

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

А. К. КЕРИМБЕКОВ

Кыргызско-Российский Славянский университет, Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. В статье исследованы вопросы построения частных решений скалярных и матричных уравнений Риккати. Найдено условие, которое обеспечивает взаимосвязь между частными решениями уравнений Риккати, Бернулли и неоднородного линейного дифференциального уравнения. Разработан алгоритм построения частного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати с переменными коэффициентами, а также скалярного и матричного алгебраических уравнений Риккати.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Риккати, алгебраическое уравнение Риккати, коэффициентно-сопряженное уравнение, уравнение Бернулли.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Керимбеков А. К. Об одном методе решения уравнений Риккати // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 63–74. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-63-74](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-63-74) EDN: [TQREXH](https://www.edn.ru/TQREXH)

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Риккати, начиная с момента его появления (1724 г.), уже более 300 лет привлекает внимание математиков и ученых, занимающихся исследованиями в различных областях естествознания, науки и техники. В работах [4, 5, 7, 10] более или менее полно изложены основные свойства скалярного дифференциального уравнения Риккати, а в работах [1–3, 8, 9, 11, 12] приведены примеры прикладных задач, где уравнение Риккати встречается в виде скалярного или матричного дифференциального уравнения, а также в виде матричного алгебраического уравнения. Оно становится более привлекательным при решении прикладных задач — теории оптимального управления технологическими процессами, где управление следует находить как функцию (функционал) от состояния управляемого процесса [1–3, 8, 9]. Интерес к уравнениям Риккати и в настоящее время не ослабевает [13, 14]. Однако, несмотря на большой поток исследований, до сих пор не разработан алгоритм построения частного решения уравнения Риккати, который остается одной из актуальных проблем теории дифференциальных уравнений.

В данной работе изложены результаты исследований дополнительных свойств дифференциальных и алгебраических уравнений Риккати. В частности, установлено, что существуют отдельные уравнения Риккати, для которых частное решение определяются известными аналитическими методами. Эти уравнения обладают специфическими свойствами, и мы их называем коэффициентно-сопряженными уравнениями Риккати. Доказано, что знание частных решений коэффициентно-сопряженных уравнений позволяет найти частное решение уравнения Риккати с произвольно заданными непрерывными коэффициентами. Показано, что разработанный алгоритм построения частных решений скалярных уравнений Риккати может быть обобщен и для

матричных уравнений Риккати, т. е. в отдельных случаях может быть полезным и при построения частных решений матричных дифференциальных и алгебраических уравнений Риккати.

Поскольку уравнение Риккати тесно связано с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка [4, 5, 7, 10] и линейными интегро-дифференциальными уравнениями [6] с переменными коэффициентами, то для таких уравнений и их систем проблему построения частных решений также можно считать решенной. Таким образом, разработанный метод построения частного решения уравнений Риккати обладает свойством универсальности.

1. СКАЛЯРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

1.1. Коэффициентно-сопряженные дифференциальные уравнения Риккати.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение Риккати

$$y'(t) = k_0(t) + k_1(t)y(t) + k_2(t)y^2(t), \quad (1.1)$$

где $y(t)$ — неизвестная функция, коэффициенты $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ являются непрерывными скалярными функциями, определенными на заданном интервале (a, b) .

Теорема 1.1. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int k_0(t)e^{-\int k_1(t)dt}dt \int k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \equiv 2, \quad t \in (a, b) \quad (1.2)$$

и $u(t)$ является частным решением нелинейного дифференциального уравнения Бернулли

$$u'(t) = k_1(t)u(t) + k_2(t)u^2(t), \quad t \in (a, b), \quad (1.3)$$

а $x(t)$ является частным решением линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$x'(t) = k_0(t) + k_1(t)x(t), \quad (1.4)$$

выделенные из общего решения при нулевом значении произвольной постоянной. Тогда каждая из функций

$$y_1(t) = -u(t) \quad \text{и} \quad y_2(t) = -x(t) \quad (1.5)$$

является частным решением уравнения Риккати (1.1).

