

ПРИБЛИЖЕННАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ПОМОЩЬЮ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА

С. КУМАР

Indira Gandhi National Tribal University, Amarkantak, India

Аннотация. В данной работе исследуется приближенная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности с запаздыванием с использованием регуляризации Тихонова. Рассматриваемая задача в виде дифференциального уравнения в частных производных преобразуется в эквивалентное операторное уравнение. Были исследованы достаточные условия и проанализировано операторное уравнение, гарантирующее приближенную управляемость в соответствии с методом регуляризации Тихонова. Основной результат доказывает, что полулинейная система с запаздыванием является приближенно управляемой, если соответствующая линейная система без запаздывания также является приближенно управляемой. В заключение была установлена оценка погрешности для решения операторного уравнения, регуляризованного по Тихонову.

Ключевые слова: приближенная управляемость, полулинейное уравнение теплопроводности, запаздывание, тихоновская регуляризация, операторное уравнение, некорректная задача, оценка погрешности, C_0 -полугруппа.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Кумар С. Приближенная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности с запаздыванием с помощью регуляризации Тихонова // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 85–93. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-85-93](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-85-93) EDN: TUYAYJ

1. ВВЕДЕНИЕ

Практический опыт показывает, что математические модели явлений реальной жизни в большинстве областей науки, техники и социальных наук часто оказываются некорректно поставленными. Это побудило математиков к разработке теории некорректно поставленных задач, и теперь эта теория играет значительную роль в различных областях исследований, таких как задачи обратной теплопроводности, уравнения диффузии с дробной производной по времени и т. д. Теория некорректно поставленных задач оснащена различными методами аппроксимации. Одним из наиболее известных методов является метод регуляризации Тихонова. В работах Катта и соавторов [12, 13, 19] был применен метод регуляризации Тихонова для вычисления управления в линейных и полулинейных системах. В работе Сингха и Дабаса [23] было получено регуляризованное управление с помощью регуляризации Тихонова для линейных систем второго порядка, которое затем было применено к соответствующей полулинейной системе.

Управляемость — это свойство системы изменять свое состояние, переходя из любого заданного начального состояния в желаемое. Она описывается в различных формах, среди которых приближенная управляемость является наиболее важной для математиков из-за широкого спектра ее применений. Поэтому существует длинный список работ математиков, посвященных изучению приближенной управляемости дифференциальных систем с запаздыванием [4, 6–9, 11, 14–16, 21, 22, 24–26]. В работе Дауэра и Махмудова [4] была рассмотрена приближенная и полная управляемость полулинейных функциональных дифференциальных систем в гильбертовых пространствах. В работе Сукаванама и Томара [25] была установлена приближенная управляемость с помощью условия на образ нелинейности и оператора управления. В работах Сукаванама и Тафессе [24], а также Вана [26] была получена приближенная управляемость полулинейных систем управления с запаздыванием. В работе Энрикеса и Прокопчика [8] была исследована управляемость и стабилизируемость изменяющейся во времени линейной абстрактной системы управления с распределенной задержкой в переменных состояния. В работе Чжона и Хвана [11] было доказано включение достижимых множеств линейной системы управления в полулинейные запаздывающие функциональные дифференциальные уравнения. В работах Сукаванама и его коллег [6, 7, 21, 22] была исследована приближенная и полная управляемость запаздывающих полулинейных систем как детерминированного, так и стохастического типов. В работе Кима и соавторов [14] была доказана приближенная управляемость полулинейной задачи управления с запаздыванием с использованием результатов о сюръективности. В работе Эрнандеса и соавторов [9] был рассмотрен общий класс абстрактных задач управления первого порядка с запаздыванием, зависящим от состояния. В работе Кумара [15] была установлена приближенная управляемость линейных и полулинейных систем управления с запаздыванием с помощью построения оператора Немыцкого и использования теоремы о неподвижной точке типа Роте.

Несколько математиков внесли вклад в исследование управляемости уравнения теплопроводности с запаздыванием и, в более общем смысле, параболического уравнения с запаздыванием. В работе Чжоу [27] показано, что если нелинейная функция равномерно ограничена, то полулинейное уравнение теплопроводности является приближенно управляемым для любого заданного конечного момента времени $T > 0$. В работе Фабра и соавторов [5] была изучена приближенная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности в пространстве L^p , $1 \leq p < \infty$, в предположении, что нелинейность является глобально липшицевой с управлением из L^∞ в обоих случаях: внутреннего и граничного управления. В работе Карраско с соавторами [1, 2] были представлены результаты о приближенной управляемости полулинейных параболических уравнений с запаздыванием по переменной состояния. В работе Хуанга и соавторов [10] была установлена приближенная управляемость дробных полулинейных параболических уравнений с использованием теории полугрупп линейных операторов и теории неподвижной точки.

