Современная математика. Фундаментальные направления. Том 72, № 3 (2026). С. 444–453
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-444-453 УДК 517.9
EDN: QDITWY *Научная статья*

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

С. А. Будочкина, Т. Х. Лыу

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. В настоящей статье разработан аналог метода Бернулли для нахождения решений одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с потенциальными операторами. Для этого также получены условия потенциальности Гельмгольца. Теоретические результаты проиллюстрированы конкретными примерами.

Ключевые слова: билинейная форма, потенциальный оператор, условия потенциальности Гельмгольца, аналог метода Бернулли.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115).

Вклад авторов. Все авторы участвовали в разработке концепции исследования, сборе, обработке и анализе данных, написании текста рукописи, формулировке выводов.

Для цитирования: *Будочкина С. А., Лыу Т. Х.* О решениях одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с потенциальными операторами // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. **72**, № 3. С. 444–453. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-444-453 EDN: QDITWY

1. Введение

В рамках современного вариационного исчисления обратной задачей вариационного исчисления (ОЗВИ) считается задача о построении функционала, множество стационарных точек которого совпадает с множеством решений заданных уравнений. Для решения ОЗВИ требуется исследовать представимость рассматриваемых уравнений в форме уравнений Эйлера—Лагранжа. В работе [5] Г. Гельмгольцем поставлена задача о представлении уравнений движения физических систем в виде уравнений Эйлера—Лагранжа и сформулированы необходимые условия существования функции Лагранжа. В дальнейшем Г. К. Суслов [8] и А. Майер [21] доказали, что сформулированные Г. Гельмгольцем условия существования лагранжиана для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка являются не только необходимыми, но и достаточными. В современной литературе эти условия называют условиями потенциальности Гельмгольца.

© С. А. Будочкина, Т. Х. Лыу, 2026
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

Исследование представимости дифференциальных уравнений в форме уравнений Эйлера—Лагранжа является важной и актуальной задачей. Отметим, что этому вопросу посвящено значительное количество работ: например, для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными [2–4, 7, 9–11, 14–20, 23], дифференциально-разностных уравнений [6], стохастических дифференциальных уравнений [22], дифференциальных уравнений с производными дробного порядка [12] и др. В перечисленных работах предложены конструктивные приемы построения прямых и косвенных вариационных формулировок дифференциальных уравнений. Для этого используются локальные и нелокальные билинейные формы, в том числе и билинейные формы со свертками, а также исследуются вопросы существования вариационных множителей как в виде функций, так и в виде операторов, в том числе и матричных. Отметим, что в работах [7, 14, 19] предложен единый подход, позволяющий исследовать потенциальность различных типов операторов: обыкновенных дифференциальных, дифференциальных операторов с частными производными и др.

Представляет значительный интерес распространить некоторые изложенные в этих работах методы на исследование вопросов представимости дифференциальных уравнений с производными высших порядков в форме уравнений Эйлера—Лагранжа. В связи с этим вопрос о вариационности обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка приобретает особую важность, что и определило актуальность данной работы.

Основная цель настоящей работы — найти решения одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с потенциальными операторами.

В дальнейшем будем использовать обозначения и терминологию работы [7].

Предположим, что U, V — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Нам понадобятся также следующие определение и теорема.

Определение 1.1 (см. [7]). Оператор $N : D(N) \subset U \to V$ называется *потенциальным* на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы $\Phi(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$, если существует дифференцируемый по Гато функционал $F_N : D(F_N) = D(N) \to \mathbb{R}$ такой, что

$$\delta F_N[u,h] = \Phi(N(u),h) \qquad \forall u \in D(N),\ \forall h \in D(N'_u).$$

Заметим, что N'_u — производная Гато оператора N в точке $u \in D(N)$. Множество $D(N'_u)$ состоит из таких элементов $h \in U$, что $(u + \varepsilon h) \in D(N)$ для любого достаточно малого значения ε.

