

ДВА ПОДХОДА К УСРЕДНЕНИЮ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

С. Б. Куксин

Université Paris Cité, Paris, France

Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, Paris, France

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

Аннотация. Обсуждаются два подхода к изучению поведения решений интегрируемых гамильтоновых систем в течение длительного времени и в течение бесконечного времени при малых стохастических возмущениях. Эти результаты сравниваются с результатами для детерминированных возмущений интегрируемых систем.

Ключевые слова: стохастические возмущения, интегрируемые системы, гамильтоновы системы, принцип усреднения, быстро-медленные системы, биркгофово-интегрируемые, винеровские процессы, невырожденность Аносова, координаты действие—угол, невырожденность Колмогорова.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Куксин С. Б. Два подхода к усреднению стохастических возмущений интегрируемых систем // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 75–84. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-75-84](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-75-84) EDN: [TTBTSA](https://www.edn.ru/TTBTSA)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В симплектическом пространстве $(\mathbb{R}_{x,y}^{2n}, dx \wedge dy)$ рассмотрим интегрируемую по Биркхофу гамильтонову систему — ее гамильтониан H зависит только от действий $I_j = (x_j^2 + y_j^2)/2$. Вводя комплексные координаты $v_j = x_j + iy_j$, запишем эту систему в удобной комплексной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_k(t) = i \nabla_k H(I) v_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad I = I(v), \quad v(t) \in \mathbb{C}^n. \quad (1.1)$$

Отметим, что $I_j = \frac{1}{2}|v_j|^2$, и что в $\mathbb{C}^n$ мы используем вещественное скалярное произведение $(v, w) \mapsto \Re \langle v, \bar{w} \rangle = \Re \sum v_j \bar{w}_j$. Изучение малых возмущений этой системы для больших значений времени, либо глобально в $\mathbb{R}^n$, либо локально вблизи равновесия, является классической задачей динамических систем, начиная с конца XVIII века¹. Существуют две основные задачи:

- А) возмущение представляет собой небольшое гладкое векторное поле;
- Б) возмущение представляет собой малое гамильтоново поле.

¹Другой классический вопрос — изучение решений возмущенных систем вблизи торов $\{v : I_k(v) = I_k^0 \neq 0, k = 1, \dots, n\}$, которые инвариантны для системы (1.1). Мы не будем его здесь рассматривать.

Мы рассмотрим третий случай, а затем сравним полученные результаты с тем, что известно для случаев А) и Б).

Рассмотрим ε -малое стохастическое возмущение интегрируемой системы (1.1). Во-первых, только для $0 \leq t \leq T\varepsilon^{-1}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_k(t) = i\nabla_k H(I)v_k + \varepsilon P_k(v) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^{n_1} B_{kj}(v) \dot{\beta}_j^c(t), \quad v(0) = v^0, \quad (1.2)$$

где $k = 1, \dots, n$ и $\{\beta_j^c(t), 1 \leq j \leq n_1\}$ — стандартные независимые комплексные винеровские процессы, т. е. $\beta_j^c(t) = \beta_j^+(t) + i\beta_j^-(t)$, а $\beta_j^\pm(t)$ — стандартные независимые вещественные винеровские процессы. Удобно перейти к медленному времени $\tau = \varepsilon t$ и переписать приведенные выше уравнения следующим образом:

$$\dot{v}_k(\tau) = i\varepsilon^{-1} \nabla_k H(I)v_k + P_k(v) + \sum_{j=1}^{n_1} B_{kj}(v) \dot{\beta}_j^c(\tau), \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

$v(0) = v^0$. Здесь и ниже точка сверху обозначает $d/d\tau$, а $\{\beta_j^c(\tau)\}$ — это еще один набор стандартных независимых комплексных винеровских процессов. В векторной записи:

$$\dot{v}(\tau) = i\varepsilon^{-1} \text{diag}\{\nabla_k H(I)\}v + P(v) + B(v)\dot{\beta}^c(\tau), \quad v(0) = v^0, \quad (1.4)$$

где $v(\tau) \in \mathbb{C}^n$, $0 \leq \tau \leq T$, а дисперсия $B(v)$ — комплексная матрица размера $n \times n_1$. Решение этого уравнения будет обозначаться как $v^\varepsilon(\tau)$.

Мы накладываем на уравнение (1.4) следующие предположения:

A1) (Невырожденность по Аносову): Для п.в. $I \in \mathbb{R}^n$ компоненты вектора частот являются независимыми над целыми числами, т. е.

$$\text{если } s \in \mathbb{Z}^n \text{ и } \nabla H(I) \cdot s = 0, \text{ то } s = 0. \quad (1.5)$$

A2) Векторные функции $\nabla H(I)$, $P(v)$ и матричная функция $B(v)$ являются локально липшицевыми, с не более чем полиномиальным ростом на бесконечности.

