

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. В. МАЛЫГИНА

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

Аннотация. Для дифференциально-разностного уравнения с положительным фундаментальным решением получены признаки экспоненциальной устойчивости с точными оценками показателя и коэффициента экспоненциального убывания, определяемые через наибольший из вещественных корней характеристической функции. Показано, что на основе оценки фундаментального решения можно получить точные оценки любого решения с учетом начальной функции. Полученные результаты иллюстрируются рядом примеров. В частности, показано, как найти двусторонние оценки фундаментального решения в случае, когда параметры уравнения заданы интервально.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, экспоненциальная устойчивость, фундаментальное решение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Малаыина В. В. Точные оценки устойчивых решений дифференциально-разностных уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 102–113. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-102-113](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-102-113) EDN: [UCYXOE](https://www.edn.ru/UCYXOE)

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическое определение экспоненциальной устойчивости для обыкновенного дифференциального уравнения показывает, как известно, что его решения стремятся к нулю не медленнее экспоненты. Иными словами, найдутся такие $N, \gamma > 0$, что для любого решения x справедлива оценка $|x(t)| \leq N e^{-\gamma(t-t_0)} |x(t_0)|$; от постоянных N, γ требуется только существование, их величина в определении экспоненциальной устойчивости никак не оговаривается. Однако при решении конкретных задач необходимо знать эти постоянные или хотя бы уметь их точно оценивать: без указания оценок на N, γ или алгоритма их эффективного вычисления задача об экспоненциальной устойчивости не может считаться до конца решенной.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений найти N, γ точно можно лишь для скалярного случая; получить точные оценки удастся для автономных и сводящихся к ним систем.

На функционально-дифференциальные уравнения определение экспоненциальной устойчивости переносится практически дословно (с заменой начального условия на начальную функцию). Но для этих уравнений задача оценки постоянных N, γ , оставаясь столь же актуальной, оказывается нетривиальной даже для скалярных уравнений.

Различные способы оценки постоянных N, γ для функционально-дифференциальных уравнений приведены в [3, 10, 16], но вопрос о точности оценок в этих работах не ставился и не решался.

2. ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение вида

$$(Lx)(t) \equiv \dot{x}(t) - \sum_{k=1}^K a_k x(t - r_k) + \sum_{m=1}^M b_m x(t - h_m) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.1)$$

где $K, M \in \mathbb{N}$, $a_k \geq 0$ для всех $k = \overline{1, K}$, $0 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_K$, $b_m \geq 0$ для всех $m = \overline{1, M}$, $0 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_M$, $r_K < h_1$, f — локально-суммируемая функция.

При отрицательных значениях аргумента решение уравнения (2.1) требует доопределения, т. е. задания некоторой локально-суммируемой начальной функции. Однако, как показано в [1], не нарушая общности, можно считать начальную функцию частью внешнего возмущения f и полагать, что $x(\xi) = 0$ при $\xi < 0$.

Как известно, уравнение (2.1) с заданным начальным условием однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций, а его решение имеет вид [1, с. 84]:

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.2)$$

Функция X называется *фундаментальным решением* уравнения (2.1). Она является локально абсолютно непрерывной функцией и однозначно определяется как решение уравнения (2.1) при $f = 0$ с начальным условием $X(0) = 1$. Из представления (2.2) следует, что любые свойства решений уравнения (2.1) полностью определяются соответствующими свойствами фундаментального решения.

В частности, определения устойчивости также удобно давать в терминах фундаментального решения: будем называть уравнение (2.1) *экспоненциально устойчивым*, если при некоторых $N, \gamma > 0$ справедлива оценка

$$|X(t)| \leq Ne^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.3)$$

Цель нашей работы — максимально точно и эффективно оценить параметры N, γ в неравенстве (2.3). В работах [6, 8], эта задача была успешно решена для уравнений вида (2.1) в случае $a_k = 0$ для всех $k = \overline{1, K}$. Здесь мы покажем, что результаты работ [6, 8] справедливы для более общей ситуации, когда коэффициенты и запаздывания уравнения (2.1) подчинены условиям, приведенным в начале раздела 2.

Поставим уравнению (2.1) в соответствие характеристическую функцию

$$F(\lambda) = \lambda - \sum_{k=1}^K a_k e^{-\lambda r_k} + \sum_{m=1}^M b_m e^{-\lambda h_m}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.4)$$

которая играет важную роль в исследовании различных асимптотических свойств уравнения (2.1). В частности, справедлив следующий критерий экспоненциальной устойчивости уравнения (2.1).

Теорема 2.1. *Уравнение (2.1) экспоненциально устойчиво, если и только если характеристическая функция не имеет нулей в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$.*

Одно из существенных отличий уравнений с последействием от обыкновенных дифференциальных уравнений — наличие нулей у решений скалярных уравнений первого порядка. Однако это свойство присуще не всем функционально-дифференциальным уравнениям: уравнения с т. н. «малым» запаздыванием [9, 11] по свойствам близки к обыкновенным, поскольку их фундаментальное решение, не являясь экспонентой, сохраняет знак на полуоси и может быть монотонным. Если такое уравнение экспоненциально устойчиво, то для него, как мы покажем ниже, оказывается возможным дать точные оценки коэффициента и показателя экспоненты.

