

ТОЧНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Р. Ф. Шамоян, Н. М. Махина

Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского, Брянск, Россия

Аннотация. В этой обзорной статье мы собрали множество последних достижений в области аналитических функциональных пространств нескольких комплексных переменных, связанных с проблемой следа в трубчатых областях над симметричными конусами и ограниченными сильно псевдовыпуклыми областями с гладкой границей. Мы рассматриваем различные функциональные пространства аналитических функций нескольких переменных в различных областях в $\mathbb{C}^n$ и приводим либо полные описания следов, либо оценки следов различных аналитических функциональных пространств в различных областях, полученные в последние годы различными авторами.

Проблема нахождения точных оценок следов аналитических функциональных пространств Харди в единичном полидиске впервые была поставлена У. Рудиным в 1969 году. С тех пор в литературе появилось множество работ по этой теме. В данной обзорной статье мы собрали не только уже известные результаты о следах различных аналитических функциональных пространств в различных областях, но и обсудили различные новые интересные результаты, связанные с этой проблемой. Ранее по теме следов были получены различные результаты, относящиеся к проблеме следов, Г. Хенкиным, Э. Амаром, Г. Александром и другими авторами. Наконец, отметим, что теоремы о следах тесно связаны с проекциями типа Бергмана, действующими между функциональными пространствами различной размерности.

Эта обзорная статья содержит в основном новые результаты, касающиеся следов в трубчатых и ограниченных сильно псевдовыпуклых областях. Доказательства этих теорем основаны, в частности, также на различных свойствах проекций типа Бергмана. В этой обзорной статье мы также кратко обсудим некоторые новые результаты, полученные первым автором по проекциям типа Бергмана в этих сложных областях в $\mathbb{C}^n$. Это вторая часть наших заметок, посвященных проблеме следов. В первой части, опубликованной в [43], мы представили обширный список последних точных результатов по следам в полидиске и полишаре. В заключительном разделе этой обзорной статьи мы собрали множество интересных замечаний и сформулировали различные открытые интересные вопросы для заинтересованных читателей, а также добавили несколько кратких комментариев, связанных с проблемой следов в различных простых и сложных областях в $\mathbb{C}^n$ в различных аналитических функциональных пространствах нескольких переменных. Также добавлены некоторые новые результаты, касающиеся следов в гармонических функциональных пространствах нескольких переменных.

Ключевые слова: оператор следа, пространства Бергмана и Харди со смешанной нормой, пространство Герца, проекция типа Бергмана, трубчатая область, псевдовыпуклая область, аналитическая функция, точная теорема вложения, гармоническая функция.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Обзорная работа написана под руководством *Шамояна Р. Ф.* совместно с доцентом БГУ *Махиной Н. М.* Подбор материала принадлежит первому автору, второй автор вносил рекомендации и замечания к тексту в процессе работы и также отвечал за все технические вопросы, связанные с оформлением статьи.

Для цитирования: Шамоян Р. Ф., Махина Н. М. Точные ограничения аналитических функциональных пространств нескольких переменных // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 165–194. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194) EDN: [UJHLAF](https://www.edn.ru/10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194)

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья является второй частью наших заметок, посвященных проблеме следа в аналитических функциональных пространствах нескольких комплексных переменных, а именно в трубчатых, псевдовыпуклых и связанных с ними областях. Первая часть содержала обширный список недавних точных результатов в полидисковой и единичной полишаровой областях и была недавно опубликована в [43].

Пусть G — любая ограниченная или неограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Пусть f — аналитическая функция в G из некоторого фиксированного квазинормированного аналитического функционального пространства $X(G)$. Данная обзорная статья посвящена следующей задаче: найти точные оценки множества $|f(z, \dots, z)|$, где z — произвольная точка из G в $\mathbb{C}^n$.

Очевидно, что очень похожая задача может быть поставлена в трубчатых областях над симметричными конусами и ограниченными сильно псевдовыпуклыми областями с гладкой границей, а также в произведениях областей такого типа в $\mathbb{C}^n$.

Эта проблема впервые была поставлена в книге У. Рудина [29] в 1969 году для следов пространств Харди в бидиске, и с тех пор появилось множество работ в этом направлении. Мы упомянем, например, старые работы [4, 5, 7, 18, 19, 23, 26, 70] и различные ссылки в них.

Мы начали работу [43] со следовых результатов в простейших областях, а именно в единичном полидиске и единичном полишаре. В этой статье мы представляем новые результаты.

Одна из целей данной работы — рассмотреть новое отображение следа в задаче о следе, связанной с теоремами вложения, для случая ограниченных сильно псевдовыпуклых (или трубчатых) областей D с гладкой границей; это отображение $T_r f(z) = f(z, \dots, z)$, $z \in D$, при $f \in X \subset H(D^m)$ для некоторого квазинормированного аналитического пространства X на D^m .

Дадим точные определения.

Определение 1.1. Пусть D — ограниченная или неограниченная область в $\mathbb{C}^n$, а $H(D^m)$ — пространство всех аналитических функций в $D^m = D \times \dots \times D$, $m \in \mathbb{N}$. Мы говорим, что $\text{Trace}(X) = Y$, если X является квазинормированным подпространством $H(D^m)$ и Y — некоторое фиксированное квазинормированное подпространство $H(D)$, и если для каждого $F \in X$, $F(z, \dots, z) = f(z)$, $f \in Y$, и обратное также верно: для каждого $g \in Y$ существует функция $F \in X$ такая, что $F(z, \dots, z) = g(z)$ для всех $z \in D$.

Это определение следов аналитических функциональных пространств, очевидно, легко может быть распространено на функциональные пространства, состоящие из гармонических и плюригармонических функций в произведениях нескольких переменных.

Отметим, что ниже мы иногда заменяем $\text{Trace}(X) = \text{Trace } X$ на более простую запись DX .

В последние годы в этом направлении были получены различные новые интересные оценки и точные результаты. См., например, недавние работы [6, 11, 12, 24, 32–34, 37–41, 44–56, 58, 59, 69], а также множество ссылок в них.

Цель данной работы — объединить все эти новые интересные результаты. Следует отметить, что в данной работе также будут рассмотрены различные новые открытые интересные проблемы, связанные с этой темой.

В этой обзорной статье мы соберем множество старых и новых результатов, касающихся этой проблемы для многих аналитических функциональных пространств X в различных областях в $\mathbb{C}^n$. Сначала мы приведем определения, необходимые для формулировки результатов такого типа, а затем сформулируем результаты (старые и новые) о следах.

Замечание 1.1. Также отметим, что очень похожие задачи, теоремы о следах или различные оценки следов функций были представлены, доказаны и рассмотрены во многих сложных функциональных пространствах в $\mathbb{R}^n$ многими авторами. Мы отсылаем читателя, например, к работам [1, 25, 71] и многим другим ссылкам в них.

Теоремы о следе также имеют интересные расширения и прекрасные приложения; мы, например, отсылаем читателя к работам Э. Амара, К. Менини [10] и Д. Кларка [16], где были представлены приложения и обобщения такого типа.

В заключение отметим, что рассматриваемые теоремы о следах тесно связаны с проекциями типа Бергмана, действующими между функциональными пространствами различной размерности.

Для удобства читателя эта обзорная статья организована следующим простым образом. Все результаты, касающиеся следов и связанных с ними результатов, разделены по областям. А именно, различные теоремы о следах, относящиеся к разным областям, будут собраны в соответствующих разделах.

В данной статье особое внимание будет уделено недавним исследовательским работам первого автора, посвященным проблеме следа, и план статьи следующий: сначала приводятся различные определения разных интересных аналитических функциональных пространств в различных областях в $\mathbb{C}^n$, а затем дается некоторая точная информация о следах функциональных пространств такого типа в $\mathbb{C}$. Следует также отметить, что операторы следа могут рассматриваться в связи с различными теоремами вложения, и такие точные результаты будут также представлены в этой вводной статье в трубчатых или псевдовыпуклых областях.

В заключительном разделе этой обзорной статьи собрано множество интересных замечаний и сформулированы различные интересные открытые вопросы для заинтересованных читателей, а также дано несколько интересных кратких комментариев, касающихся проблемы следов в различных простых и сложных областях в $\mathbb{C}^n$ в разных аналитических функциональных пространствах нескольких переменных.

Также добавлены некоторые новые результаты, касающиеся следов в пространствах гармонических функций нескольких переменных.

Заинтересованный читатель легко заметит, что в данной статье все теоремы о следах и аналитические пространства в трубчатых областях имеют полные аналоги в псевдовыпуклых областях, а формулировки наших результатов, касающихся следов в этих совершенно разных областях в $\mathbb{C}^n$, также имеют сходства.

В работах [6, 24, 32–34, 44–49] первым автором были начаты исследования следов различных аналитических функций в простых областях, таких как бидиск, полидиск, полишар. Позже эти вопросы были рассмотрены в более сложных областях в $\mathbb{C}^n$, таких как трубчатые и ограниченные сильно псевдовыпуклые области, а также в аналитических функциональных пространствах смешанного типа нормы и типа Бергмана на них.

2. СЛЕДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СИЛЬНО ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

В этом разделе собраны несколько недавних результатов о следах в многогранных и псевдовыпуклых областях из работ первого автора [52–54]. Ниже мы определяем различные аналитические функциональные пространства в контексте ограниченных псевдовыпуклых областей и приводим описания их следов или оценки размеров их следов.

Сначала первым автором были представлены различные (точные) результаты о следах в единичном шаре совместно с О. Михичем, а позже они были распространены на аналогичные аналитические функциональные пространства в ограниченных сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$ в совместных работах с О. Михичем и С. Куриленко.

Для определения дифференциального оператора $\mathcal{D}^\alpha$, который появляется ниже в определении пространств, мы ссылаемся на статью Дж. Фабреги и Дж. Ортеги [27].

Для получения базовых сведений об интегралах Мартинелли–Бохнера и ядрах Мартинелли–Бохнера $U(z, w)$, которые приводятся ниже, мы отсылаем заинтересованного читателя к научным статьям, упомянутым в приведенных ниже теоремах.

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — область, т. е. открытое связное подмножество. Говорят, что D является *псевдовыпуклой* (или *псевдовыпуклой по Хартогсу*), если существует непрерывная плюрисубгармоническая функция φ на G такая, что множество $\{z \in D \mid \varphi(z) < x\}$ является относительно компактным подмножеством D для всех действительных чисел x . Другими словами, область является псевдовыпуклой, если D имеет непрерывную плюрисубгармоническую исчерпывающую

функцию. Каждое (геометрически) выпуклое множество является псевдовыпуклым. Однако существуют псевдовыпуклые области, которые не являются геометрически выпуклыми.

Когда D имеет границу класса C^2 (дважды непрерывно дифференцируемую), это понятие совпадает с псевдовыпуклостью Леви, с которой проще работать. Более конкретно, для границы класса C^2 можно показать, что D имеет определяющую функцию, т. е. существует $\rho: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, которая является C^2 -гладкой, такая, что $D = \{\rho < 0\}$, и $\partial D = \{\rho = 0\}$. Теперь D является псевдовыпуклой тогда и только тогда, когда для каждого $p \in \partial D$ и w в комплексном касательном пространстве в точке p , т. е.

$$\nabla \rho(p)w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho(p)}{\partial z_i} w_i = 0,$$

выполняется

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j \geq 0.$$

Приведенное выше определение аналогично определениям выпуклости в действительном анализе.

Пусть D — псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}$, $\tilde{D}^\alpha$ — дифференциальный оператор в D , $0 < p, q < +\infty$. Пространства аналитических функций Харди—Соболева и Бергмана—Бесова (см. [27]):

$$H_{\alpha,\beta}^p(D) = \left\{ f \in H(D) : \sup_{\varepsilon > 0} \left(\int_{\partial D_\varepsilon} |\tilde{D}^\alpha f(\zeta)|^p d\sigma_\zeta \right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon^\beta < +\infty \right\}, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha > 0,$$

$$A_{\delta,k}^{p,q}(D) = \left\{ f \in H(D) : \sum_{|\alpha| \leq k} \int_0^{r_0} \left(\int_{\partial D_r} |\tilde{D}^\alpha f(\zeta)|^p d\sigma_r \right)^{\frac{q}{p}} r^{\delta \frac{q}{p} - 1} dr < +\infty \right\}, \quad \delta > 0, \quad \alpha > 0,$$

где $D_r = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < (-r)\}$, ∂D_r — граница, $d\sigma_r$ — нормированная мера поверхности на ∂D_r , а через dr обозначен нормированный элемент объема на $(0, r)$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\delta > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и

$$\|f\|_{p,\infty,\delta,k} = \sup \left\{ \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left(r^\delta \int_{\partial D_r} |\mathcal{D}^\alpha f|^p d\sigma_r \right)^{\frac{1}{p}} : 0 < r < r_0 \right) \right\},$$

(для $p, q < 1$ это квазинорма, см. [27]). Легко показать, что эти пространства являются банаховыми пространствами при $\min(p, q) \geq 1$. Кроме того, при $p = q$ мы имеем

$$\|f\|_{p,\delta,k} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_D |\mathcal{D}^\alpha f(\zeta)|^p (-\rho(\zeta))^{\delta-1} dv(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \delta > 0, \quad k \geq 0,$$

где $dv(\zeta)$ (или иногда $dV(\zeta)$) — нормированная мера Лебега на D (для $k = 0$ мы будем использовать другое, более удобное обозначение для пространств A_α^p). Как мы видим, для $p = q$, $k = 0$ мы получаем обычные пространства Бергмана $A_\delta^p(D) = A_\alpha^p(D)$.

Мы естественным образом определяем те же пространства в произведениях областей: $D^m = D \times \dots \times D$.

В теоремах 2.1–2.2 приводятся некоторые аналоги результатов о следах в терминах интегралов и ядер Мартинелли—Бохнера.

Сформулируем теорему 2.1 в контексте единичного шара B в $\mathbb{C}^n$, но аналогичные результаты могут быть справедливы и в ограниченных сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей.

Теорема 2.1 (см. [39]).

1. Пусть $p \leq 1$, $\beta \geq \alpha \geq 0$, тогда $A_{nm+(\beta-\alpha)pm-n}^{p,p}(B) \subset \text{Trace}(H_{\alpha,\beta}^p(B^m))$;

2. Пусть $p \leq 1$, $\alpha_j \geq 0$, $t \geq \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j}{m}$, $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, \dots, m$. Тогда

$$A_{mt+mn-n-\sum_{j=1}^m \alpha_j}^{p,p}(B) \subset \text{Trace}(A_{t,\beta}^{p,p}(B^m)).$$

Теорема 2.2 (см. [39]).

1. Пусть $p \leq 1$, $\alpha \geq \beta$, тогда $\text{Trace}(H_{\alpha,\beta}^p(B^m))$ содержит функцию, для которой

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \in D. \quad (\text{IR})$$

2. Пусть $p \leq 1$, $\alpha_j \geq 0$, $t \geq \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j}{m}$, $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $\text{Trace}(A_{t,\beta}^p(B^m))$ содержит функцию f , для которой допустимо интегральное представление (IR).

В работе [38] рассматривались аналитические пространства Блоха в сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей, пространства смешанной нормы и так называемые новые пространства аналитических функций типа Герца в областях того же типа.

Пусть D — ограниченная сильно псевдовыпуклая область $\mathbb{C}^n$ с границей C^∞ . Предположим, что сильно плюрисубгармоническая функция ρ принадлежит классу $\mathbb{C}^\infty$ в окрестности $\bar{D}$, $-1 \leq \rho < 0$, $z \in D$, и $|\partial \rho| \geq c_0 > 0$ для $|\rho| \geq r_0$.

