Современная математика. Фундаментальные направления. Том 72, № 3 (2026). С. 454–468
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-454-468 УДК 517.929.4
EDN: QDMAZJ *Научная статья*

О ПОВЕДЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНАХ

Г. В. Демиденко, В. С. Прохоров

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Аннотация. Доказан критерий асимптотической устойчивости нулевого решения систем дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами в линейных членах в терминах разрешимости дифференциального уравнения Ляпунова. Установлена равномерная оценка для решений систем дифференциальных уравнений, позволяющая указать скорость убывания при $t \to +\infty$. Получено описание области притяжения и указана оценка скорости сходимости нулевого решения систем нелинейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами в линейных членах. Исследована робастная устойчивость для почти периодических возмущений.

Ключевые слова: почти периодические коэффициенты, устойчивость решений, область притяжения, робастная устойчивость, дифференциальное уравнение Ляпунова.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Вклад авторов. Оба автора участвовали в получении результатов и написании текста рукописи.

Для цитирования: *Демиденко Г. В., Прохоров В. С.* О поведении на бесконечности решений систем дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами в линейных членах // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. **72**, № 3. С. 454–468. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-454-468 EDN: QDMAZJ

1. Введение

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами в линейных членах

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \quad t \geqslant 0, \tag{1.1}$$

где $A(t)$ — матрица размера $N \times N$ с непрерывными равномерно почти периодическими элементами, т. е.

$$\|A(t + \tau(\varepsilon)) - A(t)\| \leqslant \varepsilon,$$

где $\tau(\varepsilon)$ — ε-период.

© Г. В. Демиденко, В. С. Прохоров, 2026
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Такие системы линейных дифференциальных уравнений с равномерно почти периодическими коэффициентами встречаются в моделировании процессов с квазипериодической динамикой, где параметры изменяются не строго периодично. При обработке сигналов различной природы часто встречаются квазипериодические функции из-за несоизмеримости их базовых периодов. В биологии и экологии могут встречаться системы с почти периодическими коэффициентами для описания динамики популяции с сезонными колебаниями. Численность популяции может зависеть от сезонных изменений климата, доступности пищи, температуры и других факторов. Эти условия могут меняться не строго периодически, но сохранять некоторую повторяемость в долгосрочной перспективе. В таких случаях модели могут включать в себя почти периодические коэффициенты.

Важным вопросом для систем дифференциальных уравнений вида (1.1) является асимптотическая устойчивость. Такая задача хорошо изучена для случая постоянных и периодических коэффициентов (см., например, [3, 8, 11]). Хорошо известны следующие теоремы.

Теорема 1.1 (А. М. Ляпунов). *Пусть $A(t) \equiv A$. Нулевое решение* (1.1) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда существует эрмитово решение $H = H^* > 0$ матричного уравнения Ляпунова*

$$HA + A^*H = -C, \quad C = C^* > 0. \tag{1.2}$$

Такой подход дает возможность построить оценку на скорость убывания при $t \to +\infty$ (см., например, [2, 3]).

Теорема 1.2 (М. Г. Крейн). *Пусть $A(t) \equiv A$, $H = H^* > 0$ — решение* (1.2). *Тогда верна следующая оценка*:

$$\left\|e^{tA}\right\| \leqslant \sqrt{\mu(H)}e^{-\frac{t}{2\|H\|}}, \quad t \geqslant 0,$$

где $\mu(H)$ — число обусловленности матрицы H.

Аналоги теорем 1.1 и 1.2 справедливы для систем дифференциальных уравнений (1.1) с периодическими коэффициентами (см., например, [5]).

Теорема 1.3. *Пусть $A(t+T) = A(t)$. Нулевое решение* (1.1) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда существует эрмитово решение $H(t) = H^*(t) > 0$ следующей краевой задачи*:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C(t), \quad 0 < t < T, \\ H(0) = H(T), \end{gathered} \tag{1.3}$$

где $C(t) = C^*(t) > 0$ для $t \in [0, T]$.

Решение $H(t)$ краевой задачи (1.3) при $C(t) \equiv I$ продолжим T-периодически при $t \geqslant 0$, сохранив обозначения. Тогда имеет место аналог теоремы 1.2.

Теорема 1.4. *Пусть $A(t+T) = A(t)$, $Y(t)$ — матрицант системы* (1.1). *Тогда верна следующая оценка*:

$$\|Y(t)\|^2 \leqslant \frac{\|H(0)\|}{h_{min}(t)} \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}\,ds\right), \quad t \geqslant 0,$$

где $h_{min}(t)$ — минимальное собственное число $H(t)$.

В данной работе также изучается вопрос асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.1) в терминах разрешимости дифференциального матричного уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C,$$

где $A(t)$ — равномерно почти периодическая функция. Формулируется критерий экспоненциальной устойчивости и теорема о скорости убывания при $t \to +\infty$ по аналогии с теоремами 1.1–1.4.

Исследуется робастная устойчивость для равномерно почти периодических возмущений матрицы $A(t)$. Опираясь на полученные результаты, изучается задача об асимптотической устойчивости нулевого решения системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t, y), \quad \varphi(t, 0) \equiv 0, \quad t \geqslant 0.$$

Используя теорему Бора, в работе исследуется скорость стабилизации решений системы (1.1) для некоторого подкласса равномерно почти периодических матриц $A(t)$.

2. Предварительные сведения

В данном разделе даются понятия равномерно почти периодических функций и их ε-периодов, а также формулируются основные свойства таких функций, необходимые для дальнейшего изложения (см., например [1, 9, 10]).

Определение 2.1. Пусть $f(t)$ — непрерывная функция вещественного аргумента t, заданная на всей оси $(-\infty, \infty)$ и принимающая вещественные или комплексные значения. Мы будем называть число $\tau(\varepsilon)$ *ε-периодом функции* $f(x)$, если для всех t

$$|f(t + \tau(\varepsilon)) - f(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Определение 2.2. Мы будем говорить, что функция $f(t)$ *равномерно почти периодическая*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $L(\varepsilon)$, что на любом отрезке $[t_0, t_0 + L(\varepsilon)]$ лежит хотя бы один ε-период функции $f(t)$.

