

## О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ИМПУЛЬСА

Л. Г. ШАГАЛОВА

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург,  
Россия*

**Аннотация.** На ограниченном отрезке времени рассмотрены три начальные задачи для одномерных уравнений Гамильтона—Якоби эволюционного типа. Во всех задачах гамильтонианы зависят от координатной и импульсной переменных. При этом зависимость от импульса экспоненциальна, и не выполняется условие коэрцитивности. В двух из рассматриваемых задач гамильтонианы отличаются только знаками перед экспоненциальными слагаемыми, и эти задачи рассматриваются в ограниченной прямоугольной области, определяемой нулями функций-коэффициентов перед экспоненциальными слагаемыми. В случае, когда внутри области функции-коэффициенты положительны, и гамильтониан является выпуклым по импульсной переменной, доказаны существование и единственность вязкостного решения. В случае отрицательных функций-коэффициентов вязкостного решения не существует. Введено обобщенное решение и получены достаточные условия его существования. В третьей задаче отсутствуют фазовые ограничения, но гамильтониан склеивается из трех компонент. Доказано существование вязкостного решения, установлена его связь с обобщенным решением рассмотренной задачи с фазовыми ограничениями. Исследования и построения базируются на анализе поведения решений соответствующих характеристических систем, применении методов негладкого анализа, вариационного исчисления и оптимального управления.

**Ключевые слова:** уравнение Гамильтона—Якоби, некоэрцитивный гамильтониан, вязкостное решение, обобщенное решение, фазовые ограничения, характеристики, оптимальное управление, задача Больца, функция цены.

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

**Для цитирования:** Шагалова Л. Г. О решениях уравнений Гамильтона—Якоби с экспоненциальной зависимостью от импульса // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 151–164. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164) EDN: [UIRGDJ](https://www.edn.ru/UIRGDJ)

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи механики, физики, оптики и других областей приводят к рассмотрению различных типов задач для нелинейных уравнений Гамильтона—Якоби. Теория этих уравнений активно развивается, в ней рассмотрены различные подходы к определению обобщенного решения, доказаны теоремы существования и единственности, разработаны аналитические и численные методы построения решений (см., например, [1, 7, 11, 15]). При этом развитие науки и техники приводит к появлению новых задач. В частности, такие задачи возникают в кристаллографии и молекулярной генетике [8, 17]. В силу нетипичности новых задач их не всегда удается решить известными методами, и поскольку для таких задач не выполняются условия известных теорем существования, требуется вводить и исследовать новые обобщенные решения.

Настоящая работа продолжает цикл исследований, начатый в [3, 6], источником которых является полученная в [13] задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби в модели Кроу—Кимуры молекулярной эволюции. Для этой задачи с фазовыми ограничениями и некоэрцитивным вогнутым по импульсной переменной гамильтонианом, экспоненциально зависящим от этой переменной, известные концепции обобщенного решения (минимаксного и вязкостного [11, 15]) оказались неприменимы, что потребовало введения нового понятия решения. Были получены достаточные условия существования этого решения, репрезентативная формула, позволяющая строить его с помощью решений характеристической системы, исследованы свойства.

В данной работе уравнение с экспоненциальными слагаемыми в непрерывном гамильтониане рассматривается в достаточно общем виде, когда коэффициенты перед этими слагаемыми являются монотонными функциями фазовой переменной. Рассмотрены три типа начальных задач: две задачи с фазовыми ограничениями, когда некоэрцитивный гамильтониан является соответственно выпуклым или вогнутым по импульсной переменной, а также задача без фазовых ограничений с трехкомпонентным вогнутым по импульсу гамильтонианом. Показано, что ключевую роль в существовании как вязкостного, так и обобщенного решений играет условие продолжимости характеристик. При этом в случае выпуклости гамильтониана по импульсу существует и единственно вязкостное решение, а в задаче с фазовыми ограничениями и вогнутым по импульсу гамильтонианом вязкостного решения не существует, и для построения обобщенного решения требуется непрерывно продолжить начальную функцию на границу фазовых ограничений. Продолжение начальной функции неединственно, его можно построить разными способами, в частности, с помощью вязкостного решения рассматриваемой задачи с трехкомпонентным гамильтонианом.

## 2. РАССМАТРИВАЕМЫЕ ЗАДАЧИ

В статье рассматриваются начальные задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби эволюционного типа, которые в общем виде можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in \text{cl } X \subset \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \text{cl } X. \quad (2.2)$$

Здесь  $T$  — заданный момент времени,  $T > 0$ ;  $X$  — ограниченный или бесконечный интервал, который в случае отсутствия фазовых ограничений совпадает с  $\mathbb{R}$ ;  $\text{cl } X$  — замыкание множества  $X$ . Начальная функция  $u_0(\cdot) : \text{cl } X \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно дифференцируема.

Пусть заданы непрерывно дифференцируемые функции  $h(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Предполагается, что функция  $f(\cdot)$  является строго монотонно возрастающей, а функция  $g(\cdot)$  — строго монотонно убывающей, и существуют точки  $x_*$  и  $x^*$  такие, что

$$f(x_*) = 0, \quad g(x^*) = 0, \quad \text{при этом} \quad x_* < x^*. \quad (2.3)$$

Далее будем рассматривать задачу (2.1), (2.2) в трех частных случаях, когда гамильтониан  $H(\cdot)$  задается с помощью функций  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$ , которые являются коэффициентами перед экспоненциальными слагаемыми. При этом основными объектами исследования являются две задачи с фазовыми ограничениями — задачи А и В. Для этих задач изучаются вопросы определения обобщенных решений, а также существования и единственности этих решений. Задача С имеет вспомогательный характер, она может быть использована для задания граничных условий в задаче В.

**2.1. Задача А.** Задачей А будем называть задачу (2.1), (2.2) в случае, когда гамильтониан имеет вид

$$H(x, p) = h(x) + f(x)e^p + g(x)e^{-p}, \quad (2.4)$$

а область изменения фазовой переменной — отрезок, определяемый нулями введенных выше монотонных функций  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$ :

$$X = [x_*, x^*]. \quad (2.5)$$

Поскольку значения функций  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  на отрезке  $[x_*, x^*]$  неотрицательны, гамильтониан (2.4) является выпуклым по импульсной переменной  $p$ .

**2.2. Задача В.** В этом случае задача (2.1), (2.2) рассматривается, когда  $X$  является отрезком (2.5), для гамильтониана вида

$$H(x, p) = h(x) - f(x)e^p - g(x)e^{-p}. \quad (2.6)$$

В рассматриваемой области гамильтониан (2.6) является вогнутым по переменной  $p$ .

