

РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ ОПЕРАТОР ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ КВАДРАТИЧНО-СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

И. А. УСЕНОВ, Р. К. УСЕНОВА

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. Задачи решения нелинейных интегральных уравнений первого рода относятся к классу некорректно поставленных задач, так как их решение может не существовать, быть неопределенным либо неустойчивым относительно малых возмущений исходных данных. Это существенно осложняет их практическое применение в математическом моделировании и смежных областях, где такие уравнения возникают при описании обратных задач.

В данной работе построен оператор регуляризации для решения одного класса нелинейных интегральных уравнений первого рода в пространстве квадратично-суммируемых функций в случае, когда ядро и правая часть заданы приближенно.

Конструкция предлагаемого метода регуляризации основана на регуляризованном уравнении, полученном по аналогии с методом Лаврентьева.

В работе получен выбор параметра регуляризации в зависимости от погрешностей правой части и ядра. Получены априорные оценки. Установлены оценки скорости сходимости регуляризованного решения к точному решению исходного нелинейного интегрального уравнения первого рода. Для явного представления решения использованы фундаментальные функции Э. Шмидта.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение первого рода, некорректно поставленная задача, оператор регуляризации, метод Лаврентьева, фундаментальные функции Э. Шмидта.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. *Усенов И. А.* — исследование сходимости приближенного решения к точному решению исходного уравнения; *Усенова Р. К.* — выбор параметра регуляризации в зависимости от погрешностей приближенно заданных данных.

Для цитирования: *Усенов И. А., Усенова Р. К.* Регуляризирующий оператор для решения нелинейного интегрального уравнения первого рода в пространстве квадратично-суммируемых функций // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 126–137. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-126-137](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-126-137) EDN: [UFBDNA](https://www.edn.ru/UFBDNA)

ВВЕДЕНИЕ

Теория некорректно поставленных задач является одним из ведущих математических направлений. Ее развитие в значительной степени стимулируется богатейшими практическими приложениями. В свою очередь, необходимость решения прикладных задач ставит перед исследователями широкий комплекс сложнейших математических задач и требует развития теоретического аппарата, существенно обогащающего математику в целом. Не зря это направление всегда привлекало

к себе величайшие математические умы XX века, которые, с уверенностью можно сказать, стояли у истоков развития данного направления — А. Н. Тихонов, М. М. Лаврентьев, В. К. Иванов, В. Н. Страхов, Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс и др.

В данной работе исследуется класс нелинейного интегрального уравнения первого рода в пространстве квадратично-суммируемых функций с приближенно заданными данными.

Конструкция метода регуляризации связана с регуляризованным уравнением, полученным на основе идеи метода Лаврентьева. Устанавливаются оценки скорости сходимости регуляризованного решения к точному решению исходного уравнения первого рода.

Данная работа имеет теоретическую направленность. Результат может быть использован для решения прикладных задач геофизики, теплофизики, фильтрующей оптики, медицинской визуализации и т. д.

Многие прикладные задачи физики и геофизики сводятся к операторным уравнениям первого рода. К таким уравнениям сводятся также обратные задачи математической физики в тех случаях, когда выражение для функции Грина неизвестно.

Обратная задача электрокаротажа скважин, определяющая месторождения и подсчет запасов полезных ископаемых, является примером таких задач.

Вышперечисленные прикладные задачи являются актуальными задачами современной науки, решение этих задач может открыть новые грани современного состояния развития человечества. В связи с этим подчеркивается важность исследования некорректно поставленных задач.

В [1, 2, 6, 7, 10–12] систематически изучались линейные уравнения первого рода и некоторые классы нелинейных операторных уравнений первого рода.

Методы регуляризации для решения нелинейных уравнений первого рода рассматриваются в [1–18, 20–22].

В работе [9] исследовано нелинейное интегральное уравнение первого рода в пространстве непрерывных функций.

В работе [15] построен регуляризирующий оператор для решения интегрального уравнения первого рода, когда приближенно задана правая часть уравнения. Данная работа является продолжением работы [15], т. е. исследуется нелинейное интегральное уравнение первого рода с приближенными данными.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В $L_2[0, 1]$ введем интегральные операторы:

$$Az = \int_0^1 K(t, s)z(s)ds, \quad K(z) = \int_0^1 H(t, s)M(s, z(s))ds.$$

Линейный оператор отображает $L_2([0, 1] \times [0, 1])$ в себя, т. е. $A: L_2([0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1] \times [0, 1])$, нелинейный оператор K определен в пространстве $L_2([0, 1] \times [0, 1])$.

