

О ПРИЛОЖЕНИЯХ ОБОБЩЁННОГО ПОТЕНЦИАЛА БЕССЕЛЯ К РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА И ТЕОРИИ ЁМКОСТИ

А. Л. Джабраилов³, Э. Л. Шишкина^{1,2,3,4}

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

²Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

³Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова, Грозный, Россия

⁴Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

Аннотация. В статье на основе обобщённого потенциала Бесселя строится весовое пространство Соболева дробного порядка. Полученные результаты применяются для анализа сингулярного уравнения Шрёдингера дробного порядка. Для решения задачи Коши для этого уравнения доказана оценка, связывающая норму решения с нормой начального условия в весовом пространстве Соболева. Остальная часть статьи посвящена вопросам теории ёмкости, построенной на основе обобщённого потенциала Бесселя.

Ключевые слова: обобщённый потенциал Бесселя, весовое пространство Соболева, сингулярное уравнение Шрёдингера, теория ёмкости.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (FEGS-2026-0004).

Вклад авторов. Шишкина Э. Л. — научное руководство, формулирование идеи, гипотезы, цели исследования, разработка методов и процедур, доработка текста; Джабраилов А. Л. — написание первоначального текста статьи, проверка результатов, редактирование, доработка текста, организационное управление.

Для цитирования: Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л. О приложениях обобщённого потенциала Бесселя к решению сингулярного уравнения Шрёдингера дробного порядка и теории ёмкости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 35–50. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-35-50](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-35-50) EDN: TLBNOI

1. ВВЕДЕНИЕ

Потенциалы Бесселя представляют собой крайне интересный объект для исследования благодаря своим устойчивым структурным свойствам, применению в теории дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка, в том числе нелинейных, и удобству при построении обобщённых мер.

Применение потенциалов Бесселя в теории УЧП дробного порядка осуществляется через построение пространств потенциалов Бесселя и доказательство ограниченности операторов и решений в этих пространствах. При этом пространство потенциалов Бесселя совпадает с дробным пространством Соболева, которое, в свою очередь, является обобщением классического пространства Гёльдера.

Другое применение потенциалов Бесселя состоит в построении функции множеств для измерения их «размера». Такая функция называется ёмкостью и служит для характеристики «исключительных» множеств при для решений дифференциальных уравнений. Вполне естественно рассматривать ёмкости как «уточнения» классических мер Хаусдорфа. Они являются уточнениями в том смысле, что их можно использовать для различения множеств с нулевой мерой Хаусдорфа.

С развитием теории уравнений в частных производных с оператором Бесселя появилась необходимость в активном применении весовых пространств Соболева дробного порядка, построенных на основе обобщённых потенциалов Бесселя, а также введение обобщённых ёмкостей, приспособленных для измерения исключительных множеств, возникающих при решении краевых задач. В этой статье мы изучаем обобщённые потенциалы Рисса и Бесселя (опираясь на [3, 4, 9, 11]), строим весовое пространство Соболева дробного порядка, применяем полученные результаты для оценки решения сингулярного уравнения Шрёдингера дробного порядка, приводим общие аспекты теории ёмкости (опираясь на [1]) и, наконец, с помощью обобщённого потенциала Бесселя строим новую ёмкость и доказываем её свойства.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Приведем определения, относящиеся к весовому гармоническому анализу, опираясь на [6].

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, состоит из положительных фиксированных чисел $\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{R}_+^n$ и $\overline{\Omega}_+ = \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}_+^n$. Имеем $\Omega_+ \subseteq \mathbb{R}_+^n$ и $\overline{\Omega}_+ \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+^n$.