**2.3. Задача С.** В этом случае в задаче (2.1), (2.2) нет фазовых ограничений, и множество  $X$  совпадает со всей числовой прямой, т. е.  $X = \mathbb{R}$ . Непрерывный гамильтониан склеивается из трех компонент следующим образом:

$$H(x, p) = \begin{cases} h(x_*) - g(x_*)e^{-p}, & x \leq x_*, p \in \mathbb{R}, \\ h(x) - f(x)e^p - g(x)e^{-p}, & x_* < x < x^*, p \in \mathbb{R}, \\ h(x^*) - f(x^*)e^p, & x \geq x^*, p \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Таким образом, в области  $[0, T] \times (x_*, x^*)$  гамильтониан зависит от фазовой и импульсной переменных, а при  $x < x_*$  и  $x > x^*$  гамильтониан является функцией только импульсной переменной  $p$ . Отметим, что гамильтониан (2.7) является вогнутым по переменной  $p$ .

### 3. НЕПРЕРЫВНОЕ ВЯЗКОСТНОЕ РЕШЕНИЕ

Вязкостное решение можно определить различными по форме, но эквивалентными по существу способами. В данной работе удобным оказалось использование определения вязкостного решения задачи (2.1), (2.2) с помощью суб- и супердифференциалов. Представим здесь это определение для актуального для нас случая одномерного фазового пространства.

Сначала приведем определения суб- и супердифференциала функции в точке, которые в негладком анализе являются обобщениями понятий производной и градиента.

Пусть дано множество  $W \subset \mathbb{R}^2$ . Через  $\partial W$  и  $C(W)$  обозначим соответственно границу этого множества и класс функций, непрерывных на  $W$ .

**Определение 3.1.** Пусть  $u(\cdot) \in C(W)$  и  $(t, x) \in W$ . Субдифференциалом функции  $u(\cdot)$  в точке  $(t, x)$  называется множество

$$D^-u(t, x) = \left\{ (a, s) \in \mathbb{R}^2 \left| \liminf_{\substack{(\tau, y) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, y) \in W}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geq 0 \right. \right\}. \quad (3.1)$$

Супердифференциалом функции  $u(\cdot)$  в точке  $(t, x)$  называется множество

$$D^+u(t, x) = \left\{ (a, s) \in \mathbb{R}^2 \left| \limsup_{\substack{(\tau, y) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, y) \in W}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \leq 0 \right. \right\}.$$

**Замечание 3.1.** В граничных точках замкнутого множества  $W$  субдифференциал  $D^-u(t, x)$ , если он непуст, является неограниченным множеством. Действительно, пусть  $(t_*, y_*) \in \partial W$ ,  $(a, s) \in D^-u(t_*, y_*)$ , а вектор  $(n_1, n_2)$  — внешняя нормаль к множеству  $\text{cl } W$  в точке  $(t_*, y_*)$ . Тогда, как нетрудно заметить из определения субдифференциала (3.1), для любого положительного числа  $k$  справедливо

$$(a + kn_1, s + kn_2) \in D^-u(t_*, y_*).$$

Ниже используются обозначения  $\Omega_T = (0, T) \times X$  and  $\overline{\Omega}_T = (0, T) \times \text{cl } X$ .

**Определение 3.2.** Функция  $u \in C(\overline{\Omega}_T)$  называется вязкостным решением задачи (2.1), (2.2), если она удовлетворяет начальному условию (2.2) и дифференциальным неравенствам

$$a + H(x, s) \leq 0, \quad \forall (t, x) \in \Omega_T, \quad \forall (a, s) \in D^+u(t, x), \quad (3.2)$$

$$a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in \overline{\Omega}_T, \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x). \quad (3.3)$$

**Замечание 3.2.** В определении 3.2 для точек, расположенных на границе фазовых ограничений,  $(t, x) \in \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T$ , требуется выполнение только одного дифференциального неравенства — неравенства (3.3) для субдифференциала. Это объясняется тем фактом, что при достаточно общих условиях, накладываемых на гамильтониан и начальную функцию, набор условий (2.2), (3.2), (3.3) обеспечивает единственность вязкостного решения задачи (2.1), (2.2) и выполнение для этого решения неравенства (3.2) во всех точках области  $\overline{\Omega}_T$ .

Отметим, что гамильтонианы (2.4), (2.6) и (2.7) рассматриваемых задач А, В и С не удовлетворяют условиям, при которых доказаны известные теоремы существования вязкостных решений. В частности, для этих гамильтонианов не выполнено условие коэрцитивности. Для выпуклого по импульсной переменной  $p$  гамильтониана условие коэрцитивности имеет вид

$$\frac{H(x, p)}{|p|} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |p| \rightarrow \infty, \quad x \in \text{cl } X, \quad (3.4)$$

а для вогнутого по  $p$  гамильтониана условие коэрцитивности записывается следующим образом:

$$\frac{H(x, p)}{|p|} \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad |p| \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

В формулах (3.4) и (3.5)  $|p|$  обозначает модуль числа  $p$ .

Легко проверить, что для гамильтонианов (2.4) и (2.6) соответствующие условия коэрцитивности нарушаются на линиях  $x = x_*$  и  $x = x^*$ , а для гамильтониана (2.7) — при  $x \leq x_*$  и при  $x \geq x^*$ .

Далее будет доказано, что в задаче А вязкостное решение существует и единственно, а в задаче В вязкостного решения не существует. Для задачи В на основе вязкостного подхода предложено определение обобщенного решения, требующее дополнительных условий на границе фазовых ограничений — на линиях  $x = x_*$  и  $x = x^*$ . Эти дополнительные условия определяются неоднозначно и, в частности, могут быть получены с помощью решения задачи С.

#### 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВЯЗКОСТНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ А

Рассматривая задачи А и В, в которых присутствует фазовое ограничение вида (2.5), будем использовать обозначения  $\Pi_T = (0, T) \times (x_*, x^*)$  и  $\overline{\Pi}_T = (0, T) \times [x_*, x^*]$ , а также

$$\Gamma_T = \overline{\Pi}_T \setminus \Pi_T = \{(t, x) \mid 0 < t < T, x = x_*\} \cup \{(t, x) \mid 0 < t < T, x = x^*\}.$$

Рассмотрим задачу А. Заметим, что для этой задачи  $\Omega_T = \Pi_T$ ,  $\overline{\Omega}_T = \overline{\Pi}_T$ .

Пусть число  $\varepsilon > 0$  таково, что  $x_* + \varepsilon < x^* - \varepsilon$ . Символом  $X^\varepsilon$  обозначим отрезок  $[x_* + \varepsilon; x^* - \varepsilon]$  и определим область

$$\overline{\Pi}_T^\varepsilon = \{(t, x) \mid 0 < t < T, x \in X^\varepsilon\}.$$

Очевидно, что  $\overline{\Pi}_T^\varepsilon \subset \overline{\Pi}_T$ , и в области  $\overline{\Pi}_T^\varepsilon$  гамильтониан (2.4) удовлетворяет условию коэрцитивности (3.4).

