

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОНОДРОМИИ СИСТЕМ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА

В. П. ЛЕКСИН

Государственный социально-гуманитарный университет, Коломна, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются представления Бурау групп кос и представления Гасснер групп крашенных кос и их реализация в виде представлений монодромии систем Жордана—Похгаммера с подходящими параметрами. Системы Жордана—Похгаммера являются системами типа Фукса, это показывает разрешимость проблемы Римана—Гильберта для представлений Бурау и Гасснер. Рассматривается распространение этого утверждения на обобщенные группы кос и их представления.

Ключевые слова: система Жордана—Похгаммера, представление Бурау, представление Гасснер, представление монодромии, проблема Римана—Гильберта.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Лексин В. П. Представления монодромии систем Жордана—Похгаммера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 94–101. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-94-101](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-94-101) EDN: TYWNVТ

1. СИСТЕМЫ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА

Линейная пфафхова система Жордана—Похгаммера [9], определяемая набором параметров $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ имеет вид:

$$dy_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n (\beta_j y_i(z) - \beta_i y_j(z)) \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

В работах [9, 12] показано, что система Жордана—Похгаммера является вполне интегрируемой пфаффовой системой в смысле Фробениуса. Это, в частности, означает, что система имеет линейное пространство решений размерности, равной порядку системы, т. е. размерности n .

2. РЕШЕНИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА

Теперь мы дадим описание фундаментальной матрицы решений системы Жордана—Похгаммера.

Пусть $y(z_1, \dots, z_n) = (y_1(z_1, \dots, z_n), \dots, y_n(z_1, \dots, z_n))$ — решение системы (1.1) с параметрами $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Как показано в работах [9, 12], компоненты решения системы $y_i(z_1, \dots, z_n)$, $i = 1, \dots, n$ задаются интегралами гипергеометрического типа

$$y_i(z_1, \dots, z_n) = \beta_i \int_{\gamma} \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt,$$

где $\Phi(t) = \prod_{i=1}^n (t - z_i)^{\beta_i}$.

Подробнее опишем подынтегральное выражение. Рассмотрим проколотую комплексную плоскость $M = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ в n точках и многозначную аналитическую функцию на ней $\Phi(t) = \prod_{j=1}^n (t - z_j)^{\beta_j}$, $t \in M$. Ветвление этой функции определяет представление фундаментальной группы $\rho_\Phi : \pi_1(M, t_0) \rightarrow \mathbb{C}^*$ в группу по умножению ненулевых комплексных чисел. Как хорошо известно, фундаментальная группа $\pi_1(M, t_0) = F_n$ изоморфна свободной группе F_n с n свободными образующими γ_j , $i = 1, \dots, n$. Представителями свободных образующих γ_j , $j = 1, \dots, n$ в свободной группе $\pi_1(M, t_0)$ можно выбрать так называемые «малые петли», каждая из которых выходит из одной и той же точки $t_0 \in M$, подходит в M к точке z_j , обходит ее против часовой стрелки по достаточно малой окружности и затем по начальному пути возвращается в точку t_0 . Все пути подхода к выколотым точкам можно выбрать непересекающимися друг с другом, кроме точки t_0 . Обозначим соответствующие малые петли и их классы в фундаментальной группе через γ_j . Представление ρ_Φ принимает на этих петлях значения

$$\rho_\Phi(\gamma_j) = e^{2\pi\sqrt{-1}\beta_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Рассмотрим многозначные аналитические 1-формы (дифференциалы)

$$\eta_i = \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Выберем такой элемент γ фундаментальной группы $\pi_1(M, t_0) = F_n$, представленный отображением окружности $\gamma : S^1 \rightarrow M$, чтобы дифференциальные 1-формы $\gamma^* \eta_i$, $1 \leq i \leq n$ были однозначными дифференциальными 1-формами на окружности. Отметим, что для этого достаточно, чтобы отображение γ представляло либо единичный элемент группы, либо элемент, представленный некоторым коммутатором малых петель $\gamma_i \gamma_j \gamma_i^{-1} \gamma_j^{-1}$ (петли Похгаммера или двойные петли [2]). Точнее, элемент берется из подгруппы фундаментальной группы $\pi_1(M, t_0)$, порожденной коммутаторами малых петель.

