

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

А. В. НЕСТЕРОВ

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва, Россия

Аннотация. Строятся первые члены формального асимптотического разложения по малому параметру решения задачи Коши с начальными условиями типа «узкая шапочка» для сингулярно возмущенной системы уравнений колебаний в критическом случае. Асимптотическое разложение построено в виде суммы слагаемых типа бегущих волн и пограничных функций. Слагаемые типа бегущих волн описываются обобщенными уравнениями Кортевега—де Фриза. При определенных предположениях сделана оценка остаточного члена по невязке.

Ключевые слова: асимптотические разложения, сингулярные возмущения, критический случай, начальные задачи, системы гиперболических уравнений, обобщенное уравнение Кортевега—де Фриза.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, номер проекта FSSW-2023-0004.

Для цитирования: Нестеров А. В. Асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений в критическом случае // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 114–125. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-114-125](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-114-125) EDN: [UERBYQ](https://edn.ru/uerbyq)

1. ВВЕДЕНИЕ

Строится формальное асимптотическое разложение (ФАР, АР) решения начальной задачи для системы гиперболических уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon^6(u_{tt} - k_1^2 u_{xx}) = -p(au - bv) - \varepsilon^3 q(au - bv)_t - \varepsilon^2 f(u, v), \\ \varepsilon^6(v_{tt} - k_2^2 v_{xx}) = p(au - bv) + \varepsilon^3 q(au - bv)_t + \varepsilon^2 f(u, v), \\ 0 < t < T, \quad |x| < \infty, \quad T > 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $\{u(x, t, \varepsilon), v(x, t, \varepsilon)\}$ — решение, $0 < \varepsilon \ll 1$ малый параметр, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$, $q = \text{const} > 0$, гладкая функция $f(u, v) \in C^\infty \forall |u| < \infty, |v| < \infty$, такая, что $f(0, 0) = 0$, удовлетворяет определенным требованиям, сформулированным ниже.

Отметим, что система (1.1) относится к т. н. критическому случаю [2], когда вырожденная задача ($\varepsilon = 0$) имеет семейство решений.

Предыстория задачи такова. В работе А. Б. Васильевой [1] исследовалась начально-краевая задача для сингулярно возмущенной системы двух уравнений в частных производных первого порядка в критическом случае

$$\varepsilon(U_t + DU_x) = AU, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad U(x, 0) = U^0(x), \quad U(0, t) = \Phi^0(t), \quad (1.2)$$

здесь $U = \{u(x, t, \epsilon), v(x, t, \epsilon)\}$ — решение, матрица $D = \text{diag}(\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 > 0)$ диагональна, матрица A вырожденная, имеющая одно нулевое собственное значение и второе отрицательное (обозначения не совпадают с оригиналом). Было обнаружено явление внутреннего слоя в окрестности «псевдохарактеристики» системы (1.2), выходящей из угловой точки границы.

Ранее автором в ряде работ [4–6] исследовались различные обобщения этой задачи — сингулярно возмущенные системы уравнений переноса вида

$$\epsilon(U_t + DU_x) = AU + \epsilon^\alpha F, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad U(x, 0) = U^0(x), \quad U(0, t) = \Phi^0(t),$$

Здесь $U(x, t) \in \mathbb{R}^N$ — решение ($N \geq 2$), $0 < \epsilon \ll 1$ — малый параметр, D — диагональная матрица, в слагаемое $\epsilon^\alpha F$, $\alpha > 0$, может входить малая нелинейность, слагаемые с производными второго порядка по пространственной переменной и т. д. Рассматривались случаи, когда матрица A имеет однократное нулевое собственное значение (остальные полагались имеющими отрицательные вещественные части). В этом случае системы относятся к т. н. критическому случаю [2]: у вырожденной ($\epsilon = 0$) задачи

$$AU = 0$$

имеется однопараметрическое семейство решений вида $U(x, t) = \varphi(x, t, \epsilon)h_0$, здесь $\varphi(x, t, \epsilon)$ — произвольная гладкая функция, h_0 — собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению матрицы A . Наличие однократного собственного значения у матрицы A приводит к интересному поведению асимптотики решения в областях больших градиентов.

Оказывается, что в случае быстро убывающих начальных условий вида $U(x, 0) = \omega(x/\epsilon)H$, $|\omega(x)| < Ce^{-\kappa x^2}$, $\kappa > 0$, и $F = 0$ функция $\varphi(x, t, \epsilon)$ описывается параболическим уравнением ($M < 0$)

$$\varphi_t + M\varphi\zeta = 0,$$

где $\zeta = \frac{x - kt}{\epsilon}$ — растянутая переменная ($k = \text{const}$). В некоторых случаях (что зависит от слагаемого $\epsilon^\alpha F$) функция $\varphi(x, t)$ описывается обобщенными уравнениями Бюргерса или Кортевега—де Фриза [7].

Интересным представляется обобщение систем уравнений переноса как на случай вырождения матрицы A до двукратного нулевого собственного значения, так и на системы уравнений более высокого порядка. Таким обобщением можно считать систему (1.1).

Система (1.1) также относится к критическому случаю [2], т. к. вырожденная система уравнений ($\epsilon = 0$)

$$\begin{cases} 0 = -p(au - bv), \\ 0 = p(au - bv), \end{cases}$$

имеет семейство решений $v = a/bu$. Однако степень вырождения системы (1.1) выше, чем системы (1.2) и систем, рассмотренных в [1, 6].

Более детальный анализ показывает, что матрица A системы (1.1) (после приведения к системе уравнений первого порядка) имеет двукратное нулевое собственное значение. Это существенно сказывается на асимптотике решения системы (1.1).

Пусть функции $u^0, v^0(x), \varphi(x), \psi(x)$ гладкие и стремятся к нулю: $u^0(x), v^0(x), \varphi(x), \psi(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \pm\infty$ (имеют вид «шапочки»).