Из [9, Theorem X.I, с. 678] получаем, что в области  $\overline{\Pi}_T^\varepsilon$  существует единственное вязкостное решение  $u^\varepsilon(\cdot)$  уравнения (2.1) с гамильтонианом вида (2.4), удовлетворяющее начальному условию (2.2). Это решение можно представить с помощью репрезентативной формулы

$$u^\varepsilon(t, x) = \inf \left\{ u_0(\xi(0)) + \int_0^t H^*(\xi(s), \xi'(s)) ds \mid \xi(0) = y, \xi(t) = x, y \in [x_* + \varepsilon; x^* - \varepsilon] \right\}. \quad (4.1)$$

Здесь  $\xi'(s)$  — производная функции  $\xi$  в точке  $s$ ,  $H^*$  — функция, сопряженная к гамильтониану (преобразование Лежандра), определяемая следующим образом:

$$H^*(x, q) = \sup_{p \in \mathbb{R}} \{pq - H(x, p)\}, \quad x \in X, \quad q \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Точная нижняя грань в выражении (4.1) ищется по функциям  $\xi$  из класса  $C^2([0, T]; [x_* + \varepsilon; x^* - \varepsilon])$  дважды непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке  $[0, T]$  и принимающих значения из  $[x_* + \varepsilon; x^* - \varepsilon]$ .

В области  $\bar{\Pi}_T$  рассмотрим функцию

$$u(t, x) = \min \left\{ u_0(\xi(0)) + \int_0^t H^*(\xi(s), \xi'(s)) ds \left| \xi(0) = y, \xi(t) = x, y \in [x_*; x^*] \right. \right\}. \quad (4.3)$$

Минимум в (4.3) ищется по функциям  $\xi$  из класса  $C^1([0, T]; [x_*; x^*])$  непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке  $[0, T]$  и принимающих значения из сегмента  $[x_*; x^*]$ .

Характеристическая система (см., например, [2, 16]) для задачи А имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x, p) = f(x)e^p - g(x)e^{-p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x, p) = -h'(x) - f'(x)e^p - g'(x)e^{-p}, \\ \dot{z} &= pH_p(x, p) - H(x, p) = p(f(x)e^p - g(x)e^{-p}) - f(x)e^p - g(x)e^{-p} - h(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь  $H_x(x, p) = \partial H(x, p)/\partial x$ ,  $H_p(x, p) = \partial H(x, p)/\partial p$ .

Система (4.4) рассматривается с начальными условиями

$$x(0, y) = y, \quad p(0, y) = u'_0(y), \quad z(0, y) = u_0(y), \quad y \in [x_*; x^*]. \quad (4.5)$$

Решения системы (4.4), (4.5) называются *характеристиками*. Компоненты  $x(\cdot, y)$ ,  $p(\cdot, y)$  и  $z(\cdot, y)$  решения называются соответственно *фазовыми*, *импульсными* и *ценовыми характеристиками*.

Выписывая необходимые условия экстремума, получим, что экстремалими вариационной задачи (4.3) являются фазовые характеристики. Из первого уравнения системы (4.4), учитывая условия, накладываемые на функции  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$ , получаем, что все экстремали, приходящие в точку  $(t, x) \in \Pi_T$ , лежат внутри  $\Pi_T$ , т. е. для значений  $0 < \tau \leq t$  справедливо неравенство  $x_* < x(\tau) < x^*$ , и экстремали принадлежат классу  $C^1([0, t]; (x_*; x^*))$ .

Поскольку в области  $\Pi_T$  гамильтониан  $H$  (2.4) удовлетворяет условию коэрцитивности (3.4), вторая частная производная  $H_{qq}^*$  сопряженного гамильтониана (4.2) по переменной  $q$  неотрицательна в этой области.

Вычислим

$$\begin{aligned} H^*(x, q) &= -h(x) + q \ln \left( \frac{q + \sqrt{q^2 + 4f(x)g(x)}}{2f(x)} \right) - \sqrt{q^2 + 4f(x)g(x)}, \\ H_{qq}^*(x, q) &= \frac{1}{\sqrt{q^2 + 4f(x)g(x)}} > 0, \quad x \in (x_*, x^*), \quad q \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поскольку фазовое пространство одномерно, из (4.6) и результатов работ [10, 14] следует, что минимум в (4.3) достигается.

В соответствии с результатами работ [12, 16], посвященными методу обобщенных характеристик, значение (4.1) вязкостного решения в точке  $(t, x) \in \Pi_T$  равно

$$u(t, x) = \min \left\{ u_0(y) + \int_0^t (p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))) d\tau \left| x(t, y) = x \right. \right\}, \quad (4.7)$$

где  $x(t) = x(t, y)$  и  $p(t) = p(t, y)$  — соответственно фазовая и импульсная компоненты решения характеристической системы (4.4), (4.5), определяемого параметром  $y \in (x_*, x^*)$ .

Рассмотрим дифференциальное уравнение для импульсной компоненты в характеристической системе (4.4). Поскольку функции  $h$ ,  $f$  и  $g$  определены на ограниченном отрезке  $[x_*, x^*]$  и непрерывно дифференцируемы, и при этом  $f$  строго возрастает, а  $g$  строго убывает, можно получить следующую оценку:

$$-Ae^p - B < \dot{p} < Ae^{-p} + B,$$

где  $A > 0$ ,  $B \geq 0$ . Используя эту оценку, можно показать, что существуют числа  $K > 0$ ,  $C_1$  и  $C_2$  такие, что

$$-Kt + C_1 < p(t) < Kt + C_2. \quad (4.8)$$

Из оценки (4.8) следует, что в области  $\Pi_T$  импульсные компоненты  $p(t)$  характеристик принимают конечные значения, и, следовательно, соответствующие фазовые компоненты  $x(t)$  характеристической системы (4.4) продолжимы либо до момента  $t = T$ , либо до верхней ( $x = x^*$ )

или нижней ( $x = x_*$ ) границы области  $\Pi_T$ . Таким образом, функцию, заданную формулой (4.7), можно непрерывно продолжить на область  $\bar{\Pi}_T$ , замкнутую по переменной  $x$ .

Очевидно, что непрерывное продолжение  $u(t, x)$  на область  $\bar{\Pi}_T$  удовлетворяет начальному условию (2.2). Применяя схему, аналогичную использованной в работе [3] для доказательства супердифференцируемости определенного там обобщенного решения, можно показать, что функция  $u(t, x)$  является субдифференцируемой в области  $\bar{\Pi}_T$ , т. е. справедливо соотношение

$$\forall(t, x) \in \bar{\Pi}_T \quad D^-(t, x) \neq \emptyset.$$

Отметим, что если функция  $u$  дифференцируема в точке  $(t, x)$ , тогда

$$D^-(t, x) = D^+(t, x) = \left\{ \left( \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right) \right\}.$$

Из (4.7) следует, что функция  $u(t, x)$  удовлетворяет дифференциальным неравенствам (3.2), (3.3) в области  $\Pi_T$ . Таким образом, чтобы показать, что эта функция является вязкостным решением задачи А, необходимо проверить выполнение неравенства (3.3) в точках множества  $\Gamma_T$  — на линиях  $x = x_*$  и  $x = x^*$ .