Используем стандартные обозначения и условия:

А) $K(t, s) = K(s, t) \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$, $\int_0^1 \int_0^1 K(t, s)z(s)z(t)dsdt > 0$, $u(t) \in L_2[0, 1]$;

В) $H(t, s) \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$ удовлетворяет равенству

$$H(t, s) = \int_0^s K(t, v)dv;$$

С) $M(s, z(s)) \in C([0, 1] \times \mathbb{R})$ истокпредставимо в виде

$$M(s, z(s)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(s)}{\lambda_j^\sigma} \int_0^1 M_1(w, z(w))\phi_j(w)dw,$$

где $0 < \sigma < 1$, $M_1(v, z(v)) \in C([0, 1] \times \mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Липшица по z , т. е.

$$\|M_1(v, z_1(v)) - M_1(v, z_2(v))\|_{L_2[0,1]} \leq N\|z_1(v) - z_2(v)\|_{L_2[0,1]}.$$

Введем интегральное уравнение

$$\int_0^1 K(t, s)M(s, z(s))ds = u(t), \quad (1.1)$$

где $\int_0^1 K(t, s)M(s, z(s))ds = Az + K(z)$.

Предположим, что

- D) при $u(t) = u_0(t) \in L_2[0, 1]$ уравнение (1.1) имеет единственное решение $z_0(t) \in L_2[0, 1]$;
- E) вместо $u_0(t) \in L_2[0, 1]$ нам известно $u_\delta(t) \in L_2[0, 1]$ такое, что $\|u_\delta(t) - u_0(t)\|_{L_2[0, 1]} \leq \delta$, где δ — параметр погрешности;
- F) вместо ядра $K(t, s) \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$ нам известно $K_h(t, s) \in L_2[0, 1]$ такое, что выполнено $\|K_h(t, s) - K(t, s)\|_{L_2[0, 1]} \leq h$, где h — параметр погрешности.

Тогда уравнение (1.1) с приближенными данными запишется в виде

$$\int_0^1 K_h(t, s)M(s, z(s))ds = u_\delta(t).$$

Наряду с уравнением (1.1) введем регуляризованное уравнение

$$\alpha z_\alpha(t) + \int_0^1 K(t, s)z_\alpha(s)ds + \int_0^1 H(t, s)M(s, z_\alpha(s))ds = u(t) \quad (1.2)$$

и регуляризованное уравнение с приближенными данными

$$\alpha z_\alpha(t) + \int_0^1 K_h(t, s)z_\alpha(s)ds + \int_0^1 H_h(t, s)M(s, z_\alpha(s))ds = u_\delta(t). \quad (1.3)$$

Изучим вопрос о связи решений уравнений (1.1), (1.2), (1.3).

В данной работе с помощью α -регуляризации Лаврентьева [12] построен регуляризирующий оператор для решения одного класса нелинейного интегрального уравнения первого рода в случае, когда ядро и правая часть заданы приближенно.

2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Основным объектом исследования является уравнение (1.3). Для регуляризации решения уравнения (1.3) используем результаты [15] регуляризации уравнения (1.2). Для этого уравнение (1.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha z_\alpha(t) + \int_0^1 K(t, s)z_\alpha(s)ds + \int_0^1 H(t, s)M(s, z_\alpha(s))ds + \\ + \int_0^1 R_h(t, s)z_\alpha(s)ds + \int_0^1 T_h(t, s)M(s, z_\alpha(s))ds = u_\delta(t), \end{aligned}$$

где $R_h(t, s) = K_h(t, s) - K(t, s)$, $T_h(t, s) = H_h(t, s) - H(t, s)$. Тогда ядро $T_h(t, s)$ в силу условия B) запишется в виде:

$$T_h(t, s) = H_h(t, s) - H(t, s) = \int_0^s (K_h(t, v) - K(t, v))dv = \int_0^s R_h(t, v)dv.$$

Для явного представления решения используем фундаментальные функции Э. Шмидта.

Пусть $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированные собственные функции ядра $K(t, s)$, соответствующие собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$.