Пространство $L_p^\gamma(\Omega_+)$, $1 \leq p < \infty$ состоит из измеримых на $\overline{\Omega}_+$ функций, чётных по каждой из своих переменных x_i , $i = 1, \dots, n$, таких, что если $f \in L_p^\gamma(\Omega_+)$, то

$$\int_{\Omega_+} |f(x)|^p x^\gamma dx < \infty, \quad x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Для вещественного числа $p \geq 1$ $L_p^\gamma(\Omega_+)$ — норма функции $f \in L_p^\gamma(\Omega_+)$, определяется формулой

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\Omega_+)} = \|f\|_{p,\gamma,\Omega_+} = \left(\int_{\Omega_+} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}.$$

Будем использовать обозначения $L_p^\gamma = L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ и

$$\|f\|_{p,\gamma} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}. \quad (2.1)$$

Мы будем использовать множество $C^m(\Omega_+)$, состоящее из m раз дифференцируемых на Ω_+ функций. Через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по x_i для любого $i = 1, \dots, n$ непрерывно продолжаются на $x_i = 0$. Функции

$f \in C^m(\overline{\Omega}_+)$ мы будем называть *чётными по переменным x_i , $i = 1, \dots, n$* если $\frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x_i^{2k+1}} \Big|_{x_i=0} = 0$

для всех неотрицательных целых $k \leq m$. Класс $C_{ev}^m(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций из $C^m(\overline{\Omega}_+)$, чётных по каждой из своих переменных x_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда $C_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+) = \bigcap_{m=0}^\infty C_{ev}^m(\overline{\Omega}_+)$. Положим

$C_{ev}^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) = C_{ev}^\infty$.

Пусть $\dot{C}_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+)$ — пространство всех функций $f \in C_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+)$ с конечным носителем. Будем использовать обозначение $\dot{C}_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+) = \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$ и $\dot{C}_{ev}^\infty(\mathbb{R}_+) = \dot{C}_{ev}^\infty$.

Будем использовать также часть пространства Шварца вида

$$S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_+^n) = \left\{ f \in C_{ev}^\infty : \sup_{x \in \mathbb{R}_+^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \right\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ — целые неотрицательные числа, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, $D^\beta = D_{x_1}^{\beta_1} \dots D_{x_n}^{\beta_n}$, $D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Для любой измеримой функции $f(x)$, определённой на $\mathbb{R}_+^n$ функцию

$$\mu_\gamma(f, t) = \text{mes}_\gamma \{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t\} = \int_{\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t\}} x^\gamma dx \quad (2.2)$$

будем называть *весовой функцией распределения* $|f(x)|$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$. Тогда $\text{mes}_\gamma(\Omega)$ — *весовая мера* множества Ω , определяемая равенством

$$\text{mes}_\gamma(\Omega) = \int_\Omega x^\gamma dx.$$

Нормированная функция Бесселя j_ν определяется формулой

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{x^\nu} J_\nu(x), \quad (2.3)$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода. Функция $j_{\frac{\nu-1}{2}}(t)$ есть собственная функция оператора

$$B_\nu = \frac{1}{t^\nu} \frac{d}{dt} t^\nu \frac{d}{dt}:$$

$$(B_\nu)_t j_{\frac{\nu-1}{2}}(\tau t) = -\tau^2 j_{\frac{\nu-1}{2}}(\tau t). \quad (2.4)$$

Для $x \in \mathbb{R}^n$ используем обозначение

$$\mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i \xi_i), \quad \mathbf{j}_\gamma(0, \xi) = 1. \quad (2.5)$$

Очевидно, что

$$|\mathbf{j}_\gamma(x, \xi)| \leq 1.$$

Многомерное преобразование Ханкеля функции $f \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi) = \mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) x^\gamma dx. \quad (2.6)$$

Пусть $f \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+)$ и является функцией ограниченной вариации по каждой из переменных x_i , $i = 1, \dots, n$ в окрестности каждой точки x , в которой функция f непрерывна. Тогда обратное многомерное преобразование Ханкеля имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma^{-1}[\widehat{f}(\xi)](x) = f(x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \widehat{f}(\xi) \xi^\gamma d\xi.$$