Пусть  $\text{Dif}(u)$  — множество точек, в которых функция  $u(\cdot)$  дифференцируема, а со  $W$  обозначает выпуклую оболочку множества  $W$ . Определим множество

$$\begin{aligned} \partial u(t, x) = \text{co} \left\{ (a, s) \mid a = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial t}, s = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial x}; \right. \\ \left. (t_i, x_i) \rightarrow (t, x) \text{ при } i \rightarrow \infty, (t_i, x_i) \in \text{Dif}(u) \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

При  $0 < t < T$  справедливы включения

$$\begin{aligned} D^-(t, x_*) &\subset \{(a, s - k) \mid (a, s) \in \partial u(t, x_*), k > 0\}, \\ D^-(t, x^*) &\subset \{(a, s + k) \mid (a, s) \in \partial u(t, x_*), k > 0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (2.4), для проверки выполнения неравенства (3.3) на верхней границе области  $\bar{\Pi}_T$  достаточно показать, что если

$$a + h(x^*) + f(x^*)e^p \geq 0,$$

тогда для всех  $s > 0$  выполняется неравенство

$$a + h(x^*) + f(x^*)e^{p+s} \geq 0. \quad (4.10)$$

Поскольку  $f(x^*) > 0$ , неравенство (4.10) справедливо. Итак, для субдифференциала функции  $u(\cdot)$  на верхней границе  $x = x^*$  выполнено дифференциальное неравенство (3.3).

Аналогично, для проверки неравенства (3.3) на линии  $x = x_*$ , нижней границе множества  $\bar{\Pi}_T$ , достаточно показать, что если

$$a + h(x_*) + g(x_*)e^{-p} \geq 0,$$

тогда для всех  $s > 0$  имеем

$$a + h(x_*) + g(x_*)e^{-(p-s)} = a + h(x_*) + g(x_*)e^{-p+s} \geq 0. \quad (4.11)$$

Неравенство (4.11) справедливо, поскольку  $g(x_*) > 0$ . Таким образом, в точках нижней границы  $x = x_*$  выполнено дифференциальное неравенство (3.3), и это завершает доказательство того, что функция  $u(\cdot)$ , построенная в области  $\bar{\Pi}_T$ , удовлетворяет определению 3.2 вязкостного решения.

Поскольку гамильтониан (2.4) и начальная функция  $u_0(\cdot)$  непрерывно дифференцируемы, из результатов [9] следует единственность вязкостного решения в ограниченной и замкнутой по  $x$  области  $\bar{\Pi}_T$ .

Итак, справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.1.** *Вязкостное решение задачи А существует и единственно. Это решение является субдифференцируемой функцией и может быть построено с помощью характеристик в соответствии с репрезентативной формулой (4.7), где параметр  $y \in [x_*, x^*]$ .*

*Доказательство.* Утверждение теоремы следует из приведенных выше построений и рассуждений.  $\square$

Отметим, что значительную роль в доказательстве теоремы 4.1 играет анализ поведения решений характеристической системы (4.4), (4.5). Вязкостное решение строится из фазовых характеристик, и эти построения осуществимы, поскольку все фазовые характеристики продолжимы либо до момента  $T$ , либо до границы множества, на котором рассматривается задача.

## 5. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В

**5.1. Поведение характеристик. Несуществование вязкостного решения.** Гамильтониан в задаче В определяется выражением (2.6), и соответствующая характеристическая система имеет вид

$$\dot{x} = H_p(x, p) = -f(x)e^p + g(x)e^{-p}, \quad (5.1)$$

$$\dot{p} = -H_x(x, p) = -h'(x) + f'(x)e^p + g'(x)e^{-p}, \quad (5.2)$$

$$\dot{z} = pH_p(x, p) - H(x, p) = p(-f(x)e^p + g(x)e^{-p}) + f(x)e^p + g(x)e^{-p} - h(x). \quad (5.3)$$

Система (5.1)–(5.3) рассматривается с начальными условиями (4.5).

Исследование поведения решений системы (5.1)–(5.3), (4.5) показывает, что возможны ситуации непродолжимости характеристик, когда значения импульсных компонент бесконечно убывают или возрастают, стремясь соответственно к  $-\infty$  или  $+\infty$ . При этом соответствующие фазовые компоненты решения стремятся соответственно к значениям  $x^*$  или  $x_*$ , но не достигают их. Кроме того, в  $\Pi_T$  существуют области, через точки которых не проходит ни одна фазовая характеристика. Примеры таких ситуаций и подробный анализ поведения решений характеристической системы для гамильтониана вида

$$H(x, p) = h(x) - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p} \quad (5.4)$$

приведены в [3–5].

На рис. 1 и рис. 2 в случае, когда  $h(x) = 0,25x^2$ ,  $f(x) = 1+x$ ,  $g(x) = 1-x$ ,  $u_0(x) = 0,2 \cos(5(x - 0,2))$ , показано поведение фазовых характеристик задачи А и задачи В соответственно. Фазовые характеристики задачи А заполняют всю прямоугольную область  $\bar{\Pi}_T$ , включая нижнюю ( $x = x_*$ ) и верхнюю ( $x = x^*$ ) границы. Фазовые характеристики задачи В не заполняют полностью прямоугольник  $\bar{\Pi}_T$  и не достигают его границ, стремясь к ним в случае непродолжимости.

Покажем, что если в некоторой точке множества  $\bar{\Pi}_T$ , лежащей на одной из линий  $x = x_*$  или  $x = x^*$ , субдифференциал функции  $u$  непуст, тогда эта функция не может быть вязкостным решением задачи В. Пусть, для определенности, существует  $t_* \in (0, T)$  такое, что  $(a, s) \in D^-u(t_*, x^*)$ . Из определения 3.1 субдифференциала (формула (3.1)) следует, что тогда для любого  $k > 0$  справедливо включение  $(a, s+k) \in D^-u(t_*, x^*)$ . В этом случае неравенство (3.3), которому должно удовлетворять вязкостное решение, принимает вид

$$a + h(x^*) - f(x^*)e^{s+k} \geq 0 \quad \forall k > 0. \quad (5.5)$$

Поскольку  $f(x^*) > 0$ , неравенство (5.5) не выполняется.

Таким образом, для задачи В в общем случае невозможно построить непрерывное вязкостное решение, и для ее исследования обобщенное решение нужно определять иначе.

**5.2. Обобщенные решения. Существование и неединственность.** В [3] на базе вязкостного подхода было введено определение обобщенного решения для задачи В с гамильтонианом вида (5.4), которое можно использовать и в рассматриваемом здесь общем случае вогнутого по импульсной переменной гамильтониана вида (2.6).