Теперь мы можем интегрировать эти однозначные 1-формы по окружности. Получим интегралы, зависящие как от параметров, так и от точек $z_1, \dots, z_n$ на комплексной плоскости $I_i(z_1, \dots, z_n) = \int_{S^1} \gamma^* \eta_i$. По определению, положим $\int_\gamma \eta_i = \int_{S^1} \gamma^* \eta_i$. Такой подход к интегрированию многозначных дифференциалов (вместо использования гомологий и когомологий с коэффициентами в локальных системах и их спаривания) использовался в лекциях А. Варченко [15]. Из коммутаторов малых петель можно набрать базис $([\gamma_1], \dots, [\gamma_n])$ в группе гомологий свободной группы $H_1(F_n = \pi_1(M, t_0), \mathbb{Z})$.

Теперь сформулируем теорему, в утверждении которой дано описание интегрального представления компонент решений системы Жордана—Похгаммера и ее фундаментальной матрицы решений.

Теорема 2.1. Вектор-функция $y_\gamma(z) = (y_1(z), \dots, y_n(z))$, в которой компоненты $y_i(z)$ задаются интегралами гипергеометрического типа

$$y_i(z_1, \dots, z_n) = \beta_i \int_\gamma \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt,$$

где γ — это некоторая петля Похгаммера, является решением системы Жордана—Похгаммера

$$dy_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n (\beta_j y_i(z) - \beta_i y_j(z)) \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Матрица $Y(z) = (y_{ij}(z))_{(i,j=1,\dots,n)}$, $z \in \mathbb{C}^n$, где $y_{ij}(z) = \beta_i \int_{\gamma_j} \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt$, является фундаментальной матрицей решений системы (1.1).

Доказательство теоремы 2.1 можно найти в работах [6, 9, 12].

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОНОДРОМИИ СИСТЕМЫ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА

Система Жордана—Похгаммера не имеет особых точек в дополнении к объединению диагональных гиперплоскостей $\mathbb{C}_*^n = \mathbb{C}^n \setminus H$, где $H = \bigcup_{i,j=1}^n \{z_i = z_j\}$. Возьмем неособую точку $z_0 \in \mathbb{C}_*^n$ и петлю γ с началом и концом в z_0 . Аналитическое продолжение $Y_\gamma(z)$ вдоль петли γ фундаментальной матрицы решений $Y(z)$, рассматриваемой в малой окрестности точки z_0 , в силу интегрируемости системы Жордана—Похгаммера приводит к равенству $Y_\gamma(z) = Y(z)G(\gamma)$, где $G(\gamma)$ — невырожденная постоянная матрица, зависящая лишь от гомотопического класса петли γ . Сопоставление каждому гомотопическому классу петли γ матрицы $G^{-1}(\gamma) = G(\gamma^{-1})$ определяет представление фундаментальной группы

$$\rho : \pi_1(\mathbb{C}_*^n, z_0) \rightarrow GL(n, \mathbb{C}),$$

которое называется *представлением монодромии* системы Жордана—Похгаммера (1.1).

Пусть ρ — произвольное алгебраически определенное (например, значениями на образующих) представление фундаментальной группы дополнения $\mathbb{C}^n \setminus D$, где D — комплексное многообразие коразмерности один, и это представление реализуется как представление монодромии интегрируемой мероморфной пфаффовой системы, форма которой представлена логарифмическими формами, т. е. формами, являющимися линейными комбинациями форм вида $\frac{d\varphi}{\varphi}$, где φ — голоморфная функция, равная нулю на D . В этом случае говорят, что для представления ρ разрешима *многомерная проблема Римана—Гильберта* [1, 5] (многомерная при $n \geq 2$, а для $n = 1$ слово «многомерная» надо опустить).