Теорема 1.1 (см. [7]). *Пусть дифференцируемый по Гато оператор $N : D(N) \subset U \to V$ и билинейная форма $\Phi(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ таковы, что для любых фиксированных элементов $u \in D(N)$, $g, h \in D(N'_u)$ функция $\psi(\varepsilon) = \Phi(N(u + \varepsilon h), g)$ принадлежит классу $C^1[0,1]$. Тогда для потенциальности оператора N на выпуклом множестве $D(N)$ относительно рассматриваемой билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\Phi\left(N'_u h, g\right) = \Phi\left(N'_u g, h\right) \qquad \forall u \in D\left(N\right), \forall h, g \in D\left(N'_u\right). \tag{1.1}$$

2. Условия потенциальности

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$N(u) \equiv u'''(t) + a(t)u''(t) + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = 0, \qquad t \in (t_0, t_1]. \tag{2.1}$$

Здесь $u(t)$ — неизвестная функция, $a \in C^2[t_0,t_1]$, $b \in C^1[t_0,t_1]$, $c \in C[t_0,t_1]$ — заданные функции.

Положим

$$D(N) = \left\{ u \in U = C^3[t_0,t_1] : u(t_0) = u_0,\ u'(t_0) = u'_0,\ u''(t_0) = u''_0 \right\}, \tag{2.2}$$

где u_0, u'_0, u''_0 — заданные постоянные.

Отметим, что

$$D(N'_u) = \left\{ h \in U = C^3[t_0,t_1] : h(t_0) = 0,\ h'(t_0) = 0,\ h''(t_0) = 0 \right\} \tag{2.3}$$

и $V = C[t_0,t_1]$.

Введем билинейную форму

$$\Phi(v,g)=\int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)g(T-t)dt, \tag{2.4}$$

где $T=t_0+t_1$.

Теорема 2.1. *Оператор N(2.1) является потенциальным на множестве $D(N)$ (2.2) относительно билинейной формы (2.4) тогда и только тогда, когда $\forall t\in[t_0,t_1]$ выполнены следующие условия:*

$$a(t)=a(T-t), \tag{2.5}$$

$$b(t)=b(T-t)-2a'(T-t), \tag{2.6}$$

$$c(t)=c(T-t)-b'(T-t)+a''(T-t). \tag{2.7}$$

Доказательство. Производная Гато оператора N (2.1) имеет вид

$$N'_u h=h'''(t)+a(t)h''(t)+b(t)h'(t)+c(t)h(t).$$

Получим условия, при которых выполняется (1.1). В данном случае

$$\Phi(N'_u h,g)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\big(h'''(t)+a(t)h''(t)+b(t)h'(t)+c(t)h(t)\big)\,g(T-t)dt.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что h и g принадлежат множеству $D(N'_u)$ (2.3), находим

$$\Phi(N'_u h,g)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\big(g'''(T-t)+a''(t)g(T-t)-2a'(t)g'(T-t)+a(t)g''(T-t)+$$
$$+b(t)g'(T-t)-b'(t)g(T-t)+c(t)g(T-t)\big)\,h(t)dt.$$

С другой стороны,

$$\Phi(N'_u g,h)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\big(g'''(t)+a(t)g''(t)+b(t)g'(t)+c(t)g(t)\big)\,h(T-t)dt=$$
$$=\int\limits_{t_0}^{t_1}\big(g'''(T-t)+a(T-t)g''(T-t)+b(T-t)g'(T-t)+c(T-t)g(T-t)\big)\,h(t)dt.$$

Тогда критерий потенциальности (1.1) примет вид

$$\Phi\big(N'_u h,g\big)-\Phi\big(N'_u g,h\big)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\big[\big(a(t)-a(T-t)\big)g''(T-t)+\big(b(t)-2a'(t)-b(T-t)\big)g'(T-t)+$$
$$+\big(a''(t)-b'(t)+c(t)-c(T-t)\big)g(T-t)\big]h(t)dt=0\qquad\forall h,g\in D(N'_u).$$

Это тождественно выполняется тогда и только тогда, когда

$$\big(a(t)-a(T-t)\big)g''(T-t)+\big(b(t)-2a'(t)-b(T-t)\big)g'(T-t)+$$
$$+\big(a''(t)-b'(t)+c(t)-c(T-t)\big)g(T-t)=0\qquad\forall g\in D(N'_u),$$

или

$$B\left\{\big(a(T-t)-a(t)\big)g''(t)+\big(b(T-t)-2a'(T-t)-b(t)\big)g'(t)+\right.$$
$$\left.+\big(a''(T-t)-b'(T-t)+c(T-t)-c(t)\big)g(t)\right\}=0\qquad\forall g\in D(N'_u),$$