Основываясь на этом обзоре литературы, в данной работе изучена приближенная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности с запаздыванием в ограниченной области. Новизна этой работы заключается в применении теории тихоновской регуляризации. Ограниченность нелинейности F заменяется более мягким условием на константу Липшица. Кроме того, для регуляризованного по Тихонову решения получена оценка погрешности в терминах управления. Статья организована следующим образом: раздел 2 является введением, раздел 3 описывает рассматриваемую систему, а раздел 4 представляет основные результаты.

2. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ — ограниченное множество, а $\partial\Omega$ обозначает его границу. Система, рассматриваемая в данной статье, — это полулинейное уравнение с запаздыванием для распространения тепла с граничным условием, заданная следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = \Delta z(t, x) + \chi_V u(t, x) + f(t, z(t - \tau, x), u(t, x)), & (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \\ z(t, x) = 0 & \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \\ z(s, x) = \eta(s, x), & (s, x) \in [-\tau, 0] \times \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $z: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; Δ — оператор Лапласа; $u: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — источник тепла; χ_V — характеристическая функция $V \subset \Omega$, $\tau > 0$; $\eta: [-\tau, 0] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, и $f: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — нелинейная функция.

Идея состоит в том, чтобы преобразовать полулинейное уравнение теплопроводности с запаздыванием (2.1) в абстрактную функционально-дифференциальную систему, включающую определенные операторы. Для этого возьмем представления: $z(t, x) = [y(t)](x)$ так, что $y(t) = z(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ и $y \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$, $v(t) = u(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ и $F(t, y(t - \tau), v(t)) = f(t, z(t - \tau, \cdot), u(t, \cdot)) \in L^2(\Omega)$. Далее определим $Az = \Delta z$ с областью определения $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Этот оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ на $L^2(\Omega)$ с $\|S(t)\| \leq M$ при некоторой константе $M > 0$ (см. [3, 17, 20]). Возьмем $B = \chi_V : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ — оператор на $V \subset \Omega$, который, очевидно, является ограниченным линейным оператором с нормой $\|B\|_o = 1$. Тогда полулинейное уравнение теплопроводности с запаздыванием (2.1) принимает абстрактную форму

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bv(t) + F(t, y(t - \tau), v(t)), & t > 0, \\ y(t) = \eta(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Предположение (A1). Нелинейная функция F измерима в $[0, T]$ и удовлетворяет условию Липшица в $\mathbb{R}^2$ для некоторой константы $L_f > 0$,

$$\|F(t, y_1, v_1) - F(t, y_2, v_2)\| \leq L_f(\|y_1 - y_2\| + \|v_1 - v_2\|) \quad \text{для любых } y_1, y_2 \in \mathbb{R}^p, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^p.$$

Существует единственное слабое решение уравнения (2.2) в условиях предположения (A1) (см. [9, 20]), заданное в форме

$$y(t) = \begin{cases} \eta(t), & t \leq 0, \\ S(t)\eta(0) + \int_0^t S(t-s)Bv(s)ds + \int_0^t S(t-s)F(s, y(s-\tau), v(s))ds, & t > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

3. ПРИБЛИЖЕННАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ

В этом разделе рассматривается приближенная управляемость полулинейной абстрактной системы с задержкой (2.2). Методология основана на теории регуляризации Тихонова. Математическое обсуждение вдохновлено новаторскими работами Наира и соавторов [19], а также Сингха и Дабаса [23].

Определение 3.1. Система теплопроводности (2.2) называется *приближенно управляемой* на $[0, T]$, если для каждого начального состояния $\eta(0)$, желаемого состояния $\hat{y} \in L^2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$ существует управление $v \in L^2(\Omega)$ такое, что решение $y(t)$ удовлетворяет условию

$$y(0) = \eta(0) \quad \text{и} \quad \|y(T) - \hat{y}\| < \varepsilon.$$

Линейная система управления, связанная с (2.2), имеет вид

$$\begin{cases} p'(t) = Ap(t) + Bw(t), & t > 0, \\ p(0) = \eta(0), \end{cases} \quad (3.1)$$

а соответствующее слабое решение уравнения (3.1) имеет вид

$$p(t) = S(t)\eta(0) + \int_0^t S(t-s)Bw(s)ds. \quad (3.2)$$

Определим оператор управляемости $G : L^2([0, T]; L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(\Omega)$ как

$$Gw = \int_0^T S(T-s)Bw(s)ds. \quad (3.3)$$

Сопряженный оператор $G^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ с оператором G имеет вид

$$(G^*y)(t) = B^*S^*(T-t)y \quad \forall \quad t \in [0, T], \quad y \in L^2(\Omega). \quad (3.4)$$