Теорема 2.1. *Пусть $f(t)$ — равномерно почти периодическая функция и ее первообразная*

$$I(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

ограничена, тогда $I(t)$ также принадлежит классу равномерно почти периодических функций.

Теорема 2.2. *Пусть $f(t)$ — равномерно почти периодическая функция, E — множество ее значений. Если функция $F(z)$ равномерно непрерывна на E, то суперпозиция $\varphi(t) = F[f(t)]$ также является равномерно почти периодической функцией.*

Теорема 2.3 (Х. Бор)**.** *Если $f(t)$ — равномерно почти периодическая функция, то найдется такое конечное число f_0, что*

$$f_0 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_x^{x+T} f(s)\, ds$$

равномерно по x.

Введем следующее обозначение:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_x^{x+T} f(s)\, ds = M\{f(t)\}.$$

Теорема 2.4 (С. Бохнер)**.** *Для того чтобы непрерывная функция $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ была равномерно почти периодической функцией, необходимо и достаточно, чтобы семейство сдвинутых функций $\{f(t + h)\}$ $(-\infty < h < \infty)$ было компактно в смысле равномерной сходимости на всей действительной оси.*

Теорема 2.5. *Класс равномерно почти периодических функций совпадает с классом функций $f(t)$, таких, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся комплексные числа A_k и вещественные числа λ_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, такие, что для всех t*

$$|f(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k t} A_k| \leqslant \varepsilon.$$

В работе будут рассматриваться только равномерно почти периодические функции, и поэтому слово «равномерно» будет опускаться. Далее мы всегда будем рассматривать непрерывные матрицы.

3. Дифференциальное матричное уравнение Ляпунова

В этом разделе будет рассмотрен вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения (1.1) в терминах разрешимости дифференциального матричного уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) = -C(t). \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Пусть $Y(t)$ — матрицант системы дифференциальных уравнений* (1.1) *и для него верна оценка*

$$\|Y(t)\| \leqslant \mu e^{-\nu(t-s)}\|Y(s)\|, \quad \nu > 0, \quad t > s, \tag{3.2}$$

при любых $t, s \geqslant 0$. Тогда для любой почти периодической $C(t) = C^*(t) > 0$ существует единственное почти периодическое решение $H(t) = H^*(t) > 0$ уравнения (3.1).

Доказательство. Пусть $Y(t)$ — матрицант системы (1.1), тогда, очевидно, решение (3.1) мы можем представить в виде

$$H(t) = (Y^*(t))^{-1} \int\limits_0^{+\infty} Y^*(s+t)C(s+t)Y(s+t)\,ds Y^{-1}(t).$$

Очевидно, что из неравенства (3.2) вытекает оценка

$$\|Y(t)Y^{-1}(s)\| \leqslant \mu e^{-\nu(t-s)}, \quad t > s. \tag{3.3}$$

Из оценки (3.3) следует, что $\|H\| < \infty$. Очевидно, что $H(t) \equiv H^*(t) > 0$. Теперь покажем, что $H(t)$ является почти периодической функцией. Рассмотрим разность $H(t+\tau) - H(t)$:

$$H(t+\tau) - H(t) \equiv \int\limits_0^{+\infty} \left(Y(s+t+\tau)Y(t+\tau)^{-1}\right)^* C(s+t+\tau)Y(s+t+\tau)Y^{-1}(t+\tau)\,ds -$$

$$- \int\limits_0^{+\infty} \left(Y(s+t)Y(t)^{-1}\right)^* C(s+t)Y(s+t)Y^{-1}(t)\,ds.$$

Очевидно, ее можно записать в виде

$$H(t+\tau) - H(t) \equiv$$

$$\equiv \int\limits_0^{+\infty} \left[\left(Y(s+t+\tau)Y(t+\tau)^{-1}\right)^* - \left(Y(s+t)Y^{-1}(t)\right)^*\right] C(s+t)Y(s+t+\tau)Y^{-1}(t+\tau)\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \left(Y(s+t)Y(t)^{-1}\right)^* C(s+t)\left[(s+t+\tau)Y(t+\tau)^{-1} - Y(s+t)Y^{-1}(t)\right]\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} \left(Y(s+t+\tau)Y(t+\tau)^{-1}\right)^* \left[C(s+t+\tau) - C(s+t)\right]\left(Y(s+t+\tau)Y(t+\tau)^{-1}\right)\,ds \equiv$$

$$\equiv v_1(t,\tau) + v_2(t,\tau) + v_3(t,\tau).$$

Имеем

$$\|H(t+\tau) - H(t)\| \leqslant \|v_1(t,\tau)\| + \|v_2(t,\tau)\| + \|v_3(t,\tau)\|.$$

В силу оценки (3.3) и почти периодичности матрицы $C(t)$, очевидно, следует, что

$$\|v_3(t,\tau)\| \leqslant \varepsilon c_0, \quad c_0 > 0,$$

где ε соответствует ε-периоду $\tau = \tau(\varepsilon)$.