где

$$Bh(t)=h(T-t).$$

Заметим, что $B^{-1} = B$, поэтому

$$\big(a(T-t) - a(t)\big)g''(t) + \big(b(T-t) - 2a'(T-t) - b(t)\big)g'(t) + \\ + \big(a''(T-t) - b'(T-t) + c(T-t) - c(t)\big)g(t) = 0 \qquad \forall g \in D(N'_u).$$

Отсюда получаем условия потенциальности (2.5)–(2.7). □

Замечание 2.1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$N(u) \equiv a(t)u''(t) + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = 0, \qquad t \in (t_0, t_1]. \tag{2.8}$$

Здесь $u(t)$ — неизвестная функция, $a \in C^2[t_0, t_1]$, $b \in C^1[t_0, t_1]$, $c \in C[t_0, t_1]$ — заданные функции.

Положим

$$D(N) = \Big\{u \in U = C^2[t_0, t_1] : u(t_0) = u_0,\ u'(t_0) = u'_0\Big\}, \tag{2.9}$$

где u_0, u'_0 — заданные постоянные.

Отметим, что условия (2.5)–(2.7) являются также условиями потенциальности оператора N уравнения (2.8) на множестве $D(N)$ (2.9) относительно билинейной формы (2.4).

Замечание 2.2. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$N(u) \equiv a(t)u''(t) + b(t)u'(t) + c(t)u(t) = 0, \qquad t \in (t_0, t_1). \tag{2.10}$$

Здесь $u(t)$ — неизвестная функция, $a \in C^2[t_0, t_1]$, $b \in C^1[t_0, t_1]$, $c \in C[t_0, t_1]$ — заданные функции.

Положим

$$D(N) = \Big\{u \in U = C^2[t_0, t_1] : u(t_0) = u_0,\ u(t_1) = u_1\Big\}, \tag{2.11}$$

где u_0, u_1 — заданные постоянные.

Введем билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int\limits_{t_0}^{t_1} v(t)g(t)dt. \tag{2.12}$$

Теорема 2.2. *Оператор N уравнения* (2.10) *является потенциальным на множестве $D(N)$* (2.11) *относительно билинейной формы* (2.12) *тогда и только тогда, когда $\forall t \in [t_0, t_1]$ выполнено следующее условие*:

$$b(t) = a'(t).$$

Это условие, как частный случай, получено, например, в работе [15].

Отметим, что доказательство теоремы 2.2 аналогично доказательству теоремы 2.1.

3. Аналог метода Бернулли

Теорема 3.1. *Если оператор N* (2.1) *является потенциальным на множестве $D(N)$* (2.2) *относительно билинейной формы* (2.4) *и выполнены условия*

$$b(t) = \frac{1}{3}a^2(t) + a'(t), \tag{3.1}$$

$$c(t) = \frac{1}{27}a^3(t) + \frac{1}{3}a''(t) + \frac{1}{3}a(t)a'(t), \tag{3.2}$$

то общим решением уравнения (2.1) *является*

$$u(t) = e^{-\frac{1}{3}\int a(t)dt}(C_0 + C_1 t + C_2 t^2), \tag{3.3}$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Доказательство. Будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$u(t) = v(t)g(T-t). \tag{3.4}$$

Найдем функции v и g. Для этого подставим $u(t)$ (3.4) в уравнение (2.1). Получим

$$\begin{aligned} v'''(t)g(T-t) + v''(t)\left[-3g'(T-t) + a(t)g(T-t)\right] + \\ + v'(t)\left[3g''(T-t) - 2a(t)g'(T-t) + b(t)g(T-t)\right] + \\ + v(t)\left[-g'''(T-t) + a(t)g''(T-t) - b(t)g'(T-t) + c(t)g(T-t)\right] = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Предположим, что в (3.5)

$$a(t)g(T-t) - 3g'(T-t) = 0.$$

Учитывая условие (2.5), отсюда находим

$$g(T-t) = e^{-\frac{1}{3}\int a(t)dt}. \tag{3.6}$$

Принимая во внимание (3.1), (3.2) и (3.6), в (3.5) будем иметь

$$3g''(T-t) - 2a(t)g'(T-t) + b(t)g(T-t) = 0$$

и

$$-g'''(T-t) + a(t)g''(T-t) - b(t)g'(T-t) + c(t)g(T-t) = 0.$$

Тогда (3.5) примет вид

$$v'''(t)g(T-t) = 0.$$

Следовательно, $v'''(t) = 0$, т. е.