A3) Уравнение (1.4) является корректно поставленным при $0 \leq \tau \leq T$, и в этом случае первые несколько моментов его решений равномерно ограничены по τ и ε .

A4) Шум в уравнении невырожден: ранг дисперсионной матрицы $B(v)$ равен n для всех v (следовательно, $n_1 \geq n$). Более того, для каждого v справедливо $B(v)B^*(v) \geq cE$, где $c > 0$, и B^* является эрмитово сопряженным с B .

Замечание 1.1. Предположение A1) (невырожденность по Аносову) выполняется, например, если ∇H — постоянная векторная функция с некоторыми компонентами λ_j , независимыми над целыми числами. Тогда невозмущенная система (1.1) является линейной:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_k = i\lambda_k v_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Приведенные ниже теоремы применимы к этому случаю, но их более сильные версии можно найти в нашей предыдущей работе [6]. Результаты [6] применимы, когда матрица $B(v)$ в (1.4) вырождена, и их подходящие версии справедливы, если частоты $\{\lambda_j\}$ зависимы над целыми числами. Легко видеть, что A1) также выполняется, если H является C^2 -гладким и

$$\text{meas}\{I : \det d^2 H(I) = 0\} = 0$$

(условие невырожденности по Колмогорову).

Предположение A3) (априорные оценки) справедливо, например, если матрица $B(v)$ равномерно ограничена и

$$\Re\langle P(v), \bar{v} \rangle \leq C|v|^2 + C_1 \quad \forall v \in \mathbb{C}^n.$$

2. ПЕРВЫЙ ПОДХОД: БЫСТРО-МЕДЛЕННАЯ СИСТЕМА

Введем в $\mathbb{C}^n = \{v = (v_1, \dots, v_n)\}$ обычные координаты действие—угол (I, φ) , где $I = (I_1, \dots, I_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$:

$$I_j = \frac{1}{2}|v_j|^2, \quad \varphi_j = \arg v_j, \quad j = 1, \dots, n$$

(т. е. $v_j = \sqrt{2I_j} \exp i\varphi_j$). Тогда уравнение (1.4) можно переписать в этих координатах. Применив формулу Ито к $I_k(v^\varepsilon(\tau))$, где $v^\varepsilon(\tau)$ является решением уравнения (1.4), получим

$$\dot{I}_k^\varepsilon(\tau) = \Re(\bar{v}_k^\varepsilon P_k(v^\varepsilon)) + \sum_l |B_{kl}(v^\varepsilon)|^2 + \sum_{j=1}^{n_1} \Re(\bar{v}_k^\varepsilon B_{kj}(v^\varepsilon)) \dot{\beta}_j(\tau), \quad (2.1)$$

где $k = 1, \dots, n$ и $\beta_1(\tau), \dots, \beta_{n_1}(\tau)$ — независимые стандартные вещественные винеровские процессы. (Напомним, что в $\mathbb{C}$ мы используем вещественное скалярное произведение $(z_1, z_2) \mapsto \Re(z_1, \bar{z}_2)$). Переобозначая члены этих уравнений и используя векторную запись, запишем систему (2.1) в векторной форме:

$$\dot{I}^\varepsilon(\tau) = F(v^\varepsilon) + G(v^\varepsilon) \dot{\beta}(\tau), \quad I^\varepsilon(0) = I^0 := I(v^0), \quad (2.2)$$

где $0 \leq \tau \leq T$. Применяя формулу к углам $\varphi_k(v^\varepsilon(\tau))$, получаем φ -уравнения:

$$\dot{\varphi}_k^\varepsilon(\tau) = \varepsilon^{-1} \nabla_k H(I^\varepsilon) + \Phi_k(v^\varepsilon) + 2\Re \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_k} B_{kj}(v^\varepsilon) \dot{\beta}_j^c(\tau), \quad 1 \leq k \leq n,$$

где

$$\Phi_k = 2\Re \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial v_k} P_k + \sum_{k,l} B_{kl} \bar{B}_{kl} \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{\partial}{\partial \bar{v}_k} \varphi_k \right].$$

Напомним, что для $z = x + iy$, $\partial/\partial z = \frac{1}{2}(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$, $\partial/\partial \bar{z} = \frac{1}{2}(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$, и подчеркнем, что для каждого r уравнение для φ_r имеет сильную сингулярность, когда I_r обращается в нуль. Вычисления, приводящие к φ -уравнениям, являются простыми, но утомительным, и проще получить их с помощью формулы Ито в комплексных переменных, см. [6, Приложение С].

Имеем *быстро-медленную систему*, где действия I_k^ε являются *медленными переменными*, а углы φ_k^ε — *быстрыми переменными*. Как обычно, нас больше всего интересуют действия. Логика усреднения предполагает, что их предельное поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно описать усреднением по углам φ медленной системы (2.2).