Введем некоторые обозначения. Пусть

$$K(s,t) = Y(s+t)Y^{-1}(t),$$

тогда имеем

$$\frac{d}{ds}K(s,t) = \frac{d}{ds}\left(Y(s+t)Y^{-1}(t)\right) = A(\eta+t)K(\eta,t)$$

и

$$\frac{d}{ds}K(s,t+\tau) = A(s+t+\tau)K(s,t).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{ds}\left[K(s,t+\tau) - K(s,t)\right] \equiv A(s+t+\tau)\left[K(s,t+\tau) - K(s,t)\right] + \left[A(s+t+\tau) - A(s+t)\right]K(s,t). \tag{3.4}$$

Для нелинейного члена в силу почти периодичности матрицы $A(t)$ и условия (3.3) имеет место следующая оценка:

$$\|\left[A(s+t+\tau) - A(s+t)\right]K(s,t)\| \leqslant \varepsilon\mu e^{-\nu s}. \tag{3.5}$$

Решение дифференциального уравнения (3.4) представимо в виде

$$K(s,t+\tau) - K(s,t) \equiv \int\limits_0^s Y(s+t+\tau)Y^{-1}(\eta+t+\tau)\left[A(\eta+t+\tau) - A(\eta+t)\right]K(\eta,t)\,d\eta. \tag{3.6}$$

Проверить, что (3.6) является решением, мы можем подстановкой в (3.4). Теперь рассмотрим норму этого решения, используя оценки (3.3) и (3.5):

$$\|K(s,t+\tau) - K(s,t)\| \leqslant \int\limits_0^s \|Y(s+t+\tau)Y^{-1}(\eta+t+\tau)\|\|\left[A(\eta+t+\tau) - A(\eta+t)\right]K(\eta,t)\|\,d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\int\limits_0^s \mu^2 e^{-\nu s}\,d\eta = \varepsilon\mu^2 s e^{-\nu s}.$$

В силу неравенства (3.3) и полученной оценки для (3.6) имеем

$$\|v_1(t,\tau)\| \leqslant \varepsilon c_1, \quad \|v_2(t,\tau)\| \leqslant \varepsilon c_1, \quad c_1 \geqslant 0.$$

В итоге имеем

$$H(t+\tau) - H(t) \leqslant \varepsilon(c_0 + 2c_1),$$

где $\tau = \tau(\varepsilon)$ — ε-период для матрицы $A(t)$. Откуда следует, что $H(t)$ — почти периодическое решение (3.1). □

Замечание 3.1. Если в теореме 3.1 $C(t) = C^*(t) \geqslant c_0 I$, где $c_0 > 0$ — константа, то $H(t) = H^*(t) \geqslant h_0 I$, где $h_0 > 0$ — константа.

Теорема 3.2. *Пусть $H(t) = H^*(t) \geqslant h_0 I$ — почти периодическое решение матричного уравнения* (3.1) *при $C(t) \equiv I$, где $h_0 > 0$ — константа. Тогда нулевое решение уравнения* (1.1) *является асимптотически устойчивым и верна оценка*

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \frac{\|H(s)\|}{h_{min}(t)} e^{-\int\limits_s^t \frac{1}{\|H(\xi)\|}ds}\|y(s)\|^2, \quad t > s,$$

где $h_{min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$.

Доказательство. Рассмотрим выражение $\dfrac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$:

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle = \left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t)\right\rangle + \langle H(t)A(t)y(t), y(t)\rangle + \langle H(t)y(t), A(t)y(t)\rangle = -\langle y(t), y(t)\rangle.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle = -\langle y(t), y(t)\rangle.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leqslant -\frac{1}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle,$$

и в силу неравенства Гронуолла теорема доказана. □

Две предыдущие теоремы позволяют сформулировать критерий асимптотической устойчивости в терминах разрешимости дифференциального матричного уравнения Ляпунова (3.1).

Теорема 3.3. *Нулевое решение системы дифференциальных уравнений* (1.1) *будет равномерно экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда существует эрмитово почти периодическое решение* $H(t) = H^*(t) \geqslant h_0 I$ *дифференциального уравнения Ляпунова* (3.1) *для эрмитовой почти периодической матрицы* $C(t) = C^*(t) \geqslant c_0 I$, *где* $h_0 > 0, c_0 > 0$ — *константы.*

Проиллюстрируем теорему 3.3.

Пусть $B_1(t)$ — непрерывная T-периодическая матрица, и нулевое решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}y(t) = [B_1(t)]\, y(t)$$

является асимптотически устойчивым. В силу теоремы 1.3 вопрос об асимптотической устойчивости систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами сводится к задаче существования решения следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -C(t), \quad 0 < t < T,\\ H(0) = H(T) > 0,\end{gathered} \tag{3.7}$$

где $C(t) = C^*(t) > 0$ — T-периодическая матрица.

Рассмотрим теперь задачу об асимптотической устойчивости следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{dt}y(t) = [B_1(t) + B_2(wt)]\, y(t), \tag{3.8}$$

где $B_2(t)$ — непрерывная почти периодическая матрица. Положим

$$B(t, w) = B_1(t) + B_2(wt).$$

Теорема 3.4. *Пусть*

$$\left\| \int_0^t B_2(s)ds \right\| \leqslant b, \quad \forall t > 0. \tag{3.9}$$

Тогда существует такое w_0, *что для любого* $w \geqslant w_0$ *нулевое решение* (3.8) *будет асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть $H_1(t)$ — решение (3.7) при $C(t) \equiv I$ и

$$H_2(t, w) = \frac{1}{w}H_1(t)\int_0^{wt} B_2(s)ds + \frac{1}{w}\int_0^{wt} B_2^*(s)ds H_1(t).$$

Покажем, что $H(t, w) = H_1(t) - H_2(t, w)$ будет являться почти периодическим, эрмитовым и положительно определенным решением дифференциального матричного уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H + HB(t, w) + B^*(t, w)H = -C(t, w), \tag{3.10}$$

где

$$C(t, w) = I + \frac{1}{w}\frac{d}{dt}(H_1(t))\int_0^{wt} B_2(s)ds + \frac{1}{w}\int_0^{wt} B_2^*(s)ds\frac{d}{dt}(H_1(t)) + H_2(t, w)B(t, w) + B^*(t, w)H_2(t, w).$$

В силу условия (3.9) из теоремы 2.1 следует, что $H_2(t, w)$ и $C(t, w)$ являются почти периодическими матрицами, при этом

$$H_2(t, w) = H_2^*(t, w), \quad C(t, w) = C^*(t, w).$$

А из вида матриц $H_2(t,w)$ и $C(t,w)$ мы можем установить, что существует такое w_0, что при $w \geqslant w_0$

$$H(t,w) \geqslant h_0 I, \quad h_0 > 0, \quad t > 0,$$
$$C(t,w) \geqslant c_0 I, \quad c_0 > 0, \quad t > 0.$$