Пусть также $\delta: D \rightarrow \mathbb{R}^+$ обозначает евклидово расстояние от границы, т.е. $\delta(z) = d(z, \partial D)$; для заданных $r \in (0, 1)$, $z_0 \in D$, обозначим через $B_D(z_0, r)$ шар с центром z_0 и радиусом $\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$.

Нам также потребуется наличие подходящих покрытий из шаров Кобаяси.

Определение 2.1. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — ограниченная область и $r > 0$. Назовем r -решеткой в D последовательность $\{a_k\} \subset D$ такую, что $D = \bigcup_k B_D(a_k, r)$ и существует $m > 0$ такая, что любая

точка в D принадлежит не более чем m шарам вида $B_D(a_k, R)$, где $R = \frac{1}{2}(1+r)$.

Пусть $\Delta_k = |B(a_k, r)|$, $dv(z_1, \dots, z_m) = \prod_{j=1}^m dv(z_j) = dv(\vec{z})$, $z_j \in D$, $j = 1, \dots, m$, — нормированная мера Лебега на произведении областей. Мы обозначаем, как обычно, через $dv_\gamma = \delta^\gamma(z) dv(z)$ взвешенную меру Лебега на D и аналогично на произведениях таких областей, используя произведения δ -функций стандартным способом. Определим новые аналитические пространства типа Герца на произведениях псевдовыпуклых областей с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$ следующим образом.

Пусть

$$K_{\alpha,\beta}^{p,q}(D^m) = \left\{ f \in H(D^m): \right. \\ \int_D \dots \int_D \left(\int_{B(\tilde{z}_1, R)} \dots \int_{B(\tilde{z}_1, R)} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \delta^\alpha(z_1) \dots \delta^\alpha(z_m) dv(z_1, \dots, z_m) \right)^{\frac{q}{p}} \times \\ \left. \times \prod_{k=1}^m \delta^\beta(\tilde{z}_k) dv(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_m) < +\infty, \quad 0 < p, q < +\infty, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1 \right\}.$$

Это банаховы пространства при $\min(p, q) \geq 1$ и полные метрические пространства при других значениях p и q . Зафиксируем r -решетку $\{a_k\} \in D$. Для тех же значений параметров определим другое аналитическое пространство типа Герца в псевдовыпуклых областях с гладкой границей:

$$K_\beta^{p,q}(D^m) = \left\{ f \in H(D^m): \right.$$

$$\sum_{k_1} \dots \sum_{k_m} \left(\int_{B(a_{k_1}, r)} \dots \int_{B(a_{k_m}, r)} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \delta^\beta(z_1) \dots \delta^\beta(z_m) dv(z_1, \dots, z_m) \right)^{\frac{q}{p}} < +\infty, \\ 0 < p, \quad q < +\infty, \quad \beta > -1 \Big\}.$$

Если $p = q$, мы получаем классические пространства Бергмана на произведениях псевдовыпуклых областей с гладкой границей. Этот простой факт основан на свойствах r -решеток. Эти новые классы аналитических функций являются банаховыми пространствами для всех значений p, q таких, что $\min(p, q) > 1$, и полными метрическими пространствами для других значений параметров. Рассматривая приведенные выше квазинормы, мы можем заменить внешние кратные интегрирования или кратные суммирования одним интегралом или одной суммой, определяющими аналогичные пространства с квазинормами:

$$\sum_k \left(\int_{B(a_k, r)} \dots \int_{B(a_k, r)} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \delta^\beta(z_1) \dots \delta^\beta(z_m) dv(z_1, \dots, z_m) \right)^{\frac{q}{p}} < \infty, \\ 0 < p, \quad q < \infty, \quad \beta > -1,$$

$$\int_D \left(\int_{B_D(\tilde{z}, R)} \dots \int_{B_D(\tilde{z}, R)} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \delta^\alpha(z_1) \dots \delta^\alpha(z_m) dv(z_1, \dots, z_m) \right)^{\frac{q}{p}} \delta^\beta(\tilde{z}) dv(\tilde{z}) < +\infty, \\ p, q \in (0, +\infty), \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1.$$

Следы классов $K_{t, \beta}^{q, p}(D^m)$ можно описать следующим образом.

Теорема 2.3 (см. [38]). Пусть $0 < p < +\infty$, $t_j > -1$, $\beta_j > -1$, $j = 1, \dots, m$, $\alpha > -1$, $\alpha_2 = \sum_{j=1}^m (\beta_j + 2(n+1) + t_j) - (n+1)$. Тогда $\text{Trace}(K_{t, \beta}^{p, p}(D^m)) = A_{\alpha_2}^p$.

При тех же значениях параметров $\text{Trace}(K_{t, \beta}^{p, p}(D^m)) = A_{\alpha_3}^p$, где $\alpha_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j + (n+1)(m-1)$.

Более того, $\text{Trace}(K_{\beta}^{q, p}(D^m)) \subset A_{\alpha_1}^p$, $\text{Trace}(K_{\beta_t}^{q, p}(D^m)) \subset A_{\alpha}^p$, где $\alpha_1 = \sum_{j=1}^m (\beta_j + n+1)p/q - (n+1)$, $\alpha_1 = \sum_{j=1}^m (\beta_j + n+1)p/q + \sum_{j=1}^m (t_j + n+1) - (n+1)$ для всех положительных значений p и q .

Замечание 2.1. При $m = 1$ некоторые из этих утверждений очевидны. Для случая единичного шара в $\mathbb{C}^n$ эти утверждения были доказаны в работах [44, 46, 47, 49].

Ниже приведем еще одну новую теорему о точном следе для аналитических функциональных пространств типа Блоха в псевдовыпуклых областях с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$.

Пусть

$$A_{\ln}(r_1, \dots, r_m) = \left\{ f \in H(D^m) : \sup_{z_j \in D} |f(z_1, \dots, z_m)| \prod_{j=1}^m \ln \left(\frac{c}{\delta(z_j)} \right)^{-\frac{1}{r_j}} \delta^{\frac{1}{r_j}}(z_j) < +\infty \right\},$$

где $\sum_{j=1}^m \frac{1}{r_j} = 1$, $r_j > 0$, $c = \text{diam}(D)$;

$$A_{\ln}(1) = \left\{ f \in H(D) : \sup_{z \in D} |f(z)| \delta^r(z) \left(\ln \frac{c}{\delta(z)} \right)^{-1} < +\infty \right\}; \\ A_{\overline{r}}^\infty(D^m) = \left\{ f \in H(D^m) : \sup_{z_j \in D} |f(z_1, \dots, z_m)| \prod_{j=1}^m \delta^{r_j}(z_j) < +\infty \right\},$$

где $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$;

$$A_r^\infty(D) = \left\{ f \in H(D) : \sup_{z \in D} |f(z)| \delta^r(z) < +\infty \right\},$$

где $r > 0$.

В следующей теореме дается точный результат о следах аналитических пространств $A_r^\infty(D^m)$ и $A_{\ln}(r_1, \dots, r_m)$.

Теорема 2.4 (см. [38]).

1. Пусть $r_j > 0$, $\sum_{j=1}^m r_j = r$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $\text{Trace}(A_r^\infty(D^m)) = A_r^\infty(D)$.
2. Пусть $r_j > 0$, $\sum_{j=1}^m r_j = 1$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $\text{Trace}(A_{\ln}(r_1, \dots, r_m)) = A_{\ln}(1)$.

Рассмотрим далее следы пространств Бергмана со смешанной нормой на D^m :

$$A_{\vec{\alpha}}^{\vec{p}}(D^m) = \left\{ f \in H(D^m) : \left(\int_D \dots \left(\int_D |f(\omega_1, \dots, \omega_m)|^{p_1} \delta^{\alpha_1}(\omega_1) dv(\omega_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{1}{p_m}} < +\infty \right\}$$

при $p_{i+1} \geq p_i$, $p_i \geq 1$, $\alpha > -1$, $i = 1, \dots, m$.

В следующей теореме мы покажем, что следы аналитических пространств $A_{\vec{\alpha}}^{\vec{p}}(D^m)$ равны пространствам $A_\gamma^{p_m}(D)$.

Теорема 2.5 (см. [38]). Пусть $p_{i+1} \geq p_i$, $p_j \geq 1$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть также $\gamma = \alpha_m + \sum_{j=1}^{m-1} (n+1+\alpha_j) \frac{p_m}{p_j}$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда $\text{Trace}(A_{\vec{\alpha}}^{\vec{p}}(D^m)) = A_\gamma^{p_m}(D)$, $1 \leq p < +\infty$, $j = 1, \dots, m$.

Замечание 2.2. Для $D = B$ (единичный шар) теорема 2.5 известна (см. [46]).

В работе [52] также получены новые точные оценки для следов в пространствах типа Бергмана аналитических пространств в сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей.

Пусть

$$A_{\vec{\beta}}^p(D^m) = A^p(D^m, \vec{\beta}) = \left\{ f \in H(D^m) : \int_D \dots \int_D |f(\omega_1, \dots, \omega_m)|^p \prod_{j=1}^m \delta^{\beta_j}(\omega_j) dm(\omega_1) \dots dm(\omega_m) < \infty \right\},$$

где $0 < p < \infty$, $\beta_j > -1$, $j = \overline{1, m}$.

Следующая теорема дает точный результат о следах аналитических пространств $A^p(D^m, \vec{\beta})$.

Теорема 2.6 (см. [52]). Пусть $0 < p < \infty$, $\beta_j > -1$, $j = \overline{1, m}$.

Тогда $\text{Trace } A^p(D^m, \vec{\beta}) = A^p\left(D, \sum_{j=1}^m \beta_j + (m-1)(n+1)\right)$.

Также определим аналитические функциональные пространства типа Бесова на $D^m \subset \mathbb{C}^m$:

$$A_{\delta, \vec{k}}^p(D^m) = \left\{ f \in H(D^m) : \left(\sum_{|\alpha_1| \leq k_1} \dots \sum_{|\alpha_m| \leq k_m} \int_D \dots \int_D |D^{\alpha_1 \dots \alpha_m} f|^p (-\rho_1)^{\delta-1} \dots (-\rho_m)^{\delta-1} dv(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

где $\rho_j(z) = \rho(z_j)$, $j = 1, \dots, m$, $0 < p < +\infty$, $\delta > 0$.

Следы классов $A_{t+1, \vec{k}}^p(D^m)$ для $p \leq 1$ можно описать следующим образом.

Теорема 2.7 (см. [38]). $A_{mt+m(n+1)-(n+1)-\sum_{j=1}^m k_j}^p(D) \subset \text{Trace}(A_{t+1, \vec{k}}^p(D^m))$ при $p \leq 1$, $t > t_0$, где

t_0 достаточно велико.

Оператор следа в приведенной ниже теореме связан с некоторыми новыми интересными теоремами о точном вложении в контексте ограниченных сильно псевдовыпуклых областей для пространств аналитических функций типа Бергмана, которые могут представлять самостоятельный интерес.

Теорема 2.8 (см. [38]). Пусть $0 < p < +\infty$, $s_j > -1$, $j = 1, \dots, m$. Пусть μ — положительная борелевская мера на D . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\mu(\Delta_k) \leq C |\Delta_k|^{m + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^m s_j}$, $k \geq 1$;
2. $\text{Trace}(A_s^p) \hookrightarrow L^p(D, d\mu)$;
3. $\int_D \prod_{j=1}^m |f_j(z)|^p d\mu(z) \leq c \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{A_{s_j}^p}^p$, $f_j \in A_{s_j}^p$, $1 \leq j \leq m$.

Далее определим пространства типа Герца в произведениях псевдовыпуклых областей D . Заметим, что, при рассмотрении весов и мер из контекста ясно, что рассматриваются произведения весов и произведения мер, а также интегрирование по произведениям областей, хотя это и не указано ниже. Пусть

$$H_{\alpha}^{p,q}(D^m) = \left\{ f \in H(D^m) : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{B_0(z_k, r)} |f(\omega)|^p (\delta(\omega))^{\alpha} dV(\omega) \right)^{\frac{q}{p}} < \infty \right\},$$

где $\delta(z) = \text{dist}(z, \partial D)$ и $0 < p, q < \infty$, $\alpha > -1$ с обычной модификацией, когда α является вектором. Заметим, что мы имеем классическое пространство Бергмана при $p = q$, банаховы пространства при $\min(p, q) > 1$ и полные метрические пространства для других значений параметров. Здесь $\{z^k\} \subset D$ — это некоторые фиксированные r -решетки в ограниченных псевдовыпуклых областях с гладкой границей D . Заметим, что эти аналитические пространства в более высокой размерности зависят от последовательностей $\{z_n\}$, но мы опускаем это в обозначениях пространств. Здесь через $dV(z)$ обозначим нормированную меру Лебега на произведениях ограниченных псевдовыпуклых областей с гладкой границей.

В следующей теореме показывается, что следы пространства $H_{\beta}^{p,q}(D^m)$ равны пространствам $A_{\alpha_1}^q(D)$.

Теорема 2.9 (см. [69]). Пусть $F \in H_{\beta}^{p,q}(D^m)$, $0 < p, q < \infty$, $n > n_0$, $q \leq p$, и пусть β_0, n_0 достаточно велики. Тогда $F(z, \dots, z) \in A_{\alpha_1}^q(D)$, т. е.

$$\int_D |F(z, \dots, z)|^q \delta(z)^{\alpha_1} dV(z) < +\infty,$$

$$\text{где } \alpha_1 = \sum_{j=1}^m (\beta_j + n + 1) \frac{p}{q} - (n + 1).$$

Пусть $f \in A_{\alpha_1}^q(D)$. Тогда можно найти функцию F такую, что $F \in H_{\beta}^{p,q}(D^m)$ и $F(z, \dots, z) = f(z)$, $z \in D$, а также

$$\text{Trace}(H_{\beta}^{p,q}(D^m)) = (A_{\alpha_1}^q)(D).$$

3. СЛЕДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

В этом разделе мы рассмотрим некоторые интересные задачи о следах в различных пространствах аналитических функций в трубчатых областях.

Трубчатые области — это очень общие неограниченные области Зигеля, которые изучались во многих недавних работах Б. Сехбы и его соавторов за последние два десятилетия (см. [30, 31]). Список этих работ приведен в библиографии. Определение следов аналитических функциональных пространств в трубчатой области аналогично определению 1.1. В доказательствах всех теорем о следах, приведенных ниже, использовались хорошие свойства r -решеток в трубке. Эти важные r -решетки были изобретены А. Бонами и соавторами (см. [14]). Ниже мы приводим множество точных теорем о следах для различных функциональных пространств аналитических

функций типов Бергмана и Герца. Все определения этих аналитических функциональных пространств даны ниже.

Введем основные обозначения из [13, 14, 30].

Пусть $T_\Omega = V + i\Omega$ — трубчатая область над неприводимым симметричным конусом Ω в комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ n -мерного евклидова пространства $\tilde{V}$.

Обозначим ранг конуса Ω через r , а детерминантную функцию на $\tilde{V}$ через Δ . Пусть $\tilde{V} = \mathbb{R}^n$, тогда в качестве примера симметричного конуса на $\mathbb{R}^n$ рассмотрим конус Лоренца Λ_n , определенный для $n \geq 3$ как $\Lambda_n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_1^2 - \dots - y_n^2 > 0, y_1 > 0\}$.

Также мы обозначаем m -произведения трубок как $T_\Omega^m = T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$, $m \in \mathbb{N}$. Пространство всех аналитических функций на этом новом произведении областей, аналитических по каждой переменной в отдельности, будет обозначаться как $H(T_\Omega^m)$.