Соответственно, усредним (2.2) по быстрым переменным φ , используя правила стохастического усреднения:

$$\dot{I}(\tau) = \langle\langle F \rangle\rangle(I) + \langle\langle G \rangle\rangle(I) \dot{\beta}(\tau), \quad I(0) = I^0, \quad I(\tau) \in \mathbb{R}_+^n. \quad (2.3)$$

Здесь векторное поле $\langle\langle F \rangle\rangle(I)$ представляет собой усреднение по φ поля F , записанное как $F(I, \varphi)$. Заметив, что в силу предположения A1) для п.в. I траектории $t \mapsto \varphi^0 + t\varepsilon^{-1} \nabla H(I)$, $\varphi^0 \in \mathbb{T}^n$, плотны в $\mathbb{T}^n$, получим, что усреднение $F(I, \varphi)$ по φ — это усреднение по $\varphi \in \mathbb{T}^n$ относительно меры Лебега (более подробно см. в [7]), т. е.

$$\langle\langle F \rangle\rangle(I) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} F(I, \varphi) d\varphi. \quad (2.4)$$

Поскольку $v_j = r_j e^{i\varphi_j}$, где $r_j = \sqrt{2I_j}$, и F локально липшицева по v , то $\langle\langle F \rangle\rangle$ является локально липшицевой векторной функцией $r = (r_1, \dots, r_n)$. Таким образом, эта функция $1/2$ -гельдерова по I . Вещественная матрица $\langle\langle G \rangle\rangle(I)$ размера $n \times n$ определяется аналогичным, но более сложным способом. А именно, $\langle\langle G \rangle\rangle(I)$ является главным квадратным корнем из неотрицательной вещественной симметричной матрицы $S(I)$, где

$$S_{kj}(I) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_l \Re(v_k \bar{B}_{kl}(v) v_j B_{lj}(v)) d\varphi$$

(как указано выше, каждое v_k следует выражать через I_k и φ_k); см. [7] и приведенные там ссылки. Априори $\langle\langle G \rangle\rangle(I)$ является лишь $1/2$ -гельдеровой. Но легко видеть, что

$$\text{Если } B \text{ — постоянная матрица, то } \langle\langle G \rangle\rangle = \text{diag} (b_k \sqrt{2I_k}), \quad (2.5)$$

где все b_k — положительные числа.

Частичное описание предельной динамики действий в уравнении (1.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ дается следующим результатом (доказательство см. в [7, раздел 6], а аналогичное утверждение см. в [4]).

Теорема 2.1. *Совокупность кривых действий $I^\varepsilon(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq T$) решений $v^\varepsilon(\tau)$ для (1.4) с $0 < \varepsilon \leq 1$ является предкомпактной в пространстве кривых в смысле распределения.*

- 1) *Каждый предельный (в смысле распределения) случайный процесс $I^0(\tau)$ является слабым решением усредненного уравнения (2.3).*
- 2) *Уравнение (2.3) всегда имеет по крайней мере одно решение $I^0(\tau)$. Если такое решение единственно, то $I^\varepsilon(\tau)$ сходится к $I^0(\tau)$ в смысле распределения при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Напомним, что в (2.3) $\langle\langle F \rangle\rangle$ и $\langle\langle G \rangle\rangle$ являются $1/2$ -гельдеровыми функциями по I , поэтому нет оснований полагать, что это уравнение имеет только одно решение. В связи с этим мы имеем следующие результаты (см. [7]):

- i) Результат Уитни [9] подразумевает, что если коэффициенты уравнения (1.4) являются C^2 -гладкими, то $\langle\langle F \rangle\rangle(I)$ является C^1 -гладкой, и $\langle\langle G \rangle\rangle(I) = \sqrt{S(I)}$, где матрица $S(I)$ является C^1 -гладкой, самосопряженной и неотрицательной, и $\det S(I) = 0$, если некоторое I_j равно нулю. Это лучше, чем раньше, но все еще $\langle\langle G \rangle\rangle(I)$ имеет $\sqrt{I_j}$ -сингулярность при $I_j = 0$, и неясно, являются ли решения подобных уравнений единственными.
- ii) Пусть в (1.4) дисперсионная матрица B постоянна. Тогда в силу (2.5) шум в (2.3) задается (непостоянной) диагональной матрицей, которая имеет сингулярности в виде квадратного корня, когда некоторое I_j обращается в нуль. В этом случае результат статьи [11] подразумевает, что уравнение (2.3) имеет единственное решение. Таким образом, применяется пункт 2) теоремы 2.1, и (2.3) описывает предельное поведение действий решений $v^\varepsilon(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq T$. Но что происходит, если матрица $B(v)$ не является постоянной? Тогда $\langle\langle G \rangle\rangle(I) = \sqrt{S(I)}$ имеет сложные $1/2$ -гельдеровы сингулярности, когда $I_j = 0$ для некоторого j . Для этого случая неизвестен результат о единственности. Напротив,
- iii) В статье [10] авторы приводят пример системы с $1/2$ -гельдеровой сингулярностью при $I_j = 0$, где решение не является единственным.