$$v(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2,$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Таким образом, получаем общее решение (3.3) уравнения (2.1). □

Замечание 3.1. Найдем решение задачи (2.1), (2.2). Для этого решение (3.3) запишем в виде

$$u(t) = C_0 u_1(t) + C_1 u_2(t) + C_2 u_3(t), \tag{3.7}$$

где

$$u_1(t) = e^{-\frac{1}{3}\int a(t)dt}, \qquad u_2(t) = te^{-\frac{1}{3}\int a(t)dt}, \qquad u_3(t) = t^2 e^{-\frac{1}{3}\int a(t)dt}.$$

Подставим условия (2.2) в решение (3.7). Получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_0 u_1(t_0) + C_1 u_2(t_0) + C_2 u_3(t_0) = u_0, \\ C_0 u_1'(t_0) + C_1 u_2'(t_0) + C_2 u_3'(t_0) = u_0', \\ C_0 u_1''(t_0) + C_1 u_2''(t_0) + C_2 u_3''(t_0) = u_0'', \end{cases} \tag{3.8}$$

где C_0, C_1, C_2 — неизвестные. Отметим, что определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} u_1(t_0) & u_2(t_0) & u_3(t_0) \\ u_1'(t_0) & u_2'(t_0) & u_3'(t_0) \\ u_1''(t_0) & u_2''(t_0) & u_3''(t_0) \end{vmatrix} = W(t_0) \neq 0,$$

где $W(t)$ — определитель Вронского.

Таким образом, система уравнений (3.8) имеет единственное решение

$$C_0 = \frac{1}{W(t_0)} \begin{vmatrix} u_0 & u_2(t_0) & u_3(t_0) \\ u_0' & u_2'(t_0) & u_3'(t_0) \\ u_0'' & u_2''(t_0) & u_3''(t_0) \end{vmatrix}, \qquad C_1 = \frac{1}{W(t_0)} \begin{vmatrix} u_1(t_0) & u_0 & u_3(t_0) \\ u_1'(t_0) & u_0' & u_3'(t_0) \\ u_1''(t_0) & u_0'' & u_3''(t_0) \end{vmatrix},$$

$$C_2 = \frac{1}{W(t_0)} \begin{vmatrix} u_1(t_0) & u_2(t_0) & u_0 \\ u_1'(t_0) & u_2'(t_0) & u_0' \\ u_1''(t_0) & u_2''(t_0) & u_0'' \end{vmatrix}.$$

Замечание 3.2. Предположим, что уравнение (2.1) является уравнением с постоянными коэффициентами, т. е.

$$a(t) \equiv a, \qquad b(t) \equiv b, \qquad c(t) \equiv c. \tag{3.9}$$

В этом случае условия потенциальности (2.5)–(2.7) выполняются, а условия (3.1), (3.2) сводятся к следующим условиям:

$$b = \frac{1}{3}a^2, \qquad c = \frac{1}{27}a^3. \tag{3.10}$$

Тогда из (2.1), (3.9) и (3.10) получаем

$$N(u) \equiv u'''(t) + au''(t) + \frac{1}{3}a^2u'(t) + \frac{1}{27}a^3u(t) = 0, \qquad t \in (t_0, t_1]. \tag{3.11}$$

Из (3.3) находим общее решение уравнения (3.11)

$$u(t) = e^{-\frac{at}{3}}(C_0 + C_1t + C_2t^2), \tag{3.12}$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Как известно, общее решение (3.12) можно найти другим способом. Действительно, характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + \frac{1}{3}a^2\lambda + \frac{1}{27}a^3 = 0$$

имеет корень $\lambda_0 = -\dfrac{a}{3}$ кратности 3, поэтому общее решение уравнения (3.11) имеет вид (3.12).

Замечание 3.3. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$(r(t)u'(t))'' + (q(t)u(t))' + p(t)u(t) = 0. \tag{3.13}$$

Уравнения вида (3.13) называются самосопряженными обыкновенными дифференциальными уравнениями третьего порядка (см. [1, 13]).