Доказательство. Доказательство проведем, используя решение уравнения Бернулли (1.3). Из семейства решений выделяем частное решение

$$u(t) = -e^{\int k_1(t)dt} \left(\int k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \right)^{-1}, \quad (1.6)$$

полученное при нулевом значении произвольной постоянной. Образуем функцию

$$y_1(t) = -u(t) = e^{\int k_1(t)dt} \left(\int k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \right)^{-1} \quad (1.7)$$

и покажем, что она является решением уравнения Риккати (1.1). Дифференцируя (1.7), имеем равенство

$$y_1'(t) = k_1(t)e^{\int k_1(t)dt} \left(\int k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \right)^{-1} - k_2(t)e^{2\int k_1(t)dt} \left(k_2(t)e^{2\int k_1(t)dt}dt \right)^{-2}. \quad (1.8)$$

Дифференцируя тождество (1.2), после несложных преобразований имеем равенство

$$k_0(t) = -2k_2(t)e^{\int k_1(t)dt} \left(k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \right)^{-2}.$$

Учитывая эти соотношения, находим, что

$$\begin{aligned} k_0(t) + k_1(t)y(t) + k_2(t)y^2(t) &= \\ &= -2k_2(t)e^{2\int k_1(t)dt} \left(k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \right)^{-2} + k_1(t)e^{\int k_1(t)dt} \left(k_2(t)e^{-\int k_1(t)dt}dt \right)^{-1} + \\ &+ k_2(t)e^{2\int k_1(t)dt} \left(k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \right)^{-2} = \end{aligned}$$

$$= k_1(t)e^{\int k_1(t)dt} \left(k_2(t)e^{-\int k_1(t)dt} \right)^{-1} - k_2(t)e^{2\int k_1(t)dt} \left(k_2(t)e^{\int k_1(t)dt} \right)^{-2}. \quad (1.9)$$

Сравнивая (1.8) и (1.9), убеждаемся в том, что функция (1.7) является решением уравнения Риккати (1.1).

Аналогичным образом доказывается, что функция

$$y_2(t) = -x(t) = -e^{\int k_1(t)dt} \int k_0(t)e^{-\int k_1(t)dt} dt,$$

где $x(t)$ является частным решением линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$x'(t) = k_0(t) + k_1(t)x(t),$$

также удовлетворяет уравнению Риккати (1.1). В самом деле, при подстановке функции $y_2(t)$ в уравнение (1.1) получим следующие соотношения:

$$y_2'(t) = -k_0(t) - k_1(t)e^{\int k_1(t)dt} \int k_0(t)e^{-\int k_1(t)dt} dt, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} k_0(t) + k_1(t)y_2(t) + k_2(t)y_2^2(t) &= k_0(t) - k_1(t)e^{\int k_1(t)dt} \int k_0(t)e^{-\int k_1(t)dt} dt + \\ &+ k_2(t) \left(e^{\int k_1(t)dt} \int k_0(t)e^{-\int k_1(t)dt} dt \right)^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Далее, дифференцируя интегральное тождество (1.2), получим равенство

$$k_2(t)e^{\int k_1(t)dt} = -2k_0(t)e^{-\int k_1(t)dt} \left(\int k_0(t)e^{-\int k_1(t)dt} dt \right)^{-2},$$

которое перепишем в виде

$$k_2(t) \left(e^{\int k_1(t)dt} \int k_0(t)e^{-\int k_1(t)dt} dt \right)^2 = -2k_0(t).$$

С учетом этого равенства соотношение (1.11) приводим к виду

$$k_0(t) + k_1(t)y_2(t) + k_2(t)y_2^2(t) = -k_0(t) - k_1(t)e^{\int k_1(t)dt} \int k_0(t)e^{-\int k_1(t)dt} dt$$

и сравнивая с (1.10) убеждаемся, что функция $y_2(t)$ является решением уравнения Риккати (1.1). $\square$

Наряду с уравнением (1.1) будем рассматривать уравнение Риккати вида

$$y'(t) = k_2(t) - k_1(t)y + k_0(t)y^2(t), \quad t \in (a, b), \quad (1.12)$$

которое отличается от уравнения (1.1) расположением коэффициентов. Нетрудно заметить, что (1.1) и (1.12) — разные уравнения, однако коэффициенты удовлетворяют интегральному тождеству (1.2). Уравнение (1.12) обладает теми же свойствами, что и уравнение Риккати (1.1). Уравнения (1.1) и (1.12) назовем *коэффициентно-сопряженными* уравнениями Риккати. Совокупность таких уравнений образуют множество, которое является подмножеством множества общих уравнений Риккати.