Для выявления некоторых особенностей поведения решения в областях с большими градиентами поставим специальные начальные условия в виде асимптотически «узких шапочек»:

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^0(x/\epsilon^2), & u_t(x, 0) = \varphi(x/\epsilon^2), \\ v(x, 0) = v^0(x/\epsilon^2), & v_t(x, 0) = \psi(x/\epsilon^2). \end{cases} \quad (1.3)$$

Для построения ФАР решения задачи (1.1)–(1.3) этих требований достаточно. Более детальные требования будут наложены ниже, в разделе 6, где рассматриваются вопросы существования, единственности и оценок некоторых членов ФАР.

Асимптотическое разложение решения задачи (1.1), (1.3) до порядка N строится в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(x, t, \epsilon) \\ v(x, t, \epsilon) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Su^I(\zeta_1, t) \\ Sv^I(\zeta_1, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Su^{II}(\zeta_2, t, \epsilon) \\ Sv^{II}(\zeta_2, t, \epsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Pu(\xi, \tau, \epsilon) \\ Pv(\xi, \tau, \epsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=0}^N \epsilon^i \left(\begin{pmatrix} Su_i^I(\zeta_1, t) \\ Sv_i^I(\zeta_1, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Su_i^{II}(\zeta_2, t) \\ Sv_i^{II}(\zeta_2, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Pu_i(\xi, \tau) \\ Pv_i(\xi, \tau) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $S^I u, S^{II} u, S^I v, S^{II} v$ — слагаемые, описывающие АР решения вдоль определенных линий — «псевдохарактеристик» системы (1.1), $\Pi u, \Pi v$ — погранслойные слагаемые, R — остаточный член, вид растянутых переменных $\zeta_1, \zeta_2, \xi, \tau$ описан ниже. Предельное число членов разложения N определяется гладкостью функций, входящих в задачу (1.1), (1.3).

В настоящей работе ограничимся построением только главных членов АР (1.4).

Для построения АР преобразуем нелинейные слагаемые, следуя [2]:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f(S^I u + S^{II} u + \Pi u + Ru, S^I v + S^{II} v + \Pi v + Rv) = \\ &= f(S^I u, S^I v) + f(S^{II} u, S^{II} v) + (f(S^I u + S^{II} u + \Pi u, S^I v + S^{II} v + \Pi v) - \\ &- f(S^I u, S^I v)) - f(S^{II} u, S^{II} v) + \\ &+ (f(S^I u + S^{II} u + \Pi u + Ru, S^I v + S^{II} v + \Pi v + Rv) - \\ &- (f(S^I u + S^{II} u + \Pi u, S^I v + S^{II} v + \Pi v))) = \\ &= S^I f + S^{II} f + \Pi f + Rf. \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ ЧАСТИ АР

Хотя регулярная часть АР решения при начальных данных (1.3) отсутствует, для построения членов АР (1.4) необходимо определить уравнение, которому подчиняется старший член регулярной части.

Регулярная часть $\bar{U}$ должна удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon^6(\bar{u}_{tt} - k_1^2 \bar{u}_{xx}) = -p(a\bar{u} - b\bar{v}) - \varepsilon^3 q(a\bar{u} - b\bar{v})_t - \varepsilon^2 \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}), \\ \varepsilon^6(\bar{v}_{tt} - k_2^2 \bar{v}_{xx}) = p(a\bar{u} - b\bar{v}) + \varepsilon^3 q(a\bar{u} - b\bar{v})_t + \varepsilon^2 \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}). \end{cases} \quad (2.1)$$

Стандартной процедурой (см. [2]), подставляя

$$\bar{U}_6(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^6 \varepsilon^i \begin{pmatrix} \bar{u}_i(x, t) \\ \bar{v}_i(x, t) \end{pmatrix} + \dots \quad (2.2)$$

и разложение нелинейности

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = f(\bar{u}_0 + \varepsilon \bar{u}_1 + \dots, \bar{v}_0 + \varepsilon \bar{v}_1 + \dots) = f(\bar{u}_0, \bar{v}_0) + \varepsilon(\bar{f}_u(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\bar{u}_1 + \bar{f}_v(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\bar{v}_1) + \dots$$

в систему (2.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε , получаем систему уравнений для определения членов разложения (2.2).

При ε^0 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = -p(a\bar{u}_0 - b\bar{v}_0), \\ 0 = p(a\bar{u}_0 - b\bar{v}_0), \end{cases}$$

откуда

$$\bar{v}_0 = \frac{a}{b} \bar{u}_0, \bar{u}_0(x, t) = \chi_0(x, t).$$

Здесь $\chi_0(x, t)$ — произвольная гладкая функция.

Опуская объемные выкладки, запишем систему уравнений при ε^6 :

$$\begin{cases} p(a\bar{u}_6 - b\bar{v}_6) = -(\bar{u}_{0,tt} - k_1^2 \bar{u}_{0,xx}) - q(a\bar{u}_3 - b\bar{v}_3)_t - (f_u(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\bar{u}_4 + f_v(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\bar{v}_4) - F_4, \\ -p(a\bar{u}_6 - b\bar{v}_6) = -(\bar{v}_{0,tt} - k_2^2 \bar{v}_{0,xx}) + q(a\bar{u}_3 - b\bar{v}_3)_t + (f_u(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\bar{u}_4 + f_v(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\bar{v}_4) + F_4. \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь F_4 известным образом выражается через $\bar{u}_i, \bar{v}_i, i < 6$.

Условие разрешимости этой системы уравнений имеет вид

$$\bar{u}_{0,tt} - k_1^2 \bar{u}_{0,xx} + \bar{v}_{0,tt} - k_1^2 \bar{v}_{0,xx} = 0,$$

что дает уравнение для определения $\bar{u}_0, \bar{v}_0$.