В работе [58] впервые в литературе рассматривается известная проблема, связанная с оценками следа в пространствах аналитических функций в неограниченных областях в $\mathbb{C}^n$, а именно в трубчатых областях над симметричными конусами. В работе [59] авторы интересуются свойствами некоторых аналитических подпространств $H(T_\Omega^m)$ и получают новые точные оценки для следов в пространствах типа Бергмана аналитических функций в типичных областях Зигеля.

Ниже через m мы будем обозначать натуральное число больше 1. Для $\tau \in \mathbb{R}_+$ и соответствующей функции определителя $\Delta(x)$ мы полагаем

$$A_\tau^\infty(T_\Omega) = \left\{ F \in \mathcal{H}(T_\Omega) : \|F\|_{A_\tau^\infty} = \sup_{x+iy \in T_\Omega} |F(x+iy)| \Delta^\tau(y) < \infty \right\}$$

(см. [14] и приведенные там ссылки).

При $1 \leq p, q < +\infty$, $\nu \in \mathbb{R}$ и $\nu > \frac{n}{r} - 1$ обозначим через $A_\nu^{p,q}(T_\Omega)$ взвешенное пространство Бергмана со смешанной нормой, состоящее из аналитических функций f в T_Ω , для которых

$$\|F\|_{A_\nu^{p,q}} = \left(\int_\Omega \left(\int_{\tilde{V}} |F(x+iy)|^p dx \right)^{q/p} \Delta^\nu(y) \frac{dy}{\Delta(y)^{n/r}} \right)^{1/q} < +\infty.$$

Известно, что пространство $A_\nu^{p,q}(T_\Omega)$ является нетривиальным тогда и только тогда, когда $\nu > \frac{n}{r} - 1$. При $p = q$ мы пишем $A_\nu^{p,q}(T_\Omega) = A_\nu^p(T_\Omega)$.

Для определения двух связанных пространств типа Бергмана $A_\nu^p(T_\Omega^m)$ и $A_\tau^\infty(T_\Omega^m)$ (ν и τ могут быть также векторами) в m -произведениях трубчатых областей T_Ω^m мы следуем стандартной процедуре. Например, положим для всех $z_j = x_j + iy_j$, $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, $F(z) = F(z_1, \dots, z_m)$, $|F(x+iy)| = |F(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)|$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)$,

$$A_\tau^\infty(T_\Omega^m) = \left\{ F \in H(T_\Omega^m) : \|F\|_{A_\tau^\infty} = \sup_{x+iy \in T_\Omega^m} |F(x+iy)| \Delta^\tau(y) < \infty \right\},$$

где $\Delta^\tau(y)$ — произведение m -одномерных функций $\Delta^{\tau_j}(y_j)$, $j = 1, \dots, m$.

Аналогично, пространство Бергмана A_τ^p можно определить на произведениях трубок для всех $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\tau_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$. Можно показать, что все эти пространства являются банаховыми пространствами. Заменяя выше A на L , мы, как обычно, получим соответствующее большее пространство всех измеримых функций в произведениях трубок над симметричным конусом с той же квазинормой.

Как и ранее в случае аналитических функций в единичном диске, полидиске, единичном шаре и верхнем полупространстве $\mathbb{C}_+$, а также как в доказательствах теорем о следе в случае пространств гармонических функций в евклидовом пространстве, роль формулы представления Бергмана имеет решающее значение.

Следующая теорема полностью описывает следы пространств Бергмана.

Теорема 3.1 (см. [58]). Пусть $f \in A_\nu^p(T_\Omega^m)$, $1 \leq p < \infty$, $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\nu_j > \nu_0$ для фиксированного $\nu_0 = \nu_0(p, n, r, m)$ для всех $j = 1, \dots, m$. Тогда $f(z, \dots, z) \in A_s^p$, где $s = \sum_{j=1}^m \left(\nu_j - \frac{n}{r} \right) + 2\frac{n}{r}(m-1)$

с соответствующими оценками норм. Для всех $\frac{n}{r} \leq p_1$, где p_1 является сопряженным с p , верно и обратное. Для каждой функции $g \in A_s^p(T_\Omega)$ существует функция F , $F(z, \dots, z) = g(z)$, $F \in A_\nu^p(T_\Omega^m)$. Пусть также

$$(T_\beta f)(z_1, \dots, z_m) = C_\beta \int_{T_\Omega} f(w) \prod_{j=1}^m \Delta^{-t}((z_j - \bar{w})/i) dV_\beta(w),$$

где $mt = \beta + \frac{n}{r}$, $z_j \in T_\Omega$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда справедливы следующие утверждения для всех $\beta > \beta_0$ для некоторого фиксированного достаточно большого положительного числа β_0 . Интегральный оператор типа Бергмана T_β (расширенная проекция Бергмана) отображает $A_s^p(T_\Omega)$ в $A_\nu^p(T_\Omega^m)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $\nu_j > \nu_0$, $j = 1, \dots, m$.

Полный аналог этой теоремы верен также и для случая $p = \infty$.

В следующей теореме мы подробно описываем следы пространств Блоха.

Теорема 3.2 (см. [58]). Пусть $f \in A_\nu^\infty(T_\Omega^m)$, $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\nu_j > \frac{n}{r} - 1$ для всех $j = 1, \dots, m$. Тогда $f(z, \dots, z) \in A_s^\infty$, где $s = \sum_{j=1}^m \nu_j$. Верно и обратное: для каждой функции $g \in A_s^\infty(T_\Omega)$ существует функция $F(z, \dots, z) = g(z)$, $F \in A_\nu^\infty(T_\Omega^m)$.

Пусть также

$$(T_\beta f)(z_1, \dots, z_m) = C_\beta \int_{T_\Omega} f(w) \prod_{j=1}^m \Delta^{-t}((z_j - \bar{w})/i) dV_\beta(w),$$

где $mt = \beta + \frac{n}{r}$, $z_j \in T_\Omega$, $j = 1, \dots, m$. Тогда следующие утверждения справедливы для всех $\beta > \beta_0$ при некотором фиксированном достаточно большом положительном числе β_0 .

Интегральный оператор типа Бергмана T_β (расширенная проекция Бергмана) отображает $A_s^\infty(T_\Omega)$ в $A_\nu^\infty(T_\Omega^m)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $\nu_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$, $s = \sum_{j=1}^m \nu_j$.

Обозначим через $A_\nu^{\vec{p}}(T_\Omega^m)$, $1 \leq p_j < +\infty$ и $\nu_j \in \mathbb{R}$, $\nu_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$, взвешенное пространство Бергмана со смешанной нормой, состоящее из аналитических функций f в T_Ω :

$$A_\nu^{\vec{p}}(T_\Omega^m) = \left\{ f \in H(T_\Omega^m) : \left(\int_{T_\Omega} \dots \left(\int_{T_\Omega} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} [\Delta(y_1)]^{\nu_1 - n/r} dx_1 dy_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots [\Delta(y_m)]^{\nu_m - n/r} dx_m dy_m \right)^{\frac{1}{p_m}} < +\infty \right\}.$$

Это банахово пространство. Заменяя выше A на L , мы, как обычно, получим соответствующее большее пространство всех измеримых функций в трубке над симметричным конусом с той же нормой.

Определим новое банахово пространство (аналитические пространства типа Герца) в трубчатых областях над симметричными конусами следующим образом. Пусть сначала

$$L_\tau^p(T_\Omega^m) = \left\{ f \text{ лок. интегрируема в } T_\Omega : \|f\|_{L_\tau^p} = \int_{T_\Omega} |f(z)|^p \prod_{j=1}^m \Delta^{\tau_j - \frac{n}{r}}(y_j) dx_j dy_j < \infty \right\},$$

где $\tau_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$.

Для определения следующего пространства функций напомним читателю, что семейство шаров Бергмана $B_\delta(z)$ образует r -решетку в трубчатой области T_Ω . Обозначим через $B_\delta^m(z)$ стандартное декартово m -произведение таких шаров Бергмана в $\mathbb{C}^m$, $z = (z_1, \dots, z_m)$.

Через $S_{\nu, \tau}^p$ обозначим все функции f , аналитические в T_Ω^m , такие что

$$\int_{B_\delta^m(z)} |f(z_1, \dots, z_m)| \prod_{j=1}^m \Delta^{s_j}(y_j) dx_j dy_j$$

принадлежит $L_{\tau_1, \dots, \tau_m}^p(T_\Omega^m)$, где $s_j = \nu - \frac{n}{r}$, $\nu_j > \frac{n}{r} - 1$, $\tau_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$, и $1 \leq p < \infty$ с той же нормой (см. [20, 31]).

В следующей теореме подробно опишем следы общих пространств со смешанной нормой.

Теорема 3.3 (см. [59]). Пусть $f \in A_{\vec{\nu}}^{\vec{p}}(T_\Omega^m)$, $1 \leq p_j < \infty$, $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\nu_j > \nu_0$ для фиксированного $\nu_0 = \nu_0(n, p, r, m)$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда $f(z, \dots, z) \in A_s^{p_m}$, $s = \nu_m - \frac{n}{r} + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\nu_j + \frac{n}{r} \right) \frac{p_m}{p_j}$ с соответствующими оценками норм.

Для всех $\tilde{p}_1$, $\frac{1}{\tilde{p}_1} + \frac{1}{p_m} = 1$, $n/r \leq \tilde{p}_1$, $j = 1, \dots, m$, для некоторого фиксированного достаточно большого k , $\nu_j > k$ верно и обратное. Для каждой функции $g \in A_s^{p_m}(T_\Omega)$ существует функция $F(z, \dots, z) = g(z)$, $F \in A_{\vec{\nu}}^{\vec{p}}(T_\Omega^m)$.

Пусть также

$$T_\beta(f)(z_1, \dots, z_m) = C_\beta \int_{T_\Omega} f(w) \left(\prod_{j=1}^m \Delta^{-t} \left(\frac{z_j - \bar{w}}{i} \right) \right) dV_\beta(w),$$

где $mt = \beta + \frac{n}{r}$, $z_j \in T_\Omega$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда следующее утверждение выполняется для всех $\beta > \beta_0$ для некоторого фиксированного достаточно большого положительного числа β_0 . Интегральный оператор типа Бергмана T_β (расширенная проекция Бергмана) отображает $A_s^{p_m}(T_\Omega)$ в $A_{\vec{\nu}}^{\vec{p}}(T_\Omega^m)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $\nu_j > \nu_0$, $j = 1, \dots, m$.

Для случая $p_j = p$, $j = 1, \dots, m$ при $1 \leq p < \infty$ эта теорема была доказана в [58]. Для $m = 1$ эта теорема очевидна. Для $n = 1$ имеем верхнее полупространство $\mathbb{C}_+$, эта теорема была доказана в [49].

Теоремы 3.4, 3.5 полностью описывают следы новых пространств Герца.

Теорема 3.4 (см. [59]). Пусть $\nu_j > \nu_0$ и $\tau_j > \tau_0$ для некоторых фиксированных положительных чисел $\nu_0 = \nu_0(p, n, r, m)$ и $\tau_0 = \tau_0(p, n, r, m)$, $1 \leq p < \infty$. Пусть $f \in S_{\nu, \tau}^p(T_\Omega^m)$.

Тогда $f(z, \dots, z)$ принадлежит $A_s^p(T_\Omega)$, где $s = \sum_{j=1}^m \left(\nu_j + \frac{n}{r} \right) p + \sum_{j=1}^m \left(\tau_j + \frac{n}{r} \right) - \frac{n}{r}$, и для каждой функции $f \in A_s^p(T_\Omega)$ существует функция $F \in S_{\nu, \tau}^p$ такая, что $F(z, \dots, z) = f(z)$ для всех $\frac{n}{r} \leq p'$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Пусть также

$$(T_\beta f)(z_1, \dots, z_m) = C_\beta \int_{T_\Omega} f(w) \prod_{j=1}^m \Delta^{-t} \left(\frac{z_j - \bar{w}}{i} \right) dV_\beta(w),$$

где $mt = \beta + \frac{n}{r}$, $z_j \in T_\Omega$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда следующее утверждение выполняется для всех $\beta > \beta_0$ для некоторого фиксированного достаточно большого положительного числа β_0 . Интегральный оператор проекции Бергмана T_β отображает $A_s^p(T_\Omega)$ в $S_{\nu, \tau}^p(T_\Omega^m)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\nu_j > \nu_0$, $\tau_j > \tau_0$, $j = 1, \dots, m$.

Для $p = 1$ эта теорема была доказана в работе [58] в трубчатых областях.

Далее определим пространства типа Герца в произведениях трубчатых областей T_Ω . В работе [69] представлены новые точные результаты о следах в некоторых новых аналитических пространствах типа Герца в некоторых общих областях (неограниченные типичные области Зигеля

второго типа) в $\mathbb{C}^n$ (трубчатые области). Эти пространства служат естественными обобщениями классических пространств Бергмана. Заметим, что здесь при использовании весов и мер из контекста ясно, что рассматриваются произведения весов и произведения мер. Пусть

$$H_{\alpha}^{p,q}(T_{\Omega}^m) = \left\{ f \in H(T_{\Omega}^m) : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{B_r(z_k, r)} |f(\omega)|^p (\operatorname{Im}^{\alpha} \omega) dV(\omega) \right)^{\frac{q}{p}} < \infty \right\},$$

где $0 < p, q < \infty$, $\alpha > -1$ с обычной модификацией, когда α является вектором. Заметим, что при $p = q$ имеем классическое пространство Бергмана, при $\min(p, q) > 1$ это банаховы пространства, а для других значений параметров это полные метрические пространства. Здесь $\{z^k\} \subset T_{\Omega}$ — это некоторые фиксированные r -решетки в трубчатых областях над симметричными конусами T_{Ω} , которые обсуждались выше. Заметим, что эти аналитические пространства в более высокой размерности зависят от последовательностей $\{z_n\}$, но мы опускаем это в обозначениях пространств. Здесь через $dV(z)$ обозначим нормированную меру Лебега на произведениях трубчатых областей.

В следующей теореме дается точный результат о следах аналитических пространств $H_{\beta}^{p,q}(T_{\Omega}^m)$.

Теорема 3.5 (см. [69]). Пусть $F \in H_{\beta}^{p,q}(T_{\Omega}^m)$, $1 < p, q < \infty$, $p \geq q$, β_0, α_1 достаточно велики. Тогда $F(z, \dots, z) \in A_{\alpha_1}^q(T_{\Omega})$, т. е.

$$\int_{T_{\Omega}} |F(z, \dots, z)|^q (\operatorname{Im} z)^{\alpha_1} dV(z) < \infty,$$

$$\text{где } \alpha_1 = \sum_{j=1}^m \left(\beta_j + \frac{2n}{r} \right) \frac{p}{q} - 2\frac{n}{r}.$$

Пусть $f \in A_{\alpha_1}^q(T_{\Omega})$. Тогда найдется функция F такая, что $F \in H_{\beta}^{p,q}(T_{\Omega}^m)$, $F(z, \dots, z) = f(z)$, $z \in T_{\Omega}$, и выполнено

$$\operatorname{Trace}(H_{\beta}^{p,q}(T_{\Omega}^m)) = A_{\alpha_1}^q(T_{\Omega}).$$

В работе [55] представлены некоторые результаты для неограниченных трубчатых областей над симметричными конусами. Пусть

$$A_s^p = \left\{ f \in H(T_{\Omega}^m) : \int_{T_{\Omega}} \dots \int_{T_{\Omega}} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \prod_{j=1}^m \Delta^{s_j - \frac{n}{r}} (\operatorname{Im} z) dV(z) < +\infty \right\},$$

где $s = (s_1, \dots, s_m)$, $0 < p < \infty$, $s_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$. Пусть также $L^p(T_{\Omega}, d\mu)$ — пространство всех измеримых функций на T_{Ω} таких, что $\int_{T_{\Omega}} |f(z)|^p d\mu(z) < \infty$ для любой положительной борелевской меры μ на T_{Ω} .