Найдем критерий положительности фундаментального решения уравнения (2.1).

Лемма 2.1. *Фундаментальное решение уравнения (2.1) положительно при всех $t \in \mathbb{R}_+$, если и только если существует локально абсолютно непрерывная функция v такая, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ справедливы неравенства $v(t) > 0$, а $(Lv)(t) \leq 0$.*

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна, т. к. можно положить $v(t) = X(t)$.

Доказательство достаточности проведем от противного: допустим, что условия леммы выполнены, но фундаментальное решение X имеет нули на $\mathbb{R}_+$. Так как $X(0) > 0$, то первый нуль t_0 положителен, следовательно, $X(t) > 0$ при $t \in [0, t_0)$, а $X(t_0) = 0$.

Обозначим $\phi(t) = (Lv)(t)$ и применим к решению $x = v(t)$ уравнения $(Lx)(t) = \phi(t)$ формулу (2.2):

$$v(t_0) = X(t_0)v(0) + \int_0^{t_0} X(t_0 - s)\phi(s) ds = \int_0^{t_0} X(t_0 - s)\phi(s) ds.$$

Поскольку при всех $s \in [0, t_0]$ имеем $\phi(s) \leq 0$ (по условию леммы), а $X(t_0 - s) \geq 0$ (по предположению), то $v(t_0) \leq 0$, что противоречит неравенству $v(t) > 0$. $\square$

Лемма 2.2. *Если характеристическая функция (2.4) имеет отрицательный вещественный корень, то фундаментальное решение уравнения (2.1) положительно при всех $t \in \mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Пусть $\zeta < 0$ — вещественный корень функции F . Положим $v(t) = e^{\zeta t} > 0$. Легко видеть, что $(Lv)(t) < 0$ при $t \in [0, h_M]$ и $(Lv)(t) = 0$ при $t > h_M$. Таким образом, условия леммы 2.1 выполнены, следовательно, фундаментальное решение положительно. $\square$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Отметим следующие известные [2] свойства характеристической функции F : существует λ_0 , такое, что уравнение $F(\lambda) = 0$ не имеет корней при $\operatorname{Re} \lambda > \lambda_0$, а в любой вертикальной полосе комплексной плоскости их лежит лишь конечное множество. Отсюда, с учетом соотношения $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = +\infty > 0$, следует, что характеристическая функция может иметь лишь конечное число вещественных корней, среди которых есть наибольший.

Лемма 3.1. *Если $F(\zeta_0) = 0$ и $F(\zeta) > 0$ при всех вещественных $\zeta > \zeta_0$, то $F'(\zeta_0) \geq 0$.*

Доказательство. Допущение $F'(\zeta_0) < 0$ приводит к противоречию с тем, что при $\zeta > \zeta_0$ функция F сохраняет знак. $\square$

Далее нас будет интересовать случай, когда характеристическая функция имеет вещественные корни, и при этом все они отрицательны. Поэтому обозначим наибольший вещественный корень функции F через $\zeta = -\omega < 0$.

Представим фундаментальное решение уравнения (2.1) в виде $X(t) = e^{-\omega t}Y(t)$. Тогда Y есть решение уравнения

$$\dot{y}(t) - \omega y(t) - \sum_{k=1}^K a_k e^{r_k \omega} y(t - r_k) + \sum_{m=1}^M b_m e^{h_m \omega} y(t - h_m) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (3.1)$$

с начальным условием $y(0) = 1$.

Обозначим через $G = G(\lambda)$ характеристическую функцию уравнения (3.1):

$$G(\lambda) = \lambda - \omega - \sum_{k=1}^K a_k e^{(\omega - \lambda)r_k} + \sum_{m=1}^M b_m e^{(\omega - \lambda)h_m}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функция G является аналитической при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Заметим, что Лаплас-образ функции Y определяется через функцию G равенством $Y(t) \doteq 1/G(\lambda)$. Легко видеть, что функции F и G связаны простым соотношением $F(\lambda - \omega) = G(\lambda)$, следовательно, наибольший вещественный корень $\lambda = -\omega$ функции F переходит в наибольший вещественный корень $\lambda = 0$ функции G . Из леммы 3.1 следует, что $G'(0) \geq 0$.

Очевидно, что из положительности функции X вытекает положительность Y ; ниже будет показано, что функция Y обладает еще и свойством монотонности. Для доказательства этого факта нам понадобится одно известное утверждение.

Назовем функцию, определенную на положительной полуоси, *осциллирующей*, если существует неограниченная справа последовательность точек, в которых функция меняет знак.

Лемма 3.2 (см. [17]). Если $R(t) = \sum_{j=1}^n (A_j(t) \cos \beta_j t + B_j(t) \sin \beta_j t) + z(t)$, где $A_j(t)$ и $B_j(t)$ — полиномы, а $\lim_{t \rightarrow +\infty} |z(t)| = 0$, то функция $R(t)$ является осциллирующей.

Лемма 3.3. Функция Y является монотонно возрастающей функцией на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Пусть $t \in [0, h_1)$. Тогда из условий $\omega > 0$ и $a_k > 0$ получаем

$$\dot{Y}(t) = \omega Y(t) + \sum_{k=1}^K a_k e^{r_k \omega} Y(t - r_k) > 0,$$

т. е. функция Y монотонно возрастает.