**Определение 5.1.** Функция  $u \in C(\bar{\Pi}_T)$  называется *обобщенным решением* задачи В, если она удовлетворяет начальному условию (2.2) и дифференциальным неравенствам

$$a + H(x, s) \leq 0, \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \quad \forall (a, s) \in D^+u(t, x), \quad (5.6)$$

$$a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x), \quad (5.7)$$

$$a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in \Gamma_T, \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x) \cap \partial u(t, x). \quad (5.8)$$

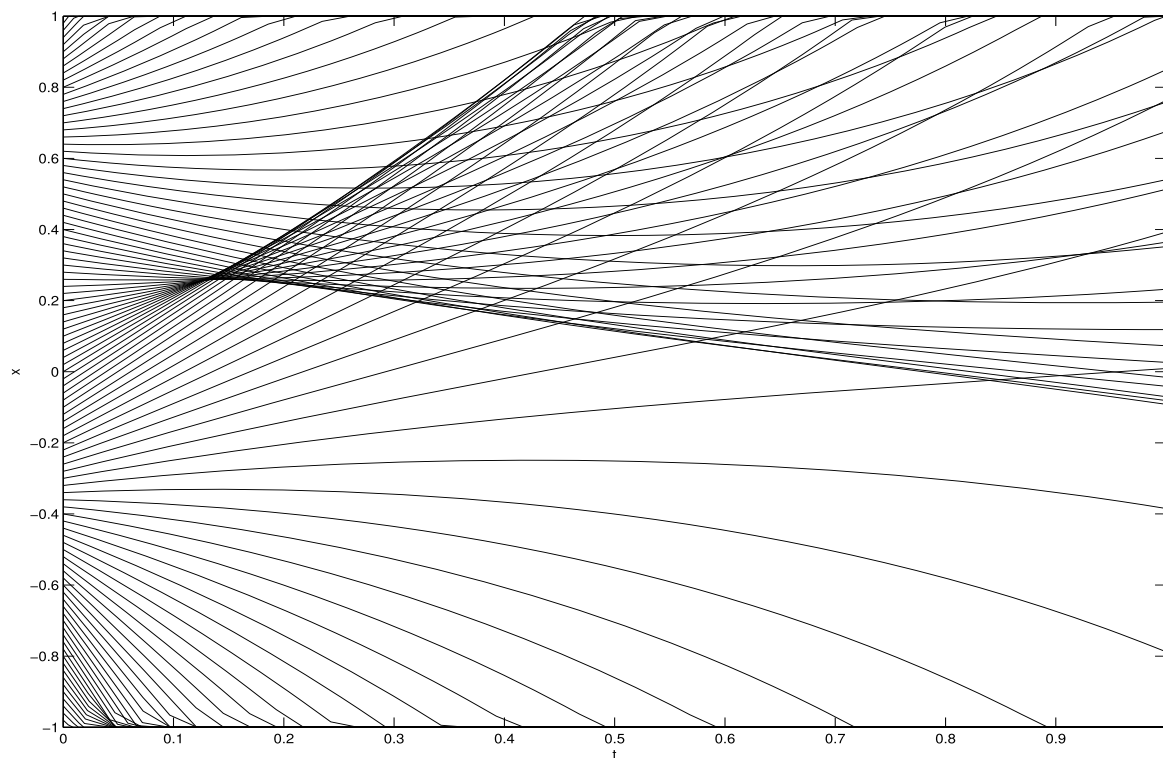


Рис. 1. Пример поведения фазовых характеристик в задаче А.

FIG. 1. An example of the behavior of phase characteristics in problem A.

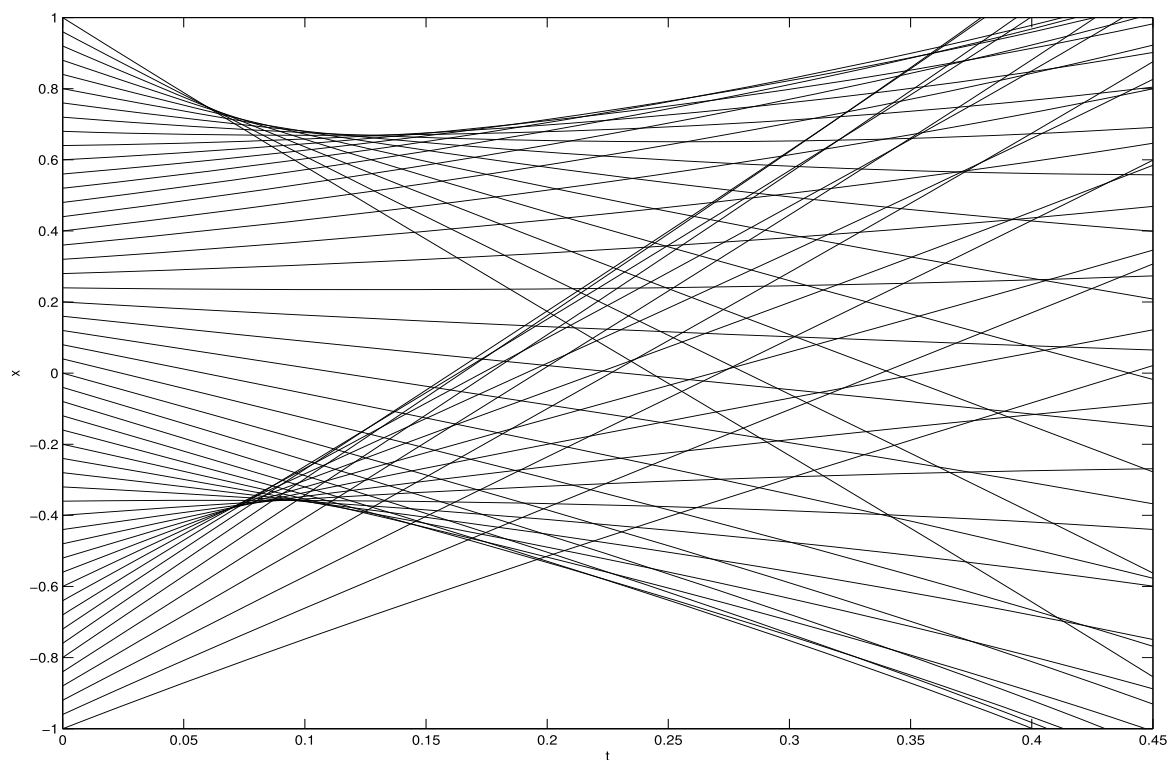


Рис. 2. Пример поведения фазовых характеристик в задаче В.

FIG. 2. An example of the behavior of phase characteristics in problem B.

Отличие определения 5.1 от определения 3.2 вязкостного решения заключается в том, что в точках границы  $\Gamma_T$  фазовых ограничений выполнение неравенства (5.8) требуется не для всех элементов соответствующего субдифференциала  $D^-u(t, x)$ , а лишь для тех, которые содержатся во

множестве  $\partial u(t, x)$ . Напомним, что множество  $\partial u(t, x)$  определено соотношением (4.9), и отметим, что в случае локальной липшицевости функции  $u$  это множество совпадает с субдифференциалом Кларка.

Применяя конструкции и рассуждения, аналогичные использованным в [3], можно указать достаточные условия, при которых обобщенное решение задачи В существует. Ключевую роль при этом играет условие продолжимости характеристик.

**U1.** Решения характеристической системы (5.1)–(5.3), (4.5) продолжимы до момента  $T$ .

Кроме того, предполагается, что существует непрерывно дифференцируемая функция  $\varphi(t, x)$ , определенная в  $\mathbb{R}^2$ , удовлетворяющая следующему набору условий:

$$\varphi(0, x) = u_0(x), \quad x \in [x_*, x^*], \quad (5.9)$$

$$\varphi_t(t, x_*) + H((x_*, \varphi_x(t, x_*))) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (5.10)$$

$$\varphi_t(t, x^*) + H((x^*, \varphi_x(t, x^*))) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (5.11)$$

Гамильтониан  $H$  в условиях (5.10), (5.11) имеет вид (2.6).