В следующей теореме сформулированы некоторые новые интересные результаты о точном вложении, связанные с оператором следа. Подобные теоремы о точном вложении, связанные с оператором следа, справедливы и в других областях. Они были доказаны первым автором в последние годы.

Теорема 3.6 (см. [55]). Пусть $0 < p < +\infty$, $s_j > -1$, $j = 1, \dots, m$. Пусть μ — положительная борелевская мера на T_{Ω} . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\mu(\Delta_k) \leq C |\Delta_k|^{m + (\frac{2n}{r})^{-1} \sum_{j=1}^m s_j}$, $k \geq 1$;
2. $\operatorname{Trace}(A_s^p) \hookrightarrow L^p(T_{\Omega}, d\mu)$;
3. $\int_{T_{\Omega}} \prod_{j=1}^m |f_j(z)|^p d\mu(z) \leq c \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{A_{s_j}^p}^p$, $f_j \in A_{s_j}^p$, $1 \leq j \leq m$.

В работе [56] представлены новые точные теоремы о следах аналитических классов типа ВМОА (*Bounded Mean Oscillation Analytic functions* — аналитические функции с ограниченной средней вариацией) в трубчатых областях над симметричными конусами при одном дополнительном условии на так называемое ядро Бергмана в этих областях. Существенную роль играют так называемые r -решетки для трубчатых областей, полученные ранее в работах зарубежных авторов.

Теоремы данной статьи являются полными аналогами недавних точных результатов о следах классов ВМОА, полученных ранее первым автором в полишарах и в ограниченных сильно псевдовыпуклых областях.

Пусть T_Ω — трубчатая область над симметричными конусами с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$. Пусть

$$M_{r_1, \dots, r_m, \tau, s_1, \dots, s_m}^p(T_\Omega^m) = \left\{ f \in H(T_\Omega^m) : \right. \\ \left. \sup_{\omega \in T_\Omega} \delta^{m\tau}(\omega) \int_{T_\Omega} \dots \int_{T_\Omega} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \prod_{j=1}^m |B_{s_j}(z_j, \omega)| \prod_{j=1}^m \delta^{s_j}(z_j) dV(z_j) < +\infty \right\},$$

при $s_j = \tau + r_j$, $j = 1, \dots, m$, где $\tau > 0$, $s_j > -1$, $r_j \geq 0$, $j = 1, \dots, m$, $0 < p < +\infty$.

Это банаховы пространства для всех $p \geq 1$ и полные метрические пространства для других значений p . Следующие теоремы для случая единичного шара можно найти в [49].

В теоремах 3.7, 3.8 приводится точный результат о следах пространств $M_{r_1, \dots, r_m, \tau, s_1, \dots, s_m}^p(T_\Omega^m)$.

Теорема 3.7 (см. [56]). Пусть $p > 1$, $\tau \in (0, +\infty)$, $r_j \in \mathbb{N}$, $r = \sum_{j=1}^m r_j$, $s_j > -1$, $j = 1, \dots, m$, $t = (m-1)(2n/r) + \sum_{j=1}^m s_j$. Тогда $\text{Trace}(M_{r_1, \dots, r_m, \tau, s_1, \dots, s_m}^p(T_\Omega^m)) = M_{r, t, \tau m}^p(T_\Omega)$ для всех n , $n/r > n_0$, где $n_0 = n_0(p, \tau, r_1, \dots, r_m, m)$.

Теорема 3.8 (см. [56]). Пусть $p \leq 1$, $\tau \in (0, +\infty)$, $r_j \in \mathbb{N}$, $r = \sum_{j=1}^m r_j$, $s_j > -1$, $j = 1, \dots, m$, $\frac{r_j}{p} \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m$, $t = (m-1)(2n/r) + \sum_{j=1}^m s_j$. Тогда $\text{Trace}(M_{r_1, \dots, r_m, \tau, s_1, \dots, s_m}^p(T_\Omega^m)) = M_{r, t, \tau m}^p(T_\Omega)$ для всех n , $n/r > n_0$, где $n_0 = n_0(p, \tau, r_1, \dots, r_m, m)$.

Все теоремы о точном следе, представленные в разделе 4, справедливы с довольно схожими доказательствами в аналитических пространствах нескольких переменных в различных областях, и они были ранее получены первым автором в нескольких статьях, основанных на интересных свойствах так называемых r -решеток в этих областях в $\mathbb{C}^n$.

4. СЛЕДЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ВЕРХНИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

В этом разделе мы рассмотрим некоторые интересные задачи о следах в различных пространствах гармонических функций в произведениях верхних полупространств.

Пусть B — единичный шар в $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$B = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \right\},$$

и $S^{n-1} = \partial B = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $x = rx'$, $r = |x| \in (0, 1)$, $x' \in S^{n-1}$.

Рассмотрим банаховы пространства Бергмана в B (см., например, [18]):

$$A_\alpha^p(B) = \left\{ f \in h(B) : \|f\|_{p, \alpha} := \left(\int_0^1 \int_{S^{n-1}} |f(rx')|^p (1-r)^\alpha r^{n-1} dr dx' \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

при $1 \leq p < +\infty$, $0 \leq \alpha < +\infty$ и $p = +\infty$, $0 \leq \alpha < +\infty$. Имеем

$$\|f\|_{\infty, \alpha} := \sup_{x \in B} |f(x)| (1 - |x|)^\alpha < +\infty.$$

Пусть также $B^m = B \times \dots \times B$. Обозначим через $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\infty(B^m)$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, пространство всех функций f , гармонических по каждой переменной в B таких, что

$$\sup_{x_i \in B, i=1, \dots, m} |f(x_1, \dots, x_m)| \prod_{i=1}^m (1 - |x_i|^2)^{\alpha_i} < +\infty.$$

Пусть $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, m$. Некоторые сведения о $\text{Trace}(A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\infty(B^m))$ приведена в [50].
Пусть

$$hA_\alpha^p(B^m) = \left\{ f \in h(B^m) : \int_B \int_B \dots \int_B |f(x_1, \dots, x_m)|^p \prod_{k=1}^m (1 - |x_k|)^{\alpha_k} (|x_1| \dots |x_m|)^{n-1} d|x_1| \dots d|x_m| dx'_1 \dots dx'_m < +\infty \right\}.$$

Пусть $p \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$. Подробнее о $\text{Trace}(hA_\alpha^p(B^m))$ см. [50].

Введем гармонические классы Бергмана на $\mathbb{R}^{n+1}$ и на произведениях пространств следующим образом.

Зададим $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Точки в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ обычно обозначают как $z = (x, t)$ или $w = (y, s)$. Мера Лебега обозначается как $dm(z) = dz = dxdt$ или $dm(w) = dw = dyds$. Мы также используем стандартные взвешенные меры $dm_\lambda(z) = t^\lambda dxdt$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$,

$$A_\alpha^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) = \left\{ f \in h(\mathbb{R}_+^{n+1}) : \|f\|_{p, \alpha}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |f(x', x_{n+1})|^p x_{n+1}^\alpha dx' dx_{n+1} < +\infty \right\},$$

и

$$A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^p(\mathbb{R}_+^{n+1} \times \dots \times \mathbb{R}_+^{n+1}) = A_\alpha^p((\mathbb{R}_+^{n+1})^m) = \left\{ f \in h((\mathbb{R}_+^{n+1})^m) : \right. \\ \left. \|f\|_{p, \alpha}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty |f(x'_1, \dots, x'_m, x_{n+1}^1, \dots, x_{n+1}^m)|^p \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^m (x_{n+1}^k)^{\alpha_k} dx'_1 \dots dx'_m dx_{n+1}^1 \dots dx_{n+1}^m < +\infty \right\}.$$

Пусть $0 < p < +\infty$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$. В [50] приведены некоторые свойства $\text{Trace}(A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^p(\mathbb{R}_+^{n+1} \times \dots \times \mathbb{R}_+^{n+1}))$.

Теоремы о следах различных типов и различные оценки следов различных пространств гармонических функций можно найти в работах [11, 12]. Сформулируем некоторые результаты из этих работ.

Зададим $\mathbb{H} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Взвешенные гармонические пространства Бергмана на $\mathbb{H}$ определены для $0 < p < +\infty$ и $\lambda > -1$:

$$A_\lambda^p = A_\lambda^p(\mathbb{H}) = \left\{ f \in h(\mathbb{H}) : \|f\|_{A_\lambda^p} = \left(\int_{\mathbb{H}} |f(z)|^p dm_\lambda(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

При $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ имеем произведение мер $dm_{\vec{\alpha}}$ на $\mathbb{H}^m$, определенное как $dm_{\vec{\alpha}}(z_1, \dots, z_m) = dm_{\alpha_1}(z_1) \dots dm_{\alpha_m}(z_m)$, и полагаем $L_{\vec{\alpha}}^p = L^p(\mathbb{H}^m, dm_{\vec{\alpha}})$, $A_{\vec{\alpha}}^p = L_{\vec{\alpha}}^p \cap h(\mathbb{H}^m)$, $0 < p < +\infty$. Обозначим через $\tilde{A}_{\vec{\alpha}}^p$ подпространство $A_{\vec{\alpha}}^p$, состоящее из функций, которые являются гармоническими по каждой из переменных $z_1, \dots, z_m$ отдельно.

Для функции $f : \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{C}$ определим $\text{Tr } f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ как $\text{Tr } f(z) = f(z, \dots, z)$.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 4.1 (см. [11]). Пусть $1 < p < +\infty$, $s_1, \dots, s_m > -1$ и $\lambda = (m-1)(n+1) + \sum_{j=1}^m s_j$.

Тогда $A_\lambda^p \subset \text{Trace}(\tilde{A}_s^p) \subset \text{Trace}(A_s^p) \subset L^p(\mathbb{R}_+^{n+1}, dm_\lambda)$.

В частности, если $f \in A_s^p$ и если $\text{Tr } f$ является гармоническим, то $\text{Tr } f \in A_\lambda^p$.

При $p = \infty$, $s_j > 0$, $1 \leq j \leq m$ определим A_s^∞ как пространство всех $f \in h((\mathbb{R}_+^{n+1})^m)$ таких, что

$$\|f\|_{A_s^\infty} = \sup_{z_j \in \mathbb{R}_+^{n+1}} |f(z_1, \dots, z_m)| t_1^{s_1} \dots t_m^{s_m} < +\infty;$$

при $m = 1$, $s_1 = \alpha$ используется более простое обозначение A_α^∞ .

Пространство всех функций $f(z_1, \dots, z_m)$ на $(\mathbb{R}_+^{n+1})^m$, гармонических по каждой из переменных $z_1, \dots, z_m$, обозначим через $\tilde{h}((\mathbb{R}_+^{n+1})^m)$. Также, если X — пространство гармонических функций на $(\mathbb{R}_+^{n+1})^m$, то полагаем $\tilde{h}X = X \cap \tilde{h}((\mathbb{R}_+^{n+1})^m)$.

Пусть $X \subset h((\mathbb{R}_+^{n+1})^m)$. След X задается как $\text{Trace } X = \{\text{Tr } f : f \in X\}$.

Теорема 4.2 (см. [12]). Пусть $s_1, \dots, s_m > -1$ и $\lambda = \sum_{j=1}^m s_j$. Тогда $A_\lambda^\infty \subset \text{Trace}(\tilde{h}A_s^\infty)$.

И наоборот, если $f \in A_s^\infty$ и $\text{Tr } f$ является гармоническим, то $\text{Tr } f \in A_\lambda^\infty$.

Ниже сформулируем полный аналог приведенной выше теоремы для случая пространств гармонических функций в единичном шаре $\mathbb{R}^n$. Формулировка очень похожа. Определение объектов в этой теореме приведено в упомянутой статье автора совместно с М. Арсеновичем.

Теорема 4.3 (см. [12]). Пусть $0 < p < 1$, $s_1, \dots, s_m > -1$ и $\lambda = (m-1)(n+1) + \sum_{j=1}^m s_j$. Тогда

$$A_\lambda^p \subset \text{Trace}(\tilde{h}A_s^p) \subset \text{Trace}(A_s^p) \subset L^p(\mathbb{R}_+^{n+1}, dm_\lambda).$$

В частности, если $f \in A_s^p$ и если $\text{Tr } f$ является гармоническим, то $\text{Tr } f \in A_\lambda^p$.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ И НОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ТИПА ВМОА, БЛОХА, ГЕРЦА И СВЯЗАННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе мы собрали множество интересных новых проблем, вопросов и различных комментариев, касающихся проблемы следа в аналитических функциональных пространствах нескольких комплексных переменных не только в ограниченных сильно псевдовыпуклых и трубчатых областях, но и в полидисках, единичных шарах и полишарах. Поэтому мы отсылаем заинтересованного читателя к обзорной статье авторов [43], посвященной различным стандартным объектам и определениям этих объектов, связанных с полидиском и полишаром.

В этом разделе мы определим не только различные аналитические функциональные пространства в различных областях в $\mathbb{C}^n$ и приводим некоторую информацию о следах этих пространств, но также рассмотрим отображения, близкие к отображению следа, и представим результаты об их действии в функциональных пространствах такого типа, полученную ранее первым автором.

В некоторых аналитических функциональных пространствах в произведениях областей, представленных ниже, мы видим хорошо известные операторы дифференцирования $\mathcal{D}^\alpha$ в квазинормах и приводим оценки следов таких пространств.

Теперь обсудим некоторые новые открытые вопросы, в частности, следы пространств смешанных норм с квазинормами в единичном полидиске:

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\int_{T^n} |f(r\zeta)|^p d\zeta \right)^{\frac{q}{p}} (1-r)^\alpha dr.$$

Даже при более общих весах $\omega(r)$, чем $(1-r)^\alpha$, они были полностью описаны в недавних работах [24] для всех $0 < p, q < +\infty$, $\alpha > -1$.

Следующий вполне естественный вопрос — полностью описать следы аналитических пространств функций подобного типа с помощью конечных квазинорм, определенных на полишаре $B \times \dots \times B$ (произведениях шаров):

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\int_S \dots \int_S |f(r_1\zeta_1, \dots, r_n\zeta_n)|^p d\zeta \right)^{\frac{q}{p}} \prod_{j=1}^n (1-r)^{\alpha_j} d\vec{r},$$

где $S \subset \mathbb{C}^m$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$, $0 < p, q < +\infty$.

Подобные пространства для $n = 1$ хорошо изучены. Следует отметить, что аналогичные, даже более общие задачи могут быть поставлены и в полных аналогах этих пространств аналитических функций, но в общих трубчатых областях над симметричными конусами T_Ω , или в ограниченных сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей D , а именно на произведениях этих областей.

Следы пространств Харди H^p для всех значений p были приведены в работах [38, 41, 44]. Естественным открытым вопросом остается поиск описания следов смешанной нормы $H^{\vec{p}}$.

Пространства Харди со смешанной нормой определяются следующим образом с помощью квазинорм в единичном полидиске в $\mathbb{C}^n$:

$$\sup_{r_m < 1} \dots \sup_{r_1 < 1} \left(\int_T \dots \left(\int_T |f(\vec{r}\vec{\zeta})|^{p_1} d\zeta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots d\zeta_m \right)^{\frac{1}{p_m}}, \quad 0 < p < +\infty, \quad j = 1, \dots, m$$

(а также важное взвешенное обобщение $H^{\vec{p}}_\omega$).

Некоторые точные оценки следов новых классов $H^{\vec{p}}$ можно найти в работах [38, 41] и в работах [45, 46] для некоторых частных случаев этих пространств в полишаре; в обоих случаях оценки для $m = 2$ и частных значений p_j приведены в недавней статье [3].

