

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

К. М. Чудинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

Аннотация. Константа $3/2$, определяющая достаточные условия устойчивости линейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздыванием, была впервые указана А. Д. Мышкисом в середине XX века, и эти результаты положили начало направлению исследований уравнений с последействием, целью которого являются условия устойчивости, явно выраженные через параметры уравнения. В последнее десятилетие XX века были установлены первые дискретные аналоги результатов таких исследований — эффективные достаточные условия устойчивости разностных уравнений с последействием. Недавно были получены условия устойчивости дифференциальных уравнений с последействием, являющиеся усилением известных теорем, выраженных через оценку значений функционалов от параметров уравнения константой $3/2$. В настоящей статье получены дискретные аналоги этих результатов, т. е. достаточные условия устойчивости линейного неавтономного разностного уравнения с запаздыванием, выраженные через параметры уравнения (коэффициенты и запаздывания) и существенно усиливающие известные условия такого рода.

Ключевые слова: линейное неавтономное разностное уравнение, переменное запаздывание, равномерная устойчивость, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Чудинов К. М. Об условиях устойчивости линейного разностного уравнения с переменным запаздыванием // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 138–150. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-138-150](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-138-150) EDN: UIEWLQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем называть (дискретной) *полуосью* и обозначать символом $\mathbb{N}_n$, где n — целое неотрицательное число, множество целых чисел, не меньших n . Положим $\mathbb{N}_m^n = \{m, m+1, \dots, n-1\}$ и $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$. Символом ∞ будем обозначать $+\infty$. Сумму пустого множества слагаемых везде будем считать равной 0.

Основным объектом исследования в настоящей статье является разностное уравнение

$$\Delta x(n) + a(n)x(h(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (1.1)$$

где $a: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$, $h(n) \leq n$, $a(n) \geq 0$. Уравнение (1.1) естественно рассматривать как дискретный аналог дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) + \alpha(t)x(\tau(t)) = 0, \quad t \in [0, \infty), \quad (1.2)$$

где $\tau(t) \leq t$ и $\alpha(t) \geq 0$.

В конце 40-х гг. XX в. А. Д. Мышкис установил, что при условии

$$\sup_{t \geq 0} \alpha(t) \cdot \sup_{t \geq 0} (t - \tau(t)) \leq 3/2$$

все решения уравнения (1.2) устойчивы по Ляпунову, а при выполнении строгого неравенства и дополнительном условии $a(t) \geq m > 0$ асимптотически устойчивы. Мышкис также показал, что константа $3/2$ неулучшаема: строгое неравенство нельзя заменить нестрогим, а в нестрогом нельзя заменить верхние грани верхними пределами. Теоремы Мышкиса «о $3/2$ » послужили отправной точкой исследований уравнений с последствием на предмет условий устойчивости, явно выраженных через параметры уравнения. Наиболее сильные известные результаты, обобщающие теоремы Мышкиса «о $3/2$ » для уравнения (1.2), систематизированы в работе [5].

Теория разностных уравнений приобрела статус самостоятельного раздела математики только в последней четверти XX века, когда разностные уравнения стали рассматриваться как дискретные аналоги не только дифференциальных уравнений традиционных видов, но и функционально-дифференциальных уравнений, в том числе уравнений с отклоняющимся аргументом. Первые аналоги теорем «о $3/2$ » для неавтономного уравнения (1.1) были установлены в 1990-х гг. Наиболее законченный вид такие условия приобрели в работе [6]: если $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=h(n)}^n a(m) \leq 3/2$, то все

решения уравнения (1.1) ограничены, а если заменить в неравенстве строгий знак нестрогим, то при дополнительном условии $\sum_{n=0}^{\infty} a(n) = \infty$ все решения уравнения (1.1) будут стремиться к 0.

Недавно в работе [8] был обнаружен подход, позволяющий сделать ряд принципиальных уточнений основных результатов работы [5] для уравнения (1.2). В настоящей работе исследуются возможности получения дискретных аналогов этих уточнений.

2. Функция Коши и устойчивость

Для фиксированного $m \in \mathbb{N}_0$ назовем *решением уравнения (1.1) на полуоси $\mathbb{N}_m$* функцию $x: \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую равенству (1.1), в котором для $\xi < m$ полагается $x(\xi) = \varphi(\xi)$, где φ — заданная *начальная функция*. Нетрудно видеть, что для любой начальной функции, заданной для всех $\xi \leq m$, решение уравнения (1.1) на полуоси $\mathbb{N}_m$ существует и единственно.

Обозначим $\mathbb{D} = \{(n, m) \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq m\}$.

Определение 2.1. *Функцией Коши* уравнения (1.1) называется функция $K: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, такая что

$$\begin{aligned} K(n+1, m) - K(n, m) + a(n)K(h(n), m) &= 0, \quad n \geq m; \\ K(m, m) &= 1; \quad K(\xi, m) = 0, \quad \xi < m. \end{aligned}$$

Данное определение соответствует определению *фундаментального решения* из работ [6, 9]. Мы предпочитаем термин *функция Коши*, поскольку он был введен раньше и соответствует терминологии дифференциальных уравнений с последствием, где понятия *фундаментальная функция* и *функция Коши* (в векторном случае вместо слова *функция* используется *матрица*) имеют разный смысл и при этом тесно связаны [1].

Заметим, что при фиксированном втором аргументе m функция $c(\cdot) = K(\cdot, m)$, где K — функция Коши уравнения (1.1), является решением уравнения (1.1) на полуоси $\mathbb{N}_m$.

