящую от положительного параметра y , то она дважды дифференцируема по этому параметру на положительной полуоси и непрерывна по нему в начале координат (см., например, [15, § 9, п. 5]), а её предел при $y \rightarrow +0$, понимаемый в смысле топологии обобщённых функций переменной x , равен (обобщённой) функции $u_0(x)$.

Доказательство этого факта проводится по схеме, полностью идентичной той, что приведена в обосновании замечания 2 из работы [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алхуттов Ю. А., Чечкин Г. А. Об оценке Боярского—Мейерса решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка со сносом // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2024. — 70, № 1. — С. 1–14. — DOI: [10.22363/2413-3639-2024-70-1-1-14](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-1-14).

2. Алхутлов Ю. А., Чечкин Г. А. Об оценке Боярского—Мейерса решения задачи Зарембы для уравнений Пуассона со сносом // Мат. сб. — 2025. — 216, № 8. — С. 5–21. — DOI: [10.4213/sm10045](https://doi.org/10.4213/sm10045).
3. Власов В. В., Медведев Д. А. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — 30. — С. 3–173.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 2. Спектральная теория. Самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. — М.: Иностр. лит., 1966.
5. Зайцева Н. В., Муравник А. Б. Гладкие решения гиперболических уравнений со сдвигом на произвольный вектор в свободном члене // Дифф. уравн. — 2023. — 59, № 3. — С. 368–373. — DOI: [10.31857/S037406412303007X](https://doi.org/10.31857/S037406412303007X).
6. Зайцева Н. В., Муравник А. Б. Классические решения гиперболического дифференциально-разностного уравнения со сдвигом на произвольный вектор // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2023. — № 5. — С. 34–40. — DOI: [10.26907/0021-3446-2023-5-34-40](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-5-34-40).
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. II. — М.: Физматлит, 2002.
8. Муравник А. Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 52. — С. 3–143.
9. Муравник А. Б. Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Мат. заметки. — 2019. — 105, № 5. — С. 747–762. — DOI: [10.4213/mzm11992](https://doi.org/10.4213/mzm11992).
10. Муравник А. Б. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // Мат. заметки. — 2020. — 108, № 5. — С. 764–770. — DOI: [10.4213/mzm12737](https://doi.org/10.4213/mzm12737).
11. Муравник А. Б. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами в полупространстве // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2022. — 62, № 6. — С. 987–993. — DOI: [10.31857/S0044466922060138](https://doi.org/10.31857/S0044466922060138).
12. Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. I // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — 26. — С. 3–132.
13. Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. II // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — 33. — С. 3–179.
14. Скубачевский А. Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Усп. мат. наук. — 2016. — 71, № 5. — С. 3–122. — DOI: [10.4213/rm9739](https://doi.org/10.4213/rm9739).
15. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Наука, 1965.
16. Muravnik A. B., Zaitseva N. V. Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with differently directed translations // Lobachevskii J. Math. — 2023. — 44, № 3. — С. 920–925. — DOI: [10.1134/S199508022303023X](https://doi.org/10.1134/S199508022303023X).
17. Skubachevskii A. L. Elliptic functional differential equations and applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997. — DOI: [10.1007/978-3-0348-9033-5](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9033-5).

Н. В. Зайцева

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: n.v.zaiceva@yandex.ru, РИНЦ SPIN-код: 4169-1944, РИНЦ AuthorID: [735293](https://elibrary.ru/735293), ResearcherID: [L-5522-2015](https://orcid.org/0000-0001-9907-9641), Scopus: [56814447200](https://orcid.org/56814447200), ORCID: [0000-0001-9907-9641](https://orcid.org/0000-0001-9907-9641)

А. Б. Муравник

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: amuravnik@yandex.ru, РИНЦ SPIN-код: 3041-2270, РИНЦ AuthorID: [107037](https://elibrary.ru/107037), ResearcherID: [H-1821-2016](https://orcid.org/H-1821-2016), Scopus: [56375915700](https://orcid.org/56375915700), ORCID: [0000-0001-8670-6589](https://orcid.org/0000-0001-8670-6589)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-469-483](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-469-483)EDN: [QLMEAR](https://www.edn.ru/QLMEAR)

UDC 517.956.223:517.929

Research article

Dirichlet problem for an elliptic equation with a shift in the lower-order derivatives

N. V. Zaitseva^{1,2} and A. B. Muravnik¹

¹*RUDN University, Moscow, Russia*

²*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Abstract. The solvability of a boundary-value problem for an elliptic differential-difference equation containing a shift operator in the lower-order derivatives is investigated in a half-plane. An explicit solution to the problem is constructed, and its smoothness at every point of the half-plane is proved. Conditions on the equation's coefficients that guarantee the solvability of the problem are determined.

Keywords: Dirichlet problem, elliptic equation, difference-differential equation, translation operator, Fourier transform.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The second author's research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSSF-2026-0013).

Authors' contribution. N. V. Zaitseva — construction of the solution to the problem, formulation and proof of auxiliary statements (Lemmas 1.1 and 3.1). A. B. Muravnik — problem statement, idea of constructing the solution using integral transforms, formulation and proof of the main result of the paper (Theorem 3.1 and Remark 3.1).