Многомерный обобщённый сдвиг имеет вид

$$({}^\gamma \mathbf{T}_x^y f)(x) = {}^\gamma \mathbf{T}_x^y f(x) = ({}^{\gamma_1} T_{x_1}^{y_1} \dots {}^{\gamma_n} T_{x_n}^{y_n} f)(x), \quad (2.7)$$

где каждый одномерный обобщённый сдвиг ${}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i}$, $i = 1, \dots, n$

$$({}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int_0^\pi f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \varphi_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \sin^{\gamma_i-1} \varphi_i d\varphi_i.$$

Для $\gamma_i = 0$ обобщённый сдвиг ${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}$ имеет вид

$${}^0T_{x_i}^{y_i} = \frac{f(x_i + y_i) + f(x_i - y_i)}{2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следующая формула справедлива:

$${}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y \mathbf{j}_{\gamma}(x, \xi) = \mathbf{j}_{\gamma}(x, \xi) \mathbf{j}_{\gamma}(y, \xi). \quad (2.8)$$

Обобщённая свертка, порождённая многомерным обобщённым сдвигом ${}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y$, даётся формулой

$$(f * g)_{\gamma}(x) = (f * g)_{\gamma} = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) ({}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y g)(x) y^{\gamma} dy. \quad (2.9)$$

Применение многомерного преобразования Ханкеля к обобщённой свертке (2.9) даёт

$$\mathbf{F}_{\gamma}[(f * g)_{\gamma}(x)](\xi) = \mathbf{F}_{\gamma}[f(x)](\xi) \mathbf{F}_{\gamma}[g(x)](\xi). \quad (2.10)$$

Мы будем иметь дело с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя B_{γ}

$$(B_{\gamma})_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} t^{\gamma} \frac{\partial}{\partial t}, \quad t > 0, \quad \gamma > 0, \quad (2.11)$$

и Δ_{γ} — оператором Лапласа—Бесселя

$$\Delta_{\gamma} = (\Delta_{\gamma})_x = \sum_{k=1}^n (B_{\gamma_k})_{x_k}. \quad (2.12)$$

Перечислим следующие задачи для различных сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Лапласа—Бесселя:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\gamma} u = f(u, u_t), & x \in \mathbb{R}_+^n, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}_+^n, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{\gamma} u = f(u, u_t), & x \in \mathbb{R}_+^n, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}_+^n, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_{\gamma} u = f(u, u_t), & x \in \mathbb{R}_+^n, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}_+^n, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} \Delta_{\gamma} u = f(u, u_t), & x \in \Omega_+; \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega_+. \end{cases} \quad (2.16)$$

Для всех таких задач ставится вопрос о поиске класса функций, в котором существует решение. Для (2.13)–(2.16) и других задач для дифференциальных уравнений с оператором Лапласа—Бесселя таким классом оказывается пространство обобщённых потенциалов Бесселя.

Поскольку

$$\|f\|_{p, \gamma}^p = \int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^{\gamma} dx \geq \int_{\{x: |f(x)| > t\}^+} |f(x)|^p x^{\gamma} dx \geq t^p \mu_{\gamma}(f, t),$$

то справедливо неравенство

$$\mu_{\gamma}(f, t) \leq \frac{\|f\|_{p, \gamma}^p}{t^p}. \quad (2.17)$$

Например, справедлива формула (см. [6, формула 2.174])

$$\text{mes}_{\gamma}(S_1^+(n)) = |S_1^+(n)|_{\gamma} = \int_{S_1^+(n)} x^{\gamma} dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}. \quad (2.18)$$

3. B -ПОТЕНЦИАЛ РИССА И ЕГО ОБРАЩЕНИЕ

Теория потенциальных операторов получила своё развитие из теории дифференциальных уравнений в частных производных. Первые потенциальные операторы — потенциалы Рисса — появились как решения задач для уравнения Лапласа и волнового уравнения [10]. Впоследствии теория потенциальных операторов сыграла фундаментальную роль в развитии функционального анализа и теории гильбертова пространства. В последнее время идеи теории потенциала обогатили теорию функциональных пространств, которые естественным образом возникают при изучении уравнений в частных производных, в том числе и нелинейных.