Используя равенство $\omega + \sum_{k=1}^K a_k e^{\omega r_k} = \sum_{m=1}^M b_m e^{\omega h_m}$, представим $\dot{Y}$ при $t \geq h_1$ в преобразованном виде. Если $t \in [h_{p-1}, h_p)$, $2 \leq p \leq M$, то

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) = & \omega(Y(t) - Y(t - h_1)) + \sum_{k=1}^K a_k e^{r_k \omega} (Y(t - r_k) - Y(t - h_1)) + \\ & + \sum_{m=2}^{p-1} b_m e^{h_m \omega} (Y(t - h_1) - Y(t - h_m)) + \sum_{m=p}^M b_m e^{h_m \omega} Y(t - h_1), \end{aligned}$$

а если $t > h_M$, то

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) = & \omega(Y(t) - Y(t - h_1)) + \sum_{k=1}^K a_k e^{r_k \omega} (Y(t - r_k) - Y(t - h_1)) + \\ & + \sum_{m=2}^M b_m e^{h_m \omega} (Y(t - h_1) - Y(t - h_m)). \end{aligned}$$

Если функция Y не является монотонно возрастающей на множестве $t \in [h_1, \infty)$, то она имеет первый максимум в точке $t_0 \geq h_1$. Но тогда, из приведенных выше представлений для производной, получаем, что $\dot{Y}(t_0) > 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Лемма 3.4. Функция G не имеет нулей в полуплоскости $\Pi = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$, за исключением единственного корня $\lambda = 0$: простого, если $G'(0) > 0$, и кратного, если $G'(0) = 0$.

Доказательство. Очевидно, что функция G не имеет положительных вещественных корней. Допустим, у нее есть комплексные корни справа от мнимой оси; обозначим $\alpha + i\beta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ — корни G с наибольшей вещественной частью $\alpha > 0$. Тогда из [4] получаем

$$Y(t) = e^{\alpha t} \sum_{j=1}^n (A_j(t) \cos \beta_j t + B_j(t) \sin \beta_j t) + u(t),$$

где $A_j(t)$ и $B_j(t)$ — полиномы, а $\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(t)| e^{-\alpha t} = 0$. Функция $R(t) = Y(t) e^{-\alpha t}$ удовлетворяет условиям леммы 3.2 и, следовательно, является осциллирующей. Значит, и функция X — осциллирующая, что противоречит лемме 2.2.

Рассмотрим случай, когда функция G имеет на мнимой оси корни, отличные от нулевого. Обозначим их $i\beta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $L_y(\lambda)$ и $L_{\dot{y}}(\lambda)$ — Лаплас-образы функций Y и $\dot{Y}$. Тогда

$$L_{\dot{y}}(\lambda) = \lambda L_y(\lambda) - 1 = \frac{\lambda}{G(\lambda)} - 1 = \frac{-\omega - \sum_{k=1}^K a_k e^{-r_k(\lambda - \omega)} + \sum_{m=1}^M b_m e^{-h_m(\lambda - \omega)}}{\lambda - \omega - \sum_{k=1}^K a_k e^{-r_k(\lambda - \omega)} + \sum_{m=1}^M b_m e^{-h_m(\lambda - \omega)}}.$$

Из соотношения $\lim_{\lambda \rightarrow 0} L_{\dot{y}}(\lambda) = 1$ вытекает, что $\lambda = 0$ не является особой точкой для $L_{\dot{y}}(\lambda)$.

Следовательно, для функции $\dot{Y}(t)$ справедливо представление [4]:

$$\dot{Y}(t) = \sum_{j=1}^n (\tilde{A}_j(t) \cos \beta_j t + \tilde{B}_j(t) \sin \beta_j t) + \tilde{z}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\tilde{A}_j(t)$ и $\tilde{B}_j(t)$ — полиномы, а $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{z}(t)| = 0$. Применяя лемму 3.2, заключаем, что функция $\dot{Y}$ является осциллирующей — а это противоречит лемме 3.3.

Следовательно, в полуплоскости Π у функции G нет нулей, кроме $\lambda = 0$. Кратность нулевого корня при условии $G'(0) = 0$ очевидна. $\square$

Лемма 3.5. Пусть функция G не имеет нулей на прямой $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = -\nu < 0\}$. Тогда при некотором $M > 0$ для любого $t \geq 0$ справедлива оценка:

$$\left| \int_{-\nu-i\infty}^{-\nu+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} d\lambda \right| \leq M e^{-\nu t}.$$

Доказательство. Так как $\int_{-\nu-i\infty}^{-\nu+i\infty} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda} = 0$ (см. [5, с. 464-465]), то

$$\begin{aligned} \int_{-\nu-i\infty}^{-\nu+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} d\lambda &= \int_{-\nu-i\infty}^{-\nu+i\infty} e^{\lambda t} \left(\frac{1}{G(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} \right) d\lambda = \\ &= \int_{-\nu-i\infty}^{-\nu+i\infty} \left(\omega + \sum_{k=1}^K a_k e^{-r_k(\lambda-\omega)} - \sum_{m=1}^M b_m e^{-h_m(\lambda-\omega)} \right) \frac{e^{\lambda t}}{\lambda G(\lambda)} d\lambda = e^{-\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} O\left(\frac{1}{\nu^2 + \zeta^2}\right) d\zeta. \end{aligned}$$