Лемма 3.1 (см. [3]). *Линейная система управления (3.1) является приближенно управляемой на $[0, T]$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

- (i) $\overline{R(G)} = L^2(\Omega)$, $R(G)$ обозначает образ оператора G ;
- (ii) $\ker(G^*) = \{0\}$;
- (iii) $\langle GG^*y, y \rangle > 0$, $y \neq 0$;
- (iv) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}y = 0$;
- (v) для всех $y \in L^2(\Omega)$ выполняется $Gv_\alpha = y - \alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}y$, где $v_\alpha = G^*(GG^* + \alpha I)^{-1}y$.

Очевидно, семейство линейных операторов $\Gamma_\alpha : L^2(\Omega) \rightarrow L^2([0, T]; L^2(\Omega))$, определяемое как

$$\Gamma_\alpha y = G^*(GG^* + \alpha I)^{-1}y,$$

является приближенным правым обратным элементом к G , т. е. $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} G\Gamma_\alpha = I$.

Определение 3.2. Пусть $G : X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Операторное уравнение $Gx = y$ называется *корректным*, если выполняются следующие условия:

- (i) G биективно, т. е. $\ker(G) = \{0\}$ и $\operatorname{ran}(G) = Y$;
- (ii) G^{-1} непрерывен, т. е. для всех $\varepsilon > 0$ и $y \in Y$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\hat{y} \in Y$ так, что $\|y - \hat{y}\| < \delta$ и $x, \hat{x} \in X$ так, что $Gx = y$, $G\hat{x} = \hat{y}$, то $\|x - \hat{x}\| < \varepsilon$.

Лемма 3.2 (см. [18]). Пусть X и Y — гильбертовы пространства и $G \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда для $\alpha > 0$ справедливо следующее:

- (i) $\|(GG^* + \alpha I)^{-1}\| = \|(G^*G + \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$;
- (ii) $\|G^*(GG^* + \alpha I)^{-1}\| = \|(G^*G + \alpha I)^{-1}G^*\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

Пусть $\hat{y} \in L^2(\Omega)$ — целевое состояние. Рассмотрим операторное уравнение

$$Gw = \xi, \quad \text{где } \xi = \hat{y} - S(T)\eta(0). \quad (3.5)$$

Тогда нахождение $w \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ для линейной системы управления (3.1), удовлетворяющей условию $p(T) = \hat{y}$, эквивалентно решению уравнения (3.5) относительно w .

Теорема 3.1 (Теорема Тихонова). При $\alpha > 0$ решение w_α операторного уравнения

$$(G^*G + \alpha I)w_\alpha = G^*\xi \quad (3.6)$$

минимизирует функционал $J_\alpha(w) = \|Gw - \xi\| + \alpha\|w\|^2$ и удовлетворяет

$$\|Gw_\alpha - \xi\| \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.6) дает регуляризованное управление $w_\alpha = (G^*G + \alpha I)^{-1}G^*\xi$, а слабое решение (3.2), соответствующее регуляризованному управлению w_α , имеет вид

$$p_\alpha(t) = S(t)\eta(0) + \int_0^t S(t-s)Bw_\alpha(s)ds \quad \Rightarrow \quad p_\alpha(T) = S(T)\eta(0) + Gw_\alpha.$$

Тогда

$$\|p_\alpha(T) - \hat{y}\| = \|S(T)\eta(0) + Gw_\alpha - \hat{y}\| = \|Gw_\alpha - \xi\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0^+ \quad (3.8)$$

ввиду (3.5) и (3.7). Это подтверждает приближенную управляемость линейной системы управления (3.1).

Для дальнейшего обсуждения введем следующие предположения:

Предположение (A2). $R(F) \subseteq R(B)$.

Предположение (A3). $L_F < 1$.

Лемма 3.3. Пусть выполняются предположения (A2) и (A3). Тогда операторное уравнение

$$Bv_\alpha(t) = Bw_\alpha(t) - F(t, p_\alpha(t - \tau), v_\alpha(t)) \quad (3.9)$$

существует и имеет решение v_α .