Следует отметить, что очень похожий вопрос может быть поставлен в пространствах типа $H^{\vec{p}}$ аналитических функций в полидиске V^n с квазинормами $\Gamma_t(\zeta)$, т. е. в конусе Лузина: $\Gamma_t(\zeta) = \{z \in V : |1 - \bar{\zeta}z| < t(1 - |z|)\}$, $t > 1$ (или с заменой $\Gamma_t(\zeta_j)$ на $r_j < 1$)

$$\left(\int_T \sup_{z_m \in \Gamma_t(\zeta)} \dots \left(\int_T \sup_{z_1 \in \Gamma_t(\zeta)} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} d\zeta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots d\zeta_m \right)^{\frac{1}{p_m}},$$

где $0 < p_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$, или

$$\left(\int_T \left(\int_T \sup_{z_1 \in \Gamma_t(\zeta)} \dots \sup_{z_m \in \Gamma_t(\zeta)} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} d\zeta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots d\zeta_m \right)^{\frac{1}{p_m}},$$

где $0 < p_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$.

Следует отметить, что многие результаты справедливы также для пространств плюригармонических функций. Теперь введем новые пространства смешанной нормы в полишарах $B \times \dots \times B$ следующим образом:

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{p_1 \dots p_m}(B_n^m) = \left\{ f \in H(B_n \times \dots \times B_n) : \right. \\ \left. \|f\|_{A_{\vec{\alpha}}^{\vec{p}}} \left(\int_{B_n} (1 - |z_m|)^{\alpha_m} \dots \left(\int_{B_n} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} (1 - |z_1|)^{\alpha_1} d\nu(z_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots d\nu(z_m) \right)^{\frac{1}{p_m}} < +\infty \right\},$$

где $0 < p < +\infty$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

Эти аналитические пространства можно ввести также для $p_j = +\infty$. Для $1 \leq p_j < +\infty$ имеем банаховы пространства, а для других значений — полные метрические пространства.

Ниже дадим полное описание пространств Бергмана со смешанной нормой в полишаре и верхней полуплоскости. Будет интересно представить точные расширения этих результатов на общие взвешенные пространства, а также на трубчатые и псевдовыпуклые области.

Теорема 5.1 (см. [40, 44, 46, 47]). Пусть $\gamma = \alpha_m + \sum_{j=1}^{m-1} (n+1 + \alpha_j) \left(\frac{p_m}{p_j} \right)$, $\alpha_j > -1$, $1 < p_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $\text{Trace}(A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{p_1, \dots, p_m}(B_n^m)) = A_\gamma^{p_m}(B_n)$.

Пусть далее

$$A_{\alpha}^p(\mathbb{C}_+^m) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}_+^m) : \right. \\ \left. \|f\|_{A_{\alpha}^p} = \left(\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)|^p \prod_{j=1}^m y_j^{\alpha_j} dx_j dy_j \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

где $0 < p < +\infty$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

Теорема 5.2 (см. [40, 44, 46, 47]). Пусть $0 < p < +\infty$, $j = \sum_{j=1}^m \alpha_j + 2m - 2$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда $\text{Trace}(A_{\alpha}^p(\mathbb{C}_+^m)) = A_j^p(\mathbb{C}_+)$.

Определим некоторые новые взвешенные пространства Харди в полишаре и пространства типа Бергмана—Соболева в полидиске, а также обобщим некоторые оценки и точные результаты, полученные ранее в полидиске другими авторами. Следует отметить, что для ознакомления с хорошо известной дробной производной $\mathcal{D}^{\alpha}$, которая приведена ниже, мы отсылаем читателя к соответствующим статьям, которые были процитированы выше. Обобщение этих результатов на очень сложные трубчатые области является интересной и, вероятно, довольно сложной открытой проблемой.

Некоторые удачные обобщения диагонального отображения можно найти в статье Д. Кларка [16].

Пусть

$$H_{\alpha, \beta}^p = \left\{ f \in H(B^m) : \sup_{r < 1} \tilde{M}_p(\mathcal{D}^{\beta} f, r) (1-r)^{\alpha} < +\infty, \alpha \geq 0, 0 < p < +\infty, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

где $\mathcal{D}^{\beta}$ — дробная производная функции f , $\mathcal{D}^{\beta} = \mathcal{D}_{z_1}^{\beta_1} \dots \mathcal{D}_{z_m}^{\beta_m} f$,

$$\tilde{M}_p^p(f, r) = \int_S \dots \int_S |f(r\zeta_1, \dots, r\zeta_m)|^p d\sigma(\zeta_1) \dots d\sigma(\zeta_m), r \in (0; 1).$$

Определим $H^p(B^m) = H_{0,0}^p$ для $0 < p < +\infty$,

$$A_{t, \vec{\alpha}}^p = \left\{ f \in H(B^m) : \int_B \dots \int_B |\mathcal{D}^{\alpha_1} \dots \mathcal{D}^{\alpha_m} f|^p (1 - |\tilde{z}|)^t d\nu(z) < +\infty \right\},$$

где $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, $t > -1$, $0 < p < +\infty$, $(1 - |\tilde{z}|) = \prod_{k=1}^m (1 - |z_k|)$.

Теорема 5.3 (см. [40, 44, 46, 47]).

1. $\text{Trace}(H^p) = A_{n(m-1)-1}^p$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p < +\infty$.
2. Пусть $p \leq 1$, $\alpha \geq \beta \geq 0$, тогда

$$A_{\tau}^p \subset \text{Trace}(H_{\alpha, \beta}^p), \tau = nm + (\alpha - \beta)pm - (n + 1).$$

3. Пусть $p \leq 1$, $\alpha_j \geq 0$, $t \geq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \alpha_j$, тогда

$$A_{tm+m(n+1)-(n+1)-\sum_{j=1}^m \alpha_j}^p \subset \text{Trace}(A_{t, \vec{\alpha}}^p).$$

Будет интересно распространить этот результат на трубчатые и псевдовыпуклые области.

Следы новых аналитических функциональных пространств в полидиске со смешанной квазинормой:

$$\left(\int_U \dots \left(\int_U |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} (1-r_1)^{\alpha_1} dr_1 d\zeta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots (1-r_m)^{\alpha_m} dr_m d\zeta_m \right)^{\frac{1}{p_m}},$$

где $0 < p_j < +\infty$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

Результаты этих исследований можно увидеть в недавних работах [49, 50]. Подобные задачи также легко могут быть поставлены в гораздо более общих контекстах областей $T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$ или $D \times \dots \times D$.

Рассмотрим аналитические пространства в трубчатых или псевдовыпуклых областях с квазинормами

$$\left(\int_D \dots \left(\int_D |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} \delta^{\alpha_1}(z_1) d\nu(z_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \delta^{\alpha_m}(z_m) d\nu(z_m) \right)^{\frac{1}{p_m}},$$

где $0 < p_j < +\infty$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$;

$$\left(\int_{T_\Omega} \dots \left(\int_{T_\Omega} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} \Delta^{\alpha_1}(z_1) d\tilde{\nu}(z_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \Delta^{\alpha_m}(z_m) d\tilde{\nu}(z_m) \right)^{\frac{1}{p_m}},$$

где $0 < p_j < +\infty$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

В теории функций также представляет интерес рассмотрение других отображений, которые близки и почти «диагональны» в единичном полидиске:

$$(Mf)(z_1, \dots, z_m) = f(r\zeta_1, \dots, r\zeta_m), \quad r \in (0, 1), \quad \zeta_j \in T, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$(Tf)(z_1, \dots, z_m) = f(r_1\zeta, \dots, r_m\zeta), \quad r_j \in (0, 1), \quad \zeta \in T, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $z_j \in U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $j = 1, \dots, m$.

Ниже дадим несколько точных результатов, полученных первым автором в недавней статье [45] (см. также ссылки в ней), касающихся этих довольно простых операторов в различных пространствах аналитических функций в единичном полидиске в $\mathbb{C}^n$.

Следует отметить, что операторы типа M , T могут рассматриваться также в ряде случаев в произведениях единичных шаров и в произведении трубчатых областей и ограниченных сильно псевдовыпуклых областей. Здесь мы опускаем простые подробности.

Пусть

$$U_*^n = \{z \in U^n : \zeta \in T, r_j \in (0, 1), j = 1, \dots, n\};$$

$$\tilde{U}^n = \{z \in U^n : |z_j| = r, r \in (0, 1], j = 1, \dots, n\};$$

$$\|f\|_{A_\alpha^p}^p = \int_{U^n} |f(z)|^p \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^{\alpha_j} dm_{2n}(z) < +\infty, \quad 0 < p < +\infty, \quad \alpha_j > -1;$$

$$\|f\|_{A_\alpha^p(U_*^n)}^p = \int_0^1 \dots \int_0^1 \int_T |f(z)|^p \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^{\alpha_j} d(z_j) d\zeta < +\infty, \quad 0 < p < +\infty, \quad \alpha_j > -1;$$

$$\|f\|_{A_\alpha^p(\tilde{U}^n)}^p = \int_{T^n} \int_0^1 |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha d(z) d\vec{\zeta} < +\infty, \quad 0 < p < +\infty, \quad \alpha > -1.$$

Имеем

$$\text{Trace}(A_\beta^p(\tilde{U}^n)) = A_{\beta+n-1}^p(U),$$

при $p \leq 1$, $\beta > -1$ и при $p > 1$, $\beta > \beta_0 = \beta_0(n, p)$;

$$\text{Trace}(A_\beta^p(U_*^n)) = A_{|\beta|+n-1}^p(U), \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \quad |\beta| = \sum_{k=1}^n \beta_k,$$

при $p \leq 1$, $\beta_k > -1$, $k = 1, \dots, n$, и при $p > 1$, $\beta > \beta_0 = \beta_0(n, p)$.

Следы на $(z, \dots, z)$ аналитических пространств со следующими квазинормами также можно увидеть в [45].

Интересно найти расширения для трубчатых и ограниченных сильно псевдовыпуклых областей

$$\Lambda_\alpha(U_*^n) = \left\{ f \in H(U^n) : \sup_{\zeta \in T, r_j \in (0,1)} |f(r_1\zeta, \dots, r_n\zeta)| \prod_{j=1}^n (1-r_j)^\alpha < +\infty \right\},$$

где $\alpha \geq 0$, $j = 1, \dots, n$;

$$\tilde{\Lambda}_\alpha(\tilde{U}^n) = \left\{ f \in H(U^n) : \sup_{\zeta_j \in T, r \in (0,1)} |f(r\zeta_1, \dots, r\zeta_n)| (1-r)^\alpha < +\infty \right\},$$

где $\alpha \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим, например, аналитические пространства T_Ω для $\alpha \geq 0$:

$$\sup_{\zeta_j \in T, r \in (0,1)} |f(r\zeta_1, \dots, r\zeta_n)| (1-r)^\alpha < +\infty.$$

Задача состоит в том, чтобы найти следы этого и подобных пространств в T_Ω .

Подобный вопрос может быть задан и в ограниченной псевдовыпуклой области.

Гораздо более сложной задачей является предоставление полного описания следов различных аналитических функциональных пространств в очень сложных областях, а именно в трубчатых над симметричными конусами и в ограниченных сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$.

Ниже мы дадим конкретные аналитические пространства, указывающие на то, что поиск следов всех этих аналитических пространств является открытой, интересной и, вероятно, сложной задачей.

Приведем некоторые квазинормы аналитических пространств со смешанной нормой в обеих областях и аналитических пространств типа Харди в обеих областях в $\mathbb{C}^n$.

Следует отметить, что пространства смешанного типа можно также рассматривать в T_Ω^m или D^m , $m \geq 1$, например, следующего типа: $\left\| \| \|f\|_{X_1} \|_{X_2} \dots \|_{X_m} \right\|$, где $(X_j) = (A_{\alpha_j}^{p_j})(T_\Omega)$, или $H^{p_j}(T_\Omega)$, $j = 1, \dots, m$, или $(X_j) = (A_{\alpha_j}^{p_j})(D)$, или $H^{p_j}(D)$, $j = 1, \dots, m$, — нахождение оценок следов этих аналитических пространств является открытой проблемой.

Для $1 \leq p < +\infty$ пространство Харди $H^p(T_\Omega)$ — это пространство голоморфных функций в T_Ω , удовлетворяющих оценке

$$\|F\|_{H^p} = \sup_{y \in \Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x + iy)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В $T_\Omega^m = T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$ можно определить $H^p(T_\Omega^m)$ двумя способами с использованием квазинорм, основанных на квазинормах в T_Ω :

$$\sup_{y \in \Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x + iy)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\sup_{y_j \in \Omega_j, j=1, \dots, m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} |F(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)|^p d\vec{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$\sup_{y_m \in \Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \dots \sup_{y_1 \in \Omega} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)|^p dx_1 \dots dx_m,$$

а затем рассмотреть следы квазинорм такого типа для всех значений $1 < p < +\infty$.

Эта проблема является открытой в ограниченных псевдовыпуклых областях с гладкой границей. Рассмотрим квазинормированные пространства функций $\left\| \| \|f\|_{X_1} \|_{X_2} \dots \|_{X_m} \right\|$, где (X_j) —

пространство функций (аналитических) с одной из следующих квазинорм в областях D :

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \int_0^{r_0} \left(r^\delta \left(\int_{\partial D_r} |\mathcal{D}^\alpha f|^p d\sigma_r \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 0 < q \leq +\infty, \quad 0 < p < +\infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$D_r = \{z \in D : \rho(z) > r\}$, $\delta > 0$, $d\sigma_r$ — нормированная мера поверхности на ∂D_r , $\mathcal{D}^\alpha$ — дробная производная f , или

$$\sup_{0 < r < r_0} \sum_{|\alpha| \leq k} \left(r^\delta \int_{\partial D_r} |\mathcal{D}^\alpha f|^p d\sigma_r \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < +\infty, \quad \delta > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\sup_{z \in D} |f(z)| \rho^\delta(z) < +\infty$, $\delta \geq 0$, $\text{dist}(z, \partial D) \asymp \rho(z)$,

$$\left(\int_D |f(z)|^p \rho^\delta(z) dv(z) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < +\infty, \quad \delta > -1,$$

$$\left(\int_0^{r_0} \left(\sup_{\partial D_r} |f|^p \right) r^{\delta p - 1} dr \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < +\infty, \quad \delta > 0,$$

$$H^p(D_\varepsilon) = \left\{ f \in H(D) : \sup_{\varepsilon > 0} \left(\int_{\partial D_\varepsilon} |f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon^\alpha < +\infty, \quad \alpha \geq 0, \quad 0 < p < +\infty \right\},$$

где $\partial D_\varepsilon = \{z \in D : \rho(z) = \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, $d\sigma$ — нормированная мера поверхности на ∂D_ε .

Пусть $B(z, r)$ — шар Кобаяси в D , $z \in D$, $r > 0$. Также можно рассмотреть квазинормы типа Герца на D :

$$\int_D \left(\int_{B(z, r)} |f(w)|^p \delta^\alpha(w) dv(w) \right)^{\frac{p}{q}} dv(z), \quad 0 < p < +\infty, \quad \alpha > -1,$$

$$\sum_{k \geq 0} \left(\int_{B(a_k, r)} |f(w)|^q \delta^\alpha(w) dv(w) \right)^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < p, \quad q < +\infty, \quad \alpha > -1,$$

где $\{a_k\}$ — известная r -решетка в D (см. [27, 38, 41]). Все эти многочисленные проблемы, касающиеся оценок следов этих аналитических функций в $T_\Omega^m = T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$ или $D \times \dots \times D$, остаются открытыми.