Замечание 2.2. В работе [2] рассматривается класс стохастических уравнений на единичном кубе $K^n \subset \mathbb{R}^n$ с подходящими граничными условиями на ∂K^n и со стохастическим членом $\sqrt{K(v)} d\beta(t)$, где $K(v)$ — гладкая неотрицательная симметричная матрица, которая может вырождаться для некоторого v . Используя методы мартингаловых решений, установлено, что уравнение имеет единственное слабое решение. Нам неизвестно, могут ли результаты [2] быть распространены на стохастические уравнения в $\mathbb{R}^n$ и на уравнения в $\mathbb{R}_+^n$ вида (2.3), и нам неизвестны публикации, связанные с этим вопросом.

Закключение. Уравнение (2.3) описывает предельную динамику действий решений $v^\varepsilon(\tau)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ только если в (1.4) $P(v)$ является C^2 -гладким и B — постоянная матрица.

Что мы можем сделать в общем случае?

3. ВТОРОЙ ПОДХОД: ЭФФЕКТИВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Вернемся к исходному уравнению (1.4). Напомним, что классическое усреднение Крылова—Боголюбова для малых возмущений линейных гамильтоновых систем в $\mathbb{R}^{2n}$ (см. [1]) выполняется непосредственно в $\mathbb{R}^{2n}$ без перехода к переменным действие—угол. Оно дает предельную динамику действий через некоторое *эффективное уравнение* в $\mathbb{R}^{2n}$, построенное с помощью *интеракционного представления*¹.

¹То есть некоторой неавтономной линейной замены переменных в $\mathbb{R}^{2n}$; см., напр., [5, 6].

Последнее не существует для нашего уравнения (1.4), где невозмущенное уравнение (1.1) является нелинейным. Тем не менее, руководствуясь принципами Крылова—Боголюбова, мы *предполагаем* подходящее эффективное уравнение. Оно получается из уравнения (1.4) следующим образом:

- отбрасывая первый член,
- соответствующим образом усредняя два других члена.

Таким образом, уравнение выглядит следующим образом:

$$\dot{a}(\tau) = \langle\langle P \rangle\rangle(a) + \langle\langle B \rangle\rangle(a) \dot{\beta}^c(\tau), \quad a(\tau) \in \mathbb{C}^n, \quad a(0) = v^0. \quad (3.1)$$

Для построения усредненных объектов $\langle\langle P \rangle\rangle(a)$ и $\langle\langle B \rangle\rangle(a)$ мы делаем следующее. Для любого $\omega \in \mathbb{T}^n$ оператор вращения

$$\Phi_\omega = \text{diag}(e^{i\omega_1}, \dots, e^{i\omega_n}) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

преобразует векторное поле $P(a)$ в $\Phi_\omega \circ P(\Phi_{-\omega}a)$. Поле $\langle\langle P \rangle\rangle(a)$ определяется как усреднение последнего по $\omega \in \mathbb{T}^n$:

$$\langle\langle P \rangle\rangle(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \Phi_\omega \circ P(\Phi_{-\omega}a) d\omega.$$

Далее мы определяем действие Φ_ω на матрицу дисперсии $B(a)$ уравнения (1.4) как $\Phi_\omega \circ B(\Phi_{-\omega}a)$. Соответствующая диффузия — это матрица $(\Phi_\omega \circ B(\Phi_{-\omega}a))(\Phi_\omega \circ B(\Phi_{-\omega}a))^*$ размера $n \times n$. Рассмотрим его усреднение в ω ,

$$A(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (\Phi_\omega \circ B(\Phi_{-\omega}a))(\Phi_\omega \circ B(\Phi_{-\omega}a))^* d\omega.$$

Это симметричная матрица размера $n \times n$, и из соотношения невырожденности A4) следует, что $A(a) \geq cE$ для всех a . Теперь мы положим $\langle\langle B \rangle\rangle(a)$ в (3.1) как главный квадратный корень из $A(a)$. Эта матрица имеет ту же гладкость, что и $B(a)$. Подробности см. в [7].

Теорема 3.1. *При заданных предположениях A1)–A4) эффективное уравнение (3.1) имеет единственное решение $a(\tau)$, которое наследует оценки из A3). При $\varepsilon \rightarrow 0$ действия $I^\varepsilon(\tau) = I(v^\varepsilon(\tau))$ решений для уравнения (1.4) с $0 \leq \tau \leq T$ сходятся по распределению к вектору действий $I(a(\tau))$. Кривая $I(a(\tau))$ удовлетворяет уравнению (2.3).*

Теперь, в дополнение к предположениям A1)–A4), предположим, что:

A5) Уравнение (1.4) корректно поставлено для $\tau \geq 0$, и первые несколько моментов его решений равномерно ограничены по ε и τ (это расширение предположения A3)).

