

О ГИПОТЕЗЕ АРНОЛЬДА ДЛЯ СЕМЕЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОПРЯЖЕННЫМИ НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Я. М. ДЫМАРСКИЙ, С. С. НИКОЛАЕНКО

*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Россия*

Аннотация. Дано аналитическое и топологическое описание многообразий собственных функций и потенциалов, порожденных семейством одномерных стационарных операторов Шредингера и многообразием самосопряженных неразделенных краевых условий. В частности, доказана гипотеза Арнольда о коразмерности многообразия тех потенциалов, которым отвечают двукратные собственные значения при выбранных самосопряженных неразделенных краевых условиях.

Ключевые слова: гипотеза Арнольда, гипотеза трансверсальности, оператор Шредингера.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Дымарский Я. М. — концепция исследования и оформление текста; Николаенко С. С. — обработка материала и оформление текста.

Для цитирования: Дымарский Я. М., Николаенко С. С. О гипотезе Арнольда для семейства стационарных операторов Шредингера с самосопряженными неразделенными краевыми условиями // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 51–62. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-51-62](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-51-62) EDN: [TOXSPT](https://www.edn.ru/TOXSPT)

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] В. И. Арнольд сформулировал «гипотезу трансверсальности» следующего содержания: в «типичном» семействе самосопряженных операторов с дискретным спектром те операторы, у которых выделенное собственное значение двукратно, образуют подмногообразие коразмерности два. Нетривиальность утверждения состоит в том, что указанное подмножество определяется одним условием — совпадением двух собственных значений. Анализ этого условия в простейшем случае симметрических матриц 2×2 приводит к одному вырожденному уравнению, которое распадается на два невырожденных. Гипотеза была подтверждена одним из авторов настоящей статьи для случаев конечномерных и компактных операторов, а также для некоторых семейств дифференциальных операторов [2]. Дальнейшие исследования показали, что целесообразно рассмотреть многообразия операторов, у которых спектральная лакуна положительна и фиксирована. Наиболее полные результаты были получены для семейства стационарных операторов Шредингера на отрезке с периодическими краевыми условиями [3–5]. В данной работе мы доказываем гипотезу В. И. Арнольда для семейства стационарных операторов Шредингера на отрезке с произвольными самосопряженными неразделенными краевыми условиями.

Наш метод исследования опирается на следующие наблюдения:

1. множество Y всех функций, которые могут быть собственными для оператора Шредингера при некотором самосопряженном неразделенном краевом условии, допускает аналитическое описание;
2. по функции $y \in Y$, которая может быть собственной, однозначно восстанавливаются потенциал оператора Шредингера и собственное значение, т. е. однозначно восстанавливается дифференциальное уравнение, решением которого является функция y .

Таким образом, возникает проблема описания множества всех тех краевых условий, которым удовлетворяет выбранная функция y . Здесь мы опираемся на некоторые результаты статьи [11]. Оказывается, искомое множество представляет собой прямолинейную образующую многообразия самосопряженных неразделенных краевых условий; на этой прямой есть единственное условие, которому удовлетворяют все решения единственного дифференциального уравнения, порожденного функцией y . Следовательно, с каждой функцией $y \in Y$ канонически связаны оператор Шредингера и краевое условие, при которых функции y отвечает двукратное собственное значение. Последний вывод приводит нас к доказательству гипотезы Арнольда.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

2.1. Семейство краевых задач. Обозначим через $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ гильбертово пространство вещественных суммируемых с квадратом функций. Через

$$P := \left\{ p \in L_2 : \int_0^{2\pi} p(x) dx = 0 \right\} \quad (2.1)$$

обозначим подпространство в L_2 с нулевым средним, через $W_2^2 = W_2^2[0, 2\pi]$ обозначим гильбертово пространство функций, которые суммируемы с квадратом вместе со своими производными вплоть до второго порядка (в силу теоремы Соболева [7] вложение $W_2^2 \subset C^1[0, 2\pi]$ непрерывно).

Обозначим через

$$B = B(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad (2.2)$$

вещественную матрицу, принадлежащую специальной линейной группе Ли $SL(2, \mathbb{R})$; множество всех таких матриц обозначим через $\mathbb{B}$ и понимаем его как гладкое трехмерное подмногообразие $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^4$. В силу условия (2.2) для любого $B \in \mathbb{B}$ справедливо $(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2) > 0$.

На отрезке $[0, 2\pi]$ рассмотрим семейство спектральных краевых задач

$$-y'' + p(x)y = \lambda y \quad (2.3)$$

с самосопряженными неразделенными краевыми условиями

$$B \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(2\pi) \\ y'(2\pi) \end{pmatrix}; \quad (2.4)$$

параметром семейства является пара $(p, B) \in P \times \mathbb{B}$. Функцию p будем называть *потенциалом*, число λ — *собственным значением*, краевое условие (2.4) мы отождествляем с матрицей B .