В работе [13] доказано, что если выполнены условия

$$q(t) = r''(t) - \frac{2}{3r(t)}(r'(t))^2,$$

$$p(t) = -\frac{r'''(t)}{3} + \frac{2}{3r(t)}r'(t)r''(t) - \frac{10}{27r^2(t)}(r'(t))^3,$$

то уравнение (3.13) имеет решение

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{r^2(t)}}(C_0 + C_1t + C_2t^2). \tag{3.14}$$

Здесь $r(t) > 0, p(t), q(t)$ — достаточно гладкие функции, C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Уравнение (2.1) с потенциальным относительно билинейной формы (2.4) оператором, для которого выполнены условия (3.1), (3.2), можно привести к виду (3.13). Действительно, запишем уравнение (2.1) следующим образом:

$$N(u) \equiv u'''(t) + a(t)u''(t) + \left(\frac{1}{3}a^2(t) + a'(t)\right)u'(t) + \left(\frac{1}{27}a^3(t) + \frac{1}{3}a''(t) + \frac{1}{3}a(t)a'(t)\right)u(t) = 0.$$

Умножим его на функцию

$$e^{\frac{1}{2}\int a(t)dt}.$$

Получим эквивалентное уравнение

$$\tilde{N}(u) \equiv e^{\frac{1}{2}\int a(t)dt}\left[u'''(t) + a(t)u''(t) + \left(\frac{1}{3}a^2(t) + a'(t)\right)u'(t) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{27}a^3(t) + \frac{1}{3}a''(t) + \frac{1}{3}a(t)a'(t)\right)u(t)\right] = 0. \tag{3.15}$$

Отметим, что уравнение (3.15) является уравнением вида (3.13), где

$$r(t) = e^{\frac{1}{2}\int a(t)dt},$$

$$q(t) = e^{\frac{1}{2}\int a(t)dt}\left(\frac{1}{2}a'(t) + \frac{1}{12}a^2(t)\right),$$

$$p(t) = e^{\frac{1}{2}\int a(t)dt}\left(-\frac{1}{12}a(t)a'(t) - \frac{1}{6}a''(t) - \frac{1}{216}a^3(t)\right).$$

Из формулы (3.14) находим решение (3.3).

Таким образом, в настоящей работе также предложен метод приведения обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с потенциальными относительно билинейной формы (2.4) операторами к виду (3.13).

4. Примеры

1. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$N(u) \equiv u'''(t) + t(1-t)u''(t) + \left(\frac{t^2(1-t)^2}{3} + 1 - 2t\right)u'(t) + \\ + \left(\frac{t^3(1-t)^3}{27} + \frac{t(1-t)(1-2t)}{3} - \frac{2}{3}\right)u(t) = 0, \quad t \in (0,1]. \quad (4.1)$$

Зададим область определения оператора N (4.1) в виде

$$D(N) = \Big\{u \in U = C^3[0,1] : u(0) = 1,\ u'(0) = 1,\ u''(0) = 0\Big\}. \quad (4.2)$$

В данном случае

$$a(t) = t(1-t), \qquad b(t) = \frac{t^2(1-t)^2}{3} + 1 - 2t, \qquad c(t) = \frac{t^3(1-t)^3}{27} + \frac{t(1-t)(1-2t)}{3} - \frac{2}{3}.$$

Отметим, что условия (2.5)–(2.7) и (3.1), (3.2) выполняются.

Из (3.3) находим общее решение уравнения (4.1)

$$u(t) = e^{\frac{t^3}{9} - \frac{t^2}{6}}(C_0 + C_1 t + C_2 t^2),$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Решением задачи (4.1), (4.2) является функция

$$u(t) = e^{\frac{t^3}{9} - \frac{t^2}{6}}\left(1 + t + \frac{1}{6}t^2\right).$$

2. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$N(u) \equiv u'''(t) + \sin t\, u''(t) + \left(\frac{\sin^2 t}{3} + \cos t\right)u'(t) + \frac{\sin t}{3}\left(\frac{\sin^2 t}{9} + \cos t - 1\right)u(t) = 0, \quad t \in (0,\pi]. \quad (4.3)$$

Зададим область определения оператора N (4.3) в виде

$$D(N) = \Big\{u \in U = C^3[0,1] : u(0) = 0,\ u'(0) = 1,\ u''(0) = 2\Big\}. \quad (4.4)$$

В данном случае

$$a(t) = \sin t, \qquad b(t) = \frac{\sin^2 t}{3} + \cos t, \qquad c(t) = \frac{\sin t}{3}\left(\frac{\sin^2 t}{9} + \cos t - 1\right).$$

Отметим, что условия (2.5)–(2.7) и (3.1), (3.2) выполняются.