В силу теоремы Гильберта—Шмидта имеем

$$\int_0^1 K(t, s)z(s)ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k} \phi_k(t), \quad z_k = \int_0^1 z(s)\phi_k(s)ds. \quad (2.1)$$

Функцию $u(t) \in L_2[0, 1]$ разлагаем в ряд Фурье по системе функций $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(t), \quad u_k = \int_0^1 u(s)\phi_k(s)ds. \quad (2.2)$$

Используя (1.2), (1.3), (2.1) и (2.2), из (1.1) получим, учитывая ортонормированность собственных функций

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k} \phi_k(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(t) - \int_0^s \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(t)\phi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma+1}} M_1(v, z(v)) ds dv - \\ &- \int_0^1 R_h(t, s)z_{\alpha}(s)ds - \int_0^1 \int_0^s R_h(t, v)dv \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(s)}{\lambda_j^{\sigma}} \int_0^1 M_1(w, z(w))\phi_j(w)dw ds. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Меняя порядок интегрирования в (2.3), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k} \phi_k(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(t) + \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(t)\phi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma+1}} M_2(s, z(s))ds - \\ &- \int_0^1 R_h(t, s)z_{\alpha}(s)ds - \int_0^1 R_h(t, w)dw \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(t)\phi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma}} M_2(s, z(s))ds, \\ M_2(s, z(s)) &= \int_0^s M_1(v, z(v))dv. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Наряду с уравнением (2.4) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$\begin{aligned} \alpha z_{\alpha}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k} \phi_k(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma+1}} - \\ &- \int_0^1 R_h(t, s)z_{\alpha}(s)ds - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 R_h(t, s)ds, \quad M_k = \int_0^1 M_2(s, z(s))\phi_k(s)ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Введем обозначение

$$f_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma+1}} - \int_0^1 R_h(t, s)z_{\alpha}(s)ds - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 R_h(t, s)ds. \quad (2.6)$$

Тогда уравнение (2.5) формально запишется в виде

$$\alpha z_{\alpha}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k} \phi_k(t) = f_k(t). \quad (2.7)$$

Обе части (2.7) умножим на функцию $\phi_k(t)$ и проинтегрируем от 0 до 1. Учитывая ортонормированность собственных функций $\phi_k(t)$, получаем

$$\alpha z_k + \frac{z_k}{\lambda_k} = f_k.$$

Отсюда

$$z_k = \frac{\lambda_k f_k}{1 + \alpha \lambda_k}, \quad f_k = \int_0^1 f_k(s) \phi_k(s) ds. \quad (2.8)$$

С учетом обозначения (2.6) вычислим значение f_k :

$$\begin{aligned} f_k &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(s) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma+1}} - \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 R_h(s, v) dv \right) \phi_k(s) ds = \\ &= u_k + \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma+1}} - \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv ds - \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 R_h(s, v) dv. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.8), имеем

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k} \left(u_k + \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma+1}} - \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv ds - \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 R_h(s, v) dv \right) = \\ &= \frac{\lambda_k u_k}{1 + \alpha \lambda_k} + \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)} - \frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv ds - \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma-1} (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 R_h(s, v) dv. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставляем (2.10) в (2.5), имеем

$$\begin{aligned} z_{\alpha}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(t)}{\alpha \lambda_k} &\left(\frac{\lambda_k u_k}{1 + \alpha \lambda_k} + \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)} - \frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv ds - \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma-1} (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 R_h(s, v) dv \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma+1}} - \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 R_h(s, v) dv = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv ds - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 R_h(s, v) dv. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Введем новую неизвестную функцию $h(t)$:

$$h_{\alpha}(t) = z_{\alpha}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)}.$$

В работе [15] доказано, что оператор $E - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)}$ имеет обратный оператор. Тогда

$$z_{\alpha}(t) = B_{\alpha} h_{\alpha}(t), \quad \text{где} \quad B_{\alpha} = \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)} \right)^{-1}. \quad (2.12)$$

Оператор B_{α} удовлетворяет условию Липшица

$$\|B_{\alpha} h_1 - B_{\alpha} h_2\|_{L_2[0,1]} \leq \frac{1}{1-q} \|h_1(t) - h_2(t)\|_{L_2[0,1]}.$$

Уравнение (2.11) запишется в виде

$$h_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha h_\alpha(v) dv ds - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^\sigma (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 R_h(s, v) dv. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) решаем методом последовательных приближений:

$$h_k(t) = h_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha h_{k-1}(v) dv ds - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^\sigma (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 R_h(s, v) dv, \quad (2.14)$$

где

$$h_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k}$$

— нулевое приближение.