Также укажем на некоторые недавние точные результаты, касающиеся следов аналитических функциональных пространств типа ВМОА и пространств Герца и типа Блоха в трубчатых, псевдовыпуклых областях и в единичном шаре. Ниже рассмотрим некоторые открытые проблемы в этом направлении.

Следует отметить, что некоторые результаты о следах аналитических функциональных пространств области типа Неванлинны в полидиске можно найти в работах [4, 7, 18] (см. также множество ссылок в этих работах).

Определим банахово пространство Блоха

$$\Lambda(r_1, \dots, r_k) = \left\{ f \in H(B^m) : \right. \\ \left. \|f\|_{\Lambda(r_1, \dots, r_k)} = \sup_{z_1, \dots, z_k \in B} |f(z_1, \dots, z_k)| \prod_{j=1}^n \left(1 - |z_j|^2 \right)^{r_j} < +\infty, \quad r_j > 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad k \geq 1 \right\}.$$

Теорема 5.4. Пусть $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, $r = \sum_{j=1}^m r_j$. Тогда $\text{Trace}(\Lambda(r_1, \dots, r_m)) = \Lambda(r)$.

Пусть также

$$\Lambda_{\ln}(r_1, \dots, r_k) = \left\{ f \in H(B^m) : \|f\|_{\Lambda(r_1, \dots, r_k)} = \sup_{z_j \in B} |f(\bar{z})| \prod_{j=1}^n \ln \left(\frac{1}{1 - |z_j|} \right)^{-\frac{1}{r_j}} < +\infty \right\},$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{r_j} = 1, \quad r_j > 0.$$

Тогда имеем

$$\text{Trace}(\Lambda_{\ln}(r_1, \dots, r_m)) = \left\{ f \in H(B) : \sup_{z \in B} |f(z)| \left(\ln \frac{1}{1 - |z|} \right)^{-1} (1 - |z|) < +\infty \right\}.$$

Будет интересно найти полные аналоги этих результатов в трубчатых, псевдовыпуклых областях.

Мы приводим данные о следах пространств типа ВМОА в шарообразной, псевдовыпуклой и трубчатой областях; аналогичные результаты можно найти в [54, 56] для $E(0) = B$, $a \in B \setminus \{0\}$, $E(a) = \left\{ z \in B : \left| 1 - \left\langle z, \frac{a}{|a|} \right\rangle \right| < 1 - |a| \right\}$.

Пусть $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$, μ — положительная мера Бореля на $B \times \dots \times B$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, k$, μ — ограниченная мера Карлесона $(r_1, \dots, r_k)$, если

$$\sup \frac{\mu(E(a_1) \times \dots \times E(a_k))}{\prod_{j=1}^k (1 - |a_j|)^{r_j}} < +\infty, \quad a_j \in B, \quad j = 1, \dots, k.$$

Пусть $0 < p < +\infty$, $s_1, \dots, s_k > -1$, $r_1, \dots, r_k > 0$, $M_{r_1, \dots, r_k}(B^k; d\nu_{s_1}, \dots, d\nu_{s_m})$ — пространство измеримых функций на B^k , где $\mu_f = |f|^p \prod_{j=1}^k d\nu_{s_j}$ — ограниченная мера Карлесона $(r_1, \dots, r_m)$ с

$$\sup \frac{\mu_f(E(a_1), \dots, E(a_m))}{\prod_{j=1}^k (1 - |a_j|)^{r_j}}, \quad a_j \in B, \quad j = 1, \dots, k.$$

Теорема 5.5. Пусть $t = (m - 1)(n + 1) + \sum_{j=1}^m s_j$.

Тогда $\text{Trace}(H(B^m) \cap M_{r_1, \dots, r_m}^p(B^m; d\nu_{s_1}, \dots, d\nu_{s_m})) = H(B) \cap M_r^p(B; d\nu_t)$, $0 < p < +\infty$, $s_j > -1$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, $r = \sum_{j=1}^m r_j$, $r_j < n + 1 + s_j$, $j = 1, \dots, m$.

Некоторые описания (или оценки) следов аналитических пространств (M_α^p) , $(K_{\alpha, \beta}^{p, q})$, $(D_{\alpha, \beta}^p)$ и связанных с ними пространств:

$$(M_\alpha^p) = \left\{ f \in H(B^m) : \int_S \int_{\Gamma_t(\zeta)} \dots \int_{\Gamma_t(\zeta)} |f(z)|^p d\nu_\alpha(z) d\sigma(\zeta) < +\infty \right\},$$

где $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$;

$$(K_{\alpha, \beta}^{p, q}) = \left\{ f \in H(B^m) : \int_B \dots \int_B \left(\int_{D(z_1, r)} \dots \int_{D(z_m, r)} |f(z)|^p d\nu_\alpha(z) \right)^{\frac{q}{p}} d\nu_\beta(z) < +\infty \right\},$$

где $0 < p, q < +\infty$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$;

$$(D_{\alpha, \beta}^p) = \left\{ f \in H(B^m) : \int_0^1 (1 - r)^\beta \left(\int_{|z_1| < r} \dots \int_{|z_m| < r} |f(z)|^p \prod_{j=1}^m (1 - |z_j|)^{\alpha_j} d\nu(z_j) \right) dr < +\infty \right\},$$

где $0 < p < +\infty$, $\beta > -1$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

Многие связанные и (или) очень близкие к этим теоремам о следах интересные результаты и проблемы рассматривались различными авторами в последние десятилетия в разных аналитических пространствах в различных областях в $\mathbb{C}^n$. Упомянем, например, работы [8, 9, 15, 22, 73].

В данной обзорной статье мы не будем обсуждать эти проблемы или проблемы такого типа, отсылая авторов к упомянутым статьям.

Практически во всех доказательствах различных теорем о следе очень важны различные теоремы типа проекции Бергмана, и мы отсылаем заинтересованных читателей к работам [42, 66–68] для ознакомления с различными новыми результатами в этом направлении.

Представленные в этой статье точные результаты о следах в гармонических и аналитических функциональных пространствах нескольких переменных были недавно распространены на различные пространства плюригармонических функций нескольких переменных типа Бергмана. Для ознакомления с этими результатами мы отсылаем читателя к работе [57].

В заключение мы хотели бы отослать читателя к работам [35, 36, 60–65], где представлены многочисленные новые результаты первого автора и его соавторов для вложений в аналитические пространства типа Бергмана и для проекций Бергмана в трубчатых областях над конусами и в ограниченных сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей, которые в будущем могут быть применены различными способами или использованы для получения доказательств новых теорем о следе в различных аналитических функциональных пространствах в таких сложных областях в $\mathbb{C}^n$.

Мы отсылаем читателя к работам [2, 17] и многочисленным ссылкам в них, где приводятся некоторые старые интересные результаты, тесно связанные с нашими теоремами о следе.

Вероятно, различные вложения для аналитических пространств Q_p из работы [72] могут быть использованы в доказательствах теорем о следе для пространств такого типа в единичном диске и полидиске.

Мы отсылаем читателя к работе [28] и многочисленным ссылкам в ней, где приводятся новые результаты о точных следах в простых полидисковых пространствах в смешанных нормах.

Некоторые вложения из работы [21] можно использовать для доказательства теорем о следах в различных пространствах типа Харди на полидиске.

Многие вложения из работы [74] могут быть обобщены на ограниченные сильно псевдовыпуклые области с гладкой границей, а затем использованы для получения теорем о следе в различных аналитических пространствах в таких областях; мы предлагаем это в качестве задачи для заинтересованных читателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
2. Хенкин Г. М. Продолжение ограниченных голоморфных функций с одномообразий общего положения в строго псевдовыпуклой области // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1972. — 36, № 3. — С. 540–567.
3. Часова Н. А. Интегральные представления, двойственность и теплицевы операторы в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций со смешанной нормой // Дисс. к.ф.-м.н. — СПб: РГПУ им. А. И. Герцена, 2003.
4. Шамоян Р. Ф. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Докл. АН АрмССР. — 1987. — 85, № 1. — С. 7–11.
5. Шамоян Р. Ф. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. ж. — 1990. — 31, № 2. — С. 197–215.
6. Шамоян Р. Ф. Характеризации типа ВМО, диагональное отображение и ограниченность интегральных операторов в некоторых пространствах аналитических функций // Владикавказ. мат. ж. — 2007. — 9, № 2. — С. 40–53.
7. Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1985. — 23. — С. 3–124.
8. Alexander H. Extending bounded holomorphic function from certain subvarieties of a polydisk // Pacific J. Math. — 1969. — 3. — С. 485–490. — DOI: [10.2140/pjm.1969.29.485](https://doi.org/10.2140/pjm.1969.29.485).
9. Amar E. Extentsion de fonctions holomorphic avec estimation // Ark. Mat. — 1979. — 17, № 1. — С. 123–139. — DOI: [10.1007/BF02385462](https://doi.org/10.1007/BF02385462).

10. Amar E., Menini C. A counter example to corona problem for operators on Hardy H^2 space in the polydisk // Pacific J. Math. — 2002. — 206, № 2. — С. 21–29. — DOI: [10.2140/pjm.2002.206.257](https://doi.org/10.2140/pjm.2002.206.257).
11. Arsenovic M., Shamoyan R. Trace theorems in harmonic function spaces on $(R_+^{n+1})^m$, multipliers theorems and related problems // Kragujevac J. Math. — 2011. — 35, № 3. — С. 411–430.
12. Arsenovic M., Shamoyan R. On embeddings, traces and multipliers in harmonic function spaces // Kragujevac J. Math. — 2013. — 37, № 1. — С. 45–64.
13. Bekolle D., Berger C., Coburn L., Zhu K. BMO in the Bergman metric on bounded symmetric domains // J. Funct. Anal. — 1990. — 93, № 2. — С. 310–350. — DOI: [10.1016/0022-1236\(90\)90131-4](https://doi.org/10.1016/0022-1236(90)90131-4).
14. Bekolle D., Bonami A., Garrigos G., Nana C., Peloso M. M., Ricci F. Lecture notes on Bergman projectors in tube domains over cones: an analytic and geometric viewpoint // IMHOTEP J. Afr. Math. Pures Appl. — 2004. — 5, № 1. — С. 1–75.
15. Cima J., Graham I. R. On the extention of holomorphic function with growth condition across analytic subvarieties // Michigan Math. J. — 1981. — 28. — С. 241–256. — DOI: [10.1307/mmj/1029002513](https://doi.org/10.1307/mmj/1029002513).
16. Clark D. Restrictions of H^p spaces in the polydisk // Amer. J. Math. — 1988. — 110, № 6. — С. 1119–1152. — DOI: [10.2307/2374688](https://doi.org/10.2307/2374688).
17. Cumenge A. Extensions dans les classes de Hardy de fonctions holomorphes et estimations de type mesures de Carleson // Ann. Inst. Fourier. — 1983. — 3, № 33. — С. 59–87. — DOI: [10.5802/aif.931](https://doi.org/10.5802/aif.931).
18. Djrbashian A. E., Shamoyan F. A. Topics in the Theory of A_α^p Spaces. — Leipzig: Teubner, 1988.
19. Duren P., Shields A. Restrictions H^p functions to the diagonal of the polydisc // Duke Math. J. — 1975. — 42, № 4. — С. 567–579. — DOI: [10.1215/S0012-7094-75-04262-3](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-75-04262-3).
20. Faraut J., Koranyi A. Analysis on Symmetric Cones. — Oxford: Clarendon Press, 1994. — DOI: [10.1093/oso/9780198534778.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198534778.001.0001).
21. Frezzer A. The dual space of H^p of polydisk for $0 < p < 1$ // Duke Math. J. — 1972. — 39. — С. 369–379. — DOI: [10.1215/S0012-7094-72-03944-0](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-72-03944-0).
22. Henkin G., Polyakov P. Prolongement des fonctions holomorphes bornées d'une sousvariété du polydisque // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1984. — 298. — С. 221–224.
23. Horowitz C., Oberlin D. Restriction of H^p functions to the diagonal of U^n // Indiana Univ. Math. J. — 1976. — 24, № 7. — С. 767–772. — DOI: [10.1512/iumj.1975.24.24060](https://doi.org/10.1512/iumj.1975.24.24060).
24. Jevtic M., Pavlovic M., Shamoyan R. A note on diagonal mapping theorem in spaces of analytic functions in the polydisk // Publ. Math. Debrecen. — 2009. — 74, № 1-2. — С. 1–14. — DOI: [10.5486/PMD.2009.4242](https://doi.org/10.5486/PMD.2009.4242).
25. Mazya V. Sobolev Spaces. — New York: Springer, 1985.
26. Moulin B., Rosay J.-P. Sur la restriction des fonctions plurisousharmoniques a la diagonale du polydisque // Indiana Univ. Math. J. — 1977. — 26, № 5. — С. 869–879. — DOI: [10.1512/iumj.1977.26.26069](https://doi.org/10.1512/iumj.1977.26.26069).
27. Ortega J., Fabrega J. Mixed-norm spaces and interpolation // Studia Math. — 1994. — 109, № 3. — С. 234–254.
28. Ren G., Shi J. The diagonal mapping in mixed norm spaces // Studia Math. — 2004. — 163, № 2. — С. 103–117. — DOI: [10.4064/sm163-2-1](https://doi.org/10.4064/sm163-2-1).
29. Rudin W. Function Theory in Polydisk. — New York: Benjamin, 1969.
30. Sehba B. F. Hankel operators on Bergman spaces of tube domains over symmetric cones // Integral Equ. Operator Theory. — 2008. — 62, № 2. — С. 233–245. — DOI: [10.1007/s00020-008-1620-7](https://doi.org/10.1007/s00020-008-1620-7).
31. Sehba B. F. Bergman type operators in tube domains over symmetric cones // Proc. Edinb. Math. Soc. — 2009. — 52, № 2. — С. 529–544. — DOI: [10.1017/S0013091506001593](https://doi.org/10.1017/S0013091506001593).
32. Shamoyan R. On some problems connected with diagonal map in some spaces of analytic functions // Math. Bohemica. — 2008. — 133, № 4. — С. 351–366. — DOI: [10.21136/MB.2008.140625](https://doi.org/10.21136/MB.2008.140625).
33. Shamoyan R. Some remarks on the operator of diagonal map and on multifunctional analytic spaces // Вестн. ЧелГУ. Мат. Мех. Инф. — 2008. — 10. — С. 19–24.
34. Shamoyan R. The diagonal mapping in BMOA-type spaces of analytic functions on the polydisk // Georgian Math. J. — 2009. — 16, № 3. — С. 561–574. — DOI: [10.1515/GMJ.2009.561](https://doi.org/10.1515/GMJ.2009.561).
35. Shamoyan R. F. On Bergman-type spaces in tubular domains over symmetric cones // Дагестан. электрон. мат. изв. — 2020. — 14. — С. 22–29. — DOI: [10.31029/demr.14.2](https://doi.org/10.31029/demr.14.2).
36. Shamoyan R. F., Kurilenko S. M. On a new embedding theorem in analytic Bergman type spaces in bounded strictly pseudoconvex domains of n -dimensional complex space // Журн. СВУ. Сер. Мат. и физ. — 2014. — 7, № 3. — С. 383–388.
37. Shamoyan R., Kurilenko S. On traces in analytic function spaces in polyballs // Palestine J. Math. — 2015. — 4, № 2. — С. 291–293. — DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
38. Shamoyan R., Kurilenko S. On traces of analytic Herz and Bloch type spaces in bounded strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$ // Probl. Anal. Issues Anal. — 2015. — 4, № 1. — С. 73–94. — DOI: [10.15393/j3.art.2015.2669](https://doi.org/10.15393/j3.art.2015.2669).