Так как $\bar{v}_0 = \frac{a}{b} \bar{u}_0$ и $\bar{u}_0(x, t) = \chi_0(x, t)$, то функция χ_0 подчиняется уравнению

$$\chi_{0,tt} - \frac{bk_1^2 + ak_2^2}{a+b} \chi_{0,xx} = 0,$$

или

$$\chi_{0,tt} - k^2 \chi_{0,xx} = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{bk_1^2 + ak_2^2}{a + b}. \quad (2.4)$$

Можно отметить, что $\min(k_1^2, k_2^2) < k^2 < \max(k_1^2, k_2^2)$. Величина k^2 существенна для дальнейших построений. Легко проверить, что

$$(k^2 - k_1^2) + \frac{a}{b}(k^2 - k_2^2) = \frac{(a + b)k^2 - (ak_2^2 + bk_1^2)}{b} = 0. \quad (2.5)$$

Это соотношение потребуется в дальнейшем.

3. ПОСТРОЕНИЕ АР ПРИ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ТИПА «ВСПЛЕСК»

Пусть начальные условия для системы (1.1) имеют вид (1.3)

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^0(x/\varepsilon^2), u_t(x, 0) = \varphi(x/\varepsilon^2), \\ v(x, 0) = v^0(x/\varepsilon^2), v_t(x, 0) = \psi(x/\varepsilon^2), \end{cases}$$

где функции $u^0(x), v^0(x), \varphi(x), \psi(x)$ удовлетворяют условию стремления к нулю на бесконечности. В этом случае (1.3) задают начальные данные в виде асимптотически узких «шапочек», «всплесков».

Будем искать АР решения системы (1.1) с начальными условиями (1.3) в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(x, t, \varepsilon) \\ v(x, t, \varepsilon) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Su^I(\zeta_1, t, \varepsilon) \\ Sv^I(\zeta_1, t, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Su^{II}(\zeta_2, t, \varepsilon) \\ Sv^{II}(\zeta_2, t, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Pu(\xi, \tau, \varepsilon) \\ Pv(\xi, \tau, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \left(\begin{pmatrix} Su_i^I(\zeta_1, t) \\ Sv_i^I(\zeta_1, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Su_i^{II}(\zeta_2, t) \\ Sv_i^{II}(\zeta_2, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Pu_i(\xi, \tau) \\ Pv_i(\xi, \tau) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В разложении (3.1) функции Su, Sv имеют характер бегущих волн, Pu, Pv — характер пограничных функций (см. ниже), растянутые переменные $\zeta_{1,2}$ определены ниже, $\xi = \frac{x}{\varepsilon^2}, \tau = \frac{t}{\varepsilon^3}$.

Число N членов разложения при гладких начальных условиях и функции f произвольно. В этой работе ограничимся определением старших членов разложения (3.1), взяв $N = 4$. При определении старших членов разложения ($i = 0$) часть слагаемых в (3.1) играют вспомогательные роли (см. ниже).

Построим функции Su, Sv .

Определим растянутые переменные $\zeta_{1,2} = \frac{x \pm kt}{\varepsilon^2}$, где k определено выражением (2.4). Соответственно, функции Su, Sv должны удовлетворять системе (1.1) с соответствующими нелинейностями Sf и начальным условиям (1.3) или части этих условий, а так же удовлетворять требованию $S \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \pm\infty$.

Строим функцию S^I в виде

$$S^I(\zeta_1, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} S^I u(\zeta_1, t, \varepsilon) \\ S^I v(\zeta_1, t, \varepsilon) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \begin{pmatrix} S_i^I u(\zeta_1, t) \\ S_i^I v(\zeta_1, t) \end{pmatrix} + R, \quad (3.2)$$

где $\zeta_1 = \frac{x - kt}{\varepsilon^2}$.

Подставим (3.2) в слагаемое $S^I f$ в (1.5) и разложим правую часть в ряд по степеням параметра ε :

$$\begin{aligned} S^I f &= f(S^I u, S^I v) = f(S_0^I u + \varepsilon S_1^I u + \dots, S_0^I v + \varepsilon S_1^I v + \dots) = \\ &= f(S_0^I u, S_0^I v) + \varepsilon(f_u(S_0^I u, S_0^I v)S_1^I u + f_v(S_0^I u, S_0^I v)S_1^I v) + \dots = \\ &= f(S_0 u, S_0 v) + \varepsilon S F_1 + \varepsilon^2 S F_2 + \varepsilon^3 S F_3 + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ниже индексы I у функций $S^I u, S^I v, S^I f$ и индекс 1 у переменной ζ опущены.

Подставим (3.2), (3.3) в систему (1.1) с модифицированной нелинейностью, перейдем в системе (1.1) от переменных (x, t) к переменным (ζ, t) и проведем стандартную процедуру определения

систем уравнений для нахождения членов АР (3.2). При нулевой степени параметра получаем

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} p(aS_0u - bS_0v) = 0, \\ -p(aS_0u - bS_0v) = 0, \end{cases}$$

отсюда

$$S_0v = \frac{a}{b}S_0u, \quad (3.4)$$

где $S_0u(\zeta, t)$ — пока не определенная функция.

При первой степени параметра получаем

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} p(aS_1u - bS_1v) = -qk(aS_0u - bS_0v)_\zeta, \\ -p(aS_1u - bS_1v) = qk(aS_0u - bS_0v)_\zeta. \end{cases}$$

Эта система разрешима, отсюда

$$S_1v = \frac{a}{b}S_1u, \quad (3.5)$$

где $S_1u(\zeta, t)$ — пока не определенная функция.