Из выражений

$$\frac{d}{dt}H_2(t,w) = H_1(t)B_2(wt) + B_2(wt)H_1(t) + \frac{1}{w}\frac{d}{dt}\left(H_1(t)\right)\int\limits_0^{wt} B_2(s)ds + \frac{1}{w}\int\limits_0^{wt} B_2^*(s)ds\frac{d}{dt}\left(H_1(t)\right),$$

$$\frac{d}{dt}H_1(t) + H_1(t)B_1(t) + H_1^*(t)B_1(t) = -I$$

и

$$H(t,w)B(t,w) + B^*(t,w)H(t,w) = [H_1(t)B_1(t) + B_1^*(t)H_1] +$$
$$+ [H_1(t)B_2(wt) + B_2^*(wt)H_1] - [H_2(t)B(t,w) + B(t,w)^*H_2]$$

следует, что $H(t,w) = H^*(t,w) > 0$ действительно будет решением (3.10). А значит, в силу теоремы 3.2 нулевое решение уравнения (3.8) будет асимптотически устойчиво для $w \geqslant w_0$. □

4. Системы нелинейных дифференциальных уравнений

В этом разделе рассмотрим задачу с нелинейным возмущением $\varphi(t,y)$:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \varphi(t,y), \quad t \geqslant 0, \tag{4.1}$$

где $\varphi(t,0) \equiv 0$, $A(t)$ — равномерно почти периодическая функция. Получим аналог теоремы устойчивости нулевого решения системы (4.1) с периодической матрицей $A(t)$ (см. [6]).

Теорема 4.1. *Пусть $H(t) = H^*(t) \geqslant h_0 I$ — почти периодическое решение матричного уравнения (3.1) при $C(t) \equiv I$, где $h_0 > 0$ — константа, и вектор-функция $\varphi(t,y)$ удовлетворяет следующему условию:*

$$\operatorname{Re}\langle H(t)\varphi(t,y), y\rangle \leqslant q\,\langle H(t)y, y\rangle^{1+\alpha}, \quad t \geqslant 0,$$

где $y \in \mathbb{C}^N$, $q \geqslant 0$, $\alpha > 0$. Тогда нулевое решение дифференциального уравнения (4.1) будет асимптотически устойчивым, его областью притяжения будет $\mathcal{E} = \left\{y \in \mathbb{C}^N : (H(0)y, y)^\alpha < r\right\}$, где

$$r = \frac{1}{2\alpha q}\left(\int\limits_0^\infty \exp\left(-\int\limits_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi\right)^{-1},$$

причем, если $y(0) \in \mathcal{E}$, то при $t \geqslant 0$ выполняется следующая оценка:

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \left(-\int\limits_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}ds\right)\langle H(0)y(0), y(0)\rangle\left[1 - 2q\alpha\int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_0^\xi \frac{\alpha}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi\,\langle H(0)y(0), y(0)\rangle^\alpha\right]^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Теорема 4.2. *Пусть $H(t) = H^*(t) \geqslant h_0 I$ — почти периодическое решение матричного уравнения (3.1) при $C(t) \equiv I$, где $h_0 > 0$ — константа, и функция $\varphi(t,y)$ удовлетворяет следующему условию:*

$$\operatorname{Re}\langle H(t)\varphi(t,y), y\rangle \leqslant q\langle H(t)y, y\rangle, \quad t \geqslant 0,$$

где $y \in \mathbb{C}^N$, $0 \leqslant q < \dfrac{1}{2\sup\limits_{t\geqslant 0}\|H(t)\|}$. Тогда нулевое решение системы дифференциальных уравнений (4.1) будет асимптотически устойчивым, причем выполняется следующая оценка:

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leqslant e^{2qt - \int\limits_0^t \frac{1}{\|H(s)\|}ds}\langle H(0)y(0), y(0)\rangle, \quad t \geqslant 0.$$

5. Оценки скорости стабилизации решений в частных случаях

В этом разделе будет приведен аналог теоремы Флоке для некоторого класса почти периодических матриц $A(t)$ (см., например, [3]). Используя теорему Бора, будут получены оценки скорости стабилизации решений системы (1.1) для некоторого подкласса почти периодических матриц $A(t)$.

Теорема 5.1. *Пусть*

$$A(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k t} A_k, \quad A_i A_j = A_j A_i \quad \forall\, i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{5.1}$$

где $\lambda_k \neq 0$. *Тогда*

$$Y(t) = P(t) e^{tA_0},$$

где $Y(t)$ — *матрицант системы* (1.1), $P(t)$ — *почти периодическая матрица.*

Доказательство. Если выполнено условие (5.1), то мы можем явно указать формулу матрицанта системы (1.1):

$$Y(t) = e^{\int\limits_0^t A(s)\, ds}.$$

Теперь мы можем рассмотреть следующее представление $Y(t)$:

$$Y(t) = Y(t) e^{-tA_0} e^{tA_0}. \tag{5.2}$$

Покажем, что $Y(t)e^{-tA_0}$ — почти периодическая функция. Воспользовавшись представлением (5.2), имеем

$$Y(t) e^{-tA_0} = e^{\int\limits_0^t (A(s) - A_0)\, ds}. \tag{5.3}$$

Нетрудно заметить, что существует такое число a, что

$$\left\| \int\limits_0^t (A(s) - A_0)\, ds \right\| \leqslant a \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

Тогда из теорем 2.1, 2.2 следует, что (5.3) является почти периодической матрицей. □

Замечание 5.1. Теорема 5.1 остается верной для почти периодических матриц вида

$$A(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{i\lambda_k t} A_k, \quad A_i A_j = A_j A_i \quad \forall\, i, j,$$

где $\lambda_k \neq 0$, если существует такое число a, что выполнено условие

$$\left\| \int\limits_0^t (A(s) - A_0)\, ds \right\| \leqslant a \quad \forall\, t \geqslant 0.$$

Заметим, что в этом случае асимптотическая устойчивость определяется расположением спектра матрицы A_0. Поэтому можем сформулировать следующие теоремы для произвольной почти периодической матрицы $A(t)$.