Существуют разные подходы к определению видов устойчивости разностного уравнения с последствием; их сопоставление проводится, например, в [3]. Здесь ограничимся замечанием: удобство использования функции Коши определяется наследуемой из классической теории линейных разностных уравнений формулой представления решения на полуоси $\mathbb{N}_m$ соответствующего уравнению (1.1) неоднородного уравнения с правой частью $f: \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{R}$ (см. [6, 9])

$$x(n) = K(n, m)x(m) + \sum_{k=m}^{n-1} K(n, k+1)[f(k) - \chi_{\mathbb{N}_m}(h(k))a(k)\varphi(h(k))], \quad n \in \mathbb{N}_m,$$

где φ — начальная функция и $\chi_{\mathbb{N}_m}$ — характеристическая функция множества $\mathbb{N}_m$. Таким образом, начальная функция переносится в правую часть уравнения и оказывается составляющей

внешнего возмущения, а определение устойчивости показывает, что устойчивость является свойством только заданного левой частью уравнения оператора.

Определение 2.2. Будем называть уравнение (1.1):

- *равномерно устойчивым*, если найдется $N > 0$, что для всех $(n, m) \in \mathbb{D}$ имеем $|K(t, s)| \leq N$;
- *асимптотически устойчивым*, если для любого $m \in \mathbb{N}_0$ имеем $K(n, m) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- *равномерно асимптотически устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $l \in \mathbb{N}_0$, что для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $n \in \mathbb{N}_{m+l}$ имеем $|K(n, m)| < \varepsilon$;
- *экспоненциально устойчивым*, если при некоторых $N, \gamma > 0$ для всех $(n, m) \in \mathbb{D}$ имеем $|K(n, m)| \leq N \exp(-\gamma(n - m))$.

Дальнейшее изложение посвящено поиску достаточных условий устойчивости уравнения (1.1) (в смыслах определения 2.2), выраженных в явном виде через параметры уравнения.

3. УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

3.1. Известные положения. Известные условия равномерной устойчивости наиболее полно описывает следующий результат.

Предложение 3.1 (см. [6]). Если для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_{n_0}} \sum_{m=h(n)}^n a(m) \leq 3/2, \quad (3.1)$$

то функция Коши уравнения (1.1) ограничена.

Предложение 3.2 (см. [3]). Если для уравнения (1.1) выполнено условие

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=h(n)}^n a(m) < \infty,$$

то его равномерная устойчивость равносильна ограниченности его функции Коши.

Предложение 3.1 является дискретным аналогом следующего факта.

Предложение 3.3 (см. [4]). Если для некоторого $t_0 \geq 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{h(t)}^t \alpha(s) ds \leq 3/2, \quad (3.2)$$

то функция Коши уравнения (1.2) ограничена.

$$\text{Положим } \mu(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \in [0, 1], \\ 1, & \xi > 1. \end{cases}$$

Недавно было установлено следующее обобщение предложения 3.3.

Предложение 3.4 (см. [8]). Если для некоторого $t_0 \geq 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{t \geq t_0} \int_t^\infty \mu \left(\int_{\tau(s)}^t \alpha(\xi) d\xi \right) \alpha(s) ds \leq 1, \quad (3.3)$$

то функция Коши уравнения (1.2) ограничена.

В работе [8] показано, что предложение 3.3 является следствием предложения 3.4, и приведены примеры уравнений, устойчивость которых устанавливается предложением 3.4, но не устанавливается предложением 3.3. Таким образом, предложение 3.4 примыкает к классу теорем Мышкиса «о 3/2», усиливая известные результаты.

3.2. Уточнение известных условий ограниченности функции Коши. В работе [8] приведено наглядное рассуждение, позволяющее относительно просто доказать предложение 3.3 и получить новое более тонкое условие устойчивости уравнения (1.2) — предложение 3.4. Рассуждение основано на изучении возможного поведения решения исследуемого уравнения на промежутке, начинающемся в точке смены знака, — именно такие точки дают максимум функционалам, стоящим в левых частях неравенств (3.2) и (3.3). Для разностных уравнений смена знака решения не подразумевает наличие нуля решения. В доказательстве приведенной ниже теоремы параметр δ играет роль значения решения уравнения (1.1) в последней до смены знака точке. Это значение может быть разным, что отражается на формулировке результата.

Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ определим множество $E_n = \{m \in \mathbb{N}_n \mid h(m) \leq n\}$ и функцию

$$\chi_n(m) = \begin{cases} 1, & m \in E_n, \\ 0, & m \notin E_n. \end{cases}$$

Теорема 3.1. Если для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_{n_0}, \delta \in [0,1]} \left[\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_n(m) + \sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) - \delta \right] \leq 1, \quad (3.4)$$

то функция Коши уравнения (1.1) ограничена.

Доказательство. Если для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{N}_0$ значения $K(n, m)$ не меняют знак при $n \in \mathbb{N}_m$, то очевидно, что они не возрастают с ростом n , следовательно, $|K(n, m)| \leq 1$.

Зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}_0$ такое, что значения $K(n, m)$ меняют знак при $n \in \mathbb{N}_m$.

Обозначим $c(n) = K(n, m)$. Функция c есть решение уравнения (1.1) на полуоси $\mathbb{N}_m$.

Покажем, что при выполнении условий теоремы для любого числа $M > 0$ и любой такой точки $n_1 \in \mathbb{N}_m$, что $c(n_1) < 0$, имеем: если $c(n) \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$, то $c(n_1) \geq -M$.

В силу линейности уравнения без ограничения общности полагаем $M = 1$.

Обозначим $m_0 = \max\{n \in \mathbb{N}_m^{n_1} \mid c(n) \geq 0\}$ и $\delta = c(m_0)$.