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$Bv_{\alpha,n}(t) = Bw_{\alpha}(t) - F(t, p_{\alpha}(t - \tau), v_{\alpha,n-1}(t)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|v_{\alpha,n}(t) - v_{\alpha,n-1}(t)\| &= \|Bv_{\alpha,n}(t) - Bv_{\alpha,n-1}(t)\| \stackrel{(\text{при } B = \chi_V)}{=} \\ &= \|F(t, p_{\alpha}(t - \tau), v_{\alpha,n-1}(t)) - F(t, p_{\alpha}(t - \tau), v_{\alpha,n-2}(t))\| = \\ &\leq L_F \|v_{\alpha,n-1}(t) - v_{\alpha,n-2}(t)\| \leq \dots \leq (L_F)^{n-1} \|v_{\alpha,1}(t) - v_{\alpha,0}(t)\|. \end{aligned}$$

Поскольку $L_F < 1$, получим, что $\{v_{\alpha,n}(t)\}$ является последовательностью Коши в $L^2(\Omega)$ и, следовательно, сходится к некоторому $v_{\alpha}(t) \in L^2(\Omega)$. Это дает решение уравнения (3.9). $\square$

Теорема 3.2. Пусть выполняются предположения (A1)–(A3). Пусть линейная система управления (3.1) приближенно управляема на $[0, T]$. Тогда полулинейная система управления (2.2) приближенно управляема на $[0, T]$.

Доказательство. Поскольку линейная система управления приближенно управляема на $[0, T]$, то существует регуляризованное управление $w_{\alpha} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ такое, что $\|p_{\alpha}(T) - \hat{y}\| \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Из (3.2) следует, что

$$p_{\alpha}(t) = S(t)\eta(0) + \int_0^t S(t-s)Bw_{\alpha}(s)ds. \quad (3.10)$$

Цель состоит в том, чтобы найти регуляризованное управление $v_{\alpha} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ для полулинейной системы такое, что $\|y_{\alpha}(T) - \hat{y}\| \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Из (2.3) получаем

$$y_{\alpha}(t) = S(t)\eta(0) + \int_0^t S(t-s)Bv_{\alpha}(s)ds + \int_0^t S(t-s)F(s, y_{\alpha}(s - \tau), v_{\alpha}(s))ds, \quad t > 0. \quad (3.11)$$

Вычитая (3.10) из (3.11), с учетом (3.9) получаем

$$\begin{aligned} y_{\alpha}(t) - p_{\alpha}(t) &= \int_0^t S(t-s)[Bv_{\alpha}(s) - Bw_{\alpha}(s)]ds + \int_0^t S(t-s)F(s, y_{\alpha}(s - \tau), v_{\alpha}(s))ds = \\ &= \int_0^t S(t-s)[F(s, y_{\alpha}(s - \tau), v_{\alpha}(s)) - F(s, p_{\alpha}(s - \tau), v_{\alpha}(s))]ds. \end{aligned}$$

Затем,

$$\begin{aligned} \|y_{\alpha}(t) - p_{\alpha}(t)\| &\leq M \int_0^t \|F(s, y_{\alpha}(s - \tau), v_{\alpha}(s)) - F(s, p_{\alpha}(s - \tau), v_{\alpha}(s))\|ds \leq \\ &\leq ML_F \int_0^t \|y_{\alpha}(s - \tau) - p_{\alpha}(s - \tau)\|ds. \end{aligned}$$

Согласно неравенству Гронуолла, получаем

$$\|y_{\alpha}(t) - p_{\alpha}(t)\| \leq 0 \Rightarrow y_{\alpha}(t) \equiv p_{\alpha}(t).$$

Таким образом,

$$\|y_{\alpha}(T) - \hat{y}\| \leq \|y_{\alpha}(T) - p_{\alpha}(T)\| + \|p_{\alpha}(T) - \hat{y}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0,$$

что завершает доказательство. $\square$

Теорема 3.3. Пусть уравнение

$$\xi = Gv + \int_0^T S(T-s)F(s, y(s-\tau), v(s))ds \quad (3.12)$$

имеет регуляризованное по Тихонову решение v_α . Если для данного $\varepsilon > 0$ найдется $\xi^\varepsilon \in R(G)$ и $w^\varepsilon \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ таково, что $Gw^\varepsilon = \xi^\varepsilon$ и $\|\xi - \xi^\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. ξ^ε является малым возмущением в ξ , то