$\square$

Лемма 3.6. Для любого $\nu > 0$ при всех $t \geq 0$ справедливо равенство:

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left| \int_{-\nu+iy}^{\nu+iy} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} d\lambda \right| = 0.$$

Доказательство. Так как для достаточно большого $|y|$ и любого $\zeta \in [-\nu, \nu]$ при некотором $m > 0$ справедлива оценка $|G(\zeta + iy)| \geq m\sqrt{\zeta^2 + y^2}$, то

$$\left| \int_{-\nu+iy}^{\nu+iy} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} d\lambda \right| = \left| \int_{-\nu}^{\nu} \frac{e^{(\zeta+iy)t}}{G(\zeta+iy)} d\zeta \right| \leq \frac{e^{\nu t}}{m} \int_{-\nu}^{\nu} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + y^2}} = \frac{e^{\nu t}}{m} \ln \left| \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + y^2}}{-\nu + \sqrt{\nu^2 + y^2}} \right| \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0.$$

$\square$

Лемма 3.7. Если $G'(0) > 0$, то фундаментальное решение уравнения (3.1):

1. Является монотонно возрастающей функцией на полуоси $[0, \infty)$.
2. Имеет предел на бесконечности $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \frac{1}{G'(0)}$.
3. Имеет двустороннюю оценку

$$1 < Y(t) < \frac{1}{G'(0)}, \quad t > 0. \quad (3.2)$$

Доказательство. Первое утверждение установлено в лемме 3.3.

Чтобы доказать второе утверждение, рассмотрим на комплексной плоскости прямоугольник $ABCD$ со сторонами, параллельными вещественной и мнимой осям. Пусть сторона AB лежит на прямой $\operatorname{Re} \lambda = -\nu < 0$, сторона CD — на прямой $\operatorname{Re} \lambda = \nu > 0$, точка A лежит ниже вещественной оси, точка B симметрична ей относительно той же оси. Из леммы 3.4 следует, что найдется число

$\nu > 0$ такое, что справа от прямой $\operatorname{Re} \lambda = -\nu$ у функции G есть только один корень $\lambda = 0$. Интеграл от функции $\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)}$ по контуру $ABCD$ равен, с одной стороны, вычету в точке $\lambda = 0$, а с другой стороны — разбивается на сумму четырех интегралов по сторонам прямоугольника. Перейдем к пределу при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \pm\infty$ (движение происходит с одинаковой скоростью к $+\infty$ и $-\infty$). Как уже отмечалось выше, $1/G(\lambda)$ есть Лаплас-образ функции Y , следовательно,

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} d\lambda.$$

Применяя к интегралу по отрезку AB лемму 3.5, а к интегралам по отрезкам BC и DA лемму 3.6, получаем оценку:

$$\left| Y(t) - \operatorname{res}_{\lambda=0} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} \right| \leq \frac{M}{2\pi} e^{-\nu t}. \quad (3.3)$$

По условию леммы $\lambda = 0$ — простой полюс функции $\frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)}$; следовательно,

$$\operatorname{res}_{\lambda=0} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda t}}{G'(\lambda)} = \frac{1}{G'(0)},$$

и из неравенства (3.3) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \frac{1}{G'(0)}$, т. е. второе утверждение леммы 3.7 доказано.

Третье утверждение следует из первых двух. $\square$

Замечание 3.1. Если уравнение (3.1) рассматривать на полуоси $[T, \infty)$, то из леммы 3.7 следует, что оценку (3.2) можно уточнить, заменив ее оценкой

$$Y(T) < Y(t) < \frac{1}{G'(0)}, \quad t > T,$$

при этом за счет увеличения T разность $1/G'(0) - Y(T)$ может быть сделана сколь угодно малой.

Опираясь на лемму 3.7, докажем следующий основной результат.

Теорема 3.1. Пусть $-\omega < 0$ — наибольший вещественный корень характеристической функции F уравнения (2.1). Тогда, если $F'(-\omega) > 0$, то фундаментальное решение уравнения (2.1) имеет двустороннюю оценку

$$e^{-\omega t} < X(t) < \frac{1}{F'(-\omega)} e^{-\omega t}, \quad t > 0. \quad (3.4)$$

Доказательство. Так как фундаментальные решения уравнений (2.1) и (3.1) связаны равенством $X(t) = e^{-\omega t} Y(t)$, а характеристические функции — равенством $F(\lambda - \omega) = G(\lambda)$, теорема 3.1 вытекает из леммы 3.7. $\square$

Замечание 3.2. Постоянные 1 и $\frac{1}{F'(-\omega)}$ в оценке (3.4) не улучшаемы: это следует из п. 2 леммы 3.7 и свойства $X(0) = 1$.

Замечание 3.3. Оценка (3.4) двусторонняя, поэтому показатель экспоненты ω нельзя ни увеличить, ни уменьшить.