Формальную операцию

$$(-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}\varphi = \mathbf{F}_\gamma^{-1}|x|^{-\alpha}\mathbf{F}_\gamma\varphi, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

будем называть *дробным риссовым B -интегро-дифференцированием*.

В работе [3] построен обратный оператор к B -потенциалу Рисса. B -потенциал Рисса имеет вид

$$(\mathbf{U}_\gamma^\alpha\varphi)(x) = C_{n,\gamma,\alpha} \int_{\mathbb{R}_+^n} k_\alpha(y) (\gamma \mathbf{T}_x^y \varphi(x)) y^\gamma dy, \quad (3.1)$$

где $\gamma \mathbf{T}_x^y$ — многомерный обобщённый сдвиг (2.7),

$$k_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha-n-|\gamma|}, & \text{если } \alpha - n - |\gamma| \neq 0, 2, 4, \dots; \\ |x|^{\alpha-n-|\gamma|} \ln |x|, & \text{если } \alpha - n - |\gamma| = 0, 2, 4, \dots, \end{cases}$$

$C_{n,\gamma,\alpha}$ — нормировочная константа

$$C_{n,\gamma,\alpha} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \prod_{j=1}^n \Gamma(\frac{\gamma_j+1}{2})}{2^{n-\alpha} \Gamma(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2})}, & \text{если } \alpha - n - |\gamma| \neq 0, 2, 4, \dots; \\ \frac{(-1)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \prod_{j=1}^n \Gamma(\frac{\gamma_j+1}{2})}{2^{n-\alpha+1}}, & \text{если } \alpha - n - |\gamma| = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

Преобразование Ханкеля (2.6), применённое к интегралу (3.1) при $0 < \alpha < \frac{n+|\gamma|+1}{2}$ и соответствующем выборе константы $C_{n,\gamma}$, даёт равенство

$$\mathbf{F}_\gamma[(\mathbf{U}_\gamma^\alpha\varphi)(x)](\xi) = |\xi|^{-\alpha} \mathbf{F}_\gamma[\varphi(x)](\xi). \quad (3.2)$$

При $\alpha \geq \frac{n+|\gamma|+1}{2}$ интеграл (3.1) и его преобразование Ханкеля изучается в пространстве обобщённых функций Φ'_γ , построенном по схеме П. И. Лизоркина [5] в работе [2].

В силу (3.2) B -потенциал Рисса представляет собой один из возможных способов определения дробной отрицательной степени оператора Лапласа—Бесселя:

$$(-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}\varphi(x) = (\mathbf{U}_\gamma^\alpha\varphi)(x).$$

Левый обратный оператор к оператору (3.1) получен в работе [3], назван *B -гиперсингулярным интегралом* и имеет вид

$$(\mathbf{D}_\gamma^\alpha\varphi)(x) = \frac{1}{d_{n,\gamma,\ell}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{(\gamma \square_y^\ell \varphi)(x)}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}} y^\gamma dy, \quad \alpha > 0, \quad (3.3)$$

где

$$(\gamma \square_y^\ell \varphi)(x) = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k C_\ell^k \gamma \mathbf{T}_x^{ky} \varphi(x)$$

— обобщённая конечная разность порядка,

$$d_{n,\gamma,\ell}(\alpha) = \beta_{n,\gamma}(\alpha) \frac{A_\ell(\alpha)}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}},$$

$$\beta_{n,\gamma}(\alpha) = \frac{\pi \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}{2^{n+\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}\right)}, \quad A_\ell(\alpha) = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{k-1} C_\ell^k k^\alpha.$$

Поскольку

$$\mathbf{F}_\gamma[(\mathbf{D}_\gamma^\alpha \varphi)(x)](\xi) = |\xi|^\alpha \mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi), \quad (3.4)$$

для достаточно хороших функций (например, из основного пространства Φ_γ , см. [2]), следует, что

$$\mathbf{D}_\gamma^\alpha \mathbf{U}_\gamma^\alpha \varphi = \varphi$$

и

$$(-\Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(x) = (\mathbf{D}_\gamma^\alpha \varphi)(x).$$

Отметим, что в случае, когда $\frac{\alpha}{2}$ — натуральное число, оператор $(-\Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}$ определяется итерированием, $(-\Delta_\gamma)^0 = I$.

4. ОБОБЩЁННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ БЕССЕЛЯ И ЕГО СВОЙСТВА

Потенциал Бесселя похож на потенциал Рисса, но имеет лучшие свойства убывания на бесконечности. Такие потенциалы изучены в [8].

В этом разделе мы приведем некоторую информацию об обобщённом потенциале Бесселя, который формально можно определить как дробную отрицательную степень оператора $(I - \Delta_\gamma)$:

$$(I - \Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}} \varphi(x),$$

где Δ_γ — оператор Лапласа—Бесселя (2.12).

Обобщённое ядро Бесселя имеет вид

$$G_\alpha^\gamma(x) = \mathbf{F}_\gamma^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}](x), \quad \alpha > 0.$$

Для этого ядра справедливы свойства:

(1)

$$G_\alpha^\gamma(x) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|); \quad (4.1)$$

(2) функция $G_\alpha^\gamma(x)$ бесконечно дифференцируема за пределами начала координат;

(3) при $|x| \rightarrow 0$ функция $G_\alpha^\gamma(x)$ допускает оценку

$$G_\alpha^\gamma(x) \sim \frac{2^{n-|\gamma|}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{2^{\alpha-|\gamma|}} |x|^{\alpha-n-|\gamma|}, & \text{если } 0 < \alpha < n + |\gamma|; \\ -2^{1-n} \left(\ln\left(\frac{|x|}{2}\right) + \vartheta \right), & \text{если } \alpha = n + |\gamma|; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\right)}{2^n}, & \text{если } n + |\gamma| < \alpha; \end{cases} \quad (4.2)$$

(4) при $|x| \rightarrow \infty$ функция $G_\alpha^\gamma(x)$ допускает оценку

$$G_\alpha^\gamma(x) \sim \frac{\sqrt{\pi} 2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha+1}{2}}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} e^{-|x|}; \quad (4.3)$$

(5) $G_\alpha^\gamma(x) \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$;

(6) преобразование Ханкеля ядра Бесселя для $\alpha > 0$ имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma[G_\alpha^\gamma](\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}. \quad (4.4)$$

Свойства ядра $G_\alpha^\gamma(x)$ (1)–(6) доказаны в статье [4].

Обобщённый потенциал Бесселя определяется соотношением

$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} G_\alpha^\gamma(y) (\gamma \mathbf{T}_x^\gamma \varphi(x)) y^\gamma dy. \quad (4.5)$$

Используя перечисленные свойства ядра G_α^γ , можно легко получить основные свойства обобщённого потенциала Бесселя:

(1) для $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi\|_{p,\gamma} \lesssim \|\varphi\|_{p,\gamma}, \quad \alpha > 0;$$

(2) полугрупповое свойство

$$\mathbf{G}_\gamma^\alpha \mathbf{G}_\gamma^\beta \varphi = \mathbf{G}_\gamma^{\alpha+\beta} \varphi, \\ \varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n);$$

(3)

$$(I - \Delta_\gamma)^k \mathbf{G}_\gamma^{\alpha+2k} \varphi = \mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n);$$

(4)

$$\mathbf{G}_\gamma^0 \varphi = \varphi, \quad \varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n).$$

В статье [9] построены две формы обратного оператора к обобщённому потенциалу Бесселя. Применение обобщённого потенциала Бесселя к решению неоднородного сингулярного экранированного уравнения Пуассона вида $(I - \Delta_\gamma)^k u = f$, $k \in \mathbb{N}$ было произведено в [11].