Для всех $n \in \mathbb{N}_m^{m_0+1}$ имеем:

$$c(n) = c(n) - c(m_0) + \delta = \delta - \sum_{k=n}^{m_0-1} \Delta c(k) = \delta + \sum_{k=n}^{m_0-1} a(k)c(h(k)) \leq \delta + \sum_{k=n}^{m_0-1} a(k).$$

В силу определения функции μ и условия $c(n) \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$ справедливо неравенство

$$c(n) \leq \mu \left(\delta \chi_{m_0}(n) + \sum_{k=n}^{m_0-1} a(k) \right).$$

Отсюда получаем

$$c(n_1) = \delta + \sum_{i=m_0}^{n_1-1} \Delta c(i) = \delta - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i)c(h(i)) \geq \delta - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i) \mu \left(\delta \chi_{m_0}(i) + \sum_{k=h(i)}^{m_0-1} a(k) \right).$$

Следовательно, если выполнено условие теоремы, то $c(n_1) \geq -1$.

Аналогично получаем, что $c(n_1) \leq \max_{n \in \mathbb{N}_m^{n_1}} |c(n)|$, если $c(n)$ меняет знак при $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$ и $c(n_1) > 0$.

Таким образом, в условиях теоремы функция Коши уравнения (1.1) ограничена. $\square$

3.3. Вывод предложения 3.1 из теоремы 3.1. Для произвольного $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ определим на полуоси $\mathbb{N}_n$ функцию $s = s(m) = \sum_{k=n}^m a(k)$. Таким образом, $\Delta s(m) = a(m+1)$.

Предположим, что выполнены условия предложения 3.1. Тогда для любого $m \in E_n$ имеем:

$$\sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) = \sum_{k=h(m)}^m a(k) - \sum_{k=n}^m a(k) \leq 3/2 - s(m).$$

Функция s не убывает. Если $s(m) < 1/2 + \delta$ для всех $m \in \mathbb{N}_n$, то

$$\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_n(m) + \sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) = \sum_{m=n}^{\infty} a(m) < 1/2 + \delta.$$

В противном случае существует такая точка $n_1 \in \mathbb{N}_{n+1}$, что $s(n_1 - 1) \leq 1/2 + \delta$ и $s(n_1) \geq 1/2 + \delta$. Заметим, что для любой точки $n_2 \in \mathbb{N}_{n_1}$ значение суммы $\sum_{m=n_1}^{n_2} \mu(3/2 + \delta - s(m)) \Delta s(m)$ не превосходит половины площади квадрата со стороной $(3/2 + \delta) - (1/2 + \delta) = 1$, т. е. не превосходит $1/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{m=n}^{n_2} \mu \left(\delta \chi_n(m) + \sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) &\leq \sum_{m=n}^{n_2} \mu(\delta + 3/2 - s(m)) \Delta s(m) = \\ &= \sum_{m=n}^{n_1-1} \mu(3/2 + \delta - s(m)) \Delta s(m) + \sum_{m=n_1}^{n_2} \mu(3/2 + \delta - s(m)) \Delta s(m) = \\ &= 1/2 + \delta + \sum_{m=n_1}^{n_2} \mu(3/2 + \delta - s(m)) \Delta s(m) \leq 1/2 + \delta + 1/2 = 1 + \delta. \end{aligned}$$

Таким образом, если выполнено условие (3.1) предложения 3.1, то выполнено и условие (3.4) теоремы 3.1. Примеры уравнений вида (1.1), показывающие преимущества теоремы 3.1 перед предложением 3.1, приведены ниже в разделе 3.5.

3.4. Другие условия ограниченности функции Коши. В этом разделе статьи получим достаточные условия ограниченности решений уравнения (1.1), в которые не входит параметр δ , и которые, тем самым, могут быть удобнее для проверки. Доказательства этих условий основаны на той же идее, что и доказательство теоремы 3.1.

Теорема 3.2. Если для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_{n_0}} \sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^n a(k) \right) a(m) \leq 1, \quad (3.5)$$

то функция Коши уравнения (1.1) ограничена.

Доказательство. Если для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{N}_0$ значения $K(n, m)$ не меняют знак при $n \in \mathbb{N}_m$, то очевидно, что они не возрастают с ростом n , следовательно, $|K(n, m)| \leq 1$.

Зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}_0$ такое, что значения $K(n, m)$ меняют знак при $n \in \mathbb{N}_m$.

Обозначим $c(n) = K(n, m)$. Функция c есть решение уравнения (1.1) на полуоси $\mathbb{N}_m$.

Покажем, что при выполнении условий теоремы для любого числа $M > 0$ и любой такой точки $n_1 \in \mathbb{N}_m$, что $c(n_1) < 0$, имеем: если $c(n) \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$, то $c(n_1) \geq -M$.

В силу линейности уравнения без ограничения общности полагаем $M = 1$.

Обозначим $m_0 = \max\{n \in \mathbb{N}_m^{n_1} \mid c(n) \geq 0\}$.

Для всех $n \in \mathbb{N}_m^{m_0+1}$ имеем:

$$c(n) \leq c(n) - c(m_0 + 1) = - \sum_{k=n}^{m_0} \Delta c(k) = \sum_{k=n}^{m_0} a(k) c(h(k)) \leq \sum_{k=n}^{m_0} a(k),$$

следовательно, для всех $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$ справедливо неравенство

$$c(n) \leq \mu \left(\sum_{k=n}^{m_0} a(k) \right). \quad (3.6)$$

Отсюда получаем

$$c(n_1) \geq c(n_1) - c(m_0) = \sum_{i=m_0}^{n_1-1} \Delta c(i) = - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i) c(h(i)) \geq - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i) \mu \left(\sum_{k=h(i)}^{m_0} a(k) \right) \geq -1.$$

Аналогично получаем, что $c(n_1) \leq \max_{n \in \mathbb{N}_m^{n_1}} |c(n)|$, если $c(n)$ меняет знак при $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$ и $c(n_1) > 0$.