Замечание 3.4. Рассмотрим уравнение вида (2.1), в котором решение при отрицательных значениях аргумента доопределено начальной функцией:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \sum_{k=1}^K a_k x(t - r_k) + \sum_{m=1}^M b_m x(t - h_m) = 0, & t > 0, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), & \xi < 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Все условия на коэффициенты уравнения (3.5) оставим теми же, что и в уравнении (2.1). Функцию φ можно считать принадлежащей пространству $L_1[-r, 0]$ или некоторому его линейному

подпространству, снабженному собственной нормой. Если, следуя [12, 13], понимать под решением уравнения (3.5) непрерывное продолжение начальной функции, то надо требовать выполнения условия $x(0) = \varphi(0)$, но, вообще говоря, это требование не обязательно. Следуя [1], перепишем уравнение (3.5) в виде (2.1), положив $f(t) = \sum_{k=1}^K a_k \varphi(t - r_k) - \sum_{m=1}^M b_m \varphi(t - h_m)$, где $\varphi(\xi) = 0$, если $\xi > 0$. Опираясь на формулу (2.2), получаем следующее представление для решения задачи (3.5):

$$x(t) = X(t)x(0) + \sum_{k=1}^K a_k \int_0^t X(t-s)\varphi(s-r_k)ds - \sum_{m=1}^M b_m \int_0^t X(t-s)\varphi(s-h_m)ds. \quad (3.6)$$

Если для фундаментального решения уравнения (3.5) выполнены условия теоремы 3.1, то из представления (3.6) легко получить оценки на любое решение задачи (3.5) с учетом нормы пространства, из которого выбирается начальная функция.

4. КОММЕНТАРИИ И ПРИМЕРЫ

Теорему 3.1 можно рассматривать как признак экспоненциальной устойчивости уравнения (2.1). Очевидно, однако, что в ней содержится больше информации: во-первых, оценка (3.4) двусторонняя; во-вторых, показатель экспоненты находится как вещественный корень функции, имеющей простую структуру; в-третьих, по найденному показателю точно определяется еще и коэффициент при экспоненте. Для проверки условий теоремы 3.1 удобно располагать эффективными признаками, гарантирующими положительность фундаментального решения уравнения (2.1); такие признаки получены в работах [7, 14, 19]. Следует также иметь в виду, что для уравнений, рассматриваемых в данной статье, область положительности фундаментального решения является точным дополнением к области осцилляции [18], что позволяет использовать ряд установленных для дифференциально-разностных уравнений критериев осцилляции (см., напр. монографию [15]).

Рассмотрим несколько примеров уравнений вида (2.1) и найдем для них на основе теоремы 3.1 двусторонние оценки решений.

Пример 4.1. Найдем оценки для фундаментального решения уравнения

$$\dot{x}(t) - 0,35x(t-1) + 0,45x(t-1,2) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.1)$$

Выпишем характеристическую функцию и ее производную:

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \zeta - 0,35e^{-\zeta} + 0,45e^{-1,2\zeta}, \\ F'(\zeta) &= 1 + 0,35e^{-\zeta} - 0,54e^{-1,2\zeta}. \end{aligned}$$

Вещественные корни уравнения $F(\zeta) = 0$: $\zeta_1 \approx -1,80071$, $\zeta_2 \approx -0,12659$. Искомый показатель $\omega \approx 0,12659 \in (0,126, 0,127)$. Так как $0 < 1/F'(-\omega) \approx 1,30099 < 1,301$, то условия теоремы 3.1 выполнены. Теперь, используя неравенства (3.4), получаем двустороннюю оценку фундаментального решения уравнения (4.1):

$$e^{-0,127t} < X(t) < 1,301 e^{-0,126t}, \quad t > 0.$$

Пример 4.2. Найдем оценки для фундаментального решения уравнения

$$\dot{x}(t) - 0,2x(t-0,5) + 0,3x(t-1) + 0,1x(t-1,5) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.2)$$

Выпишем характеристическую функцию и ее производную:

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \zeta - 0,2e^{-0,5\zeta} + 0,3e^{-\zeta} + 0,1e^{-1,5\zeta}, \\ F'(\zeta) &= 1 + 0,1e^{-0,5\zeta} - 0,3e^{-\zeta} - 0,15e^{-1,5\zeta}. \end{aligned}$$

Численно решая уравнение $F(\zeta) = 0$, находим два вещественных отрицательных корня: $\zeta_1 \approx -1,1446$, $\zeta_2 \approx -0,365009$. Искомый показатель $\omega \approx 0,365009 \in (0,365, 0,366)$, а $0 < 1/F'(-\omega) \approx 2,33361 < 2,334$. Условия теоремы 3.1 выполнены, из неравенства (3.4) получаем двустороннюю оценку фундаментального решения уравнения (4.2):

$$e^{-0,366t} < X(t) < 2,334 e^{-0,365t}, \quad t > 0.$$

Уточняя границы интервала, которому принадлежит ω , можно получать все более точные оценки, сколь угодно сближая показатели экспонент.

Пример 4.3. Найдем оценки для фундаментального решения уравнения

$$\dot{x}(t) - 0,5x(t) + 0,8x(t - 0,1) + 0,6x(t - 0,2) + 0,4x(t - 0,3) + 0,1x(t - 0,4) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.3)$$

Интересно отметить, что если в уравнении (4.3) отбросить все слагаемые с запаздываниями, то получится неустойчивое обыкновенное дифференциальное уравнение $\dot{x}(t) - 0,5x(t) = 0$. Тем не менее, применение к уравнению (4.3) теоремы 3.1 позволяет установить весьма сильное экспоненциальное убывание фундаментального решения — вопреки распространенному мнению, что «запаздывания дестабилизируют».