При второй степени параметра получаем

$$\varepsilon^2 : \begin{cases} p(aS_2u - bS_2v) = -(k^2 - k_1^2)Su_{0\zeta\zeta} - qk(aS_1u - bS_1v)_\zeta - f(S_0u, S_0v), \\ -p(aS_2u - bS_2v) = -(k^2 - k_2^2)Sv_{0\zeta\zeta} + qk(aS_0u - bS_0v)_\zeta + f(S_0u, S_0v). \end{cases}$$

Условие разрешимости этой системы

$$(k^2 - k_1^2)Su_{0\zeta\zeta} + (k^2 - k_2^2)Sv_{0\zeta\zeta} = \frac{a(k^2 - k_2^2) + b(k^2 - k_1^2)}{b}Su_{0\zeta\zeta} = 0$$

выполняется в силу равенств (2.5) и (3.4). Отсюда

$$S_2v = \frac{a}{b}S_2u + \frac{(k^2 - k_1^2)}{pb}Su_{0\zeta\zeta} + \frac{1}{pb}f(S_0u, S_0v), \quad (3.6)$$

где $S_2u(\zeta, t)$ — пока не определенная функция.

Опуская объемные выкладки, отметим, что система уравнений при третьей степени малого параметра разрешима. Систему уравнений при четвертой степени малого параметра удобно записать, введя обозначение

$$q((aSu_1 - bSv_1)_t - k(aSu_3 - bSv_3)_\zeta) + F_2S = D.$$

С учетом этого обозначения получим систему уравнений при четвертой степени малого параметра:

$$\varepsilon^4 : \begin{cases} p(aS_4u - bS_4v) = 2kSu_{0,\zeta t} - (k^2 - k_1^2)Su_{2,\zeta\zeta} - D, \\ -p(aS_4u - bS_4v) = 2kSv_{0,\zeta t} - (k^2 - k_2^2)Sv_{2,\zeta\zeta} + D. \end{cases} \quad (3.7)$$

Условие разрешимости этой системы имеет вид

$$(k^2 - k_1^2)S_2u_{\zeta\zeta} - 2kS_0u_{\zeta t} + (k^2 - k_2^2)S_2v_{\zeta\zeta} - 2kS_0v_{\zeta t} = 0. \quad (3.8)$$

Используя (3.4), (3.5), исключим из (3.8) S_0v и S_2v .

Опуская несложные, но объемные выкладки, отметим лишь, что функция S_2u в окончательное выражение не входит благодаря тому, что коэффициент перед ней обращается в нуль (равенство (2.5)).

Введем обозначения

$$\frac{(k^2 - k_2^2)(k^2 - k_1^2)}{2pk(a+b)} = K, \quad \frac{1}{2pk(a+b)}f(S_0u, \frac{a}{b}S_0u) = f_{\text{eff}}(S_0u). \quad (3.9)$$

В этих обозначениях условие разрешимости (3.8) — уравнение для определения S_0u — имеет вид

$$(-S_0u_t + KS_0u_{\zeta\zeta\zeta} + (f_{\text{eff}}(S_0u))_\zeta)_\zeta = 0,$$

или

$$-S_0u_t + KS_0u_{\zeta\zeta\zeta} + (f_{\text{eff}}(S_0u))_\zeta = \Psi(t),$$

где $\Psi(t)$ — произвольная функция. Исходя из требования $S_0u_{\zeta \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, естественно положить $\Psi(t) \equiv 0$. Это дает окончательный вид уравнения для функции S_0u

$$-S_0u_t + KS_0u_{\zeta\zeta\zeta} + (f_{\text{eff}}(S_0u))_\zeta = 0. \quad (3.10)$$

Аналогично строится функция

$$S^{II}(\zeta_2, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} S^{II}u(\zeta_2, t, \varepsilon) \\ S^{II}v(\zeta_2, t, \varepsilon) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \begin{pmatrix} S_i^{II}u(\zeta_2, t) \\ S_i^{II}v(\zeta_2, t) \end{pmatrix} + R, \quad (3.11)$$

где $\zeta_2 = \frac{x+kt}{\varepsilon^2}$ (ниже индексы II у функции S^{II} и 2 у переменной ζ_2 могут быть опущены). Совершенно аналогично получаем, что функция $S_0^{II}u(\zeta_2, t)$ удовлетворяет уравнению

$$S_0^{II}u_t + K S_0^{II}u_{\zeta_2 \zeta_2} + (f_{\text{eff}}(S_0^{II}u))_{\zeta_2} = 0, \quad (3.12)$$

и $S_0^{II}v = \frac{a}{b} S_0^{II}u$.

Начальные условия для функций $S_0^I u, S_0^I v, S_0^{II} u, S_0^{II} v$ поставим ниже.

Отметим, что уравнения (3.10) и (3.12) являются обобщенными уравнениями Кортевега—де Фриза [7].

Последующие функции с номерами $i > 0$ удовлетворяют линейным неоднородным уравнениям

$$\begin{aligned} -S_i^I u + K S_i^I u_{\zeta_1 \zeta_1} + (f_{\text{eff},u}(S_0^I u) S_i^I u + s_i^I)_{\zeta} &= 0, \\ S_i^{II} u_t + K S_i^{II} u_{\zeta_2 \zeta_2} + (f_{\text{eff},u}(S_0^I u) S_i^{II} u + s_i^{II})_{\zeta} &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $s_i u, s_i v$ выражаются через $S_j u, S_j v$ с номерами $j < i$.

Окончательно S -функции построены в виде

$$S(\zeta, t, \varepsilon) = S^I(\zeta_1, t, \varepsilon) + S^{II}(\zeta_2, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \left(\begin{pmatrix} S_i^I u(\zeta_1, t) \\ S_i^I v(\zeta_1, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_i^{II} u(\zeta_2, t) \\ S_i^{II} v(\zeta_2, t) \end{pmatrix} \right) + R. \quad (3.14)$$

Для всех членов разложения (3.14) получены уравнения.

4. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ Π

Начальные условия (1.3)

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^0(x/\varepsilon^2), u_t(x, 0) = \varphi(x/\varepsilon^2), \\ v(x, 0) = v^0(x/\varepsilon^2), v_t(x, 0) = \psi(x/\varepsilon^2) \end{cases}$$

не могут быть удовлетворены S -функциями, поскольку условий четыре, а число степеней свободы у функций S равно двум (S^I и S^{II}). Для выполнения начальных условий строим пограничные функции

$$\begin{pmatrix} \Pi u(\xi, \tau, \varepsilon) \\ \Pi v(\xi, \tau, \varepsilon) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \begin{pmatrix} \Pi u_i(\xi, \tau) \\ \Pi v_i(\xi, \tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где $\tau = t/\varepsilon^3$, $\xi = x/\varepsilon^2$. Функции Πu и Πv должны формально удовлетворять с необходимой точностью системе (1.1) с соответствующей нелинейностью, совместно с функциями S^I и S^{II} удовлетворять начальным условиям

$$\begin{cases} S^I u(x, 0) + S^{II} u(x, 0) + \Pi u(x, 0) = u^0(x/\varepsilon^2), \\ (S^I u(x, t) + S^{II} u(x, t) + \Pi u(x, t))|_{t=0} = \varphi(x/\varepsilon^2), \\ S^I v(x, 0) + S^{II} v(x, 0) + \Pi v(x, 0) = v^0(x/\varepsilon^2), \\ (S^I v(x, t) + S^{II} v(x, t) + \Pi v(x, t))|_{t=0} = \psi(x/\varepsilon^2). \end{cases} \quad (4.2)$$

Кроме того, все $\Pi_i u$ и $\Pi_i v$ должны быть функциями погранслоя

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Pi u_i = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Pi v_i = 0 \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Переходя в системе (1.1) к переменным (τ, ξ) , оставляя от нелинейности (1.5) соответствующие слагаемые Πf , запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \Pi u_{\tau\tau} &= -p(a\Pi u - b\Pi v) - q(a\Pi u - b\Pi v)_{\tau} + \varepsilon^2 k_1^2 \Pi u_{\xi\xi} - \varepsilon^2 \Pi f(\Pi u, \Pi v), \\ \Pi v_{\tau\tau} &= p(a\Pi u - b\Pi v) + q(a\Pi u - b\Pi v)_{\tau} + \varepsilon^2 k_2^2 \Pi v_{\xi\xi} + \varepsilon^2 \Pi f(\Pi u, \Pi v). \end{aligned}$$

Подставим разложение (4.1) в нелинейность (1.5), в функциях S перейдем к переменным $\xi = x/\varepsilon^2$, $\tau = t/\varepsilon^3$ (см. [2]). Опуская стандартные объемные выкладки, запишем системы уравнений для определения членов разложения (4.1).

Ограничимся лишь системой для определения $\Pi_0 u$ и $\Pi_0 v$

$$\begin{aligned}\Pi_{0,\tau\tau} u &= -p(a\Pi u_0 - b\Pi v_0) - q(a\Pi u_0 - b\Pi v_0)_\tau, \\ \Pi_{0,\tau\tau} v &= p(a\Pi u_0 - b\Pi v_0) + q(a\Pi u_0 - b\Pi v_0)_\tau.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Остальные $\Pi_i u$ и $\Pi_i v$ определяются из аналогичных неоднородных систем, в которых неоднородность зависит от найденных ранее членов разложения $\Pi_j u, \Pi_j v, j < i$. Дополнительное условие — все $\Pi_i u$ и $\Pi_i v \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Pi_i u$ и $\Pi_i v$ должны быть функциями погранслоя (4.3).

5. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Перепишем начальные условия (4.2) в новых переменных. Учтем, что $x/\varepsilon^2 = \xi$:

$$Su(\zeta, t)_t = Su(\zeta(x, t), t)_t = Su(\zeta, t)_t + Su(\zeta, t)_\zeta \zeta_t = Su(\zeta, t)_t + \varepsilon^{-2}(\mp)kSu(\zeta, t)_\zeta. \quad (5.1)$$

В новых переменных начальные условия имеют вид

$$\begin{cases} S^I u(\zeta_1) + S^{II} u(\zeta_2) + \Pi u(\xi) = u^0(\xi), \\ S^I v(\zeta_1) + S^{II} v(\zeta_2) + \Pi v(\xi) = v^0(\xi), \\ (S^I u(\zeta_1, t) + S^{II} u(\zeta_2, t))_t + \varepsilon^{-3} \Pi u(\xi, \tau)_\tau \big|_{t=0} = \varphi(\xi), \\ (S^I v(\zeta_1, t) + S^{II} v(\zeta_2, t))_t + \varepsilon^{-3} \Pi v(\xi, \tau)_\tau \big|_{t=0} = \psi(\xi). \end{cases} \quad (5.2)$$

Соотношения (5.2) с учетом требований (4.3) дают начальные условия для функций $S^I_i u, S^{II}_i u, \Pi_i u, \Pi_i v, i = 0, 1, 2, \dots$. Подставляя в (5.2) разложения (3.14) и (4.1), учитывая равенства (5.1), разделяя степени параметра ε , получаем начальные условия для $S^I_i u, S^{II}_i u, \Pi_i u, \Pi_i v, i = 0, 1, 2, \dots$

Опуская объемные выкладки, приведем начальные условия для нулевого приближения $\zeta_1(x, 0) = \zeta_2(x, 0) = \xi$:

$$S^I_0 u(\zeta_1, 0) = S^{II}_0 u(\zeta_2, 0) = \frac{1}{2} \frac{b}{a+b} (u^0(\xi) + v^0(\xi)), \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}\Pi_0 u(\xi, 0) &= -\Pi_0 v(\xi, 0) = \frac{au^0(\xi) - bv^0(\xi)}{a+b}, \\ \Pi_0 u(\xi, \tau)_\tau \big|_{t=0} &= 0, \\ \Pi_0 v(\xi, \tau)_\tau \big|_{t=0} &= 0.\end{aligned} \quad (5.4)$$

Начальные условия для остальных $S^I_i u, S^{II}_i u, \Pi_i u, \Pi_i v, i = 0, 1, 2, \dots$ получаются аналогично.

6. ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ S, Π

6.1. Оценки функций S . Для формального вывода уравнений (3.10), (3.12) и начальных условий (5.3) для определения функций S^I_0, S^{II}_0 достаточно наложенных выше условий гладкости функции $f(u, v)$ и быстрого убывания начальных условий (1.3). Однако для решения вопроса существования и оценок решений уравнений (3.10), (3.12) с начальными условиями (5.3) этих условий недостаточно.

Уравнения (3.10), (3.12) являются одним из обобщений хорошо известного уравнения Кортевега—де Фриза [7] (ниже — КдФ), а задача (3.10), (5.3) — начальная задача для обобщенного уравнения КдФ. Само уравнение КдФ и многие его обобщения исследовались в большом количестве работ, значительная часть которых посвящена образованию солитонов и поведению решения при больших временах. Для наших целей необходимы результаты о существовании и единственности решений задачи Коши для обобщенных уравнений КдФ на конечном промежутке по времени и оценки убывания по пространственной переменной на бесконечности, которые есть, например, в работах [3, 8, 9].

Обозначение 6.1. Введем обозначение пространства Шварца гладких быстро убывающих функций: $\tilde{S}(\mathbb{R}^1)$ (знак $\tilde{S}$ добавлен, чтобы сделать различие в схожих обозначениях класса функций и членов $\mathcal{AP}$). Пространство функций $f(x, t)$, быстро убывающих по переменной x на промежутке $[0, T]$, обозначим $\tilde{S}C_1(T)$.

Наложим на данные задачи (1.1), (1.3) дополнительные условия 6.1 и 6.2 или 6.3.

Условие 6.1. Гладкие функции $u^0(z), v^0(z), \varphi(z), \psi(z)$ принадлежат пространству Шварца быстро убывающих функций: $u^0(z), v^0(z), \varphi(z), \psi(z) \in \tilde{S}(\mathbb{R}^1)$.

Условие 6.2. Функция $f(u, v)$ является многочленом с постоянными коэффициентами.

Условие 6.3. Для производной функции $\tilde{f}_{\text{eff}}(z) = f(z, \frac{a}{b}z)$ выполняется оценка: существуют $\delta > 0, 0 \leq p < 4$ такие, что при $z \in \mathbb{R}^1$

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{f}_{\text{eff}}(z)}{\partial z^2} \right| \leq \beta(|z|^p + 1).$$

Для того, чтобы воспользоваться результатами этих работ, сформулируем следствия из наложенных выше условий 6.1, 6.2 и 6.3.

Следствие 6.1 (из условия 6.1). При выполнении условия 6.1 правая часть начальных условий (5.3) для функций $S_0^I u, S_0^{II} u$ принадлежит классу быстро убывающих функций $SC^\infty(\mathbb{R}^1)$.

Следствие 6.2. Начальные условия для членов разложения $S_i^I u, S_i^{II} u, i > 0$ также принадлежат классу быстро убывающих функций $SC^\infty(\mathbb{R}^1)$.

Следствие 6.3 (из условия 6.2). При выполнении условия 6.2 функция

$$f_{\text{eff}}(s) = \frac{1}{2pk(a+b)} f\left(s, \frac{a}{b}s\right)$$

в уравнениях (3.10), (3.12) также является многочленом с постоянными коэффициентами.

Следствие 6.4 (из условия 6.3). Для функции $f_{\text{eff}}(z) = \frac{1}{2pk(a+b)} f\left(z, \frac{a}{b}z\right)$ справедливы такие же оценки на производную $\frac{\partial^2 f_{\text{eff}}(z)}{\partial z^2}$ при выполнении условия 6.3.

Сформулируем теоремы существования, единственности функций S_0 и их оценки.

Теорема 6.1 (существование и оценка S -функций). При выполнении условий 6.1, 6.2 существует $T > 0$ такое, что при всех $0 \leq t \leq T$ решения уравнений (3.10), (3.12) с начальными условиями (5.3) существуют, единственны и принадлежат классу быстро убывающих функций $\tilde{SC}_1(T)$.

Доказательство. В силу следствия 6.1 правая часть начального условия (5.3) является быстро убывающей функцией из класса SR^1 (следствие 6.1).

В силу следствия 6.2 нелинейность в уравнениях (3.10), (3.12) $f_{\text{eff}}(s) = \frac{1}{2pk(a+b)} f\left(s, \frac{a}{b}s\right)$ является многочленом.

Поскольку выполнены все условия основной теоремы работы [9, §3, с. 559], то отсюда следует доказательство теоремы 6.1. $\square$

Сформулируем еще одну теорему существования и единственности решения задач (3.10), (3.12) с начальными условиями (5.3) при несколько иных условиях.

Теорема 6.2 (существование и оценка S функций). При выполнении условий 6.1, 6.3 существует $T > 0$ такое, что при всех $0 \leq t \leq T$ решения уравнений (3.10), (3.12) с начальными условиями (5.3) существуют, единственны и принадлежат классу быстро убывающих функций $\tilde{SC}_1(T)$.

Доказательство. Задачи (3.10)–(5.3), (3.12)–(5.3) при $f_{\text{eff}}(s) = \frac{1}{2pk(a+b)} f\left(s, \frac{a}{b}s\right)$ в силу следствий 6.1, 6.3 полностью удовлетворяют всем условиям теоремы 2.1 работы [8]. Отсюда следует доказательство теоремы 6.1. $\square$

Оценки функций $S_i, i = 1, 2, 3, 4$.

При выполнении условий 6.1, 6.2 или 6.3 справедлива также и теорема существования, единственности и оценки остальных функций S .

Теорема 6.3 (существование и оценка S_i , $i = 1, 2, 3, 4$). При выполнении условий 6.1, 6.2 или 6.3 существует $T > 0$ такое, что при всех $0 \leq t \leq T$ все $S_i^I u, S_i^{II} u, S_i^I v, S_i^{II} v$, $i = 1, 2, 3, 4$ существуют, единственны и принадлежат классу быстро убывающих функций $\tilde{S}C_1(T)$.