Таким образом, в условиях теоремы функция Коши уравнения (1.1) ограничена. $\square$

Теорема 3.2 позволяет устанавливать устойчивость некоторых уравнений вида (1.1), к которым неприменимо предложение 3.1, однако теорема 3.2 не является обобщением предложения 3.1 (см. раздел 3.5).

Усилим неравенство (3.5):

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_{n_0}} \sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) \leq 1. \quad (3.7)$$

Из показанного выше следует, что если выполнено условие (3.1) предложения 3.1, то выполнено и условие (3.7). Однако равномерную устойчивость уравнения (1.1) неравенство (3.7) не гарантирует, что видно на примере автономного уравнения $\Delta x(n) = ax(n)$.

Лемма 3.1. Если для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_{n_0}} \sum_{m=n}^{\infty} a(m) \chi_n(m) \leq 1,$$

то функция Коши уравнения (1.1) ограничена.

Доказательство. Предположим, что выполнено условие леммы, $K(n, m) \geq 0$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}_{n_0}$, $n \geq m$, $K(n+k, m) \leq 0$ для $k = 1, 2, \dots, p$ и $\max_{k \in \mathbb{N}_m^n} K(k, m) \leq M$. Тогда

$$\begin{aligned} K(n+p, m) &= K(n, m) - \sum_{k=n}^{n+p-1} a(k) K(h(k), m) \geq \\ &\geq K(n, m) - \sum_{k=n}^{n+p-1} a(k) \chi_n(k) M \geq K(n, m) - M \geq -M. \end{aligned}$$

Очевидно, это означает, что $|K(n, m)| \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}_m$. $\square$

Теорема 3.3. Если для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ для всех $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ справедливо неравенство

$$\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) \leq 2 - \sum_{m=n}^{\infty} a(m) \chi_n(m), \quad (3.8)$$

то функция Коши уравнения (1.1) ограничена.

Доказательство. Если для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{N}_0$ значения $K(n, m)$ не меняют знак при $n \in \mathbb{N}_m$, то очевидно, что они не возрастают с ростом n , следовательно, $|K(n, m)| \leq 1$.

Зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}_0$ такое, что значения $K(n, m)$ меняют знак при $n \in \mathbb{N}_m$.

Обозначим $c(n) = K(n, m)$. Функция c есть решение уравнения (1.1) на полуоси $\mathbb{N}_m$.

Покажем, что при выполнении условий теоремы для любого числа $M > 0$ и любой такой точки $n_1 \in \mathbb{N}_m$, что $c(n_1) < 0$, имеем: если $c(n) \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$, то $c(n_1) \geq -M$.

В силу линейности уравнения без ограничения общности полагаем $M = 1$.

Обозначим $m_0 = \max\{n \in \mathbb{N}_m^{n_1} \mid c(n) \geq 0\}$. Обозначим $c(m_0) = \delta$.

Для всех $n \in \mathbb{N}_m^{m_0+1}$ имеем:

$$c(n) = c(n) - c(m_0) + \delta = \delta - \sum_{k=n}^{m_0-1} \Delta c(k) = \delta + \sum_{k=n}^{m_0-1} a(k) c(h(k)) \leq \delta + \sum_{k=n}^{m_0-1} a(k).$$

Для всех $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$ справедливо неравенство

$$c(n) \leq \mu \left(\delta + \sum_{k=n}^{m_0-1} a(k) \right) \leq \delta \chi_{m_0}(n) + \mu \left(\sum_{k=n}^{m_0-1} a(k) \right). \quad (3.9)$$

Отсюда получаем

$$c(n_1) - \delta = \sum_{i=m_0}^{n_1-1} \Delta c(i) = - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i)c(h(i)) \geq - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i) \left(\delta \chi_{m_0}(i) + \mu \left(\sum_{k=h(i)}^{m_0-1} a(k) \right) \right),$$

что равносильно неравенству

$$c(n_1) \geq - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i) \mu \left(\sum_{k=h(i)}^{m_0-1} a(k) \right) + \delta \left(1 - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i) \chi_{m_0}(i) \right).$$

Если $\sum_{m=m_0}^{\infty} a(m) \chi_{m_0}(m) \leq 1$ для любого m_0 , то $c(n)$ ограничена в силу леммы 3.1. Если же сумма больше 1, то правая часть последнего неравенства минимальна при $\delta = 1$, поэтому при выполнении неравенства (3.8) получаем:

$$c(n_1) \geq - \left(2 - \sum_{m=m_0}^{\infty} a(m) \chi_{m_0}(m) \right) + \left(1 - \sum_{m=m_0}^{\infty} a(m) \chi_{m_0}(m) \right) = -1.$$

Аналогично получаем, что $c(n_1) \leq \max_{n \in \mathbb{N}_m^{n_1}} |c(n)|$, если $c(n)$ меняет знак при $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$ и $c(n_1) > 0$.

Таким образом, в условиях теоремы функция Коши уравнения (1.1) ограничена. $\square$

3.5. Сравнения и примеры. Из полученных выше достаточных условий ограниченности функции Коши уравнения (1.1) теорема 3.1 имеет, по-видимому, наиболее широкую область применимости, поскольку предложение 3.1 является ее следствием, а теоремы 3.2 и 3.3 получены упрощением условий теоремы 3.1.