Напомним свойства спектра краевой задачи (2.3), (2.4) при фиксированной паре (p, B) (см. [6, 7]). Спектр состоит из вещественных собственных значений, которые не более, чем двукратны:

$$(\lambda_0^+(p, B)) < \lambda_1^-(p, B) \leq \lambda_1^+(p, B) < \dots < \lambda_n^-(p, B) \leq \lambda_n^+(p, B) < \dots \quad (2.5)$$

(λ_0^+ существует только если $\beta < 0$ или $\beta = 0, \alpha > 0$). Соответствующие собственные функции $y_n^\pm(x)$ принадлежат пространству W_2^2 ; нули собственных функций невырождены и на полуотрезке $(0, 2\pi]$ их количество $N(n)$ зависит от знаков элементов матрицы B :

$$\begin{array}{llll} 2n-2 & \text{или} & 2n-1 & \text{при } \beta > 0, \\ 2n-1 & & & \text{при } \beta = 0, \quad \alpha < 0, \\ 2n-1 & \text{или} & 2n & \text{при } \beta < 0, \\ 2n & & & \text{при } \beta = 0, \quad \alpha > 0. \end{array} \quad (2.6)$$

Отрезок $[\lambda_n^-(p, B), \lambda_n^+(p, B)]$ называется n -й лакуной. Собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, попарно ортогональны в L_2 . В случае совпадения собственных значений $\lambda_n^-(p, B) = \lambda_n^+(p, B) = \lambda_n^0(p, B)$ (вырожденная лакуна) возникает «проколотая» плоскость собственных функций; нули линейно независимых собственных функций, отвечающих общему собственному значению, перемежаются.

Поскольку собственные функции определяются с точностью до ненулевого коэффициента, в дальнейшем мы не различаем функции $y(x)$ и $ky(x)$, где $k \neq 0$. Указанную факторизацию называем «проективизацией» и обозначаем ее результат через $\Pi_n^0(p, B)$. Таким образом, $\Pi_n^0(p, B) \cong \mathbb{R}P^1$ ($\cong$ — диффеоморфность класса C^∞).

Замечание 2.1. При фиксированном $B \in \mathbb{B}$ на пространстве P определены функционалы

$$P \ni p \mapsto \lambda_0^+(p, B), \quad P \ni p \mapsto \lambda_n^\pm(p, B) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

значения которых, как это следует из (2.5), строго упорядочены по номеру n . Будет показано, что именно эта упорядоченность позволяет исследовать семейство краевых задач (2.3), (2.4) отдельно для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $Y(p, \lambda)$ проколотую плоскость всех ненулевых решений $y = y(x)$ ($x \in [0, 2\pi]$) дифференциального уравнения (2.3) при указанных потенциале и собственном значении. Нас интересует множество

$$Y = \bigcup_{(p, \lambda) \in P \times \mathbb{R}} Y(p, \lambda).$$

Мы различаем собственную функцию $y \in \Pi_n^0(p, B) \cong \mathbb{R}P^1$ (элемент проективной прямой) и решение $y \in Y(p, \lambda)$ (конкретная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению). Ниже мы научимся сопоставлять каждой функции $y \in Y$ единственное краевое условие, т. е. интерпретируем функцию $y \in Y$ как собственную $y \in \Pi_n^0(p, B)$. Значительная часть статьи посвящена исследованию связи между этими понятиями.

Начнем с описания множества Y .

Лемма 2.1. Множество Y состоит из всех таких функций $y \in W_2^2$, для которых выполнены следующие условия:

- на $[0, 2\pi]$ функция $y(x)$ имеет конечное количество нулей, причем все они невырождены (если $y(x_i) = 0$, то $y'(x_i) \neq 0$);
- $\int_0^{2\pi} \left(\frac{y''}{y} \right)^2 dx < \infty$.

При этом по функции $y \in Y$ уравнение (2.3), для которого она является решением, определяется единственным образом по формулам

$$\Lambda : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Lambda(y) = \lambda := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{y''}{y} dx, \quad (2.7)$$

$$\Phi : Y \rightarrow P, \quad \Phi(y) = p := \frac{y''}{y} + \Lambda(y). \quad (2.8)$$

Доказательство. Пусть $y \in Y$. Тогда все нули функции $y(x)$ невырождены, что следует из теоремы единственности для тривиального решения $y(x) \equiv 0$ задачи Коши для уравнения (2.3) с начальными условиями $y(x_i) = y'(x_i) = 0$ (см. [9]). В частности, это означает, что нулей функции $y(x)$ конечное число. Поэтому почти всюду определена функция $y''/y = p - \lambda$. С учетом (2.1) получаем неравенство из второго условия.

Обратно, если функция y удовлетворяет приведенным выше условиям, то определим число λ по формуле (2.7) и функцию p по формуле (2.8). Тогда y является на $[0, 2\pi]$ решением линейного дифференциального уравнения (2.3), которое, в силу (2.1), определяется единственным образом. $\square$

2.2. Многообразие неразделенных краевых условий. Для многообразия $\mathbb{B}$ (см. [10]) напомним два вспомогательных утверждения:

1. Многообразие $\mathbb{B}$ покрывается четырьмя картами:

$$\begin{aligned} \alpha > 0 (< 0), \quad (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta = \frac{1 + \beta\gamma}{\alpha}; \\ \beta > 0 (< 0), \quad (\alpha, \delta) \in \mathbb{R}^2, \quad \gamma = \frac{-1 + \alpha\delta}{\beta}. \end{aligned}$$

2. Пусть $\psi \in (0, \pi)$ — угол между векторами (α, β) и (γ, δ) . Тогда многообразие $\mathbb{B}$ диффеоморфно прямому произведению

$$\mathbb{B} \cong \{(\alpha, \beta, \psi) : \alpha^2 + \beta^2 > 0, \psi \in (0, \pi)\} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}) \times (0, \pi).$$

Наше исследование опирается на утверждение о прямолинейных образующих.