$$\left\| \xi - Gv_\alpha - \int_0^T S(T-s)F(s, y_\alpha(s-\tau), v_\alpha(s))ds \right\| \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \|w^\varepsilon\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.13)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \xi - Gv_\alpha - \int_0^T S(T-s)F(s, y_\alpha(s-\tau), v_\alpha(s))ds \right\| = \\ & \stackrel{(\text{в силу (3.9)})}{=} \left\| \xi - Gw_\alpha + \int_0^T S(T-s)F(s, p_\alpha(s-\tau), v_\alpha(s))ds - \int_0^T S(T-s)F(s, y_\alpha(s-\tau), v_\alpha(s))ds \right\| \leq \\ & \leq \|\xi - Gw_\alpha\| + \int_0^T \|F(s, p_\alpha(s-\tau), v_\alpha(s)) - F(s, y_\alpha(s-\tau), v_\alpha(s))\| ds \leq \\ & \stackrel{(\text{в силу (3.9)})}{\leq} \|\xi - Gw_\alpha\| + ML_F \int_0^T \|p_\alpha(s-\tau) - y_\alpha(s-\tau)\| ds \leq \|\xi - Gw_\alpha\|. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Используя регуляризованное управление $w_\alpha = (G^*G + \alpha I)^{-1}G^*\xi$ и лемму 3.2, получаем

$$\begin{aligned} \|\xi - Gw_\alpha\| &= \|\xi - G(G^*G + \alpha I)^{-1}G^*\xi\| = \|(I - (GG^* + \alpha I)^{-1}GG^*)\xi\| = \\ &= \|\alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}\xi\| = \|\alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}(\xi^\varepsilon - \xi^\varepsilon + \xi)\| \leq \\ &\leq \|\alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}\xi^\varepsilon\| + \|\alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}(\xi^\varepsilon - \xi)\| \leq \\ &\leq \|\alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}Gw^\varepsilon\| + \alpha\|(GG^* + \alpha I)^{-1}\|\|\xi^\varepsilon - \xi\| \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\|w^\varepsilon\| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

На этом доказательство завершено. $\square$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривается одномерное полулинейное уравнение теплопроводности с запаздыванием и однородными граничными условиями. Приближенная управляемость его абстрактной формы устанавливается с помощью метода регуляризации Тихонова. Математическое обсуждение включает теорию сильно непрерывной полугруппы линейных операторов и глобальное условие Липшица нелинейности F . В результате используется условие включения области F в область B . Это более слабое условие, чем равномерная ограниченность F , что делает его менее применимым на практике. Однако проверка условия включения области в общем случае непростая. Поэтому поиск еще более простого достаточного условия является частью будущих исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carrasco A., Leiva H. Approximate controllability of a system of parabolic equations with delay // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 345, № 2. — С. 845–853. — DOI: [10.1016/j.jmaa.2008.04.068](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.04.068).
2. Carrasco A., Leiva H., Merentes N., Sanchez J.L. Controllability of semilinear systems of parabolic equations with delay on the state // Asian J. Control. — 2015. — 17, № 6. — С. 2105–2114. — DOI: [10.1002/asjc.1162](https://doi.org/10.1002/asjc.1162).