Замечание 3.2. Предположение A5) выполняется, если $B(v)$ равномерно ограничено, а $P(v)$ коэрцитивно:

$$\Re \langle P(v), \bar{v} \rangle \leq -\alpha_1 |v| + \alpha_2, \quad \alpha_1 > 0. \quad (3.2)$$

(Это означает, что векторное поле P «содержит трение».)

Теорема 3.3. *Если выполняются предположения A1)–A5), то решение $a(\tau)$ эффективного уравнения (3.1) удовлетворяет оценкам в A3) равномерно по $\tau \geq 0$, и сходимости в теореме 3.1 также равномерна по времени τ .*

Доказательство этого результата в значительной степени использует тот факт, что поскольку первые моменты решений $a(\tau)$ ограничены равномерно по времени, а матрица $\langle\langle B \rangle\rangle(a)$ невырождена, то уравнение (3.1) является перемешивающим: в $\mathbb{C}^n$ существует мера такая, что для любого v^0 распределение решения $a(\tau)$ сходится к ней при $\tau \rightarrow \infty$, см. [7, раздел 10] и [6, раздел 7].

Напомним, что векторное поле $\tilde{P}$ в $\mathbb{C}^n$ является гамильтоновым с C^1 -гладким вещественным гамильтонианом h , если

$$\tilde{P}_k(v) = 2i \frac{\partial}{\partial \bar{v}_k} h(v), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Предположим, что в (1.4) $P(v) = P_1(v) + P_2(v)$, где поле P_2 является гамильтоновым.

Теорема 3.4. Если $P(v)$ соответствует приведенному выше условию, то эффективное уравнение может быть изменено путем удаления усреднения гамильтоновой части P_2 :

$$\dot{a}(\tau) = \langle\langle P_1 \rangle\rangle(a) + \langle\langle B \rangle\rangle(a) \dot{\beta}^c(\tau), \quad v^\varepsilon(0) = v^0. \quad (3.4)$$

То есть утверждения теорем 3.1 и 3.3 остаются верными, если для $a(\tau)$ взять решение уравнения (3.4).

В работе [5] этот результат установлен для возмущений линейных систем (1.6). Доказательство для решений (1.4) аналогично и дополнительно использует конструкцию из [7, раздел 8]. Заметим, что в подходе действие—угол из раздела 2 утверждение последней теоремы является тавтологией, поскольку усредненное уравнение (2.3) не изменится, если мы модифицируем векторное поле P в (1.4) добавлением гамильтониана $\tilde{P}$, как в (3.3), см. начало раздела 3 в работе [5].

4. ЛОКАЛЬНЫЕ ВЕРСИИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Наше исходное предположение заключалось в том, что невозмущенная интегрируемая система может быть приведена к глобальной нормальной форме Биркхофа (1.1). Это ограничение. Теперь предположим, что нормальная форма Биркхофа справедлива только локально¹, для $v \in Q$, где Q — окрестность начала координат в $\mathbb{C}^n$ вида $\{v : |v_j| \leq C_j > 0, j = 1, \dots, n\}$. Рассмотрим то же возмущенное уравнение (1.4), что и раньше:

$$\dot{v}(\tau) = i\varepsilon^{-1} \text{diag}\{\nabla_k H(I)\}v + P(v) + B(v) \dot{\beta}^c(\tau), \quad v(0) = v^0 \in Q.$$

Тогда утверждения теорем 3.1 и 3.4 справедливы для $0 \leq \tau \leq \theta$, где θ — случайный момент времени, когда решение (1.4) выходит за пределы Q . Это случайная величина первого порядка (см. [7, раздел 9]):

$$\text{вероятность, что } \theta \leq \lambda \text{ ограничена } C\sqrt{\lambda}, \forall \lambda > 0.$$

5. ПРИЛОЖЕНИЯ

Более подробное обсуждение применения наших результатов к приведенным ниже уравнениям см. в [7].

5.1. Цепочки осцилляторов. Для невозмущенной интегрируемой системы (1.1) возьмем цепочку нелинейных осцилляторов:

$$\ddot{q}_k = -Q(q_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (5.1)$$

где потенциал Q — гладкая функция, выпуклая и нечетная. Предположим, что она является «хорошей» на бесконечности, а вблизи нуля

$$Q(q) = \alpha q + \beta q^3 + o(|q|^4), \quad \alpha, \beta > 0.$$

Тогда эта система является глобально интегрируемой и может быть записана в форме (1.1). Теоремы 3.1–3.4 применимы для изучения ее стохастических возмущений. Полученные таким образом результаты связаны с неравновесной статистической физикой.