Покажем, что последовательность $\{h_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ приближений сходится в пространстве $L_2[0, 1]$. Для этого из элементов последовательности составим функциональный ряд

$$h_0(t) + [h_1(t) - h_0(t)] + [h_2(t) - h_1(t)] + \dots + [h_k(t) - h_{k-1}(t)] + \dots \quad (2.15)$$

Оценивая каждый член ряда, составляем мажорантный ряд.

Оценим первый член ряда (2.15):

$$\|h_0(t)\|_{L_2[0,1]} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k}{1 + \alpha \lambda_k} \phi_k(t) \right\|_{L_2[0,1]} \leq \frac{1}{\alpha} \|u\|_{L_2[0,1]}.$$

Оценим второй член ряда (2.15):

$$\begin{aligned} \|h_1(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,1]} &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha h_0(v) dv ds \right\|_{L_2[0,1]} + \\ &+ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(t)}{\lambda_k^\sigma (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) M_2(v, B_\alpha h_0(v)) dv ds \right\|_{L_2[0,1]} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha h_0(v) dv ds \phi_k(t) \right)^2 \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^\sigma (1 + \alpha \lambda_k)} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) M_2(v, B_\alpha h_0(v)) dv ds \phi_k(t) \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left(\left(\int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha h_0(v) dv \right)^2 \right)^{1/2} + \\ &+ (1 - \sigma)^{-\sigma} \sigma^{\sigma+1} \alpha^\sigma \left(\left(\int_0^1 R_h(s, v) M_2(v, B_\alpha h_0(v)) dv ds \phi_k(t) \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое справа в неравенстве (2.16):

$$\left(\int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha h_0(v) dv \right)^2 \leq \int_0^1 (R_h(s, v))^2 dv \int_0^1 (B_\alpha h_0(v))^2 dv \leq h^2 \|B_\alpha h_0(v)\|_{L_2[0,1]}^2. \quad (2.17)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 R_h(s, v) M_2(v, B_\alpha h_0(v)) dv \right)^2 &\leq \int_0^1 (R_h(s, v))^2 dv \int_0^1 (M_2(v, B_\alpha h_0(v)))^2 dv \leq \\ &\leq h^2 \left(\sup_{0 \leq v \leq 1} |M_2(v, B_\alpha h_0(v))| \right)^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Учитывая неравенства (2.17), (2.18), из неравенства (2.16) получаем

$$\begin{aligned} \|h_1(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,1]} &\leq \frac{h}{\alpha} \|B_\alpha h_0(v)\|_{L_2[0,1]} + (1 - \sigma)^{-\sigma} \sigma^{\sigma+1} \alpha^\sigma h \|M_2(v, B_\alpha h_0(v))\|_{L_2[0,1]} \leq \frac{h}{\alpha} c, \\ c &= \|B_\alpha h_0(v)\|_{L_2[0,1]} - (1 - \sigma)^{-\sigma} \sigma^{\sigma+1} \alpha^{\sigma+1} \|M_2(v, B_\alpha h_0(v))\|_{L_2[0,1]}. \end{aligned}$$

Оценим третий член ряда (2.15):

$$\begin{aligned} \|h_2(t) - h_1(t)\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) (B_\alpha h_1(v) - B_\alpha h_0(v)) dv ds \right\| + \\ &+ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(t)}{\lambda_k^\sigma (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) (M_2(v, B_\alpha h_1(v)) - M_2(v, B_\alpha h_0(v))) dv ds \right\| \leq \\ &\leq \frac{h}{\alpha} c_1 \|h_1(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,1]}, \quad c_1 = \frac{N(1 + (1 - \sigma)^{-\sigma} \sigma^{\sigma+1} \alpha^{\sigma+1})}{1 - q}. \end{aligned}$$

По методу полной математической индукции можно доказать справедливость неравенства для любого натурального $k \geq 2$:

$$\|h_k(t) - h_{k-1}(t)\|_{L_2[0,1]} \leq \left(\frac{h}{\alpha} c_1 \right)^{k-1} \|h_1(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,1]}.$$

Таким образом, функциональный ряд (2.15) мажорируется следующим числовым рядом:

$$\|h_0(t)\|_{L_2[0,1]} + \left(\frac{h}{\alpha} c_1 \right)^{k-1} \|h_1(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,1]}. \quad (2.19)$$

Допустим, что параметр α выбран так, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\alpha(h)} = 0. \quad (2.20)$$