3. *Curtain R. F., Zwart H. J.* An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. — New York: Springer, 1995. — DOI: [10.1007/978-1-4612-4224-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4224-6).
4. *Dauer J. P., Mahmudov N. I.* Approximate controllability of semilinear functional equations in Hilbert spaces // *J. Math. Anal. Appl.* — 2002. — 273. — С. 310–327. — DOI: [10.1016/S0022-247X\(02\)00225-1](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00225-1).
5. *Fabre C., Puel J. P., Zuazua E.* Approximate controllability of the semilinear heat equation // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* — 1995. — 125, № 1. — С. 31–61. — DOI: [10.1017/S0308210500030742](https://doi.org/10.1017/S0308210500030742).
6. *Haq A., Sukavanam N.* Mild solution and approximate controllability of retarded semilinear systems with control delays and nonlocal conditions // *Numer. Funct. Anal. Optim.* — 2021. — 42, № 6. — С. 721–737. — DOI: [10.1080/01630563.2021.1928697](https://doi.org/10.1080/01630563.2021.1928697).
7. *Haq A., Sukavanam N.* Mild solution and approximate controllability of second-order retarded systems with control delays and nonlocal conditions // *Bull. Iran. Math. Soc.* — 2022. — 48, № 2. — С. 447–464. — DOI: [10.1007/s41980-021-00527-5](https://doi.org/10.1007/s41980-021-00527-5).
8. *Henríquez H. R., Prokopczyk A.* Controllability and stabilizability of linear time-varying distributed hereditary control systems // *Math. Methods Appl. Sci.* — 2015. — 38, № 11. — С. 214–224. — DOI: [10.1002/mma.3219](https://doi.org/10.1002/mma.3219).
9. *Hernandez E., Wu J., Chadha A.* Existence, uniqueness and approximate controllability of abstract differential equations with state-dependent delay // *J. Differ. Equ.* — 2020. — 269, № 10. — С. 8701–8735. — DOI: [10.1016/j.jde.2020.06.030](https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.06.030).
10. *Huang Y., Liu Z., Wen C.-F.* Approximate controllability for fractional semilinear parabolic equations // *Comput. Math. Appl.* — 2019. — 77, № 11. — С. 2971–2979. — DOI: [10.1016/j.camwa.2018.08.003](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.003).
11. *Jeong J. M., Hwang H. J.* Controllability for retarded semilinear integrodifferential control systems with unbounded operators // *IMA J. Math. Control Inform.* — 2017. — 34, № 3. — С. 1031–1043. — DOI: [10.1093/imamci/dnw027](https://doi.org/10.1093/imamci/dnw027).
12. *Katta R., Reddy G. D., Sukavanam N.* Computation of control for linear approximately controllable system using weighted Tikhonov regularization // *Appl. Math. Comput.* — 2018. — 317. — С. 252–263. — DOI: [10.1016/j.amc.2017.08.012](https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.012).
13. *Katta R., Sukavanam N.* Approximate controllability of semilinear control system with state delay using Tikhonov regularization // *J. Dyn. Control Syst.* — 2024. — 30, № 2. — С. 20. — DOI: [10.1007/s10883-024-09683-3](https://doi.org/10.1007/s10883-024-09683-3).
14. *Kim D., Jeong J. M., Cho S. H.* Approximate controllability for semilinear retarded control equations using surjectivity results // *Syst. Control Lett.* — 2019. — 131. — С. 104496. — DOI: [10.1016/j.sysconle.2019.104496](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2019.104496).
15. *Kumar S.* Controllability of retarded semilinear systems with control delay // *Rend. Circ. Mat. Palermo (2).* — 2023. — 72, № 8. — С. 3801–3813. — DOI: [10.1007/s12215-023-00865-9](https://doi.org/10.1007/s12215-023-00865-9).
16. *Kumar S., Tomar N. K.* Mild solution and controllability of second-order non-local retarded semilinear systems // *IMA J. Math. Control Inform.* — 2020. — 37, № 1. — С. 39–49. — DOI: [10.1093/imamci/dny037](https://doi.org/10.1093/imamci/dny037).
17. *Leiva H.* Controllability of the semilinear heat equation with impulses and delay on the state // *Nonauton. Dyn. Syst.* — 2015. — 2. — С. 52–62. — DOI: [10.1515/msds-2015-0004](https://doi.org/10.1515/msds-2015-0004).
18. *Nair M. T.* Linear Operator Equations: Approximation and Regularization. — Hackensack: World Scientific, 2009. — DOI: [10.1142/7055](https://doi.org/10.1142/7055).
19. *Nair M. T., Sukavanam N., Katta R.* Computation of control for linear approximately controllable system using Tikhonov regularization // *Numer. Funct. Anal. Optim.* — 2018. — 39, № 3. — С. 308–321. — DOI: [10.1080/01630563.2017.1361440](https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1361440).
20. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. — New York: Springer, 1983. — DOI: [10.1007/978-1-4612-5561-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1).
21. *Shukla A., Arora U., Sukavanam N.* Approximate controllability of retarded semilinear stochastic system with nonlocal conditions // *J. Appl. Math. Comput.* — 2015. — 49, № 1-2. — С. 513–527. — DOI: [10.1007/s12190-014-0851-9](https://doi.org/10.1007/s12190-014-0851-9).
22. *Shukla A., Sukavanam N., Pandey D. N.* Approximate controllability of semilinear system with state delay using sequence method // *J. Franklin Inst.* — 2015. — 352, № 11. — С. 5380–5392. — DOI: [10.1016/j.jfranklin.2015.08.019](https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2015.08.019).
23. *Singh S., Dabas J.* Tikhonov solutions of approximately controllable second-order semilinear control systems // *Rend. Circ. Mat. Palermo (2).* — 2023. — 72, № 4. — С. 2375–2387. — DOI: [10.1007/s12215-022-00802-2](https://doi.org/10.1007/s12215-022-00802-2).
24. *Sukavanam N., Tafesse S.* Approximate controllability of a delayed semilinear control system with growing nonlinear term // *Nonlinear Anal.* — 2011. — 74. — С. 6868–6875. — DOI: [10.1016/j.na.2011.07.009](https://doi.org/10.1016/j.na.2011.07.009).
25. *Sukavanam N., Tomar N. K.* Approximate controllability of semilinear delay control systems // *Nonlinear Funct. Anal. Appl.* — 2007. — 12, № 1. — С. 53–59.

26. Wang L. Approximate controllability of delayed semilinear control systems // J. Appl. Math. Stoch. Anal. — 2005. — 2005, № 1. — C. 67–76. — DOI: [10.1155/JAMSA.2005.67](https://doi.org/10.1155/JAMSA.2005.67).
27. Zhou H. X. A note on approximate controllability for semilinear one-dimensional heat equation // Appl. Math. Optim. — 1982. — 8, № 1. — C. 275–285. — DOI: [10.1007/BF01447763](https://doi.org/10.1007/BF01447763).