Теорема 5.2. *Положим* $M\{A(t)\} = A_0$. *Пусть спектр матрицы* A_0 *лежит в левой полуплоскости* $\mathbb{C}_-$ *и выполнено условие*

$$\|A(t) - A_0\| \leqslant \alpha < \frac{1}{2\|H_0\|} \quad \forall\, t > T_0,$$

где $H_0 = H_0^* > 0$ — *решение матричного уравнения Ляпунова*

$$H_0 A_0 + A_0^* H_0 = -I. \tag{5.4}$$

Тогда выполняется следующая оценка:

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \mu(H_0) e^{\left(2\alpha - \frac{1}{\|H_0\|}\right)(t-s)} \|y(s)\|^2, \quad t > s, \tag{5.5}$$

где $\mu(H_0)$ — число обусловленности матрицы H_0.

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение уравнения (1.1). Рассмотрим выражение $\dfrac{d}{dt}\langle H_0 y, y\rangle$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\langle H_0 y, y\rangle = \langle H_0 A(t) y, y\rangle + \langle H_0 y, A(t) y\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle H_0 y, y\rangle = \langle H_0 A_0 y, y\rangle + \langle H_0 y, A_0 y\rangle + 2\operatorname{Re}\langle H_0 (A(t) - A_0) y, y\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle H_0 y, y\rangle = -(y, y) + 2\operatorname{Re}\langle H_0 (A(t) - A_0) y, y\rangle.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\langle H_0 y, y\rangle \leqslant -\langle y, y\rangle + 2\|H_0\|\|A(t) - A_0\|\langle y, y\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle H_0 y, y\rangle \leqslant (-1 + 2\|H_0\|\alpha)\langle y, y\rangle,$$

$$\frac{d}{dt}\langle H_0 y, y\rangle \leqslant \left(-\frac{1}{\|H_0\|} + 2\alpha\right)\langle H_0 y, y\rangle,$$

Домножим полученное выражение на $e^{\left(\frac{1}{\|H_0\|} - 2\alpha\right)t}$ и получим

$$\frac{d}{dt}\left(\langle H_0 y, y\rangle e^{\left(\frac{1}{\|H_0\|} - 2\alpha\right)t}\right) \leqslant 0.$$

Проинтегрировав от s до t, получим искомую оценку (5.5). □

Следствие 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.2. *Тогда выполнена оценка*

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \mu(H_0) e^{\left(2\alpha - \frac{1}{\|H_0\|}\right)t}\|y(0)\|^2.$$

Теперь рассмотрим вопрос об асимптотической устойчивости в случае принадлежности матричного спектра области, ограниченной параболой. Эту задачу можно исследовать в терминах существования решения обобщенного матричного уравнения Ляпунова (см., например, [4, 7, 12]).

Теорема 5.3. *Положим $M\{A(t)\} = A_0$. Пусть $A(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$ и спектр матрицы A_0 лежит в левой полуплоскости в области, ограниченной параболой*

$$\mathcal{P}_i = \left\{\lambda : \ \frac{1}{2p}(\operatorname{Im}\lambda)^2 < -\operatorname{Re}\lambda\right\}, \quad p > 0,$$

и выполнено условие

$$\left\|\frac{1}{4p}A^2(t) + \frac{1}{4p}A'(t) - A(t) - \frac{1}{4p}A_0^2 + A_0\right\| \leqslant \beta < \frac{1}{2\|\hat{H}_0\|} \quad \forall t > T_0,$$

где $\hat{H}_0$ — решение обобщенного матричного уравнения Ляпунова

$$\hat{H}_0 A_0 + A_0^* \hat{H}_0 + \frac{1}{2p}\left[A_0^* \hat{H}_0 A_0 - \frac{1}{2}(\hat{H}_0 A_0^2 + (A_0^*)^2 \hat{H}_0)\right] = -I. \tag{5.6}$$

Тогда выполняется следующая оценка:

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \mu(\hat{H}_0) e^{2\left(p - \sqrt{p^2 + \frac{p}{\|\hat{H}_0\|} - 2\beta p}\right)(t-s)}\|y(s)\|^2, \quad t > s, \tag{5.7}$$

где $\mu(\hat{H}_0)$ — число обусловленности матрицы $\hat{H}_0$.

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение уравнения (1.1). Тогда получим следующее соотношение:

$$\left(-\frac{1}{4p}\right)\frac{d^2}{dt^2}\langle \hat{H}_0 y(t), y(t)\rangle + \frac{d}{dt}\langle \hat{H}_0 y(t), y(t)\rangle + \frac{1}{2p}\langle \hat{H}_0 A(t) y(t), A(t) y(t)\rangle + \frac{1}{2p}\langle \hat{H}_0 A_0 y(t), A_0 y(t)\rangle =$$

$$= \left(-\frac{1}{4p}\right)\langle \hat{H}_0 A(t)^2 y(t), y(t)\rangle + \left(-\frac{1}{4p}\right)\langle \hat{H}_0(t) y(t), A^2(t) y(t)\rangle +$$

$$+\left(-\frac{1}{4p}\right)\langle\hat{H}_0A'(t)y(t),y(t)\rangle+\left(-\frac{1}{4p}\right)\langle\hat{H}_0(t)y(t),A'(t)y(t)\rangle+$$

$$+\langle\hat{H}_0A(t)y(t),y(t)\rangle+\langle\hat{H}_0(t)y(t),A(t)y(t)\rangle+\frac{1}{2p}\langle\hat{H}_0A_0y(t),A_0y(t)\rangle.$$