Тогда существует число h_0^0 такое, что

$$q_1 \equiv \frac{h}{\alpha} c_1 < 1, \quad h < h_0^0.$$

При выполнении этого условия числовой ряд (2.19) сходится, и его сумма равна

$$\|h_0(t)\|_{L_2(0,1)} + \frac{1}{1 - q_1} \|h_1 - h_0\|_{L_2(0,1)}.$$

Через $h_\alpha^h(t)$ обозначим сумму ряда (2.15), причем по построению

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(t) = h_\alpha^h(t).$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в (2.14), получаем, что функция $h_\alpha^h(t)$ удовлетворяет уравнению (2.13) при любом $u(t) \in L_2[0, 1]$. В силу формулы (2.12) функции $h_\alpha^h(t)$ соответствует функция

$$z_\alpha^h(t) = B_\alpha h_\alpha^h(t). \quad (2.21)$$

Легко видеть, что функция $z_\alpha^h(t)$ удовлетворяет уравнению (2.11).

Теорема 2.1. Пусть:

- 1) выполнены условия $A), B), C), F)$;
- 2) параметр α удовлетворяет условию (2.20).

Тогда уравнение (2.11) при любом $u(t) \in L_2[0, 1]$ имеет единственное решение, представимое в виде (2.21).

Доказательство. Покажем, что решение уравнения (2.11) при $u(t) = u_0(t)$ сходится к точному решению уравнения (1.1) при $\alpha, h \rightarrow 0$.

Функция $h_\alpha^h(t)$ как решение уравнения (2.13) представима в виде

$$h_\alpha^h(t) = I_\alpha^h h_0(t), \quad I_\alpha^h = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha(\circ) dv ds + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^\sigma (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 R_h(s, v) dv. \quad (2.22)$$

Подставляя это в (2.22), получаем

$$z_\alpha^h(t) = B_\alpha I_\alpha^h h_0(t). \quad (2.23)$$

Оценим разность $z_\alpha^h(t) - z_\alpha^0(t)$:

$$\left\| z_\alpha^h(t) - z_\alpha^0(t) \right\|_{L_2[0,1]} = \left\| B_\alpha I_\alpha^h h_0(t) - B_\alpha h_0(t) \right\|_{L_2[0,1]} \leq \frac{c}{(1-q)(1-q_1)} \frac{h}{\alpha}.$$

Оценим разность $z_{\alpha,0}^h(t) - z_0(t)$.

$$\left\| z_{\alpha,0}^h(t) - z_0(t) \right\|_{L_2(0,1)} \leq \left\| z_{\alpha,0}^h(t) - z_\alpha^0(t) \right\|_{L_2(0,1)} + \left\| z_\alpha^0(t) - z_0(t) \right\|_{L_2(0,1)} \leq \\ \leq \frac{1}{(1-q)(1-q_1)} \left(\frac{h}{\alpha} \right) c + \frac{q_0 \alpha^\beta}{1-q}. \quad (2.24)$$

Рассмотрим функцию

$$\phi(\alpha) = c_2 \alpha^\beta + c_3 \frac{h}{\alpha}, \quad c_2 = \frac{c}{(1-q)(1-q_1)}, \quad c_3 = \frac{q_0}{1-q}.$$

Найдем минимум этой функции:

$$\alpha(h) = \left(\frac{c_3}{\beta c_2} h \right)^{1/\beta+1}. \quad (2.25)$$

Подставляя это в правую часть (2.24), получаем

$$\left\| z_{\alpha,0}^h(t) - z_0(t) \right\|_{L_2(0,1)} \leq c_4 h^{\frac{\beta}{1+\beta}}, \quad c_4 = (1+\beta) \beta^{-\beta/1+\beta} c_2^{1/1+\beta} c_3^{\beta/1+\beta}. \quad (2.26)$$

□

Теорема 2.2. Пусть:

- 1) выполнены условия теоремы 2.1,
- 2) параметр α удовлетворяет условию (2.25).

Тогда решение $z_{\alpha,0}^h(t)$ уравнения (2.11) с $u = u_0(t)$ при $h \rightarrow 0$ сходится к точному решению уравнения (1.1). Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (2.26).

Доказательство. Рассмотрим случай E).