Лемма 2.2. *Каждая точка $B \in \mathbb{B}$ является вершиной двумерной эллиптической конической поверхности $\text{Con}(B)$, целиком принадлежащей $\mathbb{B}$. Других прямолинейных образующих, проходящих через точку B , многообразие $\mathbb{B}$ не имеет.*

Доказательство. Если $B = E$ — единичная матрица, то условие принадлежности прямолинейной образующей таково: для произвольного $t \in \mathbb{R}$ выполняется тождество

$$\begin{vmatrix} 1 + t\mu_{11} & t\mu_{12} \\ t\mu_{21} & 1 + t\mu_{22} \end{vmatrix} \equiv 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{11} + \mu_{22} = 0 \\ \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{11} + \mu_{22} = 0 \\ \mu_{11}^2 + \mu_{12}\mu_{21} = 0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений задает двумерный конус $\text{Con}(E) = \{\mu_{11}^2 + \mu_{12}\mu_{21} = 0\} \subset \mathbb{A}^3$, целиком лежащий в трехмерном аффинном подпространстве $\mathbb{A}^3 = \{\mu_{11} + \mu_{22} = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

Обозначим через τ_B матричное умножение (например, справа) на произвольную фиксированную матрицу $B \in \mathbb{B}$ как линейное отображение в $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\alpha + b_3\beta & b_2\alpha + b_4\beta \\ b_1\gamma + b_3\delta & b_2\gamma + b_4\delta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ b_2 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\text{Lin}(B)$ объединение всех прямолинейных образующих, проходящих через B . Поскольку τ_B есть линейное невырожденное (с определителем один) преобразование в $\mathbb{R}^4$, то $\tau_B(\text{Con}(E)) \subset \text{Lin}(B)$. Рассматривая обратное преобразование $\tau_{B^{-1}} = (\tau_B)^{-1}$, аналогичным образом получаем, что $\tau_{B^{-1}}(\text{Lin}(B)) \subset \text{Con}(E)$. Теперь, применяя к последнему включению преобразование τ_B , получим

$$\text{Lin}(B) = \tau_B(\tau_{B^{-1}}(\text{Lin}(B))) \subset \tau_B(\text{Con}(E)).$$

Следовательно, $\text{Lin}(B) = \tau_B(\text{Con}(E)) =: \text{Con}(B)$. □

Заметим, что полученная система уравнений равносильна следующей:

$$\begin{cases} \mu_{11} + \mu_{22} = 0, \\ \mu_{11}^2 + \mu_{12}\mu_{21} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 + \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & 1 + \mu_{22} \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.9)$$

Замечание 2.2. Попутно мы доказали, что умножение конуса $\text{Con}(E) \subset \mathbb{B}$ как подмножества на произвольную матрицу $B \in \mathbb{B}$ не зависит от того, справа ли оно или слева: результатом является один и тот же конус $\text{Con}(B)$.

2.3. Краевые условия, порожденные решениями дифференциального уравнения. Теперь мы покажем, что каждую функцию $y \in Y$ можно интерпретировать как собственную некоторой краевой задач (2.3), (2.4), причем пара $(p, \lambda) \in P \times \mathbb{R}$ определяется единственным образом по формулам (2.7), (2.8), а все допустимые краевые условия описывает следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Множество всех краевых условий, которым удовлетворяет данная функция $y \in Y$, является некоторой прямолинейной образующей $l(y)$ многообразия $\mathbb{B}$.*

Доказательство. Рассмотрим систему (2.2), (2.4) как систему из трех уравнений относительно четырех неизвестных $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Поскольку $y^2(0) + y'^2(0) > 0$, то полагаем (без ограничения общности), что $y(0) \neq 0$. Данная система равносильна линейной системе из трех уравнений: двух уравнений (2.4) и третьего уравнения $y(2\pi)\delta - y'(2\pi)\beta = y(0)$. В силу неравенства $y^2(2\pi) + y'^2(2\pi) > 0$ ранг этой системы равен трем. Значит, она определяет в пространстве $\mathbb{R}^4$ прямую. $\square$

Чтобы описать все краевые условия, которым удовлетворяют все ненулевые решения фиксированного уравнения (2.3), введем решения $\text{co}(x), \text{si}(x) \in Y(p, \lambda)$, удовлетворяющие начальным условиям $\text{co}(0) = 1, \text{co}'(0) = 0, \text{si}(0) = 0, \text{si}'(0) = 1$. Обозначим

$$B(2\pi) := \begin{pmatrix} \text{co}(2\pi) & \text{si}(2\pi) \\ \text{co}'(2\pi) & \text{si}'(2\pi) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

В силу формулы Остроградского—Лиувилля $\det B(2\pi) = 1$, значит, $B(2\pi) \in \mathbb{B}$.

Лемма 2.4. *Множество всех краевых условий, которым удовлетворяют ненулевые решения фиксированного уравнения (2.3), является двумерной эллиптической конической поверхностью $\text{Con}(B(2\pi))$:*

$$\bigcup_{y \in Y(p, \lambda)} l(y) = \text{Con}(B(2\pi)) \subset \mathbb{B};$$

вершина $B(2\pi)$ является единственным краевым условием, при котором собственное значение λ двукратно, т. е. существует такое единственное $n \in \mathbb{N}$, что каждая функция $y \in Y(p, \lambda)$ является собственной для краевой задачи с потенциалом p и краевыми условиями $B(2\pi)$, а собственное число $\lambda = \lambda_n^0(p, B(2\pi))$.