К полученному выражению добавим и вычтем

$$\left\langle\left(\hat{H}_0A_0+A_0^*\hat{H}_0-\frac{1}{4p}\left(\hat{H}_0A_0^2+(A_0^*)^2\hat{H}_0\right)\right)y(t),y(t)\right\rangle.$$

Тогда в силу (5.6) имеем

$$\left(-\frac{1}{4p}\right)\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\rangle-\frac{d}{dt}\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\rangle+$$

$$+\frac{1}{2p}\langle\hat{H}_0A(t)y(t),A(t)y(t)\rangle+\frac{1}{2p}\langle\hat{H}_0A_0y(t),A_0y(t)\rangle=-\langle y(t),y(t)\rangle+$$

$$+2\operatorname{Re}\left\langle\hat{H}_0\left(A(t)-A_0-\frac{1}{4p}\left(\hat{H}_0A^2(t)+\hat{H}_0A'(t)-\hat{H}_0A_0^2\right)\right)y(t),y(t)\right\rangle.$$

Теперь воспользуемся неравенством Коши—Буняковского, положительной определенностью матрицы H_0 и получим

$$\left(-\frac{1}{4p}\right)\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\rangle-\frac{d}{dt}\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\rangle\leqslant-\frac{1}{\|\hat{H}_0\|}\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\rangle+2\beta\left\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\right\rangle.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\rangle+4p\frac{d}{dt}\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\rangle-4p\left(\frac{1}{\|\hat{H}_0\|}-2\beta\right)\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\rangle\geqslant0. \tag{5.8}$$

Для анализа (5.8) рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$x''-4px'-4p\left(\frac{1}{\|\hat{H}_0\|}-2\beta\right)x=0.$$

Очевидно, соответствующий характеристический полином имеет корни

$$\lambda_1=2p-2\sqrt{p^2+\frac{p}{\|\hat{H}_0\|}-2\beta p},\qquad\lambda_2=2p+2\sqrt{p^2+\frac{p}{\|\hat{H}_0\|}-2\beta p}.$$

Умножая неравенство (5.8) на $e^{-\lambda_2t}$, имеем

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}\left(\left\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\right\rangle e^{-\lambda_1t}\right)e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\right]\geqslant0.$$

Интегрируя от t до $+\infty$, получим

$$\int\limits_t^{+\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{d}{ds}\left(\left\langle\hat{H}_0y(s),y(s)\right\rangle e^{-\lambda_1s}\right)e^{(\lambda_1-\lambda_2)s}\right]ds=-\frac{d}{dt}\left(\left\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\right\rangle e^{-\lambda_1t}\right)e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\left\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\right\rangle e^{-\lambda_1t}\right)\leqslant0,$$

откуда вытекает оценка

$$\left\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\right\rangle\leqslant\left\langle\hat{H}_0y(s),y(s)\right\rangle e^{\lambda_1(t-s)},\quad t>s.$$

В силу неравенства

$$\lambda_{min}(\hat{H}_0)\langle y(t),y(t)\rangle\leqslant\langle\hat{H}_0y(t),y(t)\rangle\leqslant\|\hat{H}_0\|\langle y(t),y(t)\rangle$$

получим оценку (5.7). □

Следствие 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.3. *Тогда выполнена оценка*

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \mu(\hat{H}_0) e^{2\left(p-\sqrt{p^2+\frac{p}{\|\hat{H}_0\|}-2\beta p}\right)t} \|y(0)\|^2.$$

Следствие 5.3. *При* $p \to +\infty$ *оценка* (5.7) *переходит в оценку* (5.5)

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \mu(H_0) e^{\left(2\alpha-\frac{1}{2\|H_0\|}\right)(t-s)} \|y(s)\|^2, \quad t > s,$$

где $H_0 = \int\limits_0^\infty e^{-tA_0^*} e^{-tA_0} dt$ *— решение уравнения Ляпунова* (5.4).

6. Робастная устойчивость

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) + A_1(t)]y, \quad t \geqslant 0, \tag{6.1}$$

где $A(t)$, $A_1(t)$ — почти периодические матрицы. Эту систему можно рассматривать как почти периодическое возмущение линейной системы (1.1). В дальнейшем будем полагать, что нулевое решение (1.1) равномерно экспоненциально устойчиво. В этом случае, как мы знаем, существует единственное почти периодическое решение $H(t) = H^*(t) > 0$ дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) = -I. \tag{6.2}$$

Теорема 6.1. *Пусть* $H(t) = H^*(t) \geqslant h_0 I$ *— почти периодическое решение дифференциального уравнения Ляпунова* (6.2), *где* $h_0 > 0$ *— константа. Предположим, что для непрерывной почти периодической функции* $\alpha(t)$ *такой, что*

$$H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t) \leqslant I + \alpha(t)H(t), \quad t \geqslant 0, \tag{6.3}$$

выполнено условие

$$M\{\alpha(t)\} < 0, \quad t \geqslant 0. \tag{6.4}$$

Тогда нулевое решение системы (6.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть $y(t)$ — произвольное решение системы (6.1). Рассмотрим $\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$. Учитывая, что $H(t)$ — решение (6.1), имеем

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle = \left\langle \left(\frac{d}{dt}H(t)\right) y(t), y(t)\right\rangle + \left\langle H(t)\frac{d}{dt}y(t), y(t)\right\rangle +$$

$$+ \left\langle H(t)y(t), \frac{d}{dt}y(t)\right\rangle = \left\langle \left[\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t)\right] y(t), y(t)\right\rangle +$$

$$+ \langle H(t)A_1(t)y(t), y(t)\rangle + \langle A_1^*(t)H(t)y(t), y(t)\rangle = \langle (H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t) - I)\, y(t), y(t)\rangle\,.$$

В силу условия (6.3) получим

$$\frac{d}{dt}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leqslant \alpha(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle\,.$$

Отсюда следует, что

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leqslant \exp\left(\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds\right)\langle H(0)y(0), y(0)\rangle\,.$$