Через $z_{\alpha,\delta}^h(t)$ обозначим решение уравнения (2.11) при $u = u_\delta(t)$. В силу формулы (2.23) $z_{\alpha,\delta}^h(t)$ представим в виде

$$z_{\alpha,\delta}^h(t) = {}_\alpha G_\alpha^h h_\delta(t).$$

Оценим разность $z_{\alpha,\delta}^h(t) - z_{\alpha,0}^h(t)$:

$$\begin{aligned} \left\| z_{\alpha,\delta}^h(t) - z_{\alpha,0}^h(t) \right\|_{L_2[0,1]} &= \left\| B_\alpha I_\alpha^h h_\delta(t) - B_\alpha I_\alpha^h h_0(t) \right\|_{L_2[0,1]} \leq \\ &\leq \frac{1}{(1-q)(1-q_1)} \|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,1]} \leq \frac{1}{(1-q)(1-q_1)} \frac{\delta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Оценим разность $z_{\alpha,\delta}^h(t) - z_0(t)$:

$$\begin{aligned} \left\| z_{\alpha,\delta}^h(t) - z_0(t) \right\|_{L_2(0,1)} &\leq \left\| z_{\alpha,\delta}^h(t) - z_{\alpha,0}^h(t) \right\|_{L_2(0,1)} + \left\| z_{\alpha,0}^h(t) - z_0(t) \right\|_{L_2(0,1)} \leq \\ &\leq c_2 \alpha^\beta + c_3 \frac{h}{\alpha} + c_5 \frac{\delta}{\alpha}, \quad c_2 = \frac{c}{(1-q)(1-q_1)}, \quad c_3 = \frac{q_0}{1-q}, \quad c_5 = \frac{1}{(1-q)(1-q_1)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Рассмотрим функцию

$$\phi(\alpha) = c_2 \alpha^\beta + c_3 \frac{h}{\alpha} + c_5 \frac{\delta}{\alpha}.$$

Минимизируя функцию, получаем

$$\alpha(\delta, h) = \left(\frac{c_3 h + c_5 \delta}{\beta c_2} \right)^{1/(1+\beta)}. \quad (2.28)$$

Подставляя это в правую часть (2.27), получаем

$$\left\| z_{\alpha,\delta}^h(t) - z_0(t) \right\|_{L_2(0,1)} \leq c_6 (3h + c_5 \delta)^{\beta/(1+\beta)}, \quad c_6 = c_2^{\beta/(1+\beta)} \beta^{-\beta/(1+\beta)} + c_2^{1/(1+\beta)} \beta^{1/(1+\beta)}. \quad (2.29)$$

□

Теорема 2.3. Пусть:

- 1) выполняются все условия теоремы 2.2;
- 2) функция $u_\delta(t)$ удовлетворяет условию E);
- 3) параметр α выбран по закону (2.28).

Тогда решение $z_{\alpha,\delta}^h(t)$ уравнения (2.11) при $u(t) = u_\delta(t)$ и при $\delta, h \rightarrow 0$ сходится к точному решению уравнения (1.1). Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (2.29).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обоснование метода регуляризации, предлагаемого в данной работе, заключается в следующих результатах исследования:

- 1) построен регуляризирующий оператор в $L_2[0, 1]$;
- 2) доказана сходимость регуляризированного решения к точному решению исходного уравнения;
- 3) получен выбор параметра регуляризации в зависимости от погрешностей правой части и ядра;
- 4) получена оценка скорости сходимости регуляризированного решения к точному решению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В. К., Васин В. В., Тихонов В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978.
2. Иманалиев М. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение. — Фрунзе: Илим, 1977.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Наука, 1977.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 2004.

5. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунцкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.
6. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
7. Саадабаев А. Приближенные методы решения нелинейных операторных и интегральных уравнений первого рода. — Бишкек, 1997.
8. Саадабаев А. Сходимость метода Ньютона в нелинейных некорректных задачах // Изв. вузов. Бишкек. — 2003. — № 1-2. — С. 12–15.
9. Саадабаев А., Усенов И. А. Регуляризация решения нелинейного операторного уравнения первого рода типа Фредгольма в пространстве непрерывных функций // Вестн. ОшГУ. Сер. мат., физ., техн. — 2023. — № 1. — С. 187–193. — DOI: [10.52754/16948645_2023_1_187](https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_187).
10. Танана В. П. Методы решения операторных уравнений. — М.: Наука, 1981.
11. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. — 1963. — 151, № 3. — С. 501–504.
12. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974.
13. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
14. Усенов И. А. Регуляризация решения неявного операторного уравнения первого рода // В сб.: «Функц. анализ и его прилож.» — Астана, 2012. — С. 203.
15. Усенов И. А. Построение приближенного решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // Вестн. МГОУ. Сер. Физ.-Мат. — 2016. — № 1. — С. 8–14. — DOI: [10.18384/2310-7251-2016-1-08-14](https://doi.org/10.18384/2310-7251-2016-1-08-14).
16. Lu S., Pereverzev S., Ramlau R. An analysis of Tikhonov regularization for nonlinear ill-posed problems under a general smoothness assumption // Inverse Problems. — 2007. — 23. — С. 217–230. — DOI: [10.1088/0266-5611/23/1/011](https://doi.org/10.1088/0266-5611/23/1/011).
17. Pereverzev S., Schock E. On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems // SIAM J. Numer. Anal. — 2005. — 43. — С. 2060–2076. — DOI: [10.1137/S0036142903433819](https://doi.org/10.1137/S0036142903433819).
18. Pöschl C. An overview on convergence rates for Tikhonov regularization methods for non-linear operators // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2009. — 17, № 1. — С. 77–83. — DOI: [10.1515/JIIP.2009.009](https://doi.org/10.1515/JIIP.2009.009).
19. Saadabaev A., Usenov I. On the regularization of the solution of a nonlinear operator equation of the first kind in Hilbert space // В сб.: «Materials of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians» (TWMS Congress-2023), Part II. — Turkestan-Kazakhstan, 2023. — С. 99–106.
20. Tautenhahn U. On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill-posed problems // Inverse Problems. — 2002. — 18. — С. 191–207. — DOI: [10.1088/0266-5611/18/1/313](https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/1/313).
21. Tautenhahn U., Hamarik U. The use of monotonicity for choosing the regularization parameter in ill-posed problems // Inverse Problems. — 1999. — 15. — С. 1487–1505. — DOI: [10.1088/0266-5611/15/6/307](https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/6/307).
22. Usenov I. Combined regularization method for solving an implicit operator equation of the first kind // Lect. Notes Networks Systems. — 2024. — 1044. — С. 24–33. — DOI: [10.1007/978-3-031-64010-0_3](https://doi.org/10.1007/978-3-031-64010-0_3).

И. А. Усенов

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан

E-mail: iausen72@mail.ru

Р. К. Усенова

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан

E-mail: usenrk@mail.ru

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-126-137](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-126-137)
 EDN: UFDHHA

UDC 519.683.5
Research article

Regularizing operator for solving a nonlinear integral equation of the first kind in the space of square-summable functions

I. A. Usenov and R. K. Usenova

Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. Problems of solving nonlinear integral equations of the first kind belong to the class of ill-posed problems, since their solution may not exist, be ambiguous, or be unstable with respect to small perturbations of the initial data. This significantly complicates their practical application in mathematical modeling and related fields, where such equations arise when describing inverse problems.

In this paper, we construct a regularization operator for solving a class of nonlinear integral equations of the first kind in the space of square-summable functions in the case where the kernel and right-hand side are given approximately.

The construction of the proposed regularization method is based on the regularized equation obtained by analogy with Lavrentiev's method.

We choose the regularization parameter depending on the errors of the right-hand side and the kernel. A priori estimates are obtained. We obtain also estimates for the rate of convergence of the regularized solution to the exact solution of the original nonlinear integral equation of the first kind. To explicitly represent the solution, we use Schmidt fundamental functions.

Keywords: nonlinear integral equations of the first kind, ill-posed problem, regularization operator, Lavrentiev's method, Schmidt fundamental functions.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors' contribution. I. A. Usenov — study of the convergence of an approximate solution to the exact solution of the original equation; R. K. Usenova — selection of a regularization parameter depending on the errors of approximately specified data.

For citation: I. A. Usenov, R. K. Usenova, "Regularizing operator for solving a nonlinear integral equation of the first kind in the space of square-summable functions," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 1, 126–137. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-126-137](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-126-137)
 EDN: UFDHHA

REFERENCES

1. V. K. Ivanov, V. V. Vasin, and V. P. Tanana, *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* [Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
2. M. Imanaliev, *Metody resheniya nelineynykh obratnykh zadach i ikh prilozhenie* [Methods for Solving Nonlinear Inverse Problems and Their Application], Ilim, Frunze, 1977 (in Russian).
3. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz v normirovannykh prostranstvakh* [Functional Analysis in Normed Spaces], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
4. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 2004 (in Russian).
5. M. A. Krasnosel'skii, G. M. Vaynikko, P. P. Zabreyko, Ya. B. Rutitskii, and V. Ya. Stetsenko, *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravneniy* [Approximate Solution of Operator Equations], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).