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 5.1.** Пусть выполнено условие **U1** и функция  $\varphi(\cdot)$  удовлетворяет условиям (5.9)–(5.11). Тогда существует обобщенное в смысле определения 5.1 решение задачи В, являющееся супердифференцируемой функцией, которое при всех  $(t, x) \in \bar{\Pi}_T$  представимо в виде

$$u(t, x) = \max_{x(t, y^\sharp) = x} \left[ \varphi(t^\sharp, y^\sharp) + \int_{t^\sharp}^t \left( p(\tau, y^\sharp) H_p(x(\tau, y^\sharp), p(\tau, y^\sharp)) - H(x(\tau, y^\sharp), p(\tau, y^\sharp)) \right) d\tau \right], \quad (5.12)$$

где  $t^\sharp \in [0, T]$ , и при этом  $y^\sharp \in [x_*, x^*]$ , если  $t^\sharp = 0$ , и  $y^\sharp = x_*$  или  $y^\sharp = x^*$ , если  $t^\sharp > 0$ . Функции  $(x(\cdot, y^\sharp), p(\cdot, y^\sharp)) : [t^\sharp, t] \rightarrow \mathbb{R}^2$  – решения системы (5.1), (5.2), удовлетворяющие начальным условиям

$$x(t^\sharp, y^\sharp) = y^\sharp, \quad p(t^\sharp, y^\sharp) = \varphi_x(t^\sharp, y^\sharp) = p_0(t^\sharp, y^\sharp).$$

*Доказательство.* Из условия **U1** следует, что импульсные компоненты  $p(\cdot, y)$  решений системы (5.1)–(5.3), (4.5) ограничены на отрезке  $[0, T]$ . Пусть  $P \subset \mathbb{R}$  – такой ограниченный замкнутый отрезок, что

$$p(t, y) \in P \quad \forall t \in [0, T], \quad y \in [x_*, x^*]. \quad (5.13)$$

В области  $\bar{\Pi}_T$  в «обратном» времени  $\tau = T - t$  рассмотрим задачу **ОСР** оптимального управления системой, динамика которой описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = -H_p(x, p) = f(x)e^p - g(x)e^{-p}, \quad p \in P. \quad (5.14)$$

Значение управляющего параметра выбирается из множества  $P$ . Если задано начальное состояние системы  $x(t_0) = x_0$ ,  $(t_0, x_0) \in \bar{\Pi}_T$ , то допустимыми управлениями являются измеримые функции  $p(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow P$ . Множество всех допустимых управлений обозначим символом  $\mathbf{P}_{[t_0, T]}$ . Введем функцию

$$\psi(t, x) = \varphi(T - t, x), \quad (t, x) \in \bar{\Pi}_T$$

и на движениях системы (5.14) определим функционал платы

$$I_{(t_0, x_0)}(p(\cdot)) = \int_{t_0}^{t^\sharp} [p(\tau) H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))] d\tau + \psi(t^\sharp, x(t^\sharp)),$$

где  $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, p(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow [x_*, x^*]$  – траектория системы (5.14), стартующая из начальной точки  $(t_0, x_0)$  под воздействием управления  $p(\cdot) \in \mathbf{P}_{[t_0, T]}$ ,  $t^\sharp = t^\sharp(t_0, x_0, p(\cdot))$  – момент первого выхода этой траектории на целевое множество  $G_T$ :

$$G_T = \Gamma_T \cup \{(t, x) \mid t = 0, x \in [x_*, x^*]\},$$

$$t^\sharp = \min_{t \in [t_0, T]} \{t \mid x(t; t_0, x_0, p(\cdot)) \in G_T\}.$$

Задача **ОСР** оптимального управления состоит в управлении системой (5.14) таким образом, чтобы обеспечить оптимальный результат (цену), который для начальной точки  $(t_0, x_0) \in \bar{\Pi}_T$  определяется соотношением

$$V(t_0, x_0) = \sup_{p(\cdot) \in \mathbf{P}_{[t_0, T]}} I_{(t_0, x_0)}(p(\cdot)).$$

В задаче **ОСР** существует непрерывная функция цены  $V(t, x)$ ,  $(t, x) \in \bar{\Pi}_T$ , обладающая такими свойствами, что обобщенное решение, о существовании которого говорится в утверждении теоремы, связано с функцией  $V(\cdot)$  соотношением

$$u(t, x) = V(T - t, x), \quad (t, x) \in \bar{\Pi}_T. \quad (5.15)$$

Доказательство существования функции цены задачи **ОСР** и ее свойств, обеспечивающих выполнение соотношения (5.15), можно провести аналогично тому, как это сделано в [3] для задачи с гамильтонианом вида (5.4).  $\square$

Итак, построение обобщенного решения задачи В осуществляется посредством сведения начальной краевой задачи к задаче Дирихле путем непрерывного продолжения начальной функции  $u_0(\cdot)$  на границу фазовых ограничений с помощью гладкой функции  $\varphi(\cdot)$ . Обобщенное решение при этом формируется с помощью операции максимума из характеристик, выпущенных с начального многообразия и с границ фазового ограничения.

Поскольку возможны различные продолжения  $\varphi(\cdot)$  начальной функции  $u_0(\cdot)$ , решение задачи В неединственно.

## 6. ВЯЗКОСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С. СВЯЗЬ С РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧИ В

Рассмотрим задачу С. Введем обозначения

$$\bar{\Omega}_T^- = (0, T) \times (-\infty, x_*], \quad \bar{\Omega}_T^+ = (0, T) \times [x_*, +\infty).$$

Область  $\Omega_T = (0, T) \times \mathbb{R}$ , в которой рассматривается задача С, можно представить в виде

$$\Omega_T = \bar{\Omega}_T^- \cup \bar{\Pi}_T \cup \bar{\Omega}_T^+. \quad (6.1)$$

При этом из (2.7) следует, что в каждой из трех областей в разбиении (6.1) гамильтониан задается своей формулой, поэтому в этих областях характеристическая система уравнения (2.1), (2.2) имеет разный вид.

Докажем следующее утверждение.

**Теорема 6.1.** Пусть выполнено условие **U1** и начальная функция  $u_0(\cdot)$  такова, что справедливо условие:

**U2.** Производная  $u'_0(\cdot)$  не возрастает на интервалах  $(-\infty, x_*]$  и  $[x_*, +\infty)$ .

Тогда существует вязкостное решение  $u(t, x) : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$  задачи С такое, что в областях  $\bar{\Omega}_T^-$  и  $\bar{\Omega}_T^+$  функция  $u(\cdot)$  непрерывно дифференцируема, а сужение  $u(\cdot)$  на область  $\bar{\Pi}_T$  является обобщенным в смысле определения 5.1 решением задачи В.