В силу условия (6.4) существует такое t_0, что

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds < 0, \quad t \geqslant t_0,$$

причем $\int\limits_0^t \alpha(s)\,ds = O(t)$ при $t \to \infty$. Тогда имеем

$$\|y(t)\|^2 \leqslant \frac{\|H(s)\|}{h_{min}(t)} \exp\left(\int\limits_s^t \alpha(\xi)\,d\xi\right) \|y(s)\|,$$

где $h_{min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. □

В следующей теореме мы установим оценку для нормы разности

$$\|H(t) - \tilde{H}(t)\|, \quad t \geqslant 0,$$

где $\tilde{H}(t)$ — почти периодическое решение уравнения Ляпунова с возмущением

$$\frac{d}{dt}\tilde{H}(t) + \tilde{H}(t)\,(A(t) + A_1(t)) + (A(t) + A_1(t))^*\,\tilde{H}(t) \equiv -I. \tag{6.5}$$

Теорема 6.2. *Пусть $H(t) = H^*(t) \geqslant h_0 I$ — почти периодическое решение дифференциального уравнения Ляпунова* (6.2)*, где $h_0 > 0$ — константа. Предположим, что*

$$\Delta = \sup_{t \geqslant 0} \|H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t)\| < 1. \tag{6.6}$$

Тогда нулевое решение асимптотически устойчиво и имеет место оценка

$$\|\tilde{H}(t) - H(t)\| \leqslant \frac{\Delta}{1-\Delta}\|H(t)\|, \quad t \geqslant 0. \tag{6.7}$$

Доказательство. Если выполнено условие (6.6), то можно взять почти периодическую функцию $\alpha(t) = \dfrac{\Delta - 1}{\|H(t)\|}$. Для нее будут выполнены условия теоремы 6.1 и поэтому мы можем говорить о том, что нулевое решение (6.1) будет асимптотически устойчивым, а это значит, что решение $H(t)$ уравнения (6.5) будет эрмитовым, почти периодическим и положительно определенным.

Матрица $V(t) = \tilde{H}(t) - H(t)$ будет почти периодическим решением дифференциального матричного уравнения Ляпунова

$$\frac{d}{dt}V + V\,(A(t) + A_1(t)) + (A(t) + A_1(t))^*\,V(t) = -(H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t)).$$

У данного дифференциального уравнения есть единственное почти периодическое решение, которое мы можем представить в следующем виде:

$$\tilde{H}(t) - H(t) = (\tilde{Y}^{-1}(t))^* \int\limits_t^\infty \tilde{Y}^*(s)\big(H(s)A_1(s) + A_1^*(s)H(s)\big)\tilde{Y}(s)\,ds\;\tilde{Y}^{-1}(t),$$

где $\tilde{Y}(t)$ — матрицант системы (6.1).

$$\begin{gathered}
\|\tilde{H}(t) - H(t)\| \leqslant \sup_{|v|=1}\left|\left\langle(\tilde{H}(t) - H(t))v, v\right\rangle\right| = \\
= \sup_{|v|=1}\left|\int\limits_0^\infty \left\langle(H(s)A_1(s) + A_1^*(s)H(s))\tilde{Y}(s)\tilde{Y}^{-1}(t)v,\ \tilde{Y}(s)\tilde{Y}^{-1}(t)v\right\rangle ds\right| \leqslant \\
\leqslant \sup_{\tau \geqslant 0}\|H(\tau)A_1(\tau) + A_1^*(\tau)H(\tau)\| \sup_{|v|=1}\int\limits_t^\infty \|\tilde{Y}(s)\tilde{Y}^{-1}(t)v\|^2\,ds = \\
= \sup_{\tau \geqslant 0}\|H(\tau)A_1(\tau) + A_1^*(\tau)H(\tau)\| \sup_{|v|=1}\langle\tilde{H}(t)v, v\rangle = \\
= \sup_{\tau \geqslant 0}\|H(\tau)A_1(\tau) + A_1^*(\tau)H(\tau)\|\,\|\tilde{H}(t)\| \leqslant \Delta\big(\|\tilde{H}(t) - H(t)\| + \|H(t)\|\big).
\end{gathered}$$

Поскольку $\Delta < 1$, то получим (6.7). □

Теперь рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) + \mu A_1(t)]y, \quad t \geqslant 0. \tag{6.8}$$

Для нее верна следующая теорема.

Теорема 6.3. *Пусть $H(t) = H^*(t) \geqslant h_0 I$ — почти периодическое решение дифференциального уравнения Ляпунова* (6.2)*, где $h_0 > 0$ — константа, и*

$$\Delta = \sup_{t \geqslant 0} \|H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t)\|.$$

Тогда при любом $\mu : |\mu|\Delta < 1$ нулевое решение системы (6.8) *асимптотически устойчиво, и для почти периодического решения $H(t,\mu)$ дифференциального уравнения Ляпунова*

$$\frac{d}{dt}H + H\big(A(t) + \mu A_1(t)\big) + \big(A^*(t) + \mu A_1^*(t)\big)H = -I$$

имеет место оценка

$$\|H(t,\mu) - H(t)\| \leqslant \frac{|\mu|\Delta}{1 - |\mu|\Delta}\|H(t)\|, \quad t \geqslant 0.$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы 6.2. □

Теорема 6.4. *Пусть $H(t) = H^*(t) > h_0 I$ — почти периодическое решение уравнения* (6.2)*, где $h_0 > 0$ — константа, и*

$$\sup_{t \geqslant 0} \|A_1\| \leqslant \frac{1}{4 \sup\limits_{t \geqslant 0} \|H(t)\|}.$$