4. ТОПОЛОГИЯ ДОПОЛНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА К ОБЪЕДИНЕНИЮ ДИАГОНАЛЬНЫХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ

Указанное в заглавии раздела дополнение (обозначенное ранее как $\mathbb{C}_*^n$) имеет нетривиальную фундаментальную группу, изоморфную группе крашенных кос P_n с образующими A_{ij} , представленными обходами по малым петлям диагональных гиперплоскостей и явно указанным ниже набором соотношений. Все гомотопические группы более высокого порядка равны нулю, т. е. пространство $\mathbb{C}_*^n$ является пространством Эйлеберга—Маклейна типа $K(\pi, 1)$, где группа $\pi = P_n$ изоморфна группе крашенных кос P_n с названными выше образующими A_{ij} , $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$ и соотношениями

$$A_{rs}A_{ij}A_{rs}^{-1} = \begin{cases} A_{ij}, & \text{если } s < i \text{ или } i < r < s < j, \\ A_{rj}A_{ij}A_{rj}^{-1}, & \text{если } s = i, \\ A_{rj}A_{sj}A_{ij}A_{sj}^{-1}A_{rj}^{-1}, & \text{если } i = r < s < j, \\ A_{rj}A_{sj}A_{rj}^{-1}A_{sj}^{-1}A_{ij}A_{sj}A_{rj}A_{sj}^{-1}A_{rj}^{-1}, & \text{если } r < i < s < j. \end{cases}$$

Алгебра когомологий пространства $\mathbb{C}_*^n$ над полем комплексных чисел вычислена В. И. Арнольдом, и она изоморфна алгебре дифференциальных форм, порожденной логарифмическими формами $\omega_{ij} = \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$, $i \neq j$, с соотношениями Арнольда для каждой тройки индексов i, j, k

$$\omega_{ij} \wedge \omega_{ik} + \omega_{ik} \wedge \omega_{jk} + \omega_{kj} \wedge \omega_{ij} = 0.$$

Профакторизуем комплексное линейное пространство $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n\}$ по группе перестановок S_n , действующей перестановками координат. Результатом факторизации всего пространства $\mathbb{C}^n$ будет, в силу теоремы Шевалле, также $\mathbb{C}^n$. Обозначим через D результат факторизации объединения диагональных гиперплоскостей. Тогда фундаментальная группа фактор-пространства $\mathbb{C}_*^n/S_n$ по указанному действию группы перестановок S_n изоморфна группе кос B_n с образующими σ_k , $k = 1, \dots, n - 1$ и соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, & k &= 1, \dots, n - 2, \\ \sigma_k \sigma_\ell &= \sigma_\ell \sigma_k, & |k - \ell| &\geq 2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Описанная факторизация определяет длинную точную последовательность гомотопических групп, нетривиальная часть которой есть последовательность с участием группы крашенных

кос P_n , группы кос B_n , группы подстановок S_n и тривиальной единичной группы 1

$$1 \rightarrow P_n \rightarrow B_n \rightarrow S_n \rightarrow 1.$$

Группа крашенных кос P_n является подгруппой группы кос B_n , и образующие A_{ij} , $i < j$, группы крашенных кос выражаются через образующие группы кос B_n следующим образом:

$$A_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}.$$

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУРАУ ГРУППЫ КОС

Представление Бурату группы кос B_n определяется чисто алгебраически — сопоставлением стандартным образующим σ_k , $k = 1, \dots, n-1$ группы кос B_n следующих обратимых матриц над кольцом многочленов Лорана от одной переменной:

$$M_k = \rho_B(\sigma_k) = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Легко проверить, что указанные матрицы удовлетворяют соотношениям группы кос (4.1):

$$\begin{aligned} M_k M_{k+1} M_k &= M_{k+1} M_k M_{k+1}; \\ M_k M_l &= M_l M_k. \end{aligned}$$

Таким образом, ρ_B определяет представление группы кос

$$\rho_B : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[T, T^{-1}])$$

в группу обратимых матриц порядка n над кольцом многочленов Лорана от одной переменной.