*Доказательство.* В областях  $\bar{\Omega}_T^-$  и  $\bar{\Omega}_T^+$  гамильтониан (2.7) не зависит от фазовой переменной  $x$ , поэтому импульсные компоненты решений соответствующих характеристических систем сохраняют постоянные значения, а фазовые компоненты являются прямыми линиями. Выписав характеристическую систему для  $\bar{\Omega}_T^-$ ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x_*)e^{-p}, \\ \dot{p} &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\dot{z} = (p+1)g(x_*)e^{-p} - h(x_*),$$

$$x(0) = y, \quad p(0) = u'_0(y), \quad z(0) = u_0(y), \quad y \in (-\infty, x_*),$$

нетрудно проверить, что в этой области фазовые характеристики имеют вид

$$x(t) = y + g(x_*)e^{-u'_0(y)t}, \quad y \in (-\infty, x_*). \quad (6.3)$$

Поскольку  $g(x_*) > 0$ , из (6.3) получаем, что фазовая характеристика, выпущенная из точки  $(0, y)$ , пересечет прямую  $x = x_*$  в момент  $t_*(y) = \frac{(x_* - y)e^{u'_0(y)}}{g(x_*)}$ . Соответствующее значение ценовой компоненты при этом будет равно  $u_0(y) + [u'_0(y) + 1]g(x_*)e^{-u'_0(y)} - h(x_*)t_*(y)$ . Из (6.3) и **U2** получаем, что фазовые характеристики системы (6.2) полностью заполняют область  $\bar{\Omega}_T^-$  и не пересекаются в этой области. Таким образом, применяя метод характеристик, мы можем построить гладкую функцию:  $u^-(\cdot) : \bar{\Omega}_T^- \rightarrow \mathbb{R}$ , являющуюся решением начальной задачи Коши (2.1), (2.2) с гамильтонианом вида (2.7) при  $X = (-\infty, x_*)$ .

Рассмотрев характеристическую систему задачи С в  $\bar{\Omega}_T^+$ , получим, что в этой области фазовые характеристики имеют вид

$$x(t) = y - f(x^*)e^{u'_0(y)t}, \quad y \in (x^*, +\infty). \quad (6.4)$$

Из (6.4) и **U2** получаем, что фазовые характеристики системы (6.2) полностью заполняют область  $\bar{\Omega}_T^+$  и не пересекаются в этой области. Применяя метод характеристик, построим гладкую функцию  $u^+(\cdot) : \bar{\Omega}_T^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , являющуюся решением начальной задачи Коши (2.1), (2.2) с гамильтонианом вида (2.7) при  $X = [x^*, +\infty)$ .

Заметим, что непрерывно дифференцируемые функции  $u^-(\cdot, x_*)$  и  $u^+(\cdot, x^*)$  удовлетворяют условиям (5.10) и (5.11) соответственно, откуда следует существование функции  $\varphi(\cdot)$  такой, с помощью которой согласно утверждению теоремы 5.1 осуществляется построение обобщенного решения задачи В. Положив

$$\varphi(t, x_*) = u^-(\cdot, x_*), \quad \varphi(t, x^*) = u^+(\cdot, x^*) \quad \forall t \in [0, T],$$

построим с помощью репрезентативной формулы (5.12) в области  $\bar{\Pi}_T$  функцию  $u^0(\cdot)$  — обобщенное решение задачи В.

Итак, на множествах  $\bar{\Omega}_T^-$ ,  $\bar{\Pi}_T$  и  $\bar{\Omega}_T^+$  мы соответственно построили непрерывные функции  $u^-(\cdot)$ ,  $u^0(\cdot)$  и  $u^+(\cdot)$ . Положим

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-(t, x), & t \in [0, T], \quad x \leq x_*, \\ u^0(t, x), & t \in [0, T], \quad x \in [x_*, x^*], \\ u^+(t, x), & t \in [0, T], \quad x \geq x^*. \end{cases} \quad (6.5)$$

Из построений компонент функции  $u(\cdot)$  (6.5) следует, что эта функция непрерывна и является вязкостным решением задачи С, удовлетворяющим заявленным в утверждении теоремы свойствам.  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кружков С. Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными, I // Мат. сб. — 1966. — 70, № 3. — С. 394–415.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
3. Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2011. — 17, № 2. — С. 191–208.
4. Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г. Конструкция непрерывного минимаксного/вязкостного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана с непродолжимыми характеристиками // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2014. — 20, № 4. — С. 247–257.
5. Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г. О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2015. — 21, № 2. — С. 220–235.
6. Шагалова Л. Г. О решении уравнения Гамильтона–Якоби, возникающего в молекулярной биологии // Автомат. и телемех. — 2013. — 8. — С. 160–172.
7. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. — Boston: Birkhauser, 1997. — DOI: [10.1007/978-0-8176-4755-1](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4755-1).
8. Calvez V., Lam K.-Y. Uniqueness of the viscosity solution of a constrained Hamilton–Jacobi equation // Calc. Var. Partial Differ. Equ. — 2020. — 59, № 5. — 163. — DOI: [10.1007/s00526-020-01819-0](https://doi.org/10.1007/s00526-020-01819-0).
9. Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L. Hamilton–Jacobi equations with state constraints // Trans. Am. Math. Soc. — 1990. — 318, № 2. — С. 643–683. — DOI: [10.1090/S0002-9947-1990-0951880-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1990-0951880-0).

10. *Clarke F. H.* Tonelli's regularity theory in the calculus of variations: recent progress // В сб.: «Optimization and related fields». — Berlin–Heidelberg: Springer, 1986. — С. 163–179. — DOI: [10.1007/BFb0076705](https://doi.org/10.1007/BFb0076705).
11. *Crandall M. G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Am. Math. Soc. — 1983. — 277, № 1. — С. 1–42. — DOI: [10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8).
12. *Mirică Ș.* Generalized solutions by Cauchy's method of characteristics // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1987. — 77. — С. 317–350.
13. *Saakian D. B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // Phys. Rev. E. — 2008. — 78, № 4. — 041908. — DOI: [10.1103/PhysRevE.78.041908](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.041908).
14. *Soga K.* A remark on Tonelli's calculus of variations // Russ. J. Nonlinear Dyn. — 2023. — 19, № 2. — С. 239–248. — DOI: [10.20537/nd230501](https://doi.org/10.20537/nd230501).
15. *Subbotin A. I.* Generalized solutions of first order PDEs: the dynamical optimization perspective. — Boston: Birkhauser, 1995. — DOI: [10.1007/978-1-4612-0847-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1).
16. *Subbotina N. N.* The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // Modern Math. Appl. — 2004. — 20. — С. 2955–3091. — DOI: [10.1007/s10958-006-0146-2](https://doi.org/10.1007/s10958-006-0146-2).
17. *Yokoyama E., Giga Y., Rybka P.* A microscopic time scale approximation to the behavior of the local slope on the faceted surface under a nonuniformity in supersaturation // Phys. D: Nonlinear Phenomena. — 2008. — 237, № 22. — С. 2845–2855. — DOI: [10.1016/j.physd.2008.05.009](https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.05.009).