Сравним области применимости предложения 3.1 и теорем 3.2 и 3.3: приведем примеры, показывающие, что любое из трех этих утверждений может быть применимо к уравнению, к которому остальные два утверждения неприменимы. Теорему 3.1 также применим во всех трех примерах.

Пример 3.1. Рассмотрим уравнение (1.1) с параметрами $a(n) \equiv 1$, $h(n) = \begin{cases} n, & n \in 2\mathbb{N}_0; \\ n-1, & n \notin 2\mathbb{N}_0. \end{cases}$

Его функция Коши ограничена: для четных m

$$K(n, m) = \begin{cases} 1, & n - m = 4k, \ k \in \mathbb{N}_0; \\ 0, & n - m = 2k + 1, \ k \in \mathbb{N}_0; \\ -1, & n - m = 4k + 2, \ k \in \mathbb{N}_0; \end{cases}$$

для нечетных m выражение для $K(n, m)$ имеет сдвиг на 1, поскольку $K(m+1, m) = K(m, m)$.

Предложение 3.1 не устанавливает ограниченность функции Коши:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=h(n)}^n a(m) = \sum_{m=0}^1 1 = 2 > 3/2.$$

Теорема 3.2 не устанавливает ограниченность функции Коши:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^n a(k) \right) a(m) = \sum_{m=0}^1 \mu \left(\sum_{k=h(m)}^0 1 \right) = 2 > 1.$$

Теорема 3.3 устанавливает ограниченность функции Коши, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^{-1} a(k) \right) a(m) &= \sum_{m=1}^1 (\mu(1) \cdot 1) = 1 \leq 2 - \sum_{m=1}^1 1; \\ \sum_{m=2}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^1 a(k) \right) a(m) &= \sum_{m=2}^3 (\mu(0) \cdot 1) = 0 \leq 2 - \sum_{m=2}^3 1. \end{aligned}$$

Теорема 3.1 устанавливает ограниченность функции Коши, поскольку

$$\begin{aligned} \sup_{\delta \in [0,1]} \sum_{m=0}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_0(m) + \sum_{k=h(m)}^{-1} a(k) \right) a(m) &= \sup_{\delta \in [0,1]} \sum_{m=0}^1 \mu(\delta) = 2\delta \leq 1 + \delta, \\ \sup_{\delta \in [0,1]} \sum_{m=1}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_1(m) + \sum_{k=h(m)}^0 a(k) \right) a(m) &= \sup_{\delta \in [0,1]} \sum_{m=1}^1 \mu(\delta + 1) \leq 1 + \delta. \end{aligned}$$

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение (1.1) с параметрами

$$a(n) = \begin{cases} 3/10, & n \neq 5k, k \in \mathbb{N}_1; \\ 9/10, & n = 5k, k \in \mathbb{N}_1; \end{cases} \quad h(n) = \begin{cases} n, & n \neq 5k, k \in \mathbb{N}_1; \\ n - 4, & n = 5k, k \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

Его функция Коши ограничена: нетрудно видеть, что для любых $(n, m) \in \mathbb{D}$ имеем:

$$K(n + 5, m) = K(n, m) \cdot ((3/10)^4 - 9/10).$$

Предложение 3.1 не устанавливает ограниченность функции Коши:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=h(n)}^n a(m) = \sum_{m=1}^5 a(m) = 21/10 > 3/2.$$

Теорема 3.2 устанавливает ограниченность функции Коши:

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^n a(k) \right) a(m) &= \sum_{m=4}^5 \mu \left(\sum_{k=h(m)}^4 a(k) \right) a(m) = \\ &= \mu(3/10) \cdot 3/10 + \mu(12/10) \cdot 9/10 = 9/100 + 9/10 = 99/100 < 1. \end{aligned}$$

Теорема 3.3 не устанавливает ограниченность функции Коши:

$$\begin{aligned} \sum_{m=4}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^3 a(k) \right) a(m) &= \mu \left(\sum_{k=h(4)}^3 a(k) \right) 3/10 + \mu \left(\sum_{k=h(1)}^3 a(k) \right) 9/10 = \\ &= \mu(9/10) \cdot 9/10 = 81/100 > 8/10 = 2 - 3/10 - 9/10 = 2 - \sum_{m=4}^{\infty} a(m) \chi_4(m). \end{aligned}$$

Теорема 3.1 устанавливает ограниченность функции Коши:

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}_0, \delta \in [0,1]} \left[\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\delta + \sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) - \delta \right] &= \sup_{\delta \in [0,1]} \left[\sum_{m=4}^4 \mu \left(\delta + \sum_{k=1}^4 a(k) \right) a(m) - \delta \right] = \\ &= \sup_{\delta \in [0,1]} [9/10 \cdot \mu(\delta + 9/10) - \delta] < 1. \end{aligned}$$

Ниже рассмотрим некоторые автономные уравнения вида $\Delta x(n) + ax(n-r) = 0$, где $a, r \geq 0$. Необходимым и достаточным условием ограниченности решений этих уравнений (а значит, и ограниченности их функций Коши) является $a \leq 2 \cos \frac{r\pi}{2r+1}$ (см. [11]).

Пример 3.3. Рассмотрим уравнение $\Delta x(n) + ax(n-1) = 0$, где $a \geq 0$. Необходимым и достаточным условием ограниченности его функции Коши является $a \leq 1$.

Предложение 3.1 дает условие $a + a \leq 3/2$, т. е. $a \leq 3/4$.