1.2. О преобразовании произвольного уравнения Риккати к коэффициентно-сопряженному уравнению. Рассмотрим уравнение Риккати

$$z'(t) = p(t) + q(t)z(t) + r(t)z^2(t) \quad (1.13)$$

с произвольными непрерывными коэффициентами $p(t)$, $q(t)$ и $r(t)$, определенными на заданном интервале (a, b) . Если уравнение (1.13) не принадлежит к классу коэффициентно-сопряженных уравнений, то вышеизложенный метод построения частного решения становится непригодным. В этой связи рассмотрим вопросы о преобразовании уравнения (1.13) к уравнению класса

коэффициентно-сопряженных уравнений. Согласно свойствам уравнения Риккати [4, 5, 7, 10], используя дробно-линейное преобразование

$$z(t) = \frac{a(t)y(t) + b(t)}{c(t)y(t) + h(t)}, \quad Q(t) = a(t)h(t) - c(t)b(t) \neq 0, \quad (1.14)$$

где $a(t), b(t), c(t), h(t)$ — непрерывные функции, определенные на заданном интервале (a, b) , уравнение (1.13) можно преобразовать к коэффициентно-сопряженному уравнению Риккати вида

$$y'(t) = k_0(t) + k_1(t)y(t) + k_2(t)y^2(t). \quad (1.15)$$

Если из коэффициентов уравнения (1.13) образовать вектор-функцию $P(t) = (p(t), q(t), r(t))$, а из коэффициентов уравнения (1.15) образовать вектор-функцию $K(t) = (k_0(t), k_1(t), k_2(t))$, то из функции, связывающей $y(t)$ и $z(t)$ по формуле (1.14), образуем вектор-функцию $A(t) = (a(t), b(t), c(t), h(t))$. Тогда нетрудно проверить, что эти вектор-функции будут связаны соотношением

$$K(t) = D(t)(P(t) - F'(t, A(t))), \quad (1.16)$$

где

$$D(t) = \frac{1}{Q^3(t)} \begin{pmatrix} h^2(t) & b(t)h(t) & b^2(t) \\ 2c(t)h(t) & a(t)h(t) + c(t)b(t) & 2a(t)b(t) \\ c^2(t) & a(t)c(t) & a^2(t) \end{pmatrix},$$

$$F'(t, A(t)) = \frac{1}{Q(t)} \begin{pmatrix} b'(t)h(t) - b(t)h'(t) \\ a'(t)h(t) - a(t)h'(t) + b'(t)c(t) - b(t)c'(t) \\ a'(t)c(t) - a(t)c'(t) \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что определитель матрицы $D(t)$ при любом наборе функций $a(t), b(t), c(t), h(t)$, удовлетворяющих условию $Q(t) \neq 0$, отличен от нуля, т. е.

$$|D(t)| = 1, \quad \forall t \in (a, b). \quad (1.17)$$

Это обстоятельство позволяет определить коэффициенты $k_0(t), k_1(t), k_2(t)$ так, чтобы они удовлетворяли интегральному тождеству

$$\int k_0(t, A(t)) e^{-\int k_1(t, A(t)) dt} dt \int k_2(t) e^{\int k_1(t, A(t)) dt} dt \equiv 2. \quad (1.18)$$

Эта задача, где количество неизвестных превышает количество условий, имеет бесконечно много решений. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. Пусть уравнения Риккати (1.13) и (1.15) связаны дробно-линейными преобразованиями (1.14). При преобразовании среди наборов функций $(a(t), b(t), c(t), h(t))$ существует хотя бы один набор такой, чтобы (1.15) было коэффициентно-сопряженным уравнением Риккати.

Отметим, что, в силу условия (1.17) уравнение (1.16) можно переписать в виде

$$P(t) = D^{-1}(t)(K(t) + F'(t, A(t))) \quad (1.19)$$

и использовать для перехода от уравнения Риккати (1.15) к исходному уравнению Риккати (1.13). При этом переход от уравнения (1.13) к уравнению (1.15) или от уравнения (1.15) к уравнению (1.13) при каждом наборе функций $a(t), b(t), c(t)$ и $h(t)$ осуществляется однозначно.

Пример. Рассмотрим уравнение Риккати

$$y'(t) = p(t) + q(t)y(t) + r(t)y^2(t), \quad (1.20)$$

где

$$p(t) = 2 \cos t \left(2e^{2t} - \frac{e^{-2t}}{\sin^2 t} \right) - 4, \quad q(t) = 4 \cos t \left(-e^{2t} + \frac{e^{-2t}}{\sin^2 t} \right) + 6,$$

$$r(t) = \cos t \left(e^{2t} - \frac{2e^{-2t}}{\sin^2 t} \right) - 2.$$

Подстановкой

$$y(t) = \frac{a(t)z(t) + b(t)}{c(t)z(t) + h(t)}, \quad Q(t) = a(t)h(t) - b(t)c(t) \neq 0 \quad (1.21)$$