Доказательство. Имеет место совпадение

$$\bigcup_{y \in Y(p, \lambda)} l(y) = \bigcup_{\varphi \in S^1} l(\cos \varphi \text{co} + \sin \varphi \text{si})$$

(S^1 — единичная окружность). Но принадлежность $B \in \bigcup_{\varphi \in S^1} l(\cos \varphi \text{co} + \sin \varphi \text{si})$ равносильна разрешимости относительно неизвестного $\varphi \in S^1$ системы уравнений

$$\begin{aligned} B \left(\cos \varphi \begin{pmatrix} \text{co}(0) \\ \text{co}'(0) \end{pmatrix} + \sin \varphi \begin{pmatrix} \text{si}(0) \\ \text{si}'(0) \end{pmatrix} \right) &= \cos \varphi \begin{pmatrix} \text{co}(2\pi) \\ \text{co}'(2\pi) \end{pmatrix} + \sin \varphi \begin{pmatrix} \text{si}(2\pi) \\ \text{si}'(2\pi) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (B - B(2\pi)) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Разрешимость последней системы равносильна равенству $\det(B - B(2\pi)) = 0$, причем система разрешима при всех $\varphi \in S^1$ только в случае матричного равенства $B = B(2\pi)$. Поскольку $\det B = \det(B(2\pi)) = 1$, то после замены $B = B(2\pi)(E + C)$ получаем равносильную систему из двух уравнений относительно матрицы C

$$\det B = 1, \det(B - B(2\pi)) = 0 \Leftrightarrow \det(E + C) = 1, \det C = 0,$$

которая совпадает с системой (2.9). $\square$

2.4. Многообразие решений. В заключение раздела мы определим на множестве Y структуру гладкого гильбертова многообразия. С этой целью выразим значения функций $\text{co}(x)$ и $\text{si}(x)$ через полярные координаты (ρ, θ) : $\text{co}(x) = \rho(x) \cos \theta(x)$, $\text{si}(x) = \rho(x) \sin \theta(x)$. Тогда вронскиан, порожденный функциями $\text{co}(x), \text{si}(x)$, равен

$$\begin{aligned} 1 \equiv W(\text{co}(x), \text{si}(x)) &= \begin{vmatrix} \text{co}(x) & \text{si}(x) \\ \text{co}'(x) & \text{si}'(x) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \rho(x) \cos \theta(x) & \rho(x) \sin \theta(x) \\ \rho'(x) \cos \theta(x) - \rho(x) \sin \theta(x) \theta'(x) & \rho'(x) \sin \theta(x) + \rho(x) \cos \theta(x) \theta'(x) \end{vmatrix} = \rho^2(x) \theta'(x). \end{aligned}$$

Значит, справедливы соотношения:

$$\eta(x) := \theta'(x) > 0, \rho^2(x) \eta(x) = 1, \rho, \eta \in W_2^2, \eta(0) = 1, \eta'(0) = 0. \quad (2.11)$$

В самом деле, функция $\rho^2 = \text{co}^2 + \text{si}^2 \in C^1$ и строго положительна на $[0, 2\pi]$, поэтому, во-первых, функция $\eta = 1/\rho \in C^1$ и обе функции принадлежат пространству W_2^2 , что вытекает из прямого дифференцирования.

Ниже мы воспользуемся выражениями функций co и si через функцию η :

$$\text{co}(x) = \frac{1}{\sqrt{\eta(x)}} \cos \int_0^x \eta(t) dt, \quad \text{si}(x) = \frac{1}{\sqrt{\eta(x)}} \sin \int_0^x \eta(t) dt. \quad (2.12)$$

Нам понадобится выпуклое гильбертово подмногообразие

$$H := \{\eta \in W_2^2 : \eta > 0, \eta(0) = 1, \eta'(0) = 0\}$$

пространства W_2^2 , которое является пересечением открытого конуса $\{\eta \in W_2^2 : \eta > 0\}$ и аффинного подпространства $\{\eta \in W_2^2 : \eta(0) = 1, \eta'(0) = 0\}$ коразмерности два.

Обозначим через $\mathbb{R}^+$ множество действительных положительных чисел.

Лемма 2.5. *Отображение*

$$G^{-1} : H \times S^1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow Y, \quad G^{-1}(\eta, \varphi, k) = y(x) := \frac{k}{\sqrt{\eta(x)}} \cos(\varphi + \int_0^x \eta(t) dt). \quad (2.13)$$

является биекцией, которая индуцирует в Y структуру гладкого гильбертова многообразия.

Доказательство. Определим прямое отображение $G : Y \rightarrow H \times S^1 \times \mathbb{R}^+$. Функция $y \in Y$ задает формулами (2.7), (2.8) единственную пару (p, λ) , для которой $y \in Y(p, \lambda)$. Поэтому, и в силу (2.11), (2.12), существует такая единственная тройка $(\eta, \varphi, k) \in H \times S^1 \times \mathbb{R}^+$, что

$$y(x) = k(\cos(-\varphi) \text{co}(x) + \sin(-\varphi) \text{si}(x)) = \frac{k}{\sqrt{\eta(x)}} \cos(\varphi + \int_0^x \eta(t) dt).$$

Обратно, любая функция вида (2.13) является решением уравнения (2.3), в котором

$$\lambda = \lambda(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\eta''}{2\eta} + \frac{3(\eta')^2}{4\eta^2} - \eta^2 \right) dx, \quad (2.14)$$

$$p(x) = p(\eta) = -\frac{\eta''}{2\eta} + \frac{3(\eta')^2}{4\eta^2} - \eta^2 + \lambda(\eta). \quad (2.15)$$

Прямой проверкой убеждаемся, что второе отображение является обратным к первому: по функции (2.13) определяем функции $\text{co}(x)$ и $\text{si}(x)$ — это именно функции (2.12). $\square$

Следствие 2.1. *В параметризации леммы 2.5 вершина конуса (2.10) равна*

$$B(2\pi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\eta(2\pi)}} \cos \int_0^{2\pi} \eta(t) dt & \frac{1}{\sqrt{\eta(2\pi)}} \sin \int_0^{2\pi} \eta(t) dt \\ \frac{-\eta'(2\pi)}{2\eta^{3/2}(2\pi)} \cos \int_0^{2\pi} \eta(t) dt - \sqrt{\eta(2\pi)} \sin \int_0^{2\pi} \eta(t) dt & \frac{-\eta'(2\pi)}{2\eta^{3/2}(2\pi)} \sin \int_0^{2\pi} \eta(t) dt + \sqrt{\eta(2\pi)} \cos \int_0^{2\pi} \eta(t) dt \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Обозначим через

$$\Pi_\eta : H \times S^1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow H, \quad \Pi_\eta(\eta, \varphi, k) = \eta$$

отображение проектирования.