C. Kymap

Indira Gandhi National Tribal University, Amarkantak, India

E-mail: suman@igntu.ac.in, ResearcherID: [C-5056-2017](https://orcid.org/0000-0002-2736-1848), Scopus: [55500517400](https://orcid.org/0000-0002-2736-1848),

ORCID: [0000-0002-2736-1848](https://orcid.org/0000-0002-2736-1848)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-85-93](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-85-93)

UDC 517.977:517.956.4:517.929

EDN: [TUYAYJ](https://edn.ru/TUYAYJ)

Research article

Approximate controllability of a semilinear delayed heat equation by Tikhonov regularization

S. Kumar

Indira Gandhi National Tribal University, Amarkantak, India

Abstract. In this work, we study approximate controllability of a semilinear heat equation with delay using the Tikhonov regularization. The considered problem for partial differential equation is transformed into an equivalent operator equation. We explore sufficient conditions and analyze the operator equation to guarantee the approximate controllability by means of Tikhonov regularization method. The main result proves that the semilinear delay system is approximately controllable if the corresponding linear nondelay system is approximately controllable. Finally, we establish an error estimate for the Tikhonov regularized solution of an operator equation.

Keywords: approximate controllability, semilinear heat equation, delay, Tikhonov regularization, operator equation, ill-posed problem, error estimate, C_0 -semigroup.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: S. Kumar, “Approximate controllability of a semilinear delayed heat equation by Tikhonov regularization,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 85–93. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-85-93](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-85-93) EDN: [TUYAYJ](https://edn.ru/TUYAYJ)

REFERENCES

1. A. Carrasco and H. Leiva, “Approximate controllability of a system of parabolic equations with delay,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **345**, No. 2, 845–853, DOI: [10.1016/j.jmaa.2008.04.068](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.04.068).
2. A. Carrasco, H. Leiva, N. Merentes, and J. L. Sanchez, “Controllability of semilinear systems of parabolic equations with delay on the state,” *Asian J. Control*, 2015, **17**, No. 6, 2105–2114, DOI: [10.1002/asjc.1162](https://doi.org/10.1002/asjc.1162).
3. R. F. Curtain and H. J. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Springer, New York, 1995, DOI: [10.1007/978-1-4612-4224-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4224-6).
4. J. P. Dauer and N. I. Mahmudov, “Approximate controllability of semilinear functional equations in Hilbert spaces,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **273**, 310–327, DOI: [10.1016/S0022-247X\(02\)00225-1](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00225-1).
5. C. Fabre, J. P. Puel, and E. Zuazua, “Approximate controllability of the semilinear heat equation,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1995, **125**, No. 1, 31–61, DOI: [10.1017/S0308210500030742](https://doi.org/10.1017/S0308210500030742).