уравнение (1.20) преобразуем к виду

$$z'(t) = k_0(t) + k_1(t)z(t) + k_2(t)z^2(t), \quad (1.22)$$

где коэффициенты $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$ определяются по формуле

$$K(t) = D(t)P(t) - F'(t, A(t)).$$

Это равенство при $a(t) = 2$, $h(t) = 1$, $b(t) = 1$, $c(t) = 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} k_0(t) &= p(t) + q(t) + r(t) = e^{2t} \cos t, \\ k_1(t) &= 2p(t) + 3q(t) + 4r(t) = 2, \\ k_2(t) &= p(t) + 2q(t) + 4r(t) = -\frac{2e^{-2t} \cos t}{\sin^2 t}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int k_0(t) e^{-\int k_1(t) dt} dt &= \int e^{2t} \cos t e^{-\int 2 dt} dt = \int \cos t dt = \sin t, \\ \int k_2(t) e^{\int k_1(t) dt} dt &= \int \left(-\frac{2e^{-2t} \cos t}{\sin^2 t} \right) e^{2t} dt = -\int \frac{2 \cos t}{\sin^2 t} dt = \frac{2}{\sin t}, \end{aligned}$$

то легко видеть, что найденные коэффициенты $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$ удовлетворяют интегральному тождеству (1.18).

Далее находим частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$z'_0(t) = k_0(t) + k_1(t)z_0(t) \equiv e^{2t} \cos t + 2z_0(t).$$

Оно имеет вид

$$z_0(t) = e^{\int k_1(t) dt} \left(c + \int k_0(t) e^{-\int k_1(t) dt} dt \right) \Big|_{c=0} = e^{2t} \int e^{2t} \cos t e^{-2t} dt = e^{2t} \sin t.$$

Частное решение исходного уравнения Риккати (1.22) имеет вид

$$z(t) = -z_0(t) = -e^{2t} \sin t. \quad (1.23)$$

Далее согласно (1.21) частное решение уравнения (1.20) находим в виде

$$y_1(t) = \frac{-2e^{2t} \sin t + 1}{e^{2t} \sin t + 1}.$$

Известно, что существует связь дифференциального уравнения Риккати

$$x'(t) = k_0(t) + k_1(t)x(t) + k_2(t)x^2(t) \quad (1.24)$$

с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка, системой дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

Все свойства уравнения Риккати и его связи с другими уравнениями сохраняются и для коэффициентно-сопряженных уравнений. Это обстоятельство позволяет, зная частное решение коэффициентно-сопряженного уравнения Риккати, находить частные решения некоторых дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их систем с переменными коэффициентами, которые также являются актуальными проблемами теории дифференциальных уравнений. Ниже приведены примеры таких связей.

Связь с линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Пусть $x(t)$ — известное решение коэффициентно-сопряженного уравнения Риккати (1.24). Тогда, используя формулу

$$x(t) = -\frac{1}{k_2(t)} \frac{z'(t)}{z(t)}, \quad (1.25)$$

можно найти частное решение $z(t)$ линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами вида

$$z'' - \left(\frac{k'_2(t)}{k_2(t)} + k_1(t) \right) z' + k_0(t)k_2(t)z = 0. \quad (1.26)$$

Связь с линейной системой дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть $z(t)$ — частное решение уравнения (1.26), найденное по формуле (1.25). Тогда одно из частных решений $\{z(t), y(t)\}$ системы с переменными коэффициентами вида

$$\begin{cases} z' = y, \\ y' = -k_0(t)k_2(t)z + \left(\frac{k_2'(t)}{k_2(t)} + k_1(t)\right)y \end{cases} \quad (1.27)$$

определяется достаточно просто. То есть, если $z(t)$ известно, то $y(t)$ находится по первому уравнению.

Связь с линейным интегро-дифференциальным уравнением. Рассмотрим систему (1.27) и согласно методике работы [4] для второго уравнения рассмотрим задачу Коши:

$$y' - \left(\frac{k_2'(t)}{k_2(t)} + k_1(t)\right)y = -k_0(t)k_2(t), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.28)$$

Решение задачи Коши имеет вид

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\int_{t_0}^t \left(\frac{k_2'(\tau)}{k_2(\tau)} + k_1(\tau)\right) d\tau} \left(y_0 + \int_{t_0}^t k_0(\xi)k_2(\xi) e^{-\int_{t_0}^{\xi} \left(\frac{k_2'(s)}{k_2(s)} + k_1(s)\right) ds} d\xi \right) = \\ &= y_0 e^{\int_{t_0}^t \left(\frac{k_2'(\tau)}{k_2(\tau)} + k_1(\tau)\right) d\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\xi} \left(\frac{k_2'(s)}{k_2(s)} + k_1(s)\right) ds} k_0(\xi)k_2(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Подставляя это решение в уравнение $z' = y$, получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$z'(t) = \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \left(\frac{k_2'(s)}{k_2(s)} + k_1(s)\right) ds} k_0(\tau)k_2(\tau) d\tau + y_0 e^{\int_{t_0}^t \left(\frac{k_2'(\tau)}{k_2(\tau)} + k_1(\tau)\right) d\tau}, \quad (1.30)$$

которое эквивалентно системе (1.27).