Ограничение представления Бурату на подгруппу крашенных кос задает представление последней, которое мы обозначим ρ_P .

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАССНЕР ГРУППЫ КРАШЕННЫХ КОС

Представление Гасснер [7] ρ_G является представлением группы крашенных кос P_n в группу обратимых матриц над кольцом полиномов Лорана от n переменных

$$\rho_G : P_n \rightarrow GL_n(T_1^\pm, \dots, T_n^\pm).$$

Это представление есть обобщение ограничения представления Бурату ρ_P на группу крашенных кос, и они строятся по одной алгебраической схеме. Но если представление Бурату продолжается до представления ρ_B всей группы кос B_n , то для представления Гасснер продолжение в общем случае отсутствует. Выше указано, как образующие A_{ij} группы крашенных кос выражаются через стандартные образующие σ_k группы кос, и потому представление Гасснер также можно задать как мультипликативное отображение в обратимые матрицы на косах σ_i , и затем проверяется, что соотношения группы крашенных кос для полученных матриц $\rho_G(A_{ij})$ выполняются. Итак, мы определим значения на образующих σ_k следующим равенствами:

$$M_k = \rho_G(\sigma_k) = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-T_k & T_k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Однако часть соотношений группы кос B_n , а именно $M_k M_{k+1} M_k = M_{k+1} M_k M_{k+1}$, $k = 1, \dots, n-2$, выполняются только тогда, когда все переменные $T_1 = T_2 = \dots = T_{n-1}$ равны между собой, и мы получаем представление Бурату. Но если вычислить матрицы, соответствующие образующим A_{ij} , используя точное представление группы кос B_n в группу автоморфизмов свободной группы с n образующими, то, как показала Бетти Джейн Гасснер [7], соотношения группы крашенных кос выполняются, и возникает матричное представление группы крашенных

кос, названное именем Гасснер. В книге З. Морана [13] и в работе К. Кнудсена [10] указаны матрицы, соответствующие образующим A_{ij} в представлении Гасснер

$$\rho_G(A_{rs}) = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - T_r + T_r T_s & 0 & (1 - T_r)T_r & 0 \\ 0 & \bar{u} & I_{r-s-1} & \bar{v} & 0 \\ 0 & 1 - t_s & 0 & t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-s} \end{pmatrix},$$

где векторы-столбцы $\bar{u}$, $\bar{v}$ имеют вид

$$\bar{u} = ((1 - T_{r+1})(1 - T_s), \dots, (1 - T_{s-1})(1 - T_s))^t,$$

$$\bar{v} = ((1 - T_r + 1)(T_r - 1), \dots, (1 - T_{s-1})(T_r - 1))^t,$$

где t обозначает транспонирование, а I_k обозначают единичные матрицы порядка $k = 1, 2, \dots, n$.

7. МОНОДРОМИЯ СИСТЕМЫ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА С РАВНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Теорема 7.1. *Для представления Бурау разрешима проблема Римана—Гильберта.*

Системы Жордана—Похгаммера и некоторые фактор-системы, полученные из них, являются системами Пфаффа типа Фукса, которые участвуют в формулировке проблемы Римана—Гильберта [1, 5]. Поэтому доказательство разрешимости проблемы Римана—Гильберта можно осуществить вычислив представление монодромии некоторой системы Жордана—Похгаммера и показав, что оно совпадает или эквивалентно представлению Бурау. Это сделал Т. Коно в 1988 году для системы Жордана—Похгаммера (1.1), когда все параметры системы равны между собой: $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \lambda$. Коно использовал инвариантность такой системы Жордана—Похгаммера относительно перестановок координат и компонент решения и показал, что система Жордана—Похгаммера опускается на фактор-пространство по указанному диагональному действию группы перестановок, и представление монодромии фактор-системы совпадает с представлением Бурау, когда в матрицах монодромии Бурау вместо формального параметра T используется комплексное число $e^{2\pi i \lambda}$. В рассматриваемом случае это является решением многомерной проблемы Римана—Гильберта, когда алгебраически заданное представление Бурау реализовано как представление монодромии интегрируемой системы с простыми полярными особенностями, а именно, фактор-система имеет полюса первого порядка на дивизоре особенностей.