6. M. M. Lavrent'ev, *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki* [On Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics], SO AN SSSR, Novosibirsk, 1962 (in Russian).
7. A. Saadabaev, *Priblizhennyye metody resheniya nelineynykh operatornykh i integral'nykh uravneniy pervogo roda* [Approximate Methods for Solving Nonlinear Operator and Integral Equations of the First Kind], Bishkek, 1997 (in Russian).
8. A. Saadabaev, "Skhodimost' metoda N'yutona v nelineynykh nekorrektnykh zadachakh" [Convergence of Newton's method in nonlinear ill-posed problems], *Izv. Vuzov. Bishkek* [Izv. vuzov. Bishkek], 2003, No. 1-2, 12–15 (in Russian).
9. A. Saadabaev and I. A. Usenov, "Regulyarizatsiya resheniya nelineynogo operatornogo uravneniya pervogo roda tipa Fredgol'ma v prostranstve nepreryvnykh funktsiy" [Regularization of the solution of a first-kind nonlinear operator equation of Fredholm type in the space of continuous functions], *Vestn. OshGU. Ser. Mat., Fiz., Tekhn.* [Bull. Osh. State Univ. Ser. Math. Phys. Techn.], 2023, No. 1, 187–193 (in Russian), DOI: [10.52754/16948645_2023_1_187](https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_187).
10. V. P. Tanana, *Metody resheniya operatornykh uravneniy* [Methods for Solving Operator Equations], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
11. A. N. Tikhonov, "O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarizatsii" [On solving ill-posed problems and the regularization method], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1963, **151**, No. 3, 501–504 (in Russian).
12. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for Solving Ill-Posed Problems], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
13. V. A. Trenogin, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
14. I. A. Usenov, "Regulyarizatsiya resheniya neyavnogo operatornogo uravneniya pervogo roda" [Regularization of the solution of an implicit operator equation of the first kind], In: *Funkts. Analiz i Ego Prilozh.* [Funct. Anal. and Its Appl.], Astana, 2012, p. 203 (in Russian).
15. I. A. Usenov, "Postroenie priblizhennogo resheniya nelineynogo operatornogo uravneniya pervogo roda v gil'bertovom prostranstve" [Construction of an approximate solution to a nonlinear operator equation of the first kind in a Hilbert space], *Vestn. MGOU. Ser. Fiz.-Mat.* [Bull. State Univ. Edu. Ser. Phys.-Math.], 2016, No. 1, 8–14 (in Russian), DOI: [10.18384/2310-7251-2016-1-08-14](https://doi.org/10.18384/2310-7251-2016-1-08-14).
16. S. Lu, S. Pereverzev, and R. Ramlau, "An analysis of Tikhonov regularization for nonlinear ill-posed problems under a general smoothness assumption," *Inverse Problems*, 2007, **23**, 217–230, DOI: [10.1088/0266-5611/23/1/011](https://doi.org/10.1088/0266-5611/23/1/011).
17. S. Pereverzev and E. Schock, "On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems," *SIAM J. Numer. Anal.*, 2005, **43**, 2060–2076, DOI: [10.1137/S0036142903433819](https://doi.org/10.1137/S0036142903433819).
18. C. Pöschl, "An overview on convergence rates for Tikhonov regularization methods for non-linear operators," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2009, **17**, No. 1, 77–83, DOI: [10.1515/JIIP.2009.009](https://doi.org/10.1515/JIIP.2009.009).
19. A. Saadabaev and I. Usenov, "On the regularization of the solution of a nonlinear operator equation of the first kind in Hilbert space," In: *Materials of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023), Part II*, Turkestan–Kazakhstan, 2023, pp. 99–106.
20. U. Tautenhahn, "On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill-posed problems," *Inverse Problems*, 2002, **18**, 191–207, DOI: [10.1088/0266-5611/18/1/313](https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/1/313).
21. U. Tautenhahn and U. Hamarik, "The use of monotonicity for choosing the regularization parameter in ill-posed problems," *Inverse Problems*, 1999, **15**, 1487–1505, DOI: [10.1088/0266-5611/15/6/307](https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/6/307).
22. I. Usenov, "Combined regularization method for solving an implicit operator equation of the first kind," *Lect. Notes Networks Systems*, 2024, **1044**, 24–33, DOI: [10.1007/978-3-031-64010-0_3](https://doi.org/10.1007/978-3-031-64010-0_3).

I. A. Usenov

Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan

E-mail: iausen72@mail.ru

R. K. Usenova

Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan

E-mail: usenrk@mail.ru