Теорема 3.2 дает условие $a(\mu(a) + \mu(2a)) \leq 1$, что равносильно оценке $a \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Теорема 3.3 дает условие $a(\mu(a)) \leq 2 - 2a$, что равносильно оценке $a \leq \sqrt{3} - 1$.

Таким образом для $a \in (\sqrt{3} - 1, 3/4]$ предложение 3.1 устанавливает ограниченность функции Коши, а теоремы 3.2 и 3.3 нет.

Теорема 3.1 дает условие: $a(\mu(\delta) + \mu(\delta + a)) \leq 1 + \delta$ для всех $\delta \in [0, 1]$. Нетрудно установить, что это равносильно точной оценке $a \leq 1$.

Уравнение $\Delta x(n) + ax(n-1) = 0$ — не единственное автономное уравнение вида (1.1), для которое достаточное условие ограниченности функции Коши, получаемое с помощью теоремы 3.1, оказывается необходимым.

Пример 3.4. Рассмотрим автономное уравнение без запаздывания $\Delta x(n) + ax(n) = 0$, $a \geq 0$. Необходимым и достаточным условием ограниченности его функции Коши является неравенство $a \leq 2$.

Нетрудно видеть, что предложение 3.1 дает условие $a \leq 3/2$, теоремы 3.1 и 3.3 дают точное условие $a \leq 2$, а теорема 3.2 — условие $a \leq 1$.

Интересным был бы анализ близости условий ограниченности функции Коши автономного уравнения $\Delta x(n) + ax(n-r) = 0$, которые дают предложение 3.1 и теоремы 3.1–3.3, к точным. Заметим, что в этом вопросе теоремы 3.1–3.3 существенно уступают предложению 3.1 в удобстве использования, поэтому такой анализ нетривиален. В этой работе он не проводится.

4. УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В этом разделе коснемся вопроса о том, какие требуются дополнительные условия к полученным выше условиям ограниченности функции Коши уравнения (1.1), чтобы получать достаточные условия асимптотических видов устойчивости.

Предложение 4.1 (см. [6]). Если $\sum_{m=0}^{\infty} a(m) < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $l > 0$, что при $n \geq m + l$ для функции Коши уравнения (1.1) справедлива оценка

$$|K(n, m) - 1| \leq \varepsilon.$$

Предложение 4.2 (см. [6]). Если справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=h(n)}^n a(m) < 3/2, \quad (4.1)$$

то для некоторых $N, \gamma > 0$ функция Коши уравнения (1.1) подчинена оценке

$$|K(n, m)| \leq N e^{-\gamma \sum_{k=m}^n a(k)}, \quad (n, m) \in \mathbb{D}. \quad (4.2)$$

Следствие 4.1. Если $\sum_{m=0}^{\infty} a(m) = \infty$ и для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство (4.1), то уравнение (1.1) асимптотически устойчиво.

Предложение 4.3 (см. [3]). Если для уравнения (1.1) выполнено $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=h(n)}^n a(m) < \infty$, то его равномерная асимптотическая устойчивость равносильна справедливости оценки (4.2).

Предложение 4.4 (см. [3]). Если уравнение (1.1) равномерно асимптотически устойчиво и $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=h(n)}^n a(m) < \infty$, то оно экспоненциально устойчиво.

В предыдущем разделе, излагая новые результаты, мы привели несколько их видов. В этом разделе мы будем вводить дополнительные условия к условиям теоремы 3.1, а теоремы 3.2 и 3.3 развивать далее не будем. Такой подход объясняется тем, что мы считаем, что основное внимание следует уделить различию условий, накладываемых для разных видов асимптотической устойчивости; реализация этих дополнений к условиям равномерной устойчивости для теорем 3.1–3.3 идейно не отличается.

Предложение 4.1 показывает, что условие $\sum_{m=0}^{\infty} a(m) = \infty$ является необходимым условием асимптотической устойчивости уравнения (1.1). Поэтому везде ниже оно будет входить в любой список достаточных условий асимптотической устойчивости уравнения (1.1).

Теорема 4.1. Если $\sum_{m=0}^{\infty} a(m) = \infty$ и справедлива оценка

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \in [0,1]} \left[\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_n(m) + \sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) - \delta \right] < 1, \quad (4.3)$$

то уравнение (1.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Поскольку $\sum_{m=0}^{\infty} a(m) = \infty$, то решение уравнения, сохраняющее знак на полуоси, убывает к нулю, поэтому рассмотрим знакопеременное решение.

В таком случае единственное существенное отличие от доказательства теоремы 3.1 состоит в том, что величину $c(n_1)$ следует оценивать снизу числом не (-1) , а таким $(-S) > (-1)$, что выражение под знаком верхнего предела меньше S для достаточно больших n . $\square$

Теорему 4.1 естественно сопоставить со следствием 4.1. Однако аналогия не продолжается на предложение 4.2: неравенство (4.3) само по себе не гарантирует выполнения оценки (4.2).