8. МОНОДРОМИЯ СИСТЕМЫ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Теорема 8.1. *Для представления Гасснер разрешима проблема Римана—Гильберта.*

В случае представления Гасснер уже не требуется рассматривать фактор-системы, как для представления Бурау. Капович и Милсон, используя свободное дифференциальное исчисление Фокса и алгоритм специализации формальных параметров в кольце многочленов от многих переменных, в работе 2001 года [9, теорема С] показали, что представление монодромии системы Жордана—Похгаммера с произвольными параметрами (1.1) эквивалентно представлению Гасснер, когда формальным переменным присвоены комплексные значения $T_k = e^{2\pi \beta_k}$, $k = 1, \dots, n$. Это также решение многомерной проблемы Римана—Гильберта для представления Гасснер. Таким образом, доказана разрешимость проблемы Римана—Гильберта для представления Гасснер.

9. АНАЛОГИ СИСТЕМ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА, СВЯЗАННЫЕ С ДРУГИМИ СИСТЕМАМИ КОРНЕЙ ОТЛИЧНЫМИ ОТ A_n

Системы Жордана—Похгаммера теснейшим образом связаны с коксетеровской системой корней типа A_n . Полными аналогами этих систем являются системы Книжника—Замолодчикова в форме Чередника

$$d\Psi = k \sum_{\alpha \in R_+} (1 - s_\alpha) \frac{d(\alpha, z)}{(\alpha, z)} \Psi,$$

где s_α — отражения, отвечающие положительным корням системы корней R . Эта система переписывается в следующем виде:

$$d\Psi = \sum_{\alpha \in R} h_\alpha \frac{\alpha^* \otimes \alpha}{\alpha(z)} \Psi,$$

где α^* — двойственный вектор относительно стандартной билинейной формы $(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_i u_i v_i$, а h_α — $W(R)$ -инвариантная система констант $h_{w\alpha} = h_\alpha$, $w \in W(R)$. Для систем корней типа A_n , $n \geq 2$, уравнения Книжника—Замолодчикова в форме Чередника (будем говорить — уравнения Чередника) являются системами Жордана—Похгаммера с равными параметрами.

Уравнения Чередника входят в класс $\vee$ -систем Веселова

$$dy = \sum_{\alpha \in R} \alpha^\vee \otimes \alpha \frac{(d\alpha(z))}{\alpha(z)} y,$$

где R — конечная система линейных функционалов в некотором $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а вектор $\alpha^\vee$ является дуальным ковектору α относительно билинейной формы $B(x, y) = \sum_{\alpha \in R} (\alpha, x)(\alpha, y)$.

Если набор ковекторов является системой положительных корней некоторой коксетеровской системы корней, то система Веселова вполне интегрируема. Веселов и Чалых нашли деформации систем корней (уже не в классе систем корней), для которых система Веселова сохраняет интегрируемость. Уравнения Чередника и $\vee$ -системы Веселова являются аналогами систем Жордана—Похгаммера, связанными с другими системами корней или просто наборами векторов.

Для систем корней определены группы кос $B_n(R)$ и группы крашенных кос $P_n(R)$, для которых имеет место точная последовательность

$$1 \rightarrow P_n(R) \rightarrow B_n(R) \rightarrow W_n(R) \rightarrow 1,$$

$W_n(R)$ — группа Коксетера, порожденная отражениями относительно корней из R .