Выпишем характеристическую функцию и ее производную:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \lambda - 0,5 + 0,8e^{-0,1\lambda} + 0,6e^{-0,2\lambda} + 0,4e^{-0,3\lambda} + 0,1e^{-0,4\lambda}, \\ F'(\lambda) &= 1 - 0,08e^{-0,1\lambda} - 0,12e^{-0,2\lambda} - 0,12e^{-0,3\lambda} - 0,04e^{-0,4\lambda}. \end{aligned}$$

Вещественные корни уравнения $F(\lambda) = 0$: $\lambda_1 \approx -5,06107$, $\lambda_2 \approx -2,95599$. Искомый показатель $\omega \approx 2,95599 \in (2,955, 2,956)$. Так как $0 < 1/F'(-\omega) \approx 3,93733 < 3,938$, то условия теоремы 3.1 выполнены. Теперь, используя неравенства (3.4), получаем двустороннюю оценку фундаментального решения уравнения (4.3):

$$e^{-2,956t} < X(t) < 3,938 e^{-2,955t}, \quad t > 0.$$

Пример 4.4. Найдем оценки для решения уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + 0,3x(t - 1) = 0, & t > 0, \\ x(\xi) = \xi, & \xi \leq 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Выпишем характеристическую функцию уравнения (4.4) и ее производную:

$$F(\lambda) = \lambda + 0,3e^{-\lambda}, \quad F'(\lambda) = 1 - 0,3e^{-\lambda}.$$

Найдем вещественные корни уравнения $F(\lambda) = 0$: $\lambda_1 \approx -1,78134$, $\lambda_2 \approx -0,48940$. Искомый показатель $\omega \approx 0,48940 \in (0,489, 0,490)$. Так как $F'(-\omega) = 1 - \omega > 0$, то условия теоремы 3.1 выполнены. Находим $1/F'(-\omega) \approx 1,95849 < 1,959$. Используя неравенства (3.4), двустороннюю оценку для фундаментального решения уравнения (4.4) можно записать в виде

$$e^{-0,490t} < X(t) < 1,959 e^{-0,489t}, \quad t > 0. \quad (4.5)$$

Теперь найдем оценку на решение уравнения (4.4). На отрезке $[0, 1]$ решение уравнения (4.4) строится прямым интегрированием, поэтому будем считать, что $t \geq 1$. Из формулы (3.6) и начального условия $x(0) = 0$ имеем

$$x(t) = 0,3 \int_0^1 X(t-s)(1-s) ds, \quad t \geq 1,$$

а с учетом оценки (4.5) получаем:

$$e^{-0,490t} \int_0^1 e^{0,490s}(1-s) ds < \int_0^1 X(t-s)(1-s) ds < 1,959 e^{-0,489t} \int_0^1 e^{0,489s}(1-s) ds.$$

Вычисляя интегралы в обеих частях неравенства, получаем двустороннюю оценку для решения исходного уравнения:

$$0,177 e^{-0,490t} < x(t) < 0,384 e^{-0,489t}, \quad t \geq 1.$$

Пример 4.5. Рассмотрим семейство уравнений, для которых показатель ω удастся найти точно. Пусть $\alpha \in (0, 1)$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \alpha e^{-\alpha} x(t - 1) = 0, & t > 0, \\ x(\xi) = 1, & \xi \leq 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Выпишем характеристическую функцию уравнения (4.6) и ее производную:

$$F(\lambda) = \lambda + \alpha e^{-\alpha} e^{-\lambda}, \quad F'(\lambda) = 1 - \alpha e^{-\alpha} e^{-\lambda}.$$

Наибольший вещественный корень уравнения $F(\lambda) = 0$ находится точно: $\lambda = -\alpha$, т. е. $\omega = \alpha$. Так как $F'(-\omega) = 1 - \alpha > 0$, то условия теоремы 3.1 выполнены. Находим $1/F'(-\omega) = \frac{1}{1-\alpha}$. Используя неравенства (3.4), двустороннюю оценку для фундаментального решения уравнения (4.6) можно записать в виде

$$e^{-\alpha t} < X(t) < \frac{e^{-\alpha t}}{1-\alpha}, \quad t > 0. \quad (4.7)$$

Теперь найдем оценку на решение уравнения (4.6). Из определения фундаментального решения для уравнения (4.6) следует, что $x(t) = X(t+1)$ при всех $t \geq 0$. Следовательно, из (4.7) вытекает оценка для решения любого уравнения семейства (4.6) с единичной начальной функцией:

$$e^{-\alpha(t+1)} < x(t) < \frac{e^{-\alpha(t+1)}}{1-\alpha}, \quad t > 0.$$

Пример 4.6. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{2\sqrt{e}}x(t-1) = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.8)$$

Это уравнение является частным случаем семейства, рассмотренного в предыдущем примере (при $\alpha = 1/2$). Следовательно, для его фундаментального решения справедлива двусторонняя оценка

$$e^{-t/2} < X(t) < 2e^{-t/2}, \quad t > 0. \quad (4.9)$$

Замена $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}y(t)$ сводит уравнение (4.8) к уравнению

$$\dot{y}(t) - \frac{1}{2}y(t) + \frac{1}{2}y(t-1) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.10)$$