Доказательство. Доказательство почти дословно повторяет доказательство предыдущей теоремы 6.2. $\square$

Из теорем 6.1, 6.2, 6.3 вытекает:

Следствие 6.5. Существует быстро убывающая функция $\theta_1(z) \in \tilde{S}C_1(T)$ такая, что для всех $0 \leq t \leq T$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |D^k S_i^I u| &< \theta_1(\zeta_1), & |D^k S_i^{II} u| &< \theta_1(\zeta_2), \\ |D^k S_i^I v| &< \theta_1(\zeta_1), & |D^k S_i^{II} v| &< \theta_1(\zeta_2), \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$i = 0, 1, 2, 3, 4; \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Эту функцию удобно использовать при оценках остаточного члена.

6.2. Оценки функций Π .

Теорема 6.4. Все $\Pi_i u, \Pi_i v$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ существуют, единственны и удовлетворяют оценкам

$$|\Pi_i u(\tau, \xi)| < C e^{-\kappa \tau} \theta_2(\xi), \quad C > 0, \quad \kappa > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

вместе со своими производными (до третьего порядка включительно), где функция $\theta_2(z) \in \tilde{S}$.

Доказательство. Доказательство стандартное [2]. Экспоненциальные оценки убывания по переменной τ делаются стандартно [2], оценка скорости убывания по переменной ξ следует из оценок функций S . $\square$

7. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Окончательно построенное АР имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(x, t, \varepsilon) \\ v(x, t, \varepsilon) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S^I u(\zeta_1, t, \varepsilon) \\ S^I v(\zeta_1, t, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^{II} u(\zeta_2, t, \varepsilon) \\ S^{II} v(\zeta_2, t, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Pi u(\xi, \tau, \varepsilon) \\ \Pi v(\xi, \tau, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \left(\begin{pmatrix} S_i^I u(\zeta_1, t) \\ S_i^I v(\zeta_1, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_i^{II} u(\zeta_2, t) \\ S_i^{II} v(\zeta_2, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Pi_i u(\xi, \tau) \\ \Pi_i v(\xi, \tau) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix} = \\ &= S^I(\zeta_1, t, \varepsilon) + S^{II}(\zeta_2, t, \varepsilon) + \Pi(\xi, \tau, \varepsilon) + R = U + R. \end{aligned} \quad (7.1)$$

В соответствии с алгоритмом построения АР остаточные члены (Ru, Rv) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon^6 (Ru_{tt} - k_1^2 Ru_{xx}) &= -p(aRu - bRv) - \varepsilon^3 q(aRu - bRv)_t - \varepsilon^2 Rf(Ru, Rv) + ru, \\ \varepsilon^6 (Rv_{tt} - k_2^2 Rv_{xx}) &= p(aRu - bRv) + \varepsilon^3 q(aRu - bRv)_t + \varepsilon^2 Rf(Ru, Rv) + rv \end{aligned} \quad (7.2)$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} Ru(x, 0) = 0, Ru_t(x, 0) = 0, \\ Rv(x, 0) = 0, Rv_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Здесь функция Rf имеет вид

$$\begin{aligned} Rf(Ru, Rv) &= (f(S^I u + S^{II} u + \Pi u + Ru, S^I v + S^{II} v + \Pi v + Rv) - \\ &\quad - (f(S^I u + S^{II} u + \Pi u, S^I v + S^{II} v + \Pi v))), \\ Rf(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

При выполнении условия 6.2 функция Rf является многочленом, при выполнении условия 6.3 функция Rf удовлетворяет таким же условиям на производные.

Замечание 7.1. Очевидно, что в оценках (6.1), (6.2) быстро убывающие функции $\theta_1(z), \theta_2(z)$ можно заменить на одну $\theta(z) \in \tilde{S}$, что использовано ниже, при формулировке теоремы 7.1.

Теорема 7.1. *Существует такое $T > 0$, не зависящее от ϵ , что на отрезке $0 < t \leq T$ остаточные члены (Ru, Rv) в АР (7.1) удовлетворяют системе уравнений (7.2) и начальным условиям (7.3).*

Слагаемые (ru, rv) в уравнениях (7.2) удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} ru &= O(\epsilon^5(\theta(\zeta_1) + \theta(\zeta_2)) + \epsilon^4\theta(\xi)e^{-\kappa\tau}), \\ rv &= O(\epsilon^5(\theta(\zeta_1) + \theta(\zeta_2)) + \epsilon^4\theta(\xi)e^{-\kappa\tau}). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Здесь функция $\theta(z)$ взята в соответствие с замечанием 7.1.

Доказательство. Доказательство следует из оценок (6.1), (6.2) и алгоритма построения АР (7.1). $\square$

8. ИТОГИ

1. Построены главные члены асимптотического разложения решения задачи Коши с начальными условиями (1.3) типа «узкая шапочка» для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений (1.1) в критическом случае.
2. Для любого $t \geq t_0 > 0$, где $t_0 > 0$ — произвольное, не зависящее от ϵ , АР (7.1) может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} u(x, t, \epsilon) \\ v(x, t, \epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^I u(\zeta_1, t, \epsilon) \\ S_0^I v(\zeta_1, t, \epsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_0^{II} u(\zeta_2, t, \epsilon) \\ S_0^{II} v(\zeta_2, t, \epsilon) \end{pmatrix} + O(\epsilon). \quad (8.1)$$

Вид АР (8.1) следует из экспоненциального убывания (6.2) пограничных функций П:

$$\left| \Pi_i u\left(\frac{t}{\epsilon^3}, \xi\right) \right| = O(\epsilon^N) \quad \forall N > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (8.2)$$