Из (3.3) находим общее решение уравнения (4.3)

$$u(t) = e^{\frac{\cos t}{3}}(C_0 + C_1 t + C_2 t^2),$$

где C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Решением задачи (4.3), (4.4) является функция

$$u(t) = e^{\frac{\cos t - 1}{3}}\left(t + t^2\right).$$

5. Заключение

В работе исследована представимость одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка в форме уравнений Эйлера—Лагранжа. Разработан аналог метода Бернулли для нахождения решений рассматриваемых уравнений. Предложенный метод может быть распространен на обыкновенные дифференциальные уравнения порядка выше третьего.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беркович Л. М.* О самосопряженных дифференциальных уравнениях и об одном классе уравнений Эйлера // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1969. — *8*. — С. 3–9.
2. *Будочкина С. А.* О представлении одного операторного уравнения с первой производной по времени в форме B_u-гамильтонова уравнения // Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 2. — С. 175–185. — DOI: 10.1134/S0374064113020052.
3. *Будочкина С. А., Лыу Т. Х.* О вариационном принципе для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2025. — *71*, № 1. — С. 71–84. — DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-71-84.
4. *Галиуллин А. С.* Системы Гельмгольца. — М.: РУДН, 1995.
5. *Гельмгольц Г.* О физическом значении принципа наименьшего действия // В сб.: «Вариационные принципы механики». — М.: Физматгиз, 1959. — С. 430–459.
6. *Попов А. М.* Обратная задача вариационного исчисления для систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка // Мат. заметки. — 2002. — *72*, № 5. — С. 745–749. — DOI: 10.4213/mzm464.
7. *Савчин В. М.* Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. — М.: УДН, 1991.
8. *Суслов Г. К.* О кинетическом потенциале Гельмгольца // Мат. сб. — 1896. — *19*, № 1. — С. 197–210.
9. *Филиппов В. М.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов. — М.: УДН, 1985.
10. *Филиппов В. М.* О вариационном принципе для гипоэллиптических уравнений с постоянными коэффициентами // Дифф. уравн. — 1986. — *22*, № 2. — С. 338–343.
11. *Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. — 1992. — *40*. — С. 3–176.
12. *Agrawal O. P.* Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *272*, № 1. — С. 368–379. — DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00180-4.
13. *Beccar-Varela M. P., Bhuiyan M. A. M., Mariani M. C., Tweneboah O. K.* Analytic methods for solving higher order ordinary differential equations // Mathematics. — 2019. — *7*. — 826. — DOI: 10.3390/math7090826.
14. *Budochkina S. A.* Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation // Eurasian Math. J. — 2012. — *3*, № 1. — С. 18–28.
15. *Budochkina S. A., Dekhanova E. S.* On the potentiality of a class of operators relative to local bilinear forms // Ural Math. J. — 2021. — *7*, № 1. — С. 26–37. — DOI: 10.15826/umj.2021.1.003.
16. *Budochkina S. A., Luu T. H.* On connection between variationality of a six-order ordinary differential equation and Hamilton–Ostrogradskii equations // Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 15. — С. 3594–3605. — DOI: 10.1134/S1995080222030052.
17. *Budochkina S. A., Luu T. H.* On variational symmetries and conservation laws of a fifth-order partial differential equation // Lobachevskii J. Math. — 2024. — *45*, № 6. — С. 2466–2477. — DOI: 10.1134/S1995080224602765.
18. *Budochkina S. A., Luu T. H., Shokarev V. A.* On indirect representability of fourth order ordinary differential equation in form of Hamilton–Ostrogradsky equations // Уфимск. мат. ж. — 2023. — *15*, № 3. — С. 121–131. — DOI: 10.13108/2023-15-3-118.
19. *Budochkina S. A., Vu H. P.* On an indirect representation of evolutionary equations in the form of Birkhoff's equations // Eurasian Math. J. — 2022. — *13*, № 3. — С. 23–32. — DOI: 10.32523/2077-9879-2022-13-3-23-32.
20. *Kalpakides V. K., Charalambopoulos A.* On Hamilton's principle for discrete and continuous systems: a convolved action principle // Rep. Math. Phys. — 2021. — *87*, № 2. — С. 225–248. — DOI: 10.1016/S0034-4877(21)00027-6.
21. *Mayer A.* Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales // Sächsischen Acad. Wiss. Phys.-Math. Kl. — 1896. — *48*. — С. 519–529.
22. *Tleubergenov M. I., Ibraeva G. T.* On the solvability of the main inverse problem for stochastic differential systems // Ukr. Math. J. — 2019. — *71*, № 1. — С. 157–165. — DOI: 10.1007/s11253-019-01631-w.
23. *Tonti E.* Variational formulation for every nonlinear problem // Int. J. Engrg. Sci. — 1984. — *22*, № 11-12. — С. 1343–1371. — DOI: 10.1016/0020-7225(84)90026-0.