5.2. Гамильтоновы системы с затуханием или возбуждением. Рассмотрим следующее уравнение в $\mathbb{C}^n$:

$$\dot{v}_k(\tau) = i\varepsilon^{-1} \nabla_k H(I(v))v_k + 2i \frac{\partial}{\partial \bar{v}_k} h(v) - \nu_k v_k + b_k \dot{\beta}_k^c(\tau), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (5.2)$$

где $\nu_k > 0$ и $b_k \neq 0$ для всех k . Пусть $H, h \in C^2$, отображение частот $I \mapsto \nabla H(I)$ является невырожденным по Аносову, и выполняется² условие A5). Тогда выполнены предположения A1)–A5). Усреднение не изменяет векторное поле $\dot{v} = -\text{diag}\{\nu_k\}v$, поэтому ввиду теоремы 3.3 в качестве модифицированного эффективного уравнения можно взять систему

$$\dot{a}_k(\tau) = -\nu_k a_k + b_k \dot{\beta}_k^c(\tau), \quad 1 \leq k \leq n. \quad (5.3)$$

¹Этого можно достичь, используя теорему Вея, см. [3].

²В частности, условие A5) выполняется, если гамильтоново поле $i\nabla_{\bar{v}} h(v)$ удовлетворяет условию (3.2) с $\alpha_1 = 0$.

Для малых ε действия решений уравнения (5.3) аппроксимируют (по распределению) действия решений уравнения (5.2) равномерно во времени. Заметим, что уравнение (5.3) может быть проинтегрировано в явном виде. (Его решения представляют собой совокупности n независимых комплексных процессов Орнштейна—Уленбека.)

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Сначала сравним приведенные выше результаты с результатами, полученными для неслучайных возмущений интегрируемых систем.

6.1. Гамильтоновы возмущения интегрируемых систем. Рассмотрим следующую детерминированно возмущенную интегрируемую систему, записанную в медленном времени τ :

$$\dot{v}_k(\tau) = i\varepsilon^{-1}\nabla_k H(I(v))v_k + 2i\frac{\partial}{\partial \bar{v}_k}h(v), \quad 1 \leq k \leq n, \quad v(0) = v^0. \quad (6.1)$$

Если H и h — аналитические вещественнозначные функции, то при условии крутизны гамильтониана H применяется теорема Нехорошева (см. [1]), если v^0 не находится слишком близко к множеству

$$X = \{v \in \mathbb{C}^n : I_k(v) = 0 \text{ для некоторого } k\}.$$

Теорема утверждает, что для времен $\tau \lesssim \exp \varepsilon^{-a}$, $a > 0$ действия решений уравнения (6.1) остаются ε^b -близкими ($b > 0$) к исходному вектору действия $I(v^0)$. Это означает, что в течение экспоненциально длительного времени гамильтонов член в уравнении (6.1) не влияет на динамику действий решений с точностью до $O(\varepsilon^b)$.

Теорема 3.3 выше рассматривает возмущения (1.4) интегрируемой части уравнения (6.1), и для любых начальных данных v^0 она позволяет равномерно управлять действиями решений для (1.4) во времени. Это выполняется, потому что возмущение в (1.4) содержит шум и трение (см. замечание 3.2), которые стабилизируют динамику. В частности, если мы добавим к каждому уравнению в (6.1) диссипацию $-\nu_k a_k$ и случайность $b_k \dot{\beta}_k(\tau)$, то окажется, что гамильтонов член вообще не влияет на динамику действий с точностью до $o(1)$.

Отметим, что в теореме 3.3 нам пришлось предположить, что невозмущенная система интегрируема во всем пространстве, тогда как для справедливости результата Нехорошева достаточно предположить ее интегрируемость только в некоторой открытой области, содержащей v^0 (и диффеоморфной $\mathbb{T}^n \times O$, где O — область в $\mathbb{R}^n$).

Теорема Нехорошева не позволяет брать начальные данные v^0 вблизи X , поскольку в ее доказательстве используются координаты действие—угол, которые сингулярны в X , тогда как теорема 3.3 в них не нуждается. Для некоторого класса возмущенных систем (6.1), Нидерман в [8] установил версию теоремы Нехорошева в окрестности начала координат, избегая координат действие—угол. Таким образом, его результат применим к решениям (6.1) с малыми v^0 . По-видимому, на момент написания не существует версии теоремы Нехорошева, справедливой для решений с начальными данными в X или вблизи него.