39. *Shamoyan R., Kurilenko S.* Traces and distances in analytic Function spaces in C^n and Martinelly–Bochner integrals // Чебышев. сб. — 2015. — 16, № 2. — С. 254–272. — DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
40. *Shamoyan R., Kurilenko S.* On a trace operator in Bergman type analytic spaces in Siegel domains of the second type // Пробл. физ., мат. и техн. — 2015. — 2. — С. 83–90.
41. *Shamoyan R. F., Kurilenko S. M.* On traces in Hardy type analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains and in tubular domains over symmetric cones // Журн. СФУ. Сер. Мат. и физ. — 2016. — 9, № 4. — С. 510–517. — DOI: [10.17516/1997-1397-2016-9-4-510-517](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-4-510-517).
42. *Shamoyan R. F., Makhina N. M.* On Bergman type projections in bounded strongly pseudoconvex domains and tubular domains over symmetric cones // Math. Montisnigri. — 2024. — 60. — С. 50–57. — DOI: [10.20948/mathmontis-2024-60-4](https://doi.org/10.20948/mathmontis-2024-60-4).
43. *Shamoyan R., Makhina N.* Restrictions of analytic function spaces in the polydisk and related domains. Topical review // Math. Montisnigri. — 2025. — 62. — С. 5–20. — <https://www.montis.pmf.ac.me/allissues/62/Mathematica-Montisnigri-62-1.pdf>.
44. *Shamoyan R., Mihic O.* In search of traces of some holomorphic spaces in polyballs // Revista Notas Mat. — 2008. — 4, № 1. — С. 1–23.
45. *Shamoyan R., Mihic O.* Analytic classes on subframe and expanded disk and the R_s differential operator in polydisk // J. Inequal. Appl. — 2009. — 2009. — 353801. — DOI: [10.1155/2009/353801](https://doi.org/10.1155/2009/353801).
46. *Shamoyan R., Mihic O.* On traces of holomorphic functions on the unit polyball // Appl. Anal. Discrete Math. — 2009. — 3, № 2. — С. 198–211. — DOI: [10.2298/AADM0902198S](https://doi.org/10.2298/AADM0902198S).
47. *Shamoyan R., Mihic O.* A note on traces of some holomorphic functions classes on polyballs // J. Funct. Spaces Appl. — 2010. — 8, № 3. — С. 271–285. — DOI: [10.1155/2010/784896](https://doi.org/10.1155/2010/784896).
48. *Shamoyan R., Mihic O.* On some inequalities in holomorphic function theory related to diagonal mapping // Czechoslovak Math. J. — 2010. — 60, № 2. — С. 351–370. — DOI: [10.1007/s10587-010-0040-4](https://doi.org/10.1007/s10587-010-0040-4).
49. *Shamoyan R., Mihic O.* On traces of Q_p type spaces and mixed norm analytic function spaces in polyballs // Siauliai Math. Semin. — 2010. — 5, № 13. — С. 101–119.
50. *Shamoyan R., Mihic O.* On traces of analytic Q_p type spaces, mixed norm spaces and harmonic Bergman classes on certain polydomains // Filomat. — 2011. — 25, № 1. — С. 1–19. — DOI: [10.2298/FIL1101001S](https://doi.org/10.2298/FIL1101001S).
51. *Shamoyan R. F., Mihic O. R.* Sharp theorems on traces in analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains // Reports NAS RA. — 2014. — 114, № 2. — С. 91–96.
52. *Shamoyan R., Mihic O.* On traces in some analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains // J. Function Spaces. — 2015. — 2015. — 265245. — DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
53. *Shamoyan R., Mihic O.* Traces of Bergman spaces in pseudoconvex domains // Reports NAS RA. — 2015. — 8. — С. 56–62. — DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
54. *Shamoyan R., Mihic O.* On a sharp trace theorem in BMOA type spaces in pseudoconvex domains // C. R. Acad. Bulgare Sci. — 2017. — 70, № 2. — С. 161–166.
55. *Shamoyan R., Mihic O.* On some new sharp embedding theorems in strongly pseudoconvex and tubular domains involving the trace operator // Romai J. — 2019. — 15, № 1. — С. 95–116.
56. *Shamoyan R., Mihic O.* On traces of new BMOA type spaces in tubular domains over symmetric cones // Rep. Adyghe (Circassian) Int. Acad. Sci. — 2022. — 22, № 1. — С. 32–38. — DOI: [10.47928/1726-9946-2022-22-1-32-38](https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-1-32-38).
57. *Shamoyan R., Povprits E.* Multyfunctional analytic spaces in bounded strongly pseudoconvex domains and sharp embedding theorem // Kragujevac J. Math. — 2013. — 5. — С. 241–264.
58. *Shamoyan R., Povprits E.* Sharp theorems on traces in Bergman type spaces in tubular domains over symmetric cones // Журн. СФУ. Сер. Мат. и физ. — 2013. — 6, № 4. — С. 527–538.
59. *Shamoyan R., Povpritz E.* Trace theorems in unbounded Siegel domains // Uzbek. Math. J. — 2015. — № 1. — С. 149–157.
60. *Shamoyan R. F., Shipka A. N.* On some new projection theorems and sharp estimates in Herz type spaces in bounded pseudoconvex domains // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2018. — 1, № 21. — С. 64–77. — DOI: [10.18454/2079-6641-2018-21-1-64-77](https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-21-1-64-77).
61. *Shamoyan R. F., Tomashevskaya E. B.* On new decomposition theorems in some analytic function spaces in bounded pseudoconvex domains // Журн. СФУ. Сер. Мат. и физ. — 2020. — 13, № 4. — С. 503–514. — DOI: [10.17516/1997-1397-2020-13-4-503-514](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-4-503-514).
62. *Shamoyan R. F., Tomashevskaya E. B.* On some new decomposition theorems in multifunctional Herz and Bergman analytic function spaces in bounded pseudoconvex domains // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2020. — 30, № 1. — С. 42–58. — DOI: [10.26117/2079-6641-2020-30-1-42-58](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-30-1-42-58).
63. *Shamoyan R. F., Tomashevskaya E. B.* On new sharp theorems for multifunctional BMOA type spaces in bounded pseudoconvex domains // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2020. — 32, № 3. — С. 102–113. — DOI: [10.26117/2079-6641-2020-32-3-102-113](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-32-3-102-113).

64. *Shamoyan R. F., Tomashevskaya E. B.* On some new sharp embedding theorems for multifunctional Herz-type and Bergman-type spaces in tubular domains over symmetric cones // Rep. Adyghe (Circassian) Int. Acad. Sci. — 2021. — 21, № 3. — С. 21–33. — DOI: [10.47928/1726-9946-2021-21-3-21-33](https://doi.org/10.47928/1726-9946-2021-21-3-21-33).
65. *Shamoyan R. F., Tomashevskaya E. B.* On new sharp embedding theorems for multifunctional Herz-type and Bergman-type spaces in tubular domains over symmetric cones // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2021. — 34, № 1. — С. 63–79. — DOI: [10.26117/2079-6641-2021-34-1-63-79](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2021-34-1-63-79).
66. *Shamoyan R., Tomashevskaya E.* On Bergman type projections in bounded strongly pseudoconvex domains // Rep. Adyghe (Circassian) Int. Acad. Sci. — 2023. — 23, № 2. — С. 18–26. — DOI: [10.47928/1726-9946-2023-23-2-18-26](https://doi.org/10.47928/1726-9946-2023-23-2-18-26).
67. *Shamoyan R., Tomashevskaya E.* Some generalizations of the Bergman projection theorem in tubular and bounded pseudoconvex domains // Siberian Adv. Math. — 2024. — 34. — С. 356–365. — DOI: [10.1134/S1055134424040114](https://doi.org/10.1134/S1055134424040114).
68. *Shamoyan R., Tomashevskaya E.* On Bergman type projections in new analytic spaces in tubular domains over symmetric cones // Мат. заметки СВФУ. — 2024. — 31, № 3. — С. 73–81. — DOI: [10.25587/2411-9326-2024-3-73-81](https://doi.org/10.25587/2411-9326-2024-3-73-81).
69. *Shamoyan R., Zaytseva O.* On sharp traces of some new analytic Herz-type spaces in Siegel domains in $\mathbb{C}^n$ // Пробл. физ., мат. и техн. — 2015. — 4. — С. 87–95.
70. *Shapiro J.* Mackey topologies, reproducing kernels and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces // Duke Math. J. — 1976. — 43. — С. 187–202. — DOI: [10.1215/S0012-7094-76-04316-7](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-76-04316-7).
71. *Triebel H.* Theory of Function Spaces II. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1992. — DOI: [10.1007/978-3-0346-0419-2](https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0419-2).
72. *Xiao J.* Holomorphic Q^p classes. — Berlin: Springer, 2001. — DOI: [10.1007/b87877](https://doi.org/10.1007/b87877).
73. *Zarantonello S.* The extentions of H^p functions from certain subvarieties of a polydisk // Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — 78, № 4. — С. 519–524. — DOI: [10.1090/S0002-9939-1980-0556624-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1980-0556624-1).
74. *Zhu K.* Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball. — New York: Springer, 2005.

Р. Ф. Шамоян

Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского, Брянск, Россия

E-mail: rsham@mail.com, РИНЦ AuthorID: [118067](https://elibrary.ru/author_index.action?id=118067), Scopus: [6506006473](https://orcid.org/0000-0002-8415-9822),

ORCID: [0000-0002-8415-9822](https://orcid.org/0000-0002-8415-9822)

Н. М. Махина

Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского, Брянск, Россия

E-mail: makhina32@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 1045-4238, РИНЦ AuthorID: [165091](https://elibrary.ru/author_index.action?id=165091), Scopus: [57192714258](https://orcid.org/0000-0003-2270-1775), ORCID: [0000-0003-2270-1775](https://orcid.org/0000-0003-2270-1775)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194)
 EDN: [UJHLAF](#)

UDC 517.55
Review article

Exact restrictions of analytic function spaces of several variables

R. F. Shamoyan and N. M. Makhina

Bryansk State Academician I. G. Petrovski University, Bryansk, Russia

Abstract. In this expository paper, we collect many recent advances in analytic function spaces of several complex variables related with the trace problem in tubular domains over symmetric cones and bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary. We consider various function spaces of analytic functions of several variables in various domains in $\mathbb{C}^n$ and provide either complete descriptions of traces or estimates of traces of various analytic function spaces in various domains obtained in recent years, by various authors.

The problem to find sharp estimates of traces of Hardy analytic function spaces in the unit polydisk first was posed by W. Rudin in 1969. Since then many papers appeared. We collect in this expository paper not only already many known results on traces of various analytic function spaces in product domains but also discuss various new interesting results related with this problem. Related to the trace problem various results were provided previously by G. Henkin, E. Amar, H. Alexander and various other authors. Finally, note that our trace theorems are closely related with the Bergman type projections acting between function spaces with different dimensions.

This expository paper contains mainly new results concerning traces in tubular and bounded strongly pseudoconvex domains, proofs of these theorems are based in particular also on various properties of Bergman type projection. In this expository paper we will also shortly discuss some new results obtained by the first author on Bergman type projections in these complicated domains in $\mathbb{C}^n$. This is the second part of our notes related to the trace problem. In the first part, we provided a large list of recent sharp results on traces in the polydisk and polyball; it was published in [43]. In the last section of this expository paper, we collect many interesting remarks and put various open interesting questions for interested readers and also add various interesting short comments related with this problem of traces in various simple and complicated domains in $\mathbb{C}^n$ in various analytic function spaces of several variables. Some new results concerning traces in harmonic function spaces of several variables will be also added.

Keywords: Trace operator, Bergman and Hardy mixed norm spaces, Herz spaces, Bergman type projection, tube domains, pseudoconvex domains, analytic functions, sharp embedding theorems, harmonic functions, spaces of harmonic functions.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors' contribution. The review was written under the supervision of R. F. Shamoyan together with associate professor of BSU N. M. Makhinaya. The selection of material belongs to the first author, the second author made recommendations and comments on the text during the work and was also responsible for all technical issues related to the design of the article.

For citation: R. F. Shamoyan, N. M. Makhina, “Exact restrictions of analytic function spaces of several variables,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 165–194. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194) EDN: [UJHLAF](#)

REFERENCES

1. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representation of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).



2. G. M. Henkin, “Prodlzhenie ogranichennykh golomorfnykh funktsiy s odnogoobraziy obshchego polozheniya v strogo psevdovypukloy oblasti” [On extension of bounded holomorphic functions from subvarieties of bounded strongly pseudoconvex domains], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1972, **36**, No. 3, 540–567 (in Russian).
3. N. A. Chasova, “Integral’nye predstavleniya, dvoystvennost’ i teplitsevy operatory v vesovykh anizotropnykh prostranstvakh golomorfnykh v polikrugu funktsiy so smeshannoy normoy” [Integral representations, duality and Toeplitz operators in weighted anisotropic spaces of holomorphic functions in a polydisk with mixed norm], *PhD Thesis*, RGPU im. A. I. Gertsena, Saint Petersburg, 2003 (in Russian).
4. R. F. Shamoyan, “Diagonal’noe otobrazhenie i voprosy predstavleniya v anizotropnykh prostranstvakh golomorfnykh v polidiske funktsiy” [Diagonal mapping and some problems representation in anisotropic spaces of holomorphic in polydisc functions], *Dokl. AN ArmSSR* [Rep. Acad. Sci. ArmSSR], 1987, **85**, No. 1, 7–11 (in Russian).
5. R. F. Shamoyan, “Diagonal’noe otobrazhenie i voprosy predstavleniya v anizotropnykh prostranstvakh golomorfnykh v polidiske funktsiy” [Diagonal mapping and problems of representation in anisotropic spaces of holomorphic functions in the polydisk], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 1990, **31**, No. 2, 197–215 (in Russian).
6. R. F. Shamoyan, “Kharakterizatsii tipa VMO, diagonal’noe otobrazhenie i ogranichennost’ integral’nykh operatorov v nekotorykh prostranstvakh analiticheskikh funktsiy” [BMO-type characterizations and the diagonal mapping and boundedness of integral operators in some spaces of analytic functions], *Vladikavkaz. Mat. Zh.* [Vladikavkaz Math. J.], 2007, **9**, No. 2, 40–53 (in Russian).
7. S. V. Shvedenko, “Klassy Khardi i svyazannye s nimi prostranstva analiticheskikh funktsiy v edinichnom krugu, polikrugu i share” [Hardy classes and related spaces of analytic functions in the unit disk, polydisk and unit ball], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1985, **23**, 3–124 (in Russian).
8. H. Alexander, “Extending bounded holomorphic function from certain subvarieties of a polydisk,” *Pacific J. Math.*, 1969, **3**, 485–490, DOI: [10.2140/pjm.1969.29.485](https://doi.org/10.2140/pjm.1969.29.485).
9. E. Amar, “Extension de fonctions holomorphes avec estimation,” *Ark. Mat.*, 1979, **17**, No. 1, 123–139, DOI: [10.1007/BF02385462](https://doi.org/10.1007/BF02385462).
10. E. Amar and C. Menini, “A counter example to corona problem for operators on Hardy H^2 space in the polydisk,” *Pacific J. Math.*, 2002, **206**, No. 2, 21–29, DOI: [10.2140/pjm.2002.206.257](https://doi.org/10.2140/pjm.2002.206.257).
11. M. Arsenovic and R. Shamoyan, “Trace theorems in harmonic function spaces on $(\mathbb{R}_+^{n+1})^m$, multipliers theorems and related problems,” *Kragujevac J. Math.*, 2011, **35**, No. 3, 411–430.
12. M. Arsenovic and R. Shamoyan, “On embeddings, traces and multipliers in harmonic function spaces,” *Kragujevac J. Math.*, 2013, **37**, No. 1, 45–64.
13. D. Bekolle, C. Berger, L. Coburn, and K. Zhu, “BMO in the Bergman metric on bounded symmetric domains,” *J. Funct. Anal.*, 1990, **93**, No. 2, 310–350, DOI: [10.1016/0022-1236\(90\)90131-4](https://doi.org/10.1016/0022-1236(90)90131-4).
14. D. Bekolle, A. Bonami, G. Garrigos, C. Nana, M. M. Peloso, F. Ricci, “Lecture notes on Bergman projectors in tube domains over cones: an analytic and geometric viewpoint,” *IMHOTEJ. Afr. Math. Pures Appl.*, 2004, **5**, No. 1, 1–75.
15. J. Cima and I. R. Graham, “On the extension of holomorphic function with growth condition across analytic subvarieties,” *Michigan Math. J.*, 1981, **28**, 241–256, DOI: [10.1307/mmj/1029002513](https://doi.org/10.1307/mmj/1029002513).
16. D. Clark, “Restrictions of H^p spaces in the polydisk,” *Amer. J. Math.*, 1988, **110**, No. 6, 1119–1152, DOI: [10.2307/2374688](https://doi.org/10.2307/2374688).
17. A. Cumenge, “Extension dans les classes de Hardy de fonctions holomorphes et estimations de type mesures de Carleson,” *Ann. Inst. Fourier*, 1983, **3**, No. 33, 59–87, DOI: [10.5802/aif.931](https://doi.org/10.5802/aif.931).
18. A. E. Djrbashian and F. A. Shamoyan, *Topics in the Theory of A_α^p Spaces*, Teubner, Leipzig, 1988.
19. P. Duren and A. Shields, “Restrictions H^p functions to the diagonal of the polydisc,” *Duke Math. J.*, 1975, **42**, No. 4, 567–579, DOI: [10.1215/S0012-7094-75-04262-3](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-75-04262-3).
20. J. Faraut and A. Koranyi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994, DOI: [10.1093/oso/9780198534778.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198534778.001.0001).
21. A. Frezier, “The dual space of H^p of polydisk for $0 < p < 1$,” *Duke Math. J.*, 1972, **39**, 369–379, DOI: [10.1215/S0012-7094-72-03944-0](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-72-03944-0).
22. G. Henkin and P. Polyakov, “Prolongement des fonctions holomorphes bornées d’une sousvariété du polydisque,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1984, **298**, 221–224.
23. C. Horowitz and D. Oberlin, “Restriction of H^p functions to the diagonal of U^n ,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1976, **24**, No. 7, 767–772, DOI: [10.1512/iumj.1975.24.24060](https://doi.org/10.1512/iumj.1975.24.24060).
24. M. Jevtic, M. Pavlovic, and R. Shamoyan, “A note on diagonal mapping theorem in spaces of analytic functions in the polydisk,” *Publ. Math. Debrecen.*, 2009, **74**, No. 1–2, 1–14, DOI: [10.5486/PMD.2009.4242](https://doi.org/10.5486/PMD.2009.4242).