For citation: N. V. Zaitseva, A. B. Muravnik, “Dirichlet problem for an elliptic equation with a shift in the lower-order derivatives,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 3, 469–483. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-3-469-483](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-3-469-483) EDN: [QLMEAR](https://www.edn.ru/QLMEAR)

REFERENCES

1. Yu. A. Alkhutov and G. A. Chechkin, “Ob otsenke Boyarskogo—Meyersa resheniya zadachi Dirikhle dlya lineynogo ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka so snosom” [On the Boyarsky–Meyers estimate for the solution of the Dirichlet problem for a second-order linear elliptic equation with drift], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2024, **70**, No. 1, 1–14 (in Russian), DOI: [10.22363/2413-3639-2024-70-1-1-14](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-1-14).
2. Yu. A. Alkhutov and G. A. Chechkin, “Ob otsenke Boyarskogo—Meyersa resheniya zadachi Zaremby dlya uravneniy Puassona so snosom” [On the Boyarsky–Meyers estimate for the solution of the Zarembo problem for Poisson equations with drift], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2025, **216**, No. 8, 5–21 (in Russian), DOI: [10.4213/sm10045](https://doi.org/10.4213/sm10045).
3. V. V. Vlasov and D. A. Medvedev, “Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i svyazannye s nimi voprosy spektral'noy teorii” [Functional-differential equations in Sobolev spaces and related problems of spectral theory], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **30**, 3–173 (in Russian).
4. N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators. Part II: Spectral Theory. Self-Adjoint Operators in Hilbert Space* [Russian translation], Mir, Moscow, 1966 (Russian translation).
5. N. V. Zaitseva and A. B. Muravnik, “Gladkie resheniya giperbolicheskikh uravneniy so sdvigom na proizvol'nyy vektor v svobodnom chlene” [Smooth solutions of hyperbolic equations with a shift by an



- arbitrary vector in the free term], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2023, **59**, No. 3, 368–373 (in Russian), DOI: [10.31857/S037406412303007X](https://doi.org/10.31857/S037406412303007X).
6. N. V. Zaitseva and A. B. Muravnik, “Klassicheskie resheniya giperbolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya so sdvigom na proizvol’nyy vektor” [Classical solutions of a hyperbolic differential-difference equation with a shift by an arbitrary vector], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2023, No. 5, 34–40 (in Russian), DOI: [10.26907/0021-3446-2023-5-34-40](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2023-5-34-40).
 7. V. A. Il’in and E. G. Poznyak, *Osnovy matematicheskogo analiza. Ch. II* [Fundamentals of Mathematical Analysis. Part II], Fizmatlit, M., 2002 (in Russian).
 8. A. B. Muravnik, “Funksional’no-differentsial’nye parabolicheskie uravneniya: integral’nye predstavleniya i kachestvennye svoystva resheniy zadachi Koshi” [Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem], *Sovrem. Mat. Fundam. Naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **52**, 3–143 (in Russian).
 9. A. B. Muravnik, “Ellipticheskie zadachi s nelokal’nym potentsialom, vznikayushchie v modelyakh nelineynoy optiki” [Elliptic problems with a nonlocal potential arising in nonlinear optics models], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2019, **105**, No. 5, 747–762 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm11992](https://doi.org/10.4213/mzm11992).
 10. A. B. Muravnik, “Ellipticheskie differentsial’no-raznostnye uravneniya v poluprostranstve” [Elliptic differential-difference equations in a half-space], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2020, **108**, No. 5, 764–770 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm12737](https://doi.org/10.4213/mzm12737).
 11. A. B. Muravnik, “Ellipticheskie differentsial’no-raznostnye uravneniya s nelokal’nymi potentsialami v poluprostranstve” [Elliptic differential-difference equations with nonlocal potentials in a half-space], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2022, **62**, No. 6, 987–993 (in Russian), DOI: [10.31857/S0044466922060138](https://doi.org/10.31857/S0044466922060138).
 12. A. L. Skubachevskii, “Neklassicheskie kraevye zadachi. I” [Nonclassical boundary-value problems. I], *Sovrem. Mat. Fundam. Naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132 (in Russian).
 13. A. L. Skubachevskii, “Neklassicheskie kraevye zadachi. II” [Nonclassical boundary-value problems. II], *Sovrem. Mat. Fundam. Naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **33**, 3–179 (in Russian).
 14. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–122 (in Russian), DOI: [10.4213/rm9739](https://doi.org/10.4213/rm9739).
 15. G. E. Shilov, *Matematicheskiiy analiz. Vtoroy spetsial’nyy kurs* [Mathematical Analysis: Second Special Course], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
 16. A. B. Muravnik and N. V. Zaitseva, “Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with differently directed translations,” *Lobachevskii J. Math.*, 2023, **44**, No. 3, 920–925, DOI: [10.1134/S199508022303023X](https://doi.org/10.1134/S199508022303023X).
 17. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997, DOI: [10.1007/978-3-0348-9033-5](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9033-5).

N. V. Zaitseva

RUDN University, Moscow, Russia

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: n.v.zaiceva@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4169-1944, eLIBRARY AuthorID: 735293, ResearcherID: L-5522-2015, Scopus: 56814447200, ORCID: 0000-0001-9907-9641

A. B. Muravnik

RUDN University, Moscow, Russia

E-mail: amuravnik@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 3041-2270, eLIBRARY AuthorID: 107037, ResearcherID: H-1821-2016, Scopus: 56375915700, ORCID: 0000-0001-8670-6589