для фундаментального решения Y которого справедлива оценка

$$1 < Y(t) < 2, \quad t > 0.$$

По лемме 3.7 функция $Y(t)$ монотонно возрастает и, кроме того, $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 2$. Сравним значения функции $Y(t)$ в начальных точках с предельным значением. Выстраивая фундаментальное решение уравнения (4.10) «по шагам», имеем: $Y(0) = 1$, $Y(1) > 1,648$, $Y(2) > 1,893$, $Y(3) > 1,969$, $Y(4) > 1,991$, $Y(5) > 1,997$, $Y(6) > 1,999$. Следовательно, на каждом шаге оценку (4.9) можно заменить на более точную, иллюстрируя тем самым замечание 3.1; в частности, при $t > 6$ получаем

$$1,999e^{-t/2} < X(t) < 2e^{-t/2}, \quad t > 6.$$

Пример 4.7. Покажем, что на основе теоремы 3.1 можно оценивать решения дифференциально-разностных уравнений в случае, когда для коэффициентов и запаздываний известны лишь интервальные оценки. Найдем двусторонние оценки для фундаментального решения уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-r) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.11)$$

если коэффициенты и запаздывание заданы интервально: $2 < a < 2,01$, $0,83 < b < 0,84$, $0,24 < r < 0,25$. Запишем функции

$$\overline{F}(\lambda) = \lambda + 2,01 + 0,84e^{-0,25\lambda}, \quad \underline{F}(\lambda) = \lambda + 2 + 0,83e^{-0,24\lambda}$$

и производную

$$\overline{F}'(\lambda) = 1 - 0,21e^{-0,25\lambda}.$$

Численно решая уравнения $\overline{F}(\lambda) = 0$, $\underline{F}(\lambda) = 0$, находим $\overline{\omega} \approx 4,79636 \in (4,796, 4,797)$, $\underline{\omega} \approx 4,66273 \in (4,662, 4,663)$. Так как $\overline{F}'(-\overline{\omega}) = 1 - 0,25(\overline{\omega} - 2,01) > 0$, то условия теоремы 3.1 выполнены. Далее, вычисляем $1/\overline{F}'(-\overline{\omega}) \approx 3,29588 < 3,296$ и из (3.4) получаем двустороннюю оценку фундаментального решения уравнения (4.11):

$$e^{-4,797t} < X(t) < 3,296 e^{-4,662t}, \quad t > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
3. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Мат., мех., инф. — 2005. — 5, № 3. — С. 20–28.
4. Зубов В. И. К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1958. — № 6. — С. 86–95.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1987.
6. Малыгина В. В. Оценка показателя экспоненты для устойчивых решений одного класса дифференциально-разностных уравнений // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2021. — № 12. — С. 67–79. — DOI: [10.26907/0021-3446-2021-12-67-79](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-12-67-79).
7. Малыгина В. В., Чудинов К. М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. II // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2013. — № 7. — С. 3–15.
8. Малыгина В. В., Чудинов К. М. О точных двусторонних оценках устойчивых решений автономного функционально-дифференциального уравнения // Сиб. мат. ж. — 2022. — 62, № 2. — С. 360–378. — DOI: [10.33048/smzh.2022.63.208](https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.208).
9. Мышкис А. Д. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Наука, 1972.
10. Перцев Н. В. Применение М-матриц для построения экспоненциальных оценок решений задачи Коши для некоторых систем линейных разностных и дифференциальных уравнений // Мат. труды. — 2013. — 16, № 2. — С. 111–141.
11. Рябов Ю. А. Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием по времени // Докл. АН СССР. — 1963. — 151, № 1. — С. 52–54.
12. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
13. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
14. Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. — New York: Springer, 2012. — DOI: [10.1007/978-1-4614-3455-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3455-9).
15. Györi I., Ladas G. Oscillation theory of delay differential equations with applications. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1992. — DOI: [10.1093/oso/9780198535829.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198535829.001.0001).
16. Liz E., Pituk M. Exponential stability in a scalar functional-differential equation // J. Inequal. Appl. — 2006. — 2006. — 37195. — DOI: [10.1155/JIA/2006/37195](https://doi.org/10.1155/JIA/2006/37195).
17. Malygina V., Sabatulina T. On oscillation of solutions for differential equations with distributed delay // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2016. — 116. — С. 1–16. — DOI: [10.14232/ejqtde.2016.1.116](https://doi.org/10.14232/ejqtde.2016.1.116).
18. Sabatulina T. L. Oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equation // J. Math. Sci. — 2018. — 230, № 5. — С. 766–769. — DOI: [10.1007/s10958-018-3786-0](https://doi.org/10.1007/s10958-018-3786-0).
19. Sabatulina T., Malygina V. On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2014. — 61. — С. 1–16. — DOI: [10.14232/ejqtde.2014.1.61](https://doi.org/10.14232/ejqtde.2014.1.61).