25. V. Mazya, *Sobolev Spaces*, Springer, New York, 1985.
26. B. Moulin and J.-P. Rosay, “Sur la restriction des fonctions plurisousharmoniques a la diagonale du polydisque,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1977, **26**, No. 5, 869–879, DOI: [10.1512/iumj.1977.26.26069](https://doi.org/10.1512/iumj.1977.26.26069).
27. J. Ortega and J. Fabrega, “Mixed-norm spaces and interpolation,” *Studia Math.*, 1994, **109**, No. 3, 234–254.
28. G. Ren and J. Shi, “The diagonal mapping in mixed norm spaces,” *Studia Math.*, 2004, **163**, No. 2, 103–117, DOI: [10.4064/sm163-2-1](https://doi.org/10.4064/sm163-2-1).
29. W. Rudin, *Function Theory in Polydisk*, Benjamin, New York, 1969.
30. B. F. Sehba, “Hankel operators on Bergman spaces of tube domains over symmetric cones,” *Integral Equ. Operator Theory*, 2008, **62**, No. 2, 233–245, DOI: [10.1007/s00020-008-1620-7](https://doi.org/10.1007/s00020-008-1620-7).
31. B. F. Sehba, “Bergman type operators in tube domains over symmetric cones,” *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 2009, **52**, No. 2, 529–544, DOI: [10.1017/S0013091506001593](https://doi.org/10.1017/S0013091506001593).
32. R. Shamoyan, “On some problems connected with diagonal map in some spaces of analytic functions,” *Math. Bohemica*, 2008, **133**, No. 4, 351–366, DOI: [10.21136/MB.2008.140625](https://doi.org/10.21136/MB.2008.140625).
33. R. Shamoyan, “Some remarks on the operator of diagonal map and on multifunctional analytic spaces,” *Vestn. ChelGU. Mat. Mekh. Inf.*, 2008, **10**, 19–24.
34. R. Shamoyan, “The diagonal mapping in BMOA-type spaces of analytic functions on the polydisk,” *Georgian Math. J.*, 2009, **16**, No. 3, 561–574, DOI: [10.1515/GMJ.2009.561](https://doi.org/10.1515/GMJ.2009.561).
35. R. F. Shamoyan, “On Bergman-type spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Dagestan. Elektron. Mat. Izv.*, 2020, **14**, 22–29, DOI: [10.31029/demr.14.2](https://doi.org/10.31029/demr.14.2).
36. R. F. Shamoyan and S. M. Kurilenko, “On a new embedding theorem in analytic Bergman type spaces in bounded strictly pseudoconvex domains of n -dimensional complex space,” *Zhurn. SFU. Ser. Mat. i Fiz.*, 2014, **7**, No. 3, 383–388.
37. R. Shamoyan and S. Kurilenko, “On traces in analytic function spaces in polyballs,” *Palestine J. Math.*, 2015, **4**, No. 2, 291–293, DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
38. R. Shamoyan and S. Kurilenko, “On traces of analytic Herz and Bloch type spaces in bounded strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$,” *Probl. Anal. Issues Anal.*, 2015, **4**, No. 1, 73–94, DOI: [10.15393/j3.art.2015.2669](https://doi.org/10.15393/j3.art.2015.2669).
39. R. Shamoyan and S. Kurilenko, “Traces and distances in analytic Function spaces in C^n and Martinelly–Bochner integrals,” *Chebyshev. Sb.*, 2015, **16**, No. 2, 254–272, DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
40. R. Shamoyan and S. Kurilenko, “On a trace operator in Bergman type analytic spaces in Siegel domains of the second type,” *Probl. Fiz., Mat. i Tekhn.*, 2015, **2**, 83–90.
41. R. F. Shamoyan and S. M. Kurilenko, “On traces in Hardy type analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains and in tubular domains over symmetric cones,” *Zhurn. SFU. Ser. Mat. i Fiz.*, 2016, **9**, No. 4, 510–517, DOI: [10.17516/1997-1397-2016-9-4-510-517](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-4-510-517).
42. R. F. Shamoyan and N. M. Makhina, “On Bergman type projections in bounded strongly pseudoconvex domains and tubular domains over symmetric cones,” *Math. Montisnigri*, 2024, **60**, 50–57, DOI: [10.20948/mathmontis-2024-60-4](https://doi.org/10.20948/mathmontis-2024-60-4).
43. R. Shamoyan and N. Makhina, “Restrictions of analytic function spaces in the polydisk and related domains. Topical review,” *Math. Montisnigri*, 2025, **62**, 5–20. — <https://www.montis.pmf.ac.me/allissues/62/Mathematica-Montisnigri-62-1.pdf>.
44. R. Shamoyan and O. Mihic, “In search of traces of some holomorphic spaces in polyballs,” *Revista Notas Mat.*, 2008, **4**, No. 1, 1–23.
45. R. Shamoyan and O. Mihic, “Analytic classes on subframe and expanded disk and the R_s differential operator in polydisk,” *J. Inequal. Appl.*, 2009, **2009**, 353801, DOI: [10.1155/2009/353801](https://doi.org/10.1155/2009/353801).
46. R. Shamoyan and O. Mihic, “On traces of holomorphic functions on the unit polyball,” *Appl. Anal. Discrete Math.*, 2009, **3**, No. 2, 198–211, DOI: [10.2298/AADM0902198S](https://doi.org/10.2298/AADM0902198S).
47. R. Shamoyan and O. Mihic, “A note on traces of some holomorphic functions classes on polyballs,” *J. Funct. Spaces Appl.*, 2010, **8**, No. 3, 271–285, DOI: [10.1155/2010/784896](https://doi.org/10.1155/2010/784896).
48. R. Shamoyan and O. Mihic, “On some inequalities in holomorphic function theory related to diagonal mapping,” *Czechoslovak Math. J.*, 2010, **60**, No. 2, 351–370, DOI: [10.1007/s10587-010-0040-4](https://doi.org/10.1007/s10587-010-0040-4).
49. R. Shamoyan and O. Mihic, “On traces of Q_p type spaces and mixed norm analytic function spaces in polyballs,” *Siauliau Math. Semin.*, 2010, **5**, No. 13, 101–119.
50. R. Shamoyan and O. Mihic, “On traces of analytic Q_p type spaces, mixed norm spaces and harmonic Bergman classes on certain polydomains,” *Filomat*, 2011, **25**, No. 1, 1–19, DOI: [10.2298/FIL1101001S](https://doi.org/10.2298/FIL1101001S).
51. R. F. Shamoyan and O. R. Mihic, “Sharp theorems on traces in analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains,” *Reports NAS RA*, 2014, **114**, No. 2, 91–96.
52. R. Shamoyan and O. Mihic, “On traces in some analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains,” *J. Function Spaces*, 2015, **2015**, 265245, DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).

53. R. Shamoyan and O. Mihic, “Traces of Bergman spaces in pseudoconvex domains,” *Reports NAS RA*, 2015, **8**, 56–62, DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
54. R. Shamoyan and O. Mihic, “On a sharp trace theorem in BMOA type spaces in pseudoconvex domains,” *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 2017, **70**, No. 2, 161–166.
55. R. Shamoyan and O. Mihic, “On some new sharp embedding theorems in strongly pseudoconvex and tubular domains involving the trace operator,” *Roma J.*, 2019, **15**, No. 1, 95–116.
56. R. Shamoyan and O. Mihic, “On traces of new BMOA type spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Rep. Adyghe (Circassian) Int. Acad. Sci.*, 2022, **22**, No. 1, 32–38, DOI: [10.47928/1726-9946-2022-22-1-32-38](https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-1-32-38).
57. R. Shamoyan and E. Povprits, “Multifunctional analytic spaces in bounded strongly pseudoconvex domains and sharp embedding theorem,” *Kragujevac J. Math.*, 2013, **5**, 241–264.
58. R. Shamoyan and E. Povprits, “Sharp theorems on traces in Bergman type spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Zhurn. SFU. Ser. Mat. i Fiz.*, 2013, **6**, No. 4, 527–538.
59. R. Shamoyan and E. Povpritz, “Trace theorems in unbounded Siegel domains,” *Uzbek. Math. J.*, 2015, No. 1, 149–157.
60. R. F. Shamoyan and A. N. Shipka, “On some new projection theorems and sharp estimates in Herz type spaces in bounded pseudoconvex domains,” *Vestn. KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018, **1**, No. 21, 64–77, DOI: [10.18454/2079-6641-2018-21-1-64-77](https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-21-1-64-77).
61. R. F. Shamoyan and E. B. Tomashevskaya, “On new decomposition theorems in some analytic function spaces in bounded pseudoconvex domains,” *Zhurn. SFU. Ser. Mat. i Fiz.*, 2020, **13**, No. 4, 503–514, DOI: [10.17516/1997-1397-2020-13-4-503-514](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-4-503-514).
62. R. F. Shamoyan and E. B. Tomashevskaya, “On some new decomposition theorems in multifunctional Herz and Bergman analytic function spaces in bounded pseudoconvex domains,” *Vestn. KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2020, **30**, No. 1, 42–58, DOI: [10.26117/2079-6641-2020-30-1-42-58](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-30-1-42-58).
63. R. F. Shamoyan and E. B. Tomashevskaya, “On new sharp theorems for multifunctional BMOA type spaces in bounded pseudoconvex domains,” *Vestn. KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2020, **32**, No. 3, 102–113, DOI: [10.26117/2079-6641-2020-32-3-102-113](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-32-3-102-113).
64. R. F. Shamoyan and E. B. Tomashevskaya, “On some new sharp embedding theorems for multifunctional Herz-type and Bergman-type spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Rep. Adyghe (Circassian) Int. Acad. Sci.*, 2021, **21**, No. 3, 21–33, DOI: [10.47928/1726-9946-2021-21-3-21-33](https://doi.org/10.47928/1726-9946-2021-21-3-21-33).
65. R. F. Shamoyan and E. B. Tomashevskaya, “On new sharp embedding theorems for multifunctional Herz-type and Bergman-type spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Vestn. KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2021, **34**, No. 1, 63–79, DOI: [10.26117/2079-6641-2021-34-1-63-79](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2021-34-1-63-79).
66. R. Shamoyan and E. Tomashevskaya, “On Bergman type projections in bounded strongly pseudoconvex domains,” *Rep. Adyghe (Circassian) Int. Acad. Sci.*, 2023, **23**, No. 2, 18–26, DOI: [10.47928/1726-9946-2023-23-2-18-26](https://doi.org/10.47928/1726-9946-2023-23-2-18-26).
67. R. Shamoyan and E. Tomashevskaya, “Some generalizations of the Bergman projection theorem in tubular and bounded pseudoconvex domains,” *Siberian Adv. Math.*, 2024, **34**, 356–365, DOI: [10.1134/S1055134424040114](https://doi.org/10.1134/S1055134424040114).
68. R. Shamoyan and E. Tomashevskaya, “On Bergman type projections in new analytic spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Mat. Zametki SVFU*, 2024, **31**, No. 3, 73–81, DOI: [10.25587/2411-9326-2024-3-73-81](https://doi.org/10.25587/2411-9326-2024-3-73-81).
69. R. Shamoyan and O. Zaytseva, “On sharp traces of some new analytic Herz-type spaces in Siegel domains in $\mathbb{C}^n$,” *Probl. Fiz., Mat. i Tekhn.*, 2015, **4**, 87–95.
70. J. Shapiro, “Mackey topologies, reproducing kernels and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces,” *Duke Math. J.*, 1976, **43**, 187–202, DOI: [10.1215/S0012-7094-76-04316-7](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-76-04316-7).
71. H. Triebel, *Theory of Function Spaces II*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1992, DOI: [10.1007/978-3-0346-0419-2](https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0419-2).
72. J. Xiao, *Holomorphic Q^p classes*, Springer, Berlin, 2001, DOI: [10.1007/b87877](https://doi.org/10.1007/b87877).
73. S. Zarantonello, “The extensions of H^p functions from certain subvarieties of a polydisk,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1980, **78**, No. 4, 519–524, DOI: [10.1090/S0002-9939-1980-0556624-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1980-0556624-1).
74. K. Zhu, *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Springer, New York, 2005.

R. F. Shamoyan

Bryansk State Academician I. G. Petrovski University, Bryansk, Russia

E-mail: rsham@mail.com, eLIBRARY AuthorID: [118067](https://elibrary.ru/118067), Scopus: [6506006473](https://orcid.org/0000-0002-8415-9822),

ORCID: [0000-0002-8415-9822](https://orcid.org/0000-0002-8415-9822)

N. M. Makhina

Bryansk State Academician I. G. Petrovski University, Bryansk, Russia

E-mail: makhina32@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 1045-4238, eLIBRARY AuthorID: [165091](#),
Scopus: [57192714258](#), ORCID: [0000-0003-2270-1775](#)