Л. Г. Шагалова

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия

E-mail: [shag@imm.uran.ru](mailto:shag@imm.uran.ru), ПИИЦ SPIN-код: 8448-6980, ПИИЦ AuthorID: [14285](https://orcid.org/14285), ResearcherID: [A-4754-2019](https://orcid.org/A-4754-2019), Scopus: [44961227500](https://orcid.org/44961227500), ORCID: [0000-0002-5602-076X](https://orcid.org/0000-0002-5602-076X)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164)

EDN: [UIRGDJ](https://edn.ru/UIRGDJ)

UDC 517.957  
Research article

## On solutions of Hamilton–Jacobi equations with exponential dependence on momentum

L. G. Shagalova

**Abstract.** Three initial problems for one-dimensional Hamilton–Jacobi equations of evolutionary type are considered on a bounded time segment. In all problems, the Hamiltonians depend on the coordinate and momentum variables. The dependence on momentum is exponential, and the coercivity condition is not satisfied. In two of the problems, the Hamiltonians differ only in the signs of the exponential terms, and these problems are considered in a bounded rectangular domain defined by the zeros of the coefficient functions before the exponential terms. In the case where the coefficients inside the domain are positive and the Hamiltonian is convex in the momentum variable, the existence and uniqueness of a viscosity solution are proved. In the case of negative coefficient functions, a viscosity solution does not exist. A generalized solution is introduced, and sufficient conditions for its existence are obtained. In the third problem, there are no state constraints, but the Hamiltonian is glued together from three components. The existence of a viscosity solution is proved, and its relationship with the generalized solution to the considered problem with state constraints is established. Research and construction are based on the analysis of the behavior of solutions to the corresponding characteristic systems, applying methods of nonsmooth analysis, calculus of variations and optimal control.



**Keywords:** Hamilton–Jacobi equation, noncoercive Hamiltonian, viscosity solution, generalized solution, state constraints, characteristics, optimal control, Bolza problem, value function theorem, quantum channel.

**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The authors declare no financial support.

**For citation:** L. G. Shagalova, “On solutions of Hamilton–Jacobi equations with exponential dependence on momentum,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 1, 151–164. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164) EDN: [UIRGDJ](https://www.edn.ru/10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164)

## REFERENCES

1. S. N. Kruzhkov, “Obobshchennye resheniya nelineynykh uravneniy pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi, I” [Generalized solutions of first-order nonlinear equations with many independent variables, I], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1966, **70**, No. 3, 394–415 (in Russian).
2. R. Courant, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1964 (Russian translation).
3. N. N. Subbotina and L. G. Shagalova, “O reshenii zadachi Koshi dlya uravneniya Gamil’tona–Yakobi s fazovymi ogranicheniyami” [On the solution of the Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi equation with phase constraints], *Tr. In-ta Mat. i Mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch RAS], 2011, **17**, No. 2, 191–208 (in Russian).
4. N. N. Subbotina and L. G. Shagalova, “Konstruktsiya nepreryvnogo minimaksnogo/vyazkostnogo resheniya uravneniya Gamil’tona–Yakobi–Bellmana s neprodolzhimymi kharakteristikami” [Construction of a continuous minimax/viscous solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation with nonextendable characteristics], *Tr. In-ta Mat. i Mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch RAS], 2014, **20**, No. 4, 247–257 (in Russian).
5. N. N. Subbotina and L. G. Shagalova, “O nepreryvnom prodolzhenii obobshchennogo resheniya uravneniya Gamil’tona–Yakobi kharakteristikami, obrazuyushchimi tsentral’noe pole ekstremaley” [On the continuous extension of a generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation by characteristics forming a central field of extremals], *Tr. In-ta Mat. i Mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch RAS], 2015, **21**, No. 2, 220–235 (in Russian).
6. L. G. Shagalova, “O reshenii uravneniya Gamil’tona–Yakobi, vznikayushchego v molekulyarnoy biologii” [On the solution of the Hamilton–Jacobi equation arising in molecular biology], *Avtomat. i Telemekh.* [Automat. Telemekh.], 2013, **8**, 160–172 (in Russian).
7. M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations*, Birkhauser, Boston, 1997, DOI: [10.1007/978-0-8176-4755-1](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4755-1).
8. V. Calvez and K.-Y. Lam, “Uniqueness of the viscosity solution of a constrained Hamilton–Jacobi equation” [Uniqueness of the viscosity solution of a constrained Hamilton–Jacobi equation], *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* [Calc. Var. Partial Differ. Equ.], 2020, **59**, No. 5, 163 (in Russian), DOI: [10.1007/s00526-020-01819-0](https://doi.org/10.1007/s00526-020-01819-0).
9. I. Capuzzo-Dolcetta and P.-L. Lions, “Hamilton–Jacobi equations with state constraints,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1990, **318**, No. 2, 643–683, DOI: [10.1090/S0002-9947-1990-0951880-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1990-0951880-0).
10. F. H. Clarke, “Tonelli’s regularity theory in the calculus of variations: recent progress,” In: *Optimization and related fields*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1986, pp. 163–179, DOI: [10.1007/BFb0076705](https://doi.org/10.1007/BFb0076705).
11. M. G. Crandall and P.-L. Lions, “Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations” [Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations], *Trans. Am. Math. Soc.* [Trans. Am. Math. Soc.], 1983, **277**, No. 1, 1–42 (in Russian), DOI: [10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8).
12. Mirică Ș., “Generalized solutions by Cauchy’s method of characteristics,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1987, **77**, 317–350.
13. D. B. Saakian, O. Rozanova, and A. Akmetzhanov, “Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution” [Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution], *Phys. Rev. E* [Phys. Rev. E], 2008, **78**, No. 4, 041908 (in Russian), DOI: [10.1103/PhysRevE.78.041908](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.041908).
14. K. Soga, “A remark on Tonelli’s calculus of variations,” *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, 2023, **19**, No. 2, 239–248, DOI: [10.20537/nd230501](https://doi.org/10.20537/nd230501).
15. A. I. Subbotin, *Generalized solutions of first order PDEs: the dynamical optimization perspective*, Birkhauser, Boston, 1995, DOI: [10.1007/978-1-4612-0847-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1).
16. N. N. Subbotina, “The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization,” *Modern Math. Appl.*, 2004, **20**, 2955–3091, DOI: [10.1007/s10958-006-0146-2](https://doi.org/10.1007/s10958-006-0146-2).

17. E. Yokoyama, Y. Giga, and P. Rybka, “A microscopic time scale approximation to the behavior of the local slope on the faceted surface under a nonuniformity in supersaturation,” *Phys. D: Nonlinear Phenomena*, 2008, **237**, No. 22, 2845–2855, DOI: [10.1016/j.physd.2008.05.009](https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.05.009).

L. G. Shagalova

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the RAS, Yekaterinburg, Russia

E-mail: [shag@imm.uran.ru](mailto:shag@imm.uran.ru), eLIBRARY SPIN-code: 8448-6980, eLIBRARY AuthorID: [14285](#), ResearcherID: [A-4754-2019](#), Scopus: [44961227500](#), ORCID: [0000-0002-5602-076X](#)