Таким образом, установлено, что коэффициентно-сопряженные уравнения Риккати позволяют решать ряд задач, связанных с построением частных решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$Y'(t) = K_0(t) + K_1(t)Y(t) + Y(t)K_2(t)Y(t), \quad (2.1)$$

где $Y(t)$ — неизвестная матрица порядка $n \times n$, $K_0(t)$, $K_1(t)$, $K_2(t)$ — непрерывные матричные коэффициенты того же порядка, независимая переменная t изменяется на заданном интервале (a, b) .

Теорема 2.1. Пусть коэффициенты $K_0(t)$, $K_1(t)$, $K_2(t)$ уравнения (2.1) удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau \int K_2(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau = 2E, \quad (2.2)$$

где E — единичная матрица порядка $n \times n$, $\Phi(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ — матрица Коши, а $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица¹ линейного однородного матричного дифференциального уравнения

$$X_0'(t) = K_1(t)X_0(t). \quad (2.3)$$

Если $X(t)$ — частное решение линейного неоднородного матричного дифференциального уравнения

$$X'(t) = K_0(t) + K_1(t)X(t), \quad (2.4)$$

¹Заметим, что обратная матрица $\Phi^{-1}(t)$ удовлетворяет тождеству $(\Phi^{-1}(t))' = -\Phi^{-1}(t)K_1(t)$.

а $U(t)$ — частное решение матричного уравнения Бернулли

$$U'(t) = K_1(t)U(t) + U(t)K_2(t)U(t), \quad (2.5)$$

полученные при нулевом значении произвольной постоянной, то каждая из матриц

$$Y_1(t) = -X(t) \quad \text{и} \quad Y_2(t) = -U(t) \quad (2.6)$$

является частным решением матричного уравнения (2.1).

Доказательство. Из семейства решений уравнения (2.4) выделяем решение

$$X(t) = \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

и образуем матрицу $Y_1(t) = -X(t)$. Покажем, что матрица $Y_1(t)$ является частным решением уравнения Риккати (1.1). Учитывая, что для любой матрицы $H(t)$ имеет место соотношение

$$\left(\int H(\tau) d\tau \right)' = \left(\int_0^t H(\tau) d\tau \right)' = H(t),$$

находим, что

$$Y_1'(t) = -K_1(t) \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau - K_0(t). \quad (2.8)$$

С другой стороны, имеем равенство

$$\begin{aligned} K_0(t) + K_1(t)Y_1(t) + Y_1(t)K_2(t)Y_1(t) = \\ = K_0(t) - K_1(t) \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau + \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau K_2(t) \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Теперь тождество (2.2) представим в виде

$$\int K_2(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau = 2 \left(\int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau \right)^{-1}$$

и продифференцируем по t . Учитывая известное соотношение $(H^{-1})' = -H^{-1}H'H^{-1}$ и (2.3), (2.5), находим, что

$$\int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau \cdot K_2(t) \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau = -2K_0(t).$$

Тогда (2.9) перепишем в виде

$$K_0(t) + K_1(t)Y_1(t) + Y_1(t)K_2(t)Y_1(t) = -K_0(t) - K_1(t) \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau$$

и, сравнивая с (2.8), убедимся в том, что матрица $Y_1(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати (2.1).

Теперь рассмотрим матричное дифференциальное уравнение Бернулли

$$U'(t) = K_1(t)U(t) + U(t)K_2(t)U(t) \quad (2.10)$$

и из семейства его решений выделим частное решение

$$U(t) = \left(- \int K_2(t) \Phi(\tau, t) d\tau \right)^{-1}, \quad (2.11)$$

приравнивая к нулевой матрице произвольную постоянную матрицу. Далее непосредственными вычислениями доказывается, что матрица

$$Y_2(t) = -U(t) = \left(\int K_2(\tau) H^{-1}(t, \tau) d\tau \right)^{-1}$$

является частным решением уравнения Риккати (2.1).