В. В. Малыгина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

E-mail: mavera@list.ru, РИНЦ SPIN-код: 2194-6910, РИНЦ AuthorID: [5483](https://elibrary.ru/author_index.action?id=5483), ResearcherID: [ABI-6471-2020](https://orcid.org/0000-0003-2194-680X), Scopus: [36775201200](https://orcid.org/0000-0003-2194-680X), ORCID: [0000-0003-2194-680X](https://orcid.org/0000-0003-2194-680X)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-102-113](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-102-113)
 EDN: UCYXOE

UDC 517.929
Research article

Exact estimates of stable solutions of differential-difference equations

V. V. Malygina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

Abstract. For a differential-difference equation with a positive fundamental solution, we obtain exponential stability criteria with precise estimates of the exponent and the exponential decay coefficient. These criteria are determined by the largest real root of the characteristic function. We show that, based on the estimate of the fundamental solution, one can obtain precise estimates of any solution taking into account the initial function. The results are illustrated by a number of examples. In particular, we show how to find two-sided estimates of the fundamental solution when the parameters of the equation are defined intervalwise.

Keywords: differential-difference equation, exponential stability, fundamental solution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: V. V. Malygina, “Exact estimates of stable solutions of differential-difference equations,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 102–113. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-102-113](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-102-113) EDN: UCYXOE

REFERENCES

1. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatullina, *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional Differential Equations], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
2. R. Bellman and K. L. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
3. G. V. Demidenko and I. I. Matveeva, “Asimptoticheskie svoystva resheniy differentsial'nykh uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom” [Asymptotic properties of solutions of differential equations with retarded argument], *Vestn. NGU. Ser. Mat., Mekh., Inf.* [Bull. NSU. Ser. Math. Mech. Inf.], 2005, **5**, No. 3, 20–28 (in Russian).
4. V. I. Zubov, “K teorii lineynykh statsionarnykh sistem s zapazdyvayushchim argumentom” [To the theory of linear stationary systems with retarded argument], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1958, No. 6, 86–95 (in Russian).
5. M. A. Lavrent'ev and B. V. Shabat, *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of the Theory of Functions of Complex Variable], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
6. V. V. Malygina, “Otsenka pokazatelya eksponenty dlya ustoychivyykh resheniy odnogo klassa differentsial'no-raznostnykh uravneniy” [Estimate of the exponent for stable solutions of one class of differential-difference equations], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2021, No. 12, 67–79 (in Russian), DOI: [10.26907/0021-3446-2021-12-67-79](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-12-67-79).
7. V. V. Malygina and K. M. Chudinov, “Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy s neskol'kimi peremennymi zapazdyvaniyami. II” [Stability of solutions of differential equations with several variable delays. II], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2013, No. 7, 3–15 (in Russian).
8. V. V. Malygina and K. M. Chudinov, “O tochnykh dvustoronnikh otsenkakh ustoychivyykh resheniy avtonomnogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya” [On exact two-sided estimates of stable solutions

- of an autonomous functional differential equation], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 2022, **62**, No. 2, 360–378 (in Russian), DOI: [10.33048/smzh.2022.63.208](https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.208).
9. A. D. Myshkis, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
 10. N. V. Pertsev, “Primenenie M-matrits dlya postroeniya eksponentsial'nykh otsenok resheniy zadachi Koshi dlya nekotorykh sistem lineynykh raznostnykh i differentsial'nykh uravneniy” [Application of M-matrices to construct exponential estimates of solutions to the Cauchy problem for some systems of linear difference and differential equations], *Mat. Trudy* [Math. Proceedings], 2013, **16**, No. 2, 111–141 (in Russian).
 11. Yu. A. Ryabov, “Nekotorye asimptoticheskie svoystva lineynykh sistem s malym zapazdyvaniem po vremeni” [Some asymptotic properties of linear systems with small time delay], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1963, **151**, No. 1, 52–54 (in Russian).
 12. J. Hale, *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Theory of Functional Differential Equations], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
 13. L. E. El'sgol'ts and S. B. Norkin, *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom* [Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
 14. R. P. Agarwal, L. Berezhansky, E. Braverman, and A. Domoshnitsky, *Nonoscillation theory of functional differential equations with applications*, Springer, New York, 2012, DOI: [10.1007/978-1-4614-3455-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3455-9).
 15. I. Györi and G. Ladas, *Oscillation theory of delay differential equations with applications*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1992, DOI: [10.1093/oso/9780198535829.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198535829.001.0001).
 16. E. Liz and M. Pituk, “Exponential stability in a scalar functional-differential equation,” *J. Inequal. Appl.*, 2006, **2006**, 37195, DOI: [10.1155/JIA/2006/37195](https://doi.org/10.1155/JIA/2006/37195).
 17. V. Malygina and T. Sabatulina, “On oscillation of solutions for differential equations with distributed delay,” *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2016, **116**, 1–16, DOI: [10.14232/ejqtde.2016.1.116](https://doi.org/10.14232/ejqtde.2016.1.116).
 18. T. L. Sabatulina, “Oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equation,” *J. Math. Sci.*, 2018, **230**, No. 5, 766–769, DOI: [10.1007/s10958-018-3786-0](https://doi.org/10.1007/s10958-018-3786-0).
 19. T. Sabatulina and V. Malygina, “On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay,” *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2014, **61**, 1–16, DOI: [10.14232/ejqtde.2014.1.61](https://doi.org/10.14232/ejqtde.2014.1.61).

V. V. Malygina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

E-mail: mavera@list.ru, eLIBRARY SPIN-code: 2194-6910, eLIBRARY AuthorID: [5483](#), ResearcherID: [ABI-6471-2020](#), Scopus: [36775201200](#), ORCID: [0000-0003-2194-680X](#)