Светлана Александровна Будочкина
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: budochkina-sa@rudn.ru, РИНЦ SPIN-код: 6087-3245, РИНЦ AuthorID: 156527, ResearcherID: T-8088-2019, Scopus: 6507007003, ORCID: 0000-0003-3447-0425

Тхи Хуен Лыу
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: lyu-t@rudn.ru, Scopus: 57557881000

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-444-453 UDC 517.9
EDN: QDITWY *Research article*

On solutions of one class of third-order ordinary differential equations with potential operators

S. A. Budochkina and T. H. Luu

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, an analogue of the Bernoulli method for finding solutions of a class of third-order ordinary differential equations with potential operators is developed. Helmholtz potentiality conditions are also derived for this purpose. The theoretical results are illustrated with specific examples.

Keywords: bilinear form, potential operator, Helmholtz potentiality conditions, analogue of the Bernoulli method.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, Agreement No. 075-15-2022-1115).

Authors' contribution. All authors participated in the development of the study concept, collection, processing and analysis of data, writing of the manuscript, and formulation of the conclusions.

For citation: S. A. Budochkina, T. H. Luu, "On solutions of one class of third-order ordinary differential equations with potential operators," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 3, 444–453. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-3-444-453 EDN: QDITWY

REFERENCES

1. L. M. Berkovich, "O samosopryazhennykh differentsial'nykh uravneniyakh i ob odnom klasse uravneniy Eylera" [On self-adjoint differential equations and a class of Euler equations], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1969, **8**, 3–9 (in Russian).
2. S. A. Budochkina, "O predstavlenii odnogo operatornogo uravneniya s pervoy proizvodnoy po vremeni v forme B_u-gamil'tonova uravneniya" [On the representation of one operator equation with a first-order time derivative in the form of a B_u-Hamiltonian equation], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 2, 175–185 (in Russian), DOI: 10.1134/S0374064113020052.
3. S. A. Budochkina and T. H. Luu, "O variatsionnom printsipe dlya odnoy sistemy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy" [On the variational principle for a system of ordinary differential equations], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2025, **71**, No. 1, 71–84 (in Russian), DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-71-84.

© S. A. Budochkina, T. H. Luu, 2026
This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