Дифференцируя матрицу $Y_2(t)$ и учитывая тождество (2.3), находим что

$$Y_2'(t) = - \left(\int K_2(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \right)^{-1} K_2(t) \left(\int K_2(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \right)^{-1} + K_1(t) \left(\int K_2(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \right)^{-1}. \quad (2.12)$$

С другой стороны, подставляя матрицу $Y_2(t)$ в правую часть уравнения (2.1), имеем соотношение:

$$K_0(t) + K_1(t)Y_2(t) + Y_2(t)K_2(t)Y_2(t) = K_0(t) + K_1(t) \left(\int K_2(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau \right)^{-1} + \\ + \left(\int K_2(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau \right)^{-1} K_2(t) \left(\int K_2(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau \right)^{-1}. \quad (2.13)$$

Далее продифференцируем по t интегральное тождество (2.2) и с учетом (2.3) найдем, что

$$K_0(t) = -2 \left(\int K_2(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau \right)^{-1} K_2(t) \left(\int K_2(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau \right)^{-1}.$$

Учитывая это соотношение, сравним (2.12) с (2.13) и убедимся в том, что матрица $Y_2(t)$ является решением уравнения (2.1). $\square$

3. СКАЛЯРНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

3.1. Коэффициентно-сопряженные алгебраические уравнения Риккати. Скалярное алгебраическое уравнение Риккати известно как квадратное уравнение

$$0 = p + qy + ry^2, \quad (3.1)$$

где p, q, r — действительные числа. Известны алгоритмы построения корней (частных решений) этого уравнения. Мы будем рассматривать это уравнение с иных позиций, т. е. будем рассматривать вопросы определения его корней по схеме, изложенной в предыдущих пунктах.

Сначала рассмотрим уравнения вида

$$0 = k_0 + k_1z + k_2z^2, \quad (3.2)$$

$$0 = k_2 - k_1z + k_0z^2, \quad (3.3)$$

коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$2k_1^2 + k_0k_2 = 0. \quad (3.4)$$

Пару таких уравнений вида (3.2) и (3.3) назовем *коэффициентно-сопряженными* алгебраическими уравнениями Риккати.

Теорема 3.1. Пусть (3.2) является коэффициентно-сопряженным алгебраическим уравнением. Если x является корнем линейного неоднородного алгебраического уравнения

$$0 = k_0 + k_1x, \quad \text{т. е.} \quad x = -k_0k_1^{-1}, \quad (3.5)$$

и является нетривиальным корнем нелинейного алгебраического уравнения

$$0 = k_0 + k_1u + k_2u^2, \quad \text{т. е.} \quad u = -k_1k_2^{-1}, \quad (3.6)$$

то каждое из чисел

$$z_1 = -x = k_0k_1^{-1}, \quad z_2 = -u = k_1k_2^{-1}$$

является корнем алгебраического уравнения Риккати (3.2).

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

3.2. О преобразовании скалярного алгебраического уравнения Риккати общего вида. Теперь возвращаемся к уравнению (3.1) и рассмотрим вопрос о преобразовании его к коэффициентно-сопряженному уравнению. Используя дробно-линейное преобразование

$$y = \frac{az + b}{cz + h}, \quad ah - bc \neq 0, \quad (3.7)$$

переходим к уравнению

$$0 = k_0 + k_1z + k_2z^2, \quad (3.8)$$

где коэффициенты k_0, k_1, k_2 связаны с коэффициентами уравнения (3.1) по формулам

$$\begin{aligned} k_0 &= h^2 p + b h q + b^2 r, \\ k_1 &= 2 c h p + (a h + b c) q + 2 a b r, \\ k_2 &= c^2 p + a c q + a^2 r, \end{aligned} \quad (3.9)$$

или в матричной форме

$$K = D P, \quad K = (k_0, k_1, k_2), \quad P = (p, q, r).$$

Поскольку определитель матрицы D отличен от нуля, т. е.

$$|D| = \begin{vmatrix} h^2 & b h & b^2 \\ 2 c h & a h + b c & 2 a b r \\ c^2 & a c & a^2 \end{vmatrix} = (a h - b c)^3 \neq 0, \quad (3.10)$$

то соотношение (3.9) можно представить в виде

$$P = D^{-1} K,$$

Следовательно, при любом наборе чисел a, b, c, h , удовлетворяющих условию (3.10), переход от уравнения (3.1) к уравнению (3.8) или обратно от уравнения (3.8) к уравнению (3.1) осуществляется однозначно. Это обстоятельство позволяет определить коэффициенты k_0, k_1, k_2 так, чтобы они удовлетворяли условию

$$2k_1^2 + k_0 k_2 = 0. \quad (3.11)$$

Заметим, что эта задача имеет бесконечно много решений. Имеет место теорема.

Теорема 3.2. Пусть (3.1) и (3.8) — алгебраические уравнения Риккати, связанные с дробно-линейным преобразованием (3.7). При преобразовании среди наборов чисел (a, b, c, h) существует хотя бы один набор такой, чтобы (3.8) было коэффициентно-сопряженным алгебраическим уравнением Риккати.

4. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Рассмотрим матричное алгебраическое уравнение Риккати вида

$$\Theta = K_0 + K_1 Y + Y K_2 Y, \quad (4.1)$$

где Y — искомая матрица порядка $n \times n$, коэффициенты K_0, K_1, K_2 — постоянные матрицы порядка $n \times n$, причем K_1 и K_2 считаем неособенными, Θ — нулевая матрица порядка $n \times n$.

Теорема 4.1. Пусть коэффициенты уравнения (4.1) K_0, K_1, K_2 удовлетворяют условию

$$K_1^{-1} K_0 K_2 K_1^{-1} = -2E, \quad (4.2)$$

где K_1^{-1} — обратная матрица, E — единичная матрица. Если матрица X является решением линейного неоднородного матричного алгебраического уравнения

$$\Theta = K_0 + K_1 X, \quad \text{т. е.} \quad X = K_1^{-1} K_0, \quad (4.3)$$

а матрица U является нетривиальным частным решением нелинейного матричного алгебраического уравнения

$$\Theta = K_1 U + U K_2 U, \quad \text{т. е.} \quad U = -K_1 K_2^{-1}, \quad (4.4)$$

где K_2^{-1} — обратная матрица, то каждая из матриц

$$\text{а) } Y_1 = -X, \quad \text{б) } Y_2 = -U \quad (4.5)$$

является частным решением матричного алгебраического уравнения (4.1).

Доказательство. Докажем это непосредственной проверкой.

Случай а). Подставим матрицу $Y_1 = -X$ в уравнение (4.1) и получим равенство:

$$\Theta = K_0 + K_1(-X) + (-X)K_2(-X) = K_0 + K_1(-K_1^{-1}K_0) + K_1^{-1}K_0K_2K_1^{-1}K_0 = 2K_0 - 2K_0 = \Theta, \quad (4.6)$$

из которого следует первое утверждение теоремы.

Случай б). Подставим матрицу $Y_2 = -U$ в уравнение (4.1). Имеем равенство:

$$\begin{aligned} \Theta &= K_0 + K_1(-U) + (-U)K_2(-U) = K_0 + K_1(K_1K_2^{-1}) + (K_1K_2^{-1})K_2(K_1K_2^{-1}) = \\ &= K_0 - K_1K_1K_2^{-1} + K_1K_2^{-1}K_2K_1K_2^{-1} = K_0 + 2K_1K_1K_2^{-1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Умножим это равенство слева на матрицу K_1^{-1} , а справа последовательно на K_2 и K_1^{-1} . Тогда с учетом условия (4.2) получим равенство

$$\Theta = K_1^{-1}K_0K_2K_1^{-1} + 2E = (-2E) + 2E = \Theta,$$

из которого следует второе утверждение теоремы. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что разработан алгоритм построения частного решения скалярного уравнения Риккати с произвольными коэффициентами, согласно которому частное решение определяется по следующей схеме:

1. рассмотрим данное уравнение Риккати;
2. используя дробно-линейное преобразование, приводим его к коэффициентно-сопряженному уравнению;
3. находим частное решение коэффициентно-сопряженного уравнения;
4. согласно дробно-линейному преобразованию осуществляем обратный переход и находим частное решение исходного уравнения Риккати.

Разработанный метод построения частного решения уравнения Риккати может быть полезен для построения частных решений матричных уравнений Риккати, а также при решении прикладных задач естествознания и науки, связанных с уравнением Риккати.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Ю. А. Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976.
2. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
3. Егоров А. И. Основы теории управления. — М.: Физматлит, 2004.
4. Егоров А. И. Уравнения Риккати. — М.: Солон-Пресс, 2017.
5. Егоров А. И. Обновленный курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие для вузов. — СПб.: Янус, 2022.
6. Егоров А. И. Properties of solutions to Volterra-type integro-differential equations // Lobachevskii J. Math. — 2023. — 44, № 10. — С. 1837–1848. — DOI: [10.1134/S1995080223100098](https://doi.org/10.1134/S1995080223100098).
7. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1972.
8. Керимбеков А. К. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами // Дисс. докт. физ.-мат. наук. — Бишкек: Инст. математики НАН КР, 2003.
9. Ройтенберг Я. Я. Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
10. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматлит, 1958.
11. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. — М.: Машиностроение, 1972.
12. Чаки Ф. Современная теория управления: нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. — М.: Мир, 1975.
13. Чочиев Т. З. Об одном варианте исследования уравнения Риккати // В сб.: «Актуальные проблемы естественных и математических наук в России и зарубежом». — Новосибирск: ИЦРОН, 2015. — С. 10–13.
14. Rivera-Oliva E. Solving the Riccati equation // ArXiv. — 2025. — 2502.20688 [math-ph]. — DOI: [10.48550/arXiv.2502.20688](https://doi.org/10.48550/arXiv.2502.20688).