Пример 4.1. Положим $a(n) = 1/2$ для $n \in \mathbb{N}_0$. Зададим последовательность точек полуоси $\mathbb{N}_0$ рекуррентно: $n_0 = 0$; $n_{i+1} = n_i + i + 1$ для $i \in \mathbb{N}_0$. Определим запаздывание

$$h(n) = \begin{cases} n, & n \in \mathbb{N}_{n_i}^{n_{i+1}-1}, \\ n_i, & n = n_{i+1} - 1; \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Нетрудно видеть, что условие (4.3) выполнено:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_n(m) + \sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) - \delta \right] &= \frac{1}{2} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_n(m) + \frac{n - h(m)}{2} \right) - \delta \right] = \\ &= \frac{1}{2} \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=n_{i+1}-1}^{n_{i+1}-1} \mu \left(\delta + \frac{n_{i+1} - n_i}{2} \right) - \delta \right] = \frac{1}{2} \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \left[\mu \left(\delta + \frac{2^i + 1}{2} \right) - \delta \right] = \frac{1 - \delta}{2} < 1. \end{aligned}$$

Пусть $x(0) = 1$. Тогда

$$x(n) = \begin{cases} x(n_i) \cdot 2^{-(n-n_i)}, & n \in \mathbb{N}_{n_i}^{n_{i+1}}; \\ x(n_{i+1} - 1) - x(n_i)/2, & n = n_{i+1}. \end{cases}$$

Отсюда

$$x(n_{i+1}) = x(n_{i+1} - 1) - x(n_i)/2 = x(n_i)2^{-i} - x(n_i)/2 = x(n_i)(2^{-i} - 2^{-1}) = \frac{x(n_i)(2^{1-i} - 1)}{2}.$$

Элементы последовательности $\{x(n_i)\}$ являются локальными экстремумами функции x . Поскольку $x(n_{i+1})/x(n_i) \rightarrow -1/2$, а $n_i - n_{i-1} \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, то функция x убывает медленнее любой экспоненты.

Таким образом, оценка (4.2) не выполняется. Более того, выполнение условий теоремы 4.1 не гарантирует равномерной асимптотической устойчивости уравнения (1.1).

Для равномерности асимптотической устойчивости требуется наложить условие на последствие. Например, в свете доказательств предыдущих теорем очевидно следующее утверждение.

Теорема 4.2. Если выполнены условия теоремы 4.1 и, более того, для некоторого $b > 0$ справедливо $a(n) \geq b$, то уравнение (1.1) экспоненциально устойчиво.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

С конца XX века дифференциальные и разностные уравнения с последействием развиваются часто параллельными курсами. Интересно сопоставить достижения и трудности в этих исследованиях, не обращаясь без необходимости к объединениям или обобщениям этих двух классов

уравнений (к гибридным уравнениям, уравнениям «на шкалах» и др.). Многие вопросы для уравнений на дискретной полуоси решаются проще вследствие более простой аналитической техники. С другой стороны, в исследовании разностных уравнений возникает немало трудностей, для дифференциальных уравнений отсутствующих. В отношении вопросов, исследуемых в настоящей статье, отметим следующее. Важный класс уравнений с последствием составляют уравнения, для которых последствие ограничено; в нашем случае это ограниченность величины $n - h(n)$. Для дифференциальных уравнений ограничение последствия отменяет особенно сложные виды поведения решений, что, как правило, упрощает исследование. Однако для разностных уравнений запрет такого поведения существенно влияет на точность условий устойчивости: в частности, оказывается, что константа $3/2$ перестает быть точной (в работе [12] для уравнения (1.1) с ограниченным последствием найдена новая граница устойчивости, затем в работе [6] доказана точность этой константы, а в работе [2] результаты обобщены на случай уравнения с несколькими запаздываниями).

Об уравнениях с несколькими запаздываниями следует сказать отдельно. Более 30 лет назад было замечено [10], что содержательное обобщение условий устойчивости на такие уравнения — нетривиальная задача: формально «точное» обобщение теорем «о $3/2$ » плохо описывает асимптотику решений уравнений с сильно отличающимися функциями запаздываний. С тех пор вопрос о хорошем обобщении теорем «о $3/2$ » остается актуальным. Работа [8] была написана как попытка подступиться именно к этому вопросу, в таком свете можно рассматривать и настоящую работу: автор полагает, что полученные в ней новые условия устойчивости допускают существенно более точный перенос на уравнения с несколькими запаздываниями, чем теоремы в виде ограничений интеграла или суммы коэффициентов по длине запаздывания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. Куликов А. Ю. Устойчивость линейного неавтономного разностного уравнения с ограниченными запаздываниями // Изв. вузов. Мат. — 2010. — № 11. — С. 22–30.
3. Куликов А. Ю., Малыгина В. В. Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения // Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 12. — С. 30–41.
4. Малыгина В. В. Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом // Дифф. уравн. — 1992. — 28, № 10. — С. 1716–1723.
5. Малыгина В. В. Теорема Мышкиса о $3/2$ и ее обобщения // Сиб. мат. ж. — 2023. — 64, № 6. — С. 1248–1262. — DOI: [10.33048/smzh.2023.64.611](https://doi.org/10.33048/smzh.2023.64.611).
6. Малыгина В. В., Куликов А. Ю. Об устойчивости неавтономных разностных уравнений с несколькими запаздываниями // Изв. вузов. Мат. — 2008. — № 3. — С. 18–26.
7. Мышкис А. Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Мат. сб. — 1951. — 28, №3. — С. 641–658.
8. Чудинов К. М. Новый подход к задаче Мышкиса об устойчивости дифференциального уравнения первого порядка с последствием // Мат. труды. — В печати, 2025.
9. Berezensky L., Braverman E. On existence of positive solutions for linear difference equations with several delays // Adv. Dynam. Syst. Appl. — 2006. — 1, № 1. — С. 29–47. — DOI: [10.1155/ADE/2006/82143](https://doi.org/10.1155/ADE/2006/82143).
10. Krisztin T. On stability properties for one-dimensional functional-differential equations // Funkcial. Ekvac. — 1991. — 34. — С. 241–256.
11. Levin S. A., May R. M. A note on delay-differential equations // Theoret. Popul. Biol. — 1976. — № 9. — С. 178–187. — DOI: [10.1016/0040-5809\(76\)90043-5](https://doi.org/10.1016/0040-5809(76)90043-5).
12. Yu J.-S. Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay // Comput. Math. Appl. — 1998. — 36, № 10–12. — С. 203–210. — DOI: [10.1016/S0898-1221\(98\)80021-7](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(98)80021-7).