6.2. Произвольные возмущения интегрируемых систем. Теперь рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{v}_k(\tau) = i\varepsilon^{-1}\nabla_k H(I(v))v_k + P_k(v), \quad 1 \leq k \leq n, \quad v(0) = v^0, \quad (6.2)$$

где H и P являются C^∞ -гладкими. Пусть H удовлетворяет условию невырожденности Бахтина (см. [1]), и v^0 — случайный вектор, $v^0 = v^0(\omega)$. Тогда по теореме Нейштадта—Бахтина для случайных параметров ω вне некоторого множества¹ малой меры $\lesssim \varepsilon^b$, $b > 0$, для $0 \leq \tau \leq T$ действия решений уравнения (6.2) остаются близкими к решениям усредненного уравнения для действий:

$$\dot{I}(\tau) = \langle\langle P \rangle\rangle(I), \quad I(0) = I^0,$$

где $\langle\langle P \rangle\rangle$ определяется так же, как в (2.4). Этот результат, очевидно, связан с нашей теоремой 3.1, с ее локальной версией, обсуждаемой в разделе 4, и с теоремой 3.3. Утверждение теоремы 3.3 значительно сильнее результата Нейштадта—Бахтина. Опять же, это происходит потому, что возмущенное уравнение (1.4), рассмотренное в теореме 3.3, стабилизируется шумом и трением (и потому, что теорема предполагает глобальные координаты Биркхофа).

¹В частности, начальные данные $v^0(\omega)$ должны избегать окрестности X .

6.3. Связанные результаты. Варианты результатов, представленных в разделах 3 и 4, доступны для некоторых классов стохастических возмущений линейных и интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных, см. ссылки в [6, 7]. Подход с использованием координат действие—угол, как в разделе 2, применительно к стохастическим дифференциальным уравнениям в частных производных может позволить получить для них первое утверждение теоремы 2.1. Однако установить, что соответствующее уравнение (2.3) имеет единственное решение (как требуется для справедливости второго утверждения теоремы), представляется невозможным.

Если невозмущенная интегрируемая система является линейной системой (1.6), то результаты разделов 3, 4 применимы к ее стохастическим возмущениям, если частоты $\{\lambda_k\}$ независимы над целыми числами. Однако подходящие версии этих результатов справедливы, если частоты представляют собой любые n ненулевых действительных числа, а матрица $B(v)$ в (1.4) является локально липшицевой комплексной матрицей размера $n \times n_1$, см. [5]. Подход с использованием координат действие—угол, по-видимому, неприменим в этом общем случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arnold V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I.* Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. — New York—Berlin—Heidelberg: Springer, 2006. — DOI: [10.1007/978-3-540-48926-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-48926-9).
2. *Cerrai S., Clement Ph.* Well-posedness of the martingale problem for some degenerate diffusion processes occurring in dynamics of populations // *Bull. Sci. Math.* — 2004. — 128. — С. 355–389. — DOI: [10.1016/j.bulsci.2004.03.004](https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2004.03.004).
3. *Eliasson L. H.* Normal forms for hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case // *Comment. Math. Helv.* — 1990. — 65. — С. 4–35. — DOI: [10.1007/BF02566590](https://doi.org/10.1007/BF02566590).
4. *Freidlin M., Wentzell A.* Averaging principle for stochastic perturbations of multifrequency systems // *Stoch. Dyn.* — 2003. — 3. — С. 393–408. — DOI: [10.1142/S0219493703000747](https://doi.org/10.1142/S0219493703000747).
5. *Guo J., Kuksin S. B., Liu Z.* On the averaging theorems for stochastic perturbations of conservative linear systems // *ArXiv*. — 2025. — 2504.04379 [math.DS]. — DOI: [10.48550/arXiv.2504.04379](https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.04379).
6. *Huang G., Kuksin S. B.* Averaging and mixing for stochastic perturbations of linear conservative systems // *Russ. Math. Surv.* — 2023. — 78. — С. 3–52. — DOI: [10.4213/rm10081](https://doi.org/10.4213/rm10081).
7. *Huang G., Kuksin S. B., Piatnitski A.* Averaging for stochastic perturbations of integrable systems // *J. Dyn. Differ. Equ.* — 2025. — 37. — С. 1053–1105. — DOI: [10.1007/s10884-024-10405-3](https://doi.org/10.1007/s10884-024-10405-3).
8. *Niederman L.* Nonlinear stability around an elliptic equilibrium point in an Hamiltonian system // *Nonlinearity*. — 1998. — 11. — С. 1465–1479. — DOI: [10.1088/0951-7715/11/6/002](https://doi.org/10.1088/0951-7715/11/6/002).
9. *Whitney H.* Differentiable even functions, II // *Duke Math. J.* — 1943. — 10. — С. 159–160. — DOI: [10.1215/S0012-7094-43-01015-4](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-43-01015-4).
10. *Watanabe S., Yamada T.* On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, II // *J. Math. Kyoto Univ.* — 1971. — 11. — С. 553–563. — DOI: [10.1215/kjm/1250523620](https://doi.org/10.1215/kjm/1250523620).
11. *Yamada T., Watanabe S.* On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations // *J. Math. Kyoto Univ.* — 1971. — 11. — С. 155–167. — DOI: [10.1215/kjm/1250523691](https://doi.org/10.1215/kjm/1250523691).