А. К. Керимбеков

Кыргызско-Российский Славянский университет, Бишкек, Кыргызстан

E-mail: ak17@rambler.ru, РИНЦ SPIN-код: 8307-7845, РИНЦ AuthorID: 866529, Scopus: 54383472500, ORCID: 0000-0002-7401-4312

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-63-74](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-63-74)

EDN: [TQPEXH](https://www.edn.ru/TQPEXH)

UDC 517.91

Research article

On one method for solving Riccati equations

A. K. Kerimbekov

Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. In this paper, we investigate the construction of particular solutions to scalar and matrix Riccati equations. We find a condition that ensures a relationship between particular solutions to the Riccati and Bernoulli equations, as well as to nonhomogeneous linear differential equations. We develop an algorithm for constructing a particular solution to scalar and matrix Riccati differential equations with variable coefficients, as well as scalar and matrix algebraic Riccati equations.

Keywords: Riccati differential equation, algebraic Riccati equation, coefficient-conjugate equation, Bernoulli equation.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: A. K. Kerimbekov, “On one method for solving Riccati equations,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 1, 63–74. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-63-74](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-63-74) EDN: [TQPEXH](https://www.edn.ru/TQPEXH)

REFERENCES

1. Yu. A. Andreev, *Upravlenie konechnomernymi lineynymi ob"ektami* [Control of Finite-Dimensional Linear Objects], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
2. A. I. Egorov, *Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami* [Optimal Control of Thermal and Diffusion Processes], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
3. A. I. Egorov, *Osnovy teorii upravleniya* [Fundamentals of Control Theory], Fizmatlit, Moscow, 2004 (in Russian).
4. A. I. Egorov, *Uravneniya Rikcati* [Riccati Equations], Solon-Press, Moscow, 2017 (in Russian).
5. A. I. Egorov, *Obnovlennyy kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy: uchebnoe posobie dlya vuzov* [An Updated Course in Ordinary Differential Equations: a Textbook for Universities], Yanus, Saint Petersburg, 2022 (in Russian).
6. A. I. Egorov, “Properties of solutions to Volterra-type integro-differential equations,” *Lobachevskii J. Math.*, 2023, 44, No. 10, 1837–1848, DOI: [10.1134/S1995080223100098](https://doi.org/10.1134/S1995080223100098).
7. N. P. Erugin, *Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differentsial'nykh uravneniy* [A Book for Reading on the General Course of Differential Equations], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1972 (in Russian).
8. A. K. Kerimbekov, “Nelineynoe optimal'noe upravlenie lineynymi sistemami s raspredelennymi parametrami” [Nonlinear optimal control of linear systems with distributed parameters], Doctoral Diss., Inst. Math. NAN KR, Bishkek, 2003 (in Russian).
9. Ya. Ya. Roytenberg, *Avtomaticheskoe upravlenie* [Automatic Control], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).



10. V. V. Stepanov, *Kurs differentsial'nykh uravneniy* [Course in Differential Equations], Fizmatlit, Moscow, 1958 (in Russian).
11. J. C. Hsu and A. U. Meyer, *Sovremennaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya i ee primeneniye* [Modern Control Principles and Applications], Mashinostroenie, Moscow, 1972 (Russian translation).
12. F. Csáki, *Sovremennaya teoriya upravleniya: nelineynye, optimal'nye i adaptivnye sistemy* [Modern Control Theories: Nonlinear, Optimal and Adaptive Systems], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
13. T. Z. Chochiev, “Ob odnom variante issledovaniya uravneniya Rikkati” [On one variant of studying the Riccati equation], In: *Aktual'nye problemy estestvennykh i matematicheskikh nauk v Rossii i zarubezhom* [Current Issues in Natural and Mathematical Sciences in Russia and Abroad], ITsRON, Novosibirsk, 2015, pp. 10–13 (in Russian).
14. E. Rivera-Oliva, “Solving the Riccati equation,” *ArXiv*, 2025, 2502.20688 [math-ph], DOI: [10.48550/arXiv.2502.20688](https://doi.org/10.48550/arXiv.2502.20688).

A. K. Kerimbekov

Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek, Kyrgyzstan

E-mail: ak17@rambler.ru, eLIBRARY SPIN-code: 8307-7845, eLIBRARY AuthorID: [866529](#),

Scopus: [54383472500](#), ORCID: [0000-0002-7401-4312](#)