Основными результатами в начале двухтысячных годов были доказательства того, что эти обобщенные системы Жордана—Похгаммера определяют представления обобщенных групп кос [3, 4, 8, 12]. Однако явная матричная форма полученных представлений была найдена лишь частично. Результаты, полученные для обобщенных представлений Бурау, были затем расширены Сквайром [8, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болибрух А. А.* Проблема Римана—Гильберта // Усп. мат. наук. — 1990. — 45. — С. 3–47. — DOI: [10.1070/RM1990v045n02ABEH002350](https://doi.org/10.1070/RM1990v045n02ABEH002350).
2. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. — М.: Физматлит, 1962.
3. *Чередник И.* Монодромия r -систем и обобщенные группы кос // Докл. АН СССР. — 1989. — 256. — С. 15–18.
4. *Cherednik I.* Monodromy representations for generalized Knizhnik–Zamolodchikov equations // Publ. RIMS. Kyoto Univ. — 1991. — 27. — С. 711–726. — DOI: [10.2977/prims/1195169268](https://doi.org/10.2977/prims/1195169268).
5. *Deligne P.* Equations différentielles à points singuliers réguliers. — Berlin–Heidelberg: Springer, 1970. — DOI: [10.1007/BFb0061194](https://doi.org/10.1007/BFb0061194).
6. *Feigin M. V., Veselov A. P.* $\vee$ -systems, holonomy Lie algebras and holomorphic vector fields // Int. Math. Research Notes. — 2017. — 2018, № 7. — С. 2070–2098. — DOI: [10.1093/imrn/rnw289](https://doi.org/10.1093/imrn/rnw289).
7. *Gassner B. J.* On braid groups // Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. — 1961. — 25. — С. 10–22. — DOI: [10.1007/BF02992772](https://doi.org/10.1007/BF02992772).
8. *Givental A. B.* Twisted Picard–Lefschetz formulas // Funct. Anal. Appl. — 1988. — 22. — С. 10–18. — DOI: [10.1007/BF01077718](https://doi.org/10.1007/BF01077718).
9. *Kapovich M., Millson J.* Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation // Can. Math. Bull. — 2001. — 44. — С. 36–60. — DOI: [10.4153/CMB-2001-006-3](https://doi.org/10.4153/CMB-2001-006-3).
10. *Knudsen K. P.* On the kernel of the Gassner representation // Arch. Math. — 2005. — 85, № 2. — С. 108–117. — DOI: [10.1007/s00013-005-1271-8](https://doi.org/10.1007/s00013-005-1271-8).
11. *Kohno T.* Linear representations of braid groups and classical Yang–Baxter equations // Contemp. Math. — 1988. — 78. — С. 339–363. — DOI: [10.1090/conm/078/975088](https://doi.org/10.1090/conm/078/975088).

12. *Leksin V. P.* Monodromy of Cherednik–Kohno–Veselov connections // В сб.: «Differential equations and quantum groups. Andrey A. Bolibrukh memorial volume». — Zürich: EMS Publishing House, 2007. — С. 255–267. — DOI: [10.4171/020-1/11](https://doi.org/10.4171/020-1/11).
13. *Moran S.* Mathematical theory of knots and braids. An introduction. — Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland, 1983.
14. *Squier C. C.* Matrix representations of Artin groups // Proc. Am. Math. Soc. — 1988. — 103. — С. 49–53. — DOI: [10.1090/S0002-9939-1988-0938643-3](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1988-0938643-3).
15. *Varchenko A. N.* Special functions, KZ type equations, and representations theory // CBMS Reg. Conf. Ser. Math. — 2003. — 98. — AMS0NSF. — DOI: [10.1090/cbms/098](https://doi.org/10.1090/cbms/098).

В. П. Лексин

Государственный социально-гуманитарный университет, Коломна, Россия

E-mail: lexin_vp@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 2131-5008, РИНЦ AuthorID: [16003](https://elibrary.ru/16003), Scopus: [6507298133](https://orcid.org/0000-0001-9148-6507)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-94-101](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-94-101)

EDN: [TYWNVT](https://elibrary.ru/TYWNVT)

UDC 917.952:917.552

Research article

Monodromy representations of Jordan–Pochhammer systems

V. P. Leksin

State Socio-Humanitarian University, Kolomna, Russia

Abstract. In this paper, we consider Burau representations of braid groups and Gassner representations of pure braid groups, and their realization as monodromy representations of Jordan–Pochhammer systems with suitable parameters. Jordan–Pochhammer systems are Fuchs-type systems, which demonstrates the solvability of the Riemann–Hilbert problem for Burau and Gassner representations. We consider an extension of this statement to generalized braid groups and their representations.