С. Б. Куksин

Université Paris Cité, Paris, France

Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, Paris, France

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

E-mail: sergei.kuksin@imj-prg.fr, РИНЦ AuthorID: 3760, ResearcherID: [AAC-3293-2022](https://orcid.org/0000-0003-2322-2821),

Scopus: 7003775978, ORCID: 0000-0003-2322-2821

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-75-84](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-75-84)
 EDN: TTBTCa

UDC 517.928.7:519.216
Research article

Two approaches to averaging stochastic perturbations of integrable systems

S. B. Kuksin

Université Paris Cité, Paris, France
Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, Paris, France
Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
RUDN University, Moscow, Russia
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we discuss two approaches to the study of the long-time behaviour and infinite-time behaviour of solutions for integrable hamiltonian systems under small stochastic perturbations. Then we compare these results with the results for deterministic perturbations of integrable systems.

Keywords: stochastic perturbations, integrable systems, Hamiltonian systems, averaging principle, fast-slow systems, Birkhoff-integrable Wiener processes, Anosov nondegeneracy, action-angle coordinates, Kolmogorov nondegeneracy.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: S. B. Kuksin, “Two approaches to averaging stochastic perturbations of integrable systems,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 75–84. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-75-84](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-75-84) EDN: TTBTCa

REFERENCES

1. V. I. Arnold, V. V. Kozlov, and A. I. Neishtadt, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Springer, New York—Berlin—Heidelberg, 2006, DOI: [10.1007/978-3-540-48926-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-48926-9).
2. S. Cerrai and Ph. Clement, “Well-posedness of the martingale problem for some degenerate diffusion processes occurring in dynamics of populations,” *Bull. Sci. Math.*, 2004, **128**, 355–389, DOI: [10.1016/j.bulsci.2004.03.004](https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2004.03.004).
3. L. H. Eliasson, “Normal forms for hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case,” *Comment. Math. Helv.*, 1990, **65**, 4–35, DOI: [10.1007/BF02566590](https://doi.org/10.1007/BF02566590).
4. M. Freidlin and A. Wentzell, “Averaging principle for stochastic perturbations of multifrequency systems,” *Stoch. Dyn.*, 2003, **3**, 393–408, DOI: [10.1142/S0219493703000747](https://doi.org/10.1142/S0219493703000747).
5. J. Guo, S. B. Kuksin, and Z. Liu, “On the averaging theorems for stochastic perturbations of conservative linear systems,” *ArXiv*, 2025, 2504.04379 [math.DS], DOI: [10.48550/arXiv.2504.04379](https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.04379).
6. G. Huang and S. B. Kuksin, “Averaging and mixing for stochastic perturbations of linear conservative systems,” *Russ. Math. Surv.*, 2023, **78**, 3–52, DOI: [10.4213/rm10081](https://doi.org/10.4213/rm10081).
7. G. Huang, S. B. Kuksin, and A. Piatnitski, “Averaging for stochastic perturbations of integrable systems,” *J. Dyn. Differ. Equ.*, 2025, **37**, 1053–1105, DOI: [10.1007/s10884-024-10405-3](https://doi.org/10.1007/s10884-024-10405-3).
8. L. Niederman, “Nonlinear stability around an elliptic equilibrium point in an Hamiltonian system,” *Nonlinearity*, 1998, **11**, 1465–1479, DOI: [10.1088/0951-7715/11/6/002](https://doi.org/10.1088/0951-7715/11/6/002).
9. H. Whitney, “Differentiable even functions, II,” *Duke Math. J.*, 1943, **10**, 159–160, DOI: [10.1215/S0012-7094-43-01015-4](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-43-01015-4).
10. S. Watanabe and T. Yamada, “On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, II,” *J. Math. Kyoto Univ.*, 1971, **11**, 553–563, DOI: [10.1215/kjm/1250523620](https://doi.org/10.1215/kjm/1250523620).
11. T. Yamada and S. Watanabe, “On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations,” *J. Math. Kyoto Univ.*, 1971, **11**, 155–167, DOI: [10.1215/kjm/1250523691](https://doi.org/10.1215/kjm/1250523691).

S. B. Kuksin
 Université Paris Cité, Paris, France

Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, Paris, France

Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

RUDN University, Moscow, Russia

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

E-mail: sergei.kuksin@imj-prg.fr, eLIBRARY AuthorID: [3760](#), ResearcherID: [AAC-3293-2022](#),
Scopus: [7003775978](#), ORCID: [0000-0003-2322-2821](#)