6. A. Haq and N. Sukavanam, “Mild solution and approximate controllability of retarded semilinear systems with control delays and nonlocal conditions,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2021, **42**, No. 6, 721–737, DOI: [10.1080/01630563.2021.1928697](https://doi.org/10.1080/01630563.2021.1928697).
7. A. Haq and N. Sukavanam, “Mild solution and approximate controllability of second-order retarded systems with control delays and nonlocal conditions,” *Bull. Iran. Math. Soc.*, 2022, **48**, No. 2, 447–464, DOI: [10.1007/s41980-021-00527-5](https://doi.org/10.1007/s41980-021-00527-5).
8. H. R. Henríquez and A. Prokopczyk, “Controllability and stabilizability of linear time-varying distributed hereditary control systems,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2015, **38**, No. 11, 214–224, DOI: [10.1002/mma.3219](https://doi.org/10.1002/mma.3219).
9. E. Hernandez, J. Wu, and A. Chadha, “Existence, uniqueness and approximate controllability of abstract differential equations with state-dependent delay,” *J. Differ. Equ.*, 2020, **269**, No. 10, 8701–8735, DOI: [10.1016/j.jde.2020.06.030](https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.06.030).
10. Y. Huang, Z. Liu, and C.-F. Wen, “Approximate controllability for fractional semilinear parabolic equations,” *Comput. Math. Appl.*, 2019, **77**, No. 11, 2971–2979, DOI: [10.1016/j.camwa.2018.08.003](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.003).
11. J. M. Jeong and H. J. Hwang, “Controllability for retarded semilinear integrodifferential control systems with unbounded operators,” *IMA J. Math. Control Inform.*, 2017, **34**, No. 3, 1031–1043, DOI: [10.1093/imamci/dnw027](https://doi.org/10.1093/imamci/dnw027).
12. R. Katta, G. D. Reddy, and N. Sukavanam, “Computation of control for linear approximately controllable system using weighted Tikhonov regularization,” *Appl. Math. Comput.*, 2018, **317**, 252–263, DOI: [10.1016/j.amc.2017.08.012](https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.012).
13. R. Katta and N. Sukavanam, “Approximate controllability of semilinear control system with state delay using Tikhonov regularization,” *J. Dyn. Control Syst.*, 2024, **30**, No. 2, 20, DOI: [10.1007/s10883-024-09683-3](https://doi.org/10.1007/s10883-024-09683-3).
14. D. Kim, J. M. Jeong, and S. H. Cho, “Approximate controllability for semilinear retarded control equations using surjectivity results,” *Syst. Control Lett.*, 2019, **131**, 104496, DOI: [10.1016/j.sysconle.2019.104496](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2019.104496).
15. S. Kumar, “Controllability of retarded semilinear systems with control delay,” *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 2023, **72**, No. 8, 3801–3813, DOI: [10.1007/s12215-023-00865-9](https://doi.org/10.1007/s12215-023-00865-9).
16. S. Kumar and N. K. Tomar, “Mild solution and controllability of second-order non-local retarded semilinear systems,” *IMA J. Math. Control Inform.*, 2020, **37**, No. 1, 39–49, DOI: [10.1093/imamci/dny037](https://doi.org/10.1093/imamci/dny037).
17. H. Leiva, “Controllability of the semilinear heat equation with impulses and delay on the state,” *Nonauton. Dyn. Syst.*, 2015, **2**, 52–62, DOI: [10.1515/msds-2015-0004](https://doi.org/10.1515/msds-2015-0004).
18. M. T. Nair, *Linear Operator Equations: Approximation and Regularization*, World Scientific, Hackensack, 2009, DOI: [10.1142/7055](https://doi.org/10.1142/7055).
19. M. T. Nair, N. Sukavanam, and R. Katta, “Computation of control for linear approximately controllable system using Tikhonov regularization,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2018, **39**, No. 3, 308–321, DOI: [10.1080/01630563.2017.1361440](https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1361440).
20. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1983, DOI: [10.1007/978-1-4612-5561-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1).
21. A. Shukla, U. Arora, and N. Sukavanam, “Approximate controllability of retarded semilinear stochastic system with nonlocal conditions,” *J. Appl. Math. Comput.*, 2015, **49**, No. 1-2, 513–527, DOI: [10.1007/s12190-014-0851-9](https://doi.org/10.1007/s12190-014-0851-9).
22. A. Shukla, N. Sukavanam, and D. N. Pandey, “Approximate controllability of semilinear system with state delay using sequence method,” *J. Franklin Inst.*, 2015, **352**, No. 11, 5380–5392, DOI: [10.1016/j.jfranklin.2015.08.019](https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2015.08.019).
23. S. Singh and J. Dabas, “Tikhonov solutions of approximately controllable second-order semilinear control systems,” *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 2023, **72**, No. 4, 2375–2387, DOI: [10.1007/s12215-022-00802-2](https://doi.org/10.1007/s12215-022-00802-2).
24. N. Sukavanam and S. Tafesse, “Approximate controllability of a delayed semilinear control system with growing nonlinear term,” *Nonlinear Anal.*, 2011, **74**, 6868–6875, DOI: [10.1016/j.na.2011.07.009](https://doi.org/10.1016/j.na.2011.07.009).
25. N. Sukavanam and N. K. Tomar, “Approximate controllability of semilinear delay control systems,” *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, 2007, **12**, No. 1, 53–59.
26. L. Wang, “Approximate controllability of delayed semilinear control systems,” *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 2005, **2005**, No. 1, 67–76, DOI: [10.1155/JAMSA.2005.67](https://doi.org/10.1155/JAMSA.2005.67).
27. H. X. Zhou, “A note on approximate controllability for semilinear one-dimensional heat equation,” *Appl. Math. Optim.*, 1982, **8**, No. 1, 275–285, DOI: [10.1007/BF01447763](https://doi.org/10.1007/BF01447763).

S. Kumar

Indira Gandhi National Tribal University, Amarkantak, India

E-mail: suman@igntu.ac.in, ResearcherID: [C-5056-2017](https://orcid.org/0000-0002-2736-1848), Scopus: [55500517400](https://orcid.org/0000-0002-2736-1848),

ORCID: [0000-0002-2736-1848](https://orcid.org/0000-0002-2736-1848)