Следствие 2.2. *Функционал*

$$I : Y \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad I(y) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Pi_\eta G(y)) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(x) \, dx$$

является субмерсией [8].

Замечание 2.3. Завершая раздел, отметим, что мы имеем три описания решений $y \in Y$ уравнений (2.3), где $(p, \lambda) \in P \times \mathbb{R}$:

1. y — это решение единственного линейного дифференциального уравнения указанного вида, с которым связана единственная плоскость решений $Y(p, \lambda)$;
2. y — это собственная функция единственного стационарного оператора Шредингера, которая удовлетворяет одномерному семейству $l(y)$ самосопряженных неразделенных краевых условий, последнее (т. е. семейство) есть прямолинейная образующая многообразия краевых условий $\mathbb{B}$; среди всех $B \in l(y)$ есть единственное условие $B(2\pi)$, относительно которого функция y отвечает двукратному собственному значению;
3. по y определяется единственная тройка $(\eta, \varphi, k) \in H \times S^1 \times \mathbb{R}^+$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Подмногообразия собственных функций. Введем следующие обозначения.

1. $\mathbf{b}: P \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$ — гладкое отображение, сопоставляющее каждому конкретному уравнению (2.3) краевое условие $B(2\pi)$. Гладкость $\mathbf{b}$ гарантируется гладкой зависимостью решений co и si от потенциала P и числа λ .
2. $\mathbf{B}: Y \rightarrow \mathbb{B}$ — гладкое отображение, сопоставляющее каждой функции $y \in Y$ краевое условие $B(2\pi)$ (т. е. единственное краевое условие, при котором y отвечает двукратному собственному значению).
3. $\bar{\Lambda}: H \rightarrow \mathbb{R}$ и $\bar{\Phi}: H \rightarrow P$ — гладкие отображения, задаваемые формулами (2.14) и (2.15) соответственно.
4. $\bar{\mathbf{B}}: H \rightarrow \mathbb{B}$ — гладкое отображение, задаваемое формулой (2.16).

Перечисленные отображения связаны коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{G} & H \times S^1 \times \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{\Pi_\eta} & H \\
 & \searrow (\Phi, \Lambda) & & \swarrow (\bar{\Phi}, \bar{\Lambda}) & \\
 & & P \times \mathbb{R} & & \\
 \mathbf{B} \swarrow & & \downarrow \mathbf{b} & & \searrow \bar{\mathbf{B}} \\
 & & \mathbb{B} & &
 \end{array}$$

Припишем каждой функции $y \in Y$ номер $n \in \mathbb{N}$ ее двукратного собственного значения. Множество всех функций $y \in Y$ с номером n обозначим через Y_n^0 , сужение отображения $\mathbf{B}$ на страт Y_n^0 — через $\mathbf{B}_n$. Понятно, что $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n^0$, где объединение дизъюнктивное.

Лемма 3.1. Номер $n \in \mathbb{N}$ собственного значения определяется однозначно из двусторонних оценок

$$n - 1 < I(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(t) dt \leq n.$$

Доказательство. Доказательство следует из осцилляционных неравенств (2.6), определений функций $\text{co}(x)$, $\text{si}(x)$ и угла $\theta(x) = \varphi + \int_0^x \eta(t) dt$. Приведем рассуждения для случая $n = 1$.

Если $\int_0^{2\pi} \eta dx < 2\pi$, то номер $n = 1$, так как функция $\text{si}(x)$ имеет на $(0, 2\pi]$ только один ноль, а номеру $n = 2$ отвечает количество нулей не менее двух.

Если $\int_0^{2\pi} \eta dx = 2\pi$, то количество нулей на $(0, 2\pi]$ у любой собственной функции равно двум, что не противоречит по-прежнему номеру $n = 1$. Если же допустить, что номер стал равен двум, то для случая $\alpha > 0$, $\beta = 0$ из таблицы (2.6) получаем, что количество нулей равно четырем. Значит, номер остался равен единице.

При условии $2\pi < \int_0^{2\pi} \eta dx < 3\pi$ количество нулей у функций $\text{co}(x)$ и $\text{si}(x)$ не меньше, чем два, что не противоречит номеру $n = 2$. Если допустить, что номер не изменился и равен единице, то из таблицы (2.6) следует, что при $n = 1$ и $\beta > 0$ количество нулей не больше одного — противоречие.

С ростом интеграла $\int_0^{2\pi} \eta dx$ номер не уменьшается, что обосновывает утверждение теоремы для $n = 1$.

Для остальных номеров $n \geq 2$ доказательство осуществляется по индукции. $\square$

Обозначим через $\bar{\mathbf{B}}_n$ сужение отображения $\bar{\mathbf{B}}$ на подмногообразии с краем

$$H_n := \left\{ \eta \in H : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(t) dt \in (n-1, n] \right\}.$$

Для $B \in \mathbb{B}$ положим $H_n(B) = (\bar{\mathbf{B}}_n)^{-1}(B) \subset H$.