Keywords: Jordan–Pochhammer system, Burau representation, Gassner representation, monodromy representation, Riemann–Hilbert problem.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: V. P. Leksin, “Monodromy representations of Jordan–Pochhammer systems,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 94–101. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-94-101](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-94-101) EDN: [TYWNVT](https://elibrary.ru/TYWNVT)

REFERENCES

1. A. A. Bolibrukh, “Problema Rimana–Gil’berta” [Riemann–Hilbert problem], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1990, **45**, 3–47 (in Russian), DOI: [10.1070/RM1990v045n02ABEH002350](https://doi.org/10.1070/RM1990v045n02ABEH002350).
2. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Kurs sovremennogo analiza* [A Course of Modern Analysis], Fizmatlit, Moscow, 1962 (Russian translation).
3. I. Cherednik, “Monodromiya r -sistem i obobshchennye gruppy kos” [Monodromy of r -systems and generalized braid groups], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1989, **256**, 15–18 (in Russian).
4. I. Cherednik, “Monodromy representations for generalized Knizhnik–Zamolodchikov equations,” *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, 1991, **27**, 711–726, DOI: [10.2977/prims/1195169268](https://doi.org/10.2977/prims/1195169268).



5. P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1970, DOI: [10.1007/BFb0061194](https://doi.org/10.1007/BFb0061194).
6. M. V. Feigin and A. P. Veselov, “V-systems, holonomy Lie algebras and holomorphic vector fields,” *Int. Math. Research Notes*, 2017, **2018**, No. 7, 2070–2098, DOI: [10.1093/imrn/rnw289](https://doi.org/10.1093/imrn/rnw289).
7. B. J. Gassner, “On braid groups,” *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 1961, **25**, 10–22, DOI: [10.1007/BF02992772](https://doi.org/10.1007/BF02992772).
8. A. B. Givental, “Twisted Picard–Lefschetz formulas,” *Funct. Anal. Appl.*, 1988, **22**, 10–18, DOI: [10.1007/BF01077718](https://doi.org/10.1007/BF01077718).
9. M. Kapovich and J. Millson, “Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation,” *Can. Math. Bull.*, 2001, **44**, 36–60, DOI: [10.4153/CMB-2001-006-3](https://doi.org/10.4153/CMB-2001-006-3).
10. K. P. Knudsen, “On the kernel of the Gassner representation,” *Arch. Math.*, 2005, **85**, No. 2, 108–117, DOI: [10.1007/s00013-005-1271-8](https://doi.org/10.1007/s00013-005-1271-8).
11. T. Kohno, “Linear representations of braid groups and classical Yang–Baxter equations,” *Contemp. Math.*, 1988, **78**, 339–363, DOI: [10.1090/conm/078/975088](https://doi.org/10.1090/conm/078/975088).
12. V. P. Leksin, “Monodromy of Cherednik–Kohno–Veselov connections,” In: *Differential equations and quantum groups. Andrey A. Bolibrukh memorial volume*, EMS Publishing House, Zürich, 2007, pp. 255–267, DOI: [10.4171/020-1/11](https://doi.org/10.4171/020-1/11).
13. S. Moran, *Mathematical theory of knots and braids. An introduction*, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1983.
14. C. C. Squier, “Matrix representations of Artin groups,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 1988, **103**, 49–53, DOI: [10.1090/S0002-9939-1988-0938643-3](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1988-0938643-3).
15. A. N. Varchenko, “Special functions, KZ type equations, and representations theory,” *CBMS Reg. Conf. Ser. Math.*, 2003, **98**, AMS0NSF, DOI: [10.1090/cbms/098](https://doi.org/10.1090/cbms/098).

V. P. Leksin

State Socio-Humanitarian University, Kolomna, Russia

E-mail: lexin_vp@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 2131-5008, eLIBRARY AuthorID: [16003](https://elibrary.ru/16003),
Scopus: [6507298133](https://orcid.org/0000-0002-6507-2981)