Тогда нулевое решение (6.1) *будет асимптотически устойчивым и имеет место оценка*

$$\frac{\|H(t) - H(t)\|}{\|H(t)\|} \leqslant 4 \sup_{t \geqslant 0} \|H(t)\| \sup_{t \geqslant 0} \|A_1(t)\|, \quad t \geqslant 0.$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы вытекает из теоремы 6.2. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Винер Н.* Интеграл Фурье и некоторые его приложения. — М.: Физматлит, 1963.
2. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. — Новосибирск: Научная книга, 1997.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
4. *Демиденко Г. В.* Матричные уравнения: Учебное пособие. — Новосибирск: НГУ, 2009.
5. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. ж. — 2001. — *42*, № 2. — С. 332–348.
6. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. ж. — 2004. — *45*, № 6. — С. 1271–1284.
7. *Демиденко Г. В., Прохоров В. С.* О расположении матричного спектра относительно параболы // Мат. тр. — 2023. — *26*, № 1. — С. 26–40. — DOI: 10.33048/mattrudy.2023.26.102.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
9. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. — М.: ГИТТЛ, 1953.
10. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: МГУ, 1978.
11. *Массера Х. Л., Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970.
12. *Прохоров В. С.* Принадлежность матричного спектра области, ограниченной параболой // Мат. тр. — 2024. — *27*, № 4. — С. 93–114. — DOI: 10.25205/1560-750X-2024-27-4-93-114.

Г. В. Демиденко
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: g.demidenko@g.nsu.ru, РИНЦ SPIN-код: 7719-1669, РИНЦ AuthorID: 2077, ResearcherID: A-9915-2014, Scopus: 6701652666, ORCID: 0000-0001-6338-7247

В. С. Прохоров
Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
E-mail: v.prokhorov@g.nsu.ru, РИНЦ SPIN-код: 2445-3957, РИНЦ AuthorID: 1257172

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-454-468
EDN: QDMAZJ

UDC 517.929.4
Research article

On the behavior at infinity of solutions to systems of differential equations with almost-periodic coefficients in the linear terms

G. V. Demidenko and V. S. Prokhorov

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

Abstract. A criterion for the asymptotic stability of the zero solution for systems of differential equations with almost-periodic coefficients in the linear terms is established in terms of the solvability of the Lyapunov differential equation. A uniform estimate for the solutions of such systems is derived, making it possible to determine the rate of decay as $t \to +\infty$. The attraction domain is characterized, and an estimate for the rate of convergence of the zero solution for systems of nonlinear differential equations with almost-periodic coefficients in the linear terms is obtained. Robust stability under almost-periodic perturbations is investigated.

Keywords: almost-periodic coefficients, stability of solutions, attraction domain, robust stability, Lyapunov differential equation.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was supported by the Mathematical Center in Akademgorodok, Agreement No. 075-15-2025-349 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

Authors' contribution. Both authors participated in obtaining the results and writing the manuscript.

For citation: G. V. Demidenko, V. S. Prokhorov, "On the behavior at infinity of solutions to systems of differential equations with almost-periodic coefficients in the linear terms," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 3, 454–468. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-454-468 EDN: QDMAZJ

REFERENCES

1. N. Wiener, *Integral Fur'e i nekotorye ego prilozheniya* [The Fourier Integral and Certain of Its Applications], Fizmatlit, Moscow, 1963 (Russian translation).
2. S. K. Godunov, *Sovremennye aspekty lineynoy algebry* [Modern Aspects of Linear Algebra], Nauchnaya Kniga, Novosibirsk, 1997 (in Russian).
3. Yu. L. Daletskii and M. G. Kreyn, *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
4. G. V. Demidenko, *Matrichnye uravneniya: Uchebnoe posobie* [Matrix Equations: A Textbook], NGU, Novosibirsk, 2009 (in Russian).
5. G. V. Demidenko and I. I. Matveeva, "Ob ustoychivosti resheniy lineynykh sistem s periodicheskimi koeffitsientami" [On the stability of solutions of linear systems with periodic coefficients], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 2001, **42**, No. 2, 332–348 (in Russian).
6. G. V. Demidenko and I. I. Matveeva, "Ob ustoychivosti resheniy kvazilineynykh periodicheskikh sistem differentsial'nykh uravneniy" [On the stability of solutions of quasilinear periodic systems of differential equations], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 2004, **45**, No. 6, 1271–1284 (in Russian).

© G. V. Demidenko, V. S. Prokhorov, 2026

This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

7. G. V. Demidenko and V. S. Prokhorov, "O raspolozhenii matrichnogo spektra otnositel'no paraboly" [On the location of the matrix spectrum relative to the parabola], *Mat. Tr.* [Math. Proc.], 2023, **26**, No. 1, 26–40 (in Russian), DOI: 10.33048/mattrudy.2023.26.102.
8. B. P. Demidovich, *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on the Mathematical Theory of Stability], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
9. B. M. Levitan, *Pochti-periodicheskie funktsii* [Almost-Periodic Functions], GITTL, Moscow, 1953 (in Russian).
10. B. M. Levitan and V. V. Zhikov, *Pochti-periodicheskie funktsii i differentsial'nye uravneniya* [Almost-Periodic Functions and Differential Equations], MGU, Moscow, 1978 (in Russian).
11. J. L. Massera and J. J. Schaffer, *Lineynye differentsial'nye uravneniya i funktsional'nye prostranstva* [Linear Differential Equations and Functional Spaces], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
12. V. S. Prokhorov, "Prinadlezhnost' matrichnogo spektra oblasti, ogranichennoy paraboloy" [Belonging of the matrix spectrum to the domain bounded by a parabola], *Mat. Tr.* [Math. Proc.], 2024, **27**, No. 4, 93–114 (in Russian), DOI: 10.25205/1560-750X-2024-27-4-93-114.

G. V. Demidenko
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: g.demidenko@g.nsu.ru, eLIBRARY SPIN-code: 7719-1669, eLIBRARY AuthorID: 2077, ResearcherID: A-9915-2014, Scopus: 6701652666, ORCID: 0000-0001-6338-7247

V. S. Prokhorov
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia
E-mail: v.prokhorov@g.nsu.ru, eLIBRARY SPIN-code: 2445-3957, РИНЦ AuthorID: 1257172