Теорема 3.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Если $n - m \geq 2$, то $\overline{H_n} \cap \overline{H_m} = \emptyset$; $\overline{H_n} \cap \overline{H_{n+1}} \subset H_n$.
2. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ многообразие H_n гомотопически тривиально.
3. Для произвольного краевого условия $B \in \mathbb{B}$ $H_n(B)$ есть гомотопически тривиальное подмногообразие в H коразмерности три.
4. Для любой функции $\eta_0 \in H$ найдется такая окрестность $U(\eta_0) \subset H$, что ограничение отображения $\bar{\mathbf{B}}$ на $U(\eta_0)$ есть тривиальное расслоение над $\bar{\mathbf{B}}(U(\eta_0))$.

Доказательство. Утверждение пункта 1 тривиально следует из определения многообразий H_n .

Гомотопическая тривиальность многообразий H_n следует из их выпуклости.

Докажем пункты 3 и 4. Сообразуясь с матрицей (2.16), определим отображение

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{B},$$

$$f(\xi_1, \xi_2, \vartheta) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\xi_1}} \cos \vartheta & \frac{1}{\sqrt{\xi_1}} \sin \vartheta \\ \frac{-\xi_2}{2\xi_1^{3/2}} \cos \vartheta - \sqrt{\xi_1} \sin \vartheta & \frac{-\xi_2}{2\xi_1^{3/2}} \sin \vartheta + \sqrt{\xi_1} \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Очевидно, f — диффеоморфизм. Поэтому вместо отображения $\mathbf{B}$ можно рассмотреть локально линейное отображение

$$f^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}}_n \cdot G^{-1} : H_n \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times S^1,$$

$$(f^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}}_n \cdot G^{-1})(\eta, \varphi, k) = (\eta(2\pi), \eta'(2\pi), \int_0^{2\pi} \eta(t) dt \pmod{2\pi}),$$

которое, очевидно, является субмерсией. $\square$

Из доказанной теоремы и лемм 2.5 и 3.1 вытекает следующий результат о структуре многообразия Y .

Теорема 3.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ многообразие Y_n^0 диффеоморфно $H_n \times S^1 \times \mathbb{R}^+$.
2. Если $n - m \geq 2$, то $\overline{Y_n^0} \cap \overline{Y_m^0} = \emptyset$; $\overline{Y_n^0} \cap \overline{Y_{n+1}^0} \subset Y_n^0$.
3. $Y_n^0 \sim S^1$ (« $\sim$ » — гомотопическая эквивалентность).
4. Для произвольного краевого условия $B \in \mathbb{B}$ полный прообраз

$$Y^0(B) := (\mathbf{B})^{-1}(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbf{B}_n)^{-1}(B)$$

есть счетное несвязное объединение, в котором $Y_n^0(B) := (\mathbf{B}_n)^{-1}(B) \sim S^1$ — подмногообразие многообразия Y коразмерности три.

5. Для любой функции $\eta_0 \in H$ найдется такая окрестность $U(\eta_0) \subset H$, что ограничение отображения $B \circ G^{-1}$ на $U(\eta_0) \times S^1 \times \mathbb{R}^+$ есть тривиальное расслоение над $B \circ G^{-1}(U(\eta_0) \times S^1 \times \mathbb{R}^+)$.

Из следствия 2.2 и диффеоморфности отображения f получаем

Следствие 3.1. *Имеет место вложение подмногообразий*

$$Y_n^0(B) \subset I^{-1}(t) \subset Y_n^0, \text{ где } t \in (n-1, n].$$

Применяя проективизацию к многообразию Y и его подмногообразиям $Y_n^0 \subset Y$, $Y_n^0(B) \subset Y_n^0(B) \subset Y$, получаем описание многообразий собственных функций. Напомним, что говоря о функциях $y \in Y$ как о собственных функциях краевой задачи (2.3), (2.4), мы рассматриваем их с точностью до умножения на ненулевую константу.

Введем обозначения:

1. Π — множество, полученное в результате проективизации многообразия Y . Корректно определено отображение $\hat{B}: \Pi \rightarrow \mathbb{B}$, сопоставляющее собственной функции единственное краевое условие, при котором она отвечает двукратному собственному значению.
2. Ранее введенное обозначение $\Pi_n^0(p, B)$ есть проективизация проколотой плоскости $Y(p, \lambda)$, при этом $B = B(2\pi)$.
3. Π_n^0 — проективизация многообразия Y_n^0 ; $\hat{B}_n$ — сужение отображения $\hat{B}$ на Π_n^0 .
4. $\Pi^0(B)$ — проективизация многообразия $Y^0(B)$.
5. $\Pi_n^0(B)$ — проективизация многообразия $Y_n^0(B)$.

В этих терминах теорема 3.2 принимает следующий вид.

Теорема 3.3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение*

$$\hat{G}^{-1}: H \times \mathbb{R}P^1 \rightarrow \Pi, \quad \hat{G}^{-1}(h, \varphi) = y(x) := \frac{1}{\sqrt{\eta(x)}} \cos\left(\varphi + \int_0^x \eta(t) dt\right)$$

является диффеоморфизмом.

2. $\Pi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n^0$, где объединение дизъюнктное.
3. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$\Pi_n^0 = \bigcup_{p \in P, B \in \mathbb{B}} \Pi_n^0(p, B) \cong H_n \times \mathbb{R}P^1.$$

4. Если $n - m \geq 2$, то $\overline{\Pi_n^0} \cap \overline{\Pi_m^0} = \emptyset$; $\overline{\Pi_n^0} \cap \overline{\Pi_{n+1}^0} \subset \Pi_n^0$.
5. Отображение $\hat{B}$ является локально тривиальным расслоением. Для произвольного краевого условия $B \in \mathbb{B}$ полный прообраз

$$\Pi^0(B) := \hat{B}^{-1}(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\hat{B}_n)^{-1}(B)$$

есть счетное дизъюнктное объединение, в котором $\Pi_n^0(B) = (\hat{B}_n)^{-1}(B) \sim \mathbb{R}P^1$ — подмногообразие многообразия Π коразмерности три.