3. Главные слагаемые в АР (7.1), оставленные в (8.1), суть решения начальных задач для обобщенных уравнений Кортевега—де Фриза (3.10), (3.12).
4. Сформулированы условия 6.1, 6.2 или 6.3, при выполнении которых функции S существуют и являются быстро убывающими на некотором промежутке $[0, T]$.
5. При выполнении условий 6.1, 6.2 или 6.3 сделана оценка невязки остаточного члена в АР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б. О внутреннем переходном слое в решении системы уравнений в частных производных первого порядка // Дифф. уравн. — 1985. — 21, № 9. — С. 1537–1544.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
3. Кружков С. Н., Фаминский А. В. Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега—де Фриза // Мат. сб. — 1983. — 120, № 3. — С. 396–425.
4. Нестеров А. В. О структуре решения одного класса гиперболических систем с несколькими пространственными переменными в дальней зоне // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2016. — 56, № 4. — С. 639–649. — DOI: [10.7868/S0044466916040141](https://doi.org/10.7868/S0044466916040141).
5. Нестеров А. В. Об одном эффекте влияния малой взаимной диффузии на процессы переноса в многофазной среде // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2021. — 61, № 3. — С. 519–528. — DOI: [10.31857/S0044466921020095](https://doi.org/10.31857/S0044466921020095).
6. Нестеров А. В., Шулико О. В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в критическом случае // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2010. — 50, № 2. — С. 268–275.
7. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
8. Фаминский А. В. Задача Коши для уравнения Кортевега—де Фриза и его обобщений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1988. — № 13. — С. 57–105.
9. Якулов В. М. О задаче Коши для уравнения Кортевега—де Фриза // Дифф. уравн. — 1975. — 11, № 3. — С. 556–561.

А. В. Нестеров

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва, Россия

E-mail: andrenerov@yandex.ru, РИНЦ SPIN-код: 7754-2242, РИНЦ AuthorID: [173696](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=173696), ResearcherID: [JNR-9882-2023](https://orcid.org/0000-0002-4702-4777), Scopus: [24360671800](https://orcid.org/0000-0002-4702-4777), ORCID: [0000-0002-4702-4777](https://orcid.org/0000-0002-4702-4777)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-114-125](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-114-125)
 EDN: [UERBYQ](#)

UDC 517.955.8:519.633
Research article

Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed system of hyperbolic equations in the critical case

A. V. Nesterov

Plekhanov Russian State University of Economics, Moscow, Russia

Abstract. We construct the first terms of the formal asymptotic expansion in a small parameter of the solution to the Cauchy problem with “narrow cap” initial conditions for a singularly perturbed system of wave equations in the critical case. The asymptotic expansion is constructed as a sum of traveling-wave terms and boundary-value functions. The traveling-wave terms are described by generalized Korteweg–de Vries equations. Under certain assumptions, the remainder term is estimated by the residual.

Keywords: asymptotic expansions, singularly perturbations, critical case, initial problems, systems of hyperbolic equations, generalized Korteweg–de Vries equation.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project No. FSSW-2023-0004.

For citation: A. V. Nesterov, “Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed system of hyperbolic equations in the critical case,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 114–125. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-114-125](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-114-125) EDN: [UERBYQ](#)

REFERENCES

1. A. B. Vasil’eva, “O vnutrennem perekhodnom sloe v reshenii sistemy uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka” [On the internal transition layer in the solution of a system of first-order partial differential equations], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1985, **21**, No. 9, 1537–1544 (in Russian).
2. A. B. Vasil’eva and V. F. Butuzov, *Singulyarno vozmushchennye uravneniya v kriticheskikh sluchayakh* [Singularly Perturbed Equations in Critical Cases], Moscow State Univ., Moscow, 1978 (in Russian).
3. S. N. Kruzhkov and A. V. Faminskii, “Obobshchennye resheniya zadachi Koshi dlya uravneniya Kortevega–de Friza” [Generalized solutions of the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1983, **120**, No. 3, 396–425 (in Russian).
4. A. V. Nesterov, “O strukture resheniya odnogo klassa giperbolicheskikh sistem s neskol’kimi prostranstvennymi peremennymi v dal’ney zone” [On the structure of the solution of one class of hyperbolic systems with several spatial variables in the far field], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2016, **56**, No. 4, 639–649 (in Russian), DOI: [10.7868/S0044466916040141](https://doi.org/10.7868/S0044466916040141).
5. A. V. Nesterov, “Ob odnom effekte vliyaniya maloy vzaimnoy diffuzii na protsessy perenosa v mnogofaznoy srede” [On one effect of the influence of small mutual diffusion on transport processes in a multiphase medium], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2021, **61**, No. 3, 519–528 (in Russian), DOI: [10.31857/S0044466921020095](https://doi.org/10.31857/S0044466921020095).
6. A. V. Nesterov and O. V. Shuliko, “Ob asimptotike resheniya singulyarno vozmushchennoy sistemy parabolicheskikh uravneniy v kriticheskom sluchae” [On the asymptotic behavior of the solution of a singularly perturbed system of parabolic equations in the critical case], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2010, **50**, No. 2, 268–275 (in Russian).

7. G. B. Whitham, *Lineynye i nelineynye volny* [Linear and Nonlinear Waves], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
8. A. V. Faminskii, “Zadacha Koshi dlya uravneniya Kortevega—de Friza i ego obobshcheniy” [The Cauchy problem for the Korteweg—de Vries equation and its generalizations], *Tr. Sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1988, No. 13, 57–105 (in Russian).
9. V. M. Yakupov, “O zadache Koshi dlya uravneniya Kortevega—de Friza” [On the Cauchy problem for the Korteweg—de Vries equation], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1975, **11**, No. 3, 556–561 (in Russian).

A. V. Nesterov

Plekhanov Russian State University of Economics, Moscow, Russia

E-mail: andrenesterov@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 7754-2242, eLIBRARY AuthorID: 173696, ResearcherID: JNR-9882-2023, Scopus: 24360671800, ORCID: 0000-0002-4702-4777