К. М. Чудинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

E-mail: cyril@list.ru, РИНЦ SPIN-код: 1944-6552, РИНЦ AuthorID: [475163](https://elibrary.ru/475163), ResearcherID: [ABI-6384-2020](https://orcid.org/0000-0002-7574-793X), Scopus: [55759745800](https://orcid.org/55759745800), ORCID: [0000-0002-7574-793X](https://orcid.org/0000-0002-7574-793X)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-138-150](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-138-150)
 EDN: UIEWLQ

UDC 517.929
 Research article

On the stability conditions for a linear difference equation with variable delay

K. M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

Abstract. The constant $3/2$, which determines sufficient conditions for the stability of linear nonautonomous differential equations with delay, was first obtained by A. D. Myshkis in the middle of the twentieth century, and these results initiated the research of equations with aftereffect. The goal of such a research is stability conditions explicitly expressed in terms of the equation parameters. In the last decade of the twentieth century, the first discrete analogues of the results of such investigations were established: effective sufficient conditions for the stability of difference equations with aftereffect. Recently, stability conditions for differential equations with aftereffect have been obtained, which strengthen the well-known theorems, expressed through estimating the values of functionals of the parameters of the equation by the constant $3/2$. In this paper, we obtain discrete analogs of these results, i.e., sufficient conditions for the stability of a linear nonautonomous difference equation with delay expressed in terms of the equation parameters (coefficients and delays) and significantly strengthening the well-known conditions of this kind.

Keywords: linear nonautonomous differential equation, variable delay, uniform stability, asymptotic stability, exponential stability.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: K. M. Chudinov, “On the stability conditions for a linear difference equation with variable delay,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 1, 138–150. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-138-150](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-138-150) EDN: UIEWLQ

REFERENCES

1. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatullina, *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional Differential Equations], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
2. A. Yu. Kulikov, “Ustoychivost' lineynogo neavtonomnogo raznostnogo uravneniya s ogranichennymi zapazdyvaniyami” [Stability of a linear nonautonomous difference equation with bounded delays], *Izv. Vuzov. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2010, No. 11, 22–30 (in Russian).
3. A. Yu. Kulikov and V. V. Malygina, “Ustoychivost' lineynogo raznostnogo uravneniya i otsenki ego fundamental'nogo resheniya” [Stability of a linear difference equation and estimates of its fundamental solution], *Izv. Vuzov. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2011, No. 12, 30–41 (in Russian).
4. V. V. Malygina, “Nekotorye priznaki ustoychivosti uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom” [Some stability criteria for equations with delayed arguments], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1992, **28**, No. 10, 1716–1723 (in Russian).
5. V. V. Malygina, “Teorema Myshkisa o $3/2$ i ee obobshcheniya” [Myshkis's $3/2$ theorem and its generalizations], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 2023, **64**, No. 6, 1248–1262 (in Russian), DOI: [10.33048/smzh.2023.64.611](https://doi.org/10.33048/smzh.2023.64.611).
6. V. V. Malygina and A. Yu. Kulikov, “Ob ustoychivosti neavtonomnykh raznostnykh uravneniy s neskol'kimi zapazdyvaniyami” [On the stability of nonautonomous difference equations with several delays], *Izv. Vuzov. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2008, No. 3, 18–26 (in Russian).



7. A. D. Myshkis, “O resheniyakh lineynykh odnorodnykh differentsial’nykh uravneniy pervogo poryadka ustoychivogo tipa s zapazdyvayushchim argumentom” [On solutions of first-order linear homogeneous differential equations of stable type with delayed argument], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1951, **28**, No. 3, 641–658 (in Russian).
8. K. M. Chudinov, “Novyy podkhod k zadache Myshkisa ob ustoychivosti differentsial’nogo uravneniya pervogo poryadka s posledeystviem” [A new approach to the Myshkis problem on the stability of a first-order differential equation with aftereffect], *Mat. Trudy* [Math. Proceedings], 2025, *to be printed*.
9. L. Berezansky and E. Braverman, “On existence of positive solutions for linear difference equations with several delays,” *Adv. Dynam. Syst. Appl.*, 2006, **1**, No 1, 29–47, DOI: [10.1155/ADE/2006/82143](https://doi.org/10.1155/ADE/2006/82143).
10. T. Krisztin, “On stability properties for one-dimensional functional-differential equations,” *Funkcial. Ekvac.*, 1991, **34**, 241–256.
11. S. A. Levin and R. M. May, “A note on delay-differential equations,” *Theoret. Popul. Biol.*, 1976, No. 9, 178–187, DOI: [10.1016/0040-5809\(76\)90043-5](https://doi.org/10.1016/0040-5809(76)90043-5).
12. J.-S. Yu, “Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay,” *Comput. Math. Appl.*, 1998, **36**, No. 10–12, 203–210, DOI: [10.1016/S0898-1221\(98\)80021-7](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(98)80021-7).

K. M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

E-mail: cyril@list.ru, eLIBRARY SPIN-code: 1944-6552, eLIBRARY AuthorID: [475163](https://elibrary.ru/475163), ResearcherID: [ABI-6384-2020](https://orcid.org/0000-0002-7574-793X), Scopus: [55759745800](https://orcid.org/0000-0002-7574-793X), ORCID: [0000-0002-7574-793X](https://orcid.org/0000-0002-7574-793X)