3.2. Подмногообразия потенциалов. Переходим к описанию подмногообразий потенциалов. Обозначим

$$P_n^0(B) := \{p \in P: \lambda_n^+(p, B) - \lambda_n^-(p, B) = 0\},$$

т. е. это подмножество всех потенциалов, для которых краевая задача (2.3), (2.4) имеет вырожденные собственные значения с номером n . Нам понадобятся сужения: Φ_n^0 — сужение Φ на многообразии (с краем) Y_n^0 и $\Phi_{B,n}^0$ — сужение Φ_n^0 на подмногообразии (без края) $Y_n^0(B)$.

Теорема 3.4. *Справедливы утверждения:*

1. Подмножество $P_n^0(B) \subset P$ является гладким гомотопически тривиальным подмногообразием коразмерности два.
2. Отображение $\Phi_{B,n}^0 : Y_n^0(B) \rightarrow P_n^0(B)$ является гладким тривиальным расслоением, слой которого диффеоморфен S^1 .

Доказательство. Наряду с уравнениями (2.3) рассмотрим семейство уравнений

$$-y'' + r(x)y = 0, \quad r \in L_2.$$

Отображение

$$\check{\Phi} : H \rightarrow L_2, \quad \check{\Phi}(\eta) = r := -\frac{\eta''}{2\eta} + \frac{3(\eta')^2}{4\eta^2} - \eta^2 \quad (3.1)$$

(сравните с формулой (2.15)) является диффеоморфизмом: его биективность следует из утверждения леммы 2.5 и независимости функции r от переменных k и φ (см. формулу (2.13)), дифференцируемость — непосредственно из формулы (3.1), а дифференцируемость обратного отображения следует из гладкой зависимости решений so и si от функционального параметра r . В силу п. 3 теоремы 3.1 образ $\check{\Phi}(H_n(B)) \subset L_2$ является гладким гомотопически тривиальным подмногообразием коразмерности три.

Пусть $\Pi_P : L_2 \rightarrow P$ — ортогональное проектирование. Образ $\Pi_P(\check{\Phi}(H_n(B))) = P_n^0(B)$ есть исследуемое подмножество. Но сужение Π_P на $\check{\Phi}(H_n(B))$ является вложением. Докажем это.

Во первых, по функции $p \in \Pi_P(\check{\Phi}(H_n(B)))$, краевому условию B и номеру n мы восстанавливаем собственное значение $\lambda_n^0(p, B)$, которое, в силу выбора матрицы B , будет вырожденным; затем находим $r(x) = p(x) - \lambda_n^0(p, B)$. Следовательно, сужение Π_P является биекцией.

Во-вторых, локальная диффеоморфность сужения следует из того обстоятельства, что в любой точке $p \in \check{\Phi}(H_n(B))$ касательное пространство $T_p\check{\Phi}(H_n(B))$ не содержит постоянную функцию $e(x) \equiv 1$. В самом деле, пространство $T_p\check{\Phi}(H_n(B))$ есть образ производной

$$D\check{\Phi}(\eta) : T_\eta H_n(B) \rightarrow L_2,$$

$$D\check{\Phi}(\eta)\sigma = -\frac{\sigma''}{2\eta} + \frac{\eta''\sigma}{2\eta^2} + \frac{3\eta'\sigma'}{2\eta^2} - \frac{3(\eta')^2\sigma}{2\eta^3} - 2\eta\sigma,$$

$$\text{где } \sigma \in W_2^2, \quad \sigma(0) = \sigma'(0) = \sigma(2\pi) = \sigma'(2\pi) = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sigma dx = 0.$$

Если допустить противное, то получим тождество $D\check{\Phi}(\eta)\sigma \equiv 1$. Разделим его на $\eta(x)$ и проинтегрируем на $[0, 2\pi]$, причем первые два слагаемые по частям. Получим противоречие: $0 =$

$$= \int_0^{2\pi} (1/\eta) dx > 0.$$

Значит, коразмерность $\check{\Phi}(H_n(B))$ в P на единицу меньше, чем коразмерность $H_n(B)$ в H и равна двум.

Второе утверждение следует из того, что сужение композиции $\Pi_P \circ \check{\Phi}$ на $H_n(B)$ является вложением, а $Y_n^0(B)$ диффеоморфно $H_n(B) \times S^1 \times \mathbb{R}^+$. $\square$

Из первого пункта теоремы 3.4 следует, что гипотеза Арнольда справедлива для стационарного оператора Шредингера на отрезке при любых самосопряженных неразделенных краевых условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Моды и квазимоды // Функц. анализ и его прилож. — 1972. — 6, № 2. — С. 94–101.
2. Дымарский Я. М. Метод многообразий в теории собственных векторов нелинейных операторов // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — 24. — С. 3–159.
3. Дымарский Я. М. Функционалы собственных значений на многообразии потенциалов // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2024. — 64, № 6. — С. 116–127. — DOI: [10.31857/S0044466924060105](https://doi.org/10.31857/S0044466924060105).
4. Дымарский Я. М., Бондарь А. А. Многообразие собственных функций семейства периодических краевых задач // Мат. сб. — 2021. — 212, № 9. — С. 18–39. — DOI: [10.4213/sm9294](https://doi.org/10.4213/sm9294).