4. A. S. Galiullin, *Sistemy Gel'mgol'tsa* [Helmholtz systems], RUDN, Moscow, 1995 (in Russian).
5. G. Helmholtz, "O fizicheskom znachenii printsipa naimen'shego deystviya" [On the physical meaning of the principle of least action], In: *Variatsionnye printsipy mekhaniki* [Variational Principles of Mechanics], Fizmatgiz, Moscow, 1959, pp. 430–459 (Russian translation).
6. A. M. Popov, "Obratnaya zadacha variatsionnogo ischisleniya dlya sistem differentsial'no-raznostnykh uravneniy vtorogo poryadka" [The inverse problem of the calculus of variations for second-order systems of differential-difference equations], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2002, **72**, No. 5, 745–749 (in Russian), DOI: 10.4213/mzm464.
7. V. M. Savchin, *Matematicheskie metody mekhaniki beskonechnomernykh nepotentsial'nykh sistem* [Mathematical Methods of the Mechanics of Infinite-Dimensional Non-Potential Systems], UDN, Moscow, 1991 (in Russian).
8. G. K. Suslov, "O kineticheskom potentsiale Gel'mgol'tsa" [On the Helmholtz kinetic potential], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1896, **19**, No. 1, 197–210 (in Russian).
9. V. M. Filippov, *Variatsionnye printsipy dlya nepotentsial'nykh operatorov* [Variational Principles for Non-Potential Operators], UDN, Moscow, 1985 (in Russian).
10. V. M. Filippov, "O variatsionnom printsipe dlya gipoellipticheskikh uravneniy s postoyannymi koeffitsientami" [On the variational principle for hypoelliptic equations with constant coefficients], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1986, **22**, No. 2, 338–343 (in Russian).
11. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. G. Shorokhov, "Variatsionnye printsipy dlya nepotentsial'nykh operatorov" [Variational principles for non-potential operators], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Nov. Dostizh.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1992, **40**, 3–176 (in Russian).
12. O. P. Agrawal, "Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems," *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **272**, No. 1, 368–379, DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00180-4.
13. M. P. Beccar-Varela, M. A. M. Bhuiyan, M. C. Mariani, and O. K. Tweneboah, "Analytic methods for solving higher order ordinary differential equations," *Mathematics*, 2019, **7**, 826, DOI: 10.3390/math7090826.
14. S. A. Budochkina, "Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation," *Eurasian Math. J.*, 2012, **3**, No. 1, 18–28.
15. S. A. Budochkina and E. S. Dekhanova, "On the potentiality of a class of operators relative to local bilinear forms," *Ural Math. J.*, 2021, **7**, No. 1, 26–37, DOI: 10.15826/umj.2021.1.003.
16. S. A. Budochkina and T. H. Luu, "On connection between variationality of a six-order ordinary differential equation and Hamilton–Ostrogradskii equations," *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 15, 3594–3605, DOI: 10.1134/S1995080222030052.
17. S. A. Budochkina and T. H. Luu, "On variational symmetries and conservation laws of a fifth-order partial differential equation," *Lobachevskii J. Math.*, 2024, **45**, No. 6, 2466–2477, DOI: 10.1134/S1995080224602765.
18. S. A. Budochkina, T. H. Luu, and V. A. Shokarev, "On indirect representability of fourth order ordinary differential equation in form of Hamilton–Ostrogradsky equations," *Ufimsk. Mat. Zh.* [Ufa Math. J.], 2023, **15**, No. 3, 121–131, DOI: 10.13108/2023-15-3-118.
19. S. A. Budochkina and H. P. Vu, "On an indirect representation of evolutionary equations in the form of Birkhoff's equations," *Eurasian Math. J.*, 2022, **13**, No. 3, 23–32, DOI: 10.32523/2077-9879-2022-13-3-23-32.
20. V. K. Kalpakides and A. Charalambopoulos, "On Hamilton's principle for discrete and continuous systems: a convolved action principle," *Rep. Math. Phys.*, 2021, **87**, No. 2, 225–248, DOI: 10.1016/S0034-4877(21)00027-6.
21. A. Mayer, "Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales," *Sächsischen Acad. Wiss. Phys.-Math. Kl.*, 1896, **48**, 519–529.
22. M. I. Tleubergenov and G. T. Ibraeva, "On the solvability of the main inverse problem for stochastic differential systems," *Ukr. Math. J.*, 2019, **71**, No. 1, 157–165, DOI: 10.1007/s11253-019-01631-w.
23. E. Tonti, "Variational formulation for every nonlinear problem," *Int. J. Engrg. Sci.*, 1984, **22**, No. 11-12, 1343–1371, DOI: 10.1016/0020-7225(84)90026-0.

Svetlana Aleksandrovna Budochkina
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `budochkina-sa@rudn.ru`, eLIBRARY SPIN-code: 6087-3245, eLIBRARY AuthorID: 156527, ResearcherID: T-8088-2019, Scopus: 6507007003, ORCID: 0000-0003-3447-0425

Thi Huyen Luu
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `lyu-t@rudn.ru`, Scopus: 57557881000