5. Дымарский Я. М., Евтушенко Е. А. Расслоение пространства периодических краевых задач на гиперповерхности постоянной длины n -й спектральной лакуны // Мат. сб. — 2016. — 207, № 5. — С. 43–68. — DOI: [10.4213/sm8467](https://doi.org/10.4213/sm8467).
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
7. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
8. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.
9. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
10. Постников М. М. Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982.
11. Kong Q., Wu H., Zettl A. Geometric aspects of Sturm–Liouville problems I. Structures on spaces of boundary conditions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. — 2000. — 130A. — С. 561–589. — DOI: [10.1017/S0308210500000305](https://doi.org/10.1017/S0308210500000305).

Я. М. Дымарский

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Россия

E-mail: dymarskii@mail.ru, ResearcherID: [E-3526-2016](https://orcid.org/E-3526-2016), Scopus: [25025623500](https://orcid.org/25025623500)

С. С. Николаенко

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Россия

E-mail: nikolaenko.s@phystech.edu, РИНЦ SPIN-код: 3289-9306, РИНЦ AuthorID: [1225190](https://orcid.org/1225190),
ResearcherID: [N-6090-2019](https://orcid.org/N-6090-2019), Scopus: [55924768600](https://orcid.org/55924768600), ORCID: [0009-0007-2907-706X](https://orcid.org/0009-0007-2907-706X)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-51-62](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-51-62)

EDN: [TOXSPT](https://www.edn.ru/TOXSPT)

UDC 517.927.25:517.988.2

Research article

On the Arnold conjecture for a family of stationary Schrödinger operators with self-adjoint nonseparated boundary conditions

Ya. M. Dymarskii and S. S. Nikolaenko

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia

Abstract. We give an analytical and topological description of the manifolds of eigenfunctions and potentials generated by a family of one-dimensional stationary Schrödinger operators and the manifold of self-adjoint nonseparated boundary conditions. In particular, we prove Arnold’s conjecture on the codimension of the manifold of those potentials that correspond to double eigenvalues under the chosen self-adjoint nonseparated boundary conditions.

Keywords: Arnold’s conjecture, transversality conjecture, Schrödinger operator.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors’ contribution. Ya. M. Dymarskii — research concept and text design; S. S. Nikolaenko — material processing and text design.

For citation: Ya. M. Dymarskii, S. S. Nikolaenko, “On the Arnold conjecture for a family of stationary Schrödinger operators with self-adjoint nonseparated boundary conditions,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 51–62. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-51-62](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-51-62)
EDN: [TOXSPT](https://www.edn.ru/TOXSPT)

REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, “Mody i kvazimody” [Modes and quasimodes], *Funkts. Analiz i ego Prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1972, **6**, No. 2, 94–101 (in Russian).
2. Ya. M. Dymarskii, “Metod mnogoobrazii v teorii sobstvennykh vektorov nelineynykh operatorov” [Manifold method in eigenvector theory of nonlinear operators], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **24**, 3–159 (in Russian).
3. Ya. M. Dymarskii, “Funktsionaly sobstvennykh znacheniy na mnogoobrazii potentsialov” [Eigenvalue functionals on the potential manifold], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2024, **64**, No. 6, 116–127 (in Russian), DOI: [10.31857/S0044466924060105](https://doi.org/10.31857/S0044466924060105).
4. Ya. M. Dymarskii and A. A. Bondar', “Mnogoobrazie sobstvennykh funktsiy semeystva periodicheskikh kraevykh zadach” [The manifold of eigenfunctions of a family of periodic boundary-value problems], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2021, **212**, No. 9, 18–39 (in Russian), DOI: [10.4213/sm9294](https://doi.org/10.4213/sm9294).
5. Ya. M. Dymarskii and E. A. Evtushenko, “Rassloenie prostranstva periodicheskikh kraevykh zadach na giperpoverkhnosti postoyannoy dliny n -y spektral'noy lakuny” [Stratification of the space of periodic boundary-value problems into hypersurfaces of constant length of the n th spectral gap], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2016, **207**, No. 5, 43–68 (in Russian), DOI: [10.4213/sm8467](https://doi.org/10.4213/sm8467).
6. E. Kamke, *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nykh uravneniyam* [Differential Equations. Solution Methods and Solutions], Nauka, Moscow, 1971 (Russian translation).
7. O. A. Ladyzhenskaya, *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
8. S. Lang, *Vvedenie v teoriyu differentsiruemykh mnogoobrazii* [Introduction to Differentiable Manifolds], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
9. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
10. M. M. Postnikov, *Gruppy i algebry Li* [Lie Groups and Algebras], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
11. Q. Kong, H. Wu, and A. Zettl, “Geometric aspects of Sturm–Liouville problems I. Structures on spaces of boundary conditions,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 2000, **130A**, 561–589, DOI: [10.1017/S0308210500000305](https://doi.org/10.1017/S0308210500000305).

Ya. M. Dymarskii

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia
E-mail: dymarskii@mail.ru, ResearcherID: [E-3526-2016](https://orcid.org/0000-0001-8352-6216), Scopus: [25025623500](https://orcid.org/0000-0001-8352-6216)

S. S. Nikolaenko

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia
E-mail: nikolaenko.s@phystech.edu, eLIBRARY SPIN-code: 3289-9306, eLIBRARY AuthorID: [1225190](https://orcid.org/0000-0001-8352-6216), ResearcherID: [N-6090-2019](https://orcid.org/0000-0001-8352-6216), Scopus: [55924768600](https://orcid.org/0000-0001-8352-6216), ORCID: [0009-0007-2907-706X](https://orcid.org/0000-0001-8352-6216)