5. ВЕСОВОЕ ПРОСТРАНСТВО СОБОЛЕВА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Дробные шкалы пространств широко применяются в теории дифференциальных уравнений с частными производными (см. [7]). Для изучения уравнений в частных производных, содержащих оператор Лапласа—Бесселя (2.12), применяются пространства Соболева дробного порядка, построенные на основе обобщённого потенциала Бесселя (4.5).

Для $\alpha \geq 0$ определим *весовое пространство Соболева дробного порядка* $H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$ как

$$H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n) = \{f \in L_\gamma^2(\mathbb{R}_+^n) : \|f\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)} < \infty\}, \quad (5.1)$$

где

$$\|f\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^{2\alpha} |\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)|^2 \xi^\gamma d\xi \right)^{1/2}.$$

В силу связи нормы $\|f\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)}$ с обобщённым потенциалом Бесселя (4.5) пространство $H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$ называется также *пространством обобщённых потенциалов Бесселя*. Очевидно, что

$$H_\gamma^0(\mathbb{R}_+^n) = L^2(\mathbb{R}_+^n).$$

Справедливо вложение

$$H_\gamma^{\alpha_2}(\mathbb{R}_+^n) \subset H_\gamma^{\alpha_1}(\mathbb{R}_+^n), \quad \alpha_1 < \alpha_2.$$

Лемма 5.1. $\dot{C}_{ev}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ плотно в $H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$.

Доказательство. Пусть $\{\psi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ — гладкая аппроксимационная единица: $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma|}} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, функция $\psi \in C_{ev}^\infty$ с носителем из $B_1^+(n)$, такая, что $\int_{\mathbb{R}_+^n} \psi(x) x^\gamma dx = 1$.

Если $f \in H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$, то функция

$$f_\varepsilon(x) = (\psi_\varepsilon(x) * f(x))_\gamma = \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma|}} \int_{\mathbb{R}_+^n} \gamma \mathbf{T}_y^\gamma f(y) \psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) y^\gamma dy$$

бесконечно дифференцируема.

Покажем, что

$$\|f - f_\varepsilon\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Учитывая, что $\mathbf{F}_\gamma[f_\varepsilon](\xi) = \mathbf{F}_\gamma[\psi](\varepsilon\xi) \cdot \mathbf{F}_\gamma[f](\xi)$, применяя обобщённое неравенство Коши—Буняковского и обобщённое равенство Парсеваля, запишем

$$\begin{aligned} \|f - f_\varepsilon\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^{2\alpha} |1 - \mathbf{F}_\gamma[\psi](\varepsilon\xi)|^2 |\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)|^2 \xi^\gamma d\xi \leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}_+^n} |(1 - \mathbf{F}_\gamma[\psi](\varepsilon\xi))|^2 \cdot |\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)|^2 \xi^\gamma d\xi \leq C \|f\|_{2,\gamma}^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} |(1 - \mathbf{F}_\gamma[\psi](\varepsilon\xi))|^2 \xi^\gamma d\xi \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\dot{C}_{ev}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ -функции плотны в $H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$. $\square$

6. СИНГУЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В качестве примера использования весового пространства Соболева дробного порядка рассмотрим вопрос о решении сингулярного уравнения Шрёдингера вида

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta_\gamma u = 0, \quad (6.1)$$

где $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, $t \geq 0$, Δ_γ — оператор Лапласа—Бесселя (2.12).

К уравнению (6.1) добавим начальное условие

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (6.2)$$

Для простоты пусть $\varphi \in S_{ev}(\mathbb{R}_+^n)$. Применяя преобразование Ханкеля по x к обеим частям уравнения (6.1) и к условию (6.2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F}_\gamma)_x[u](\xi) &= -i|\xi|^2 (\mathbf{F}_\gamma)_x[u](\xi), \\ (\mathbf{F}_\gamma)_x[u](\xi)|_{t=0} &= (\mathbf{F}_\gamma)_x[\varphi](\xi), \end{aligned}$$

тогда

$$u(x, t) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) e^{-i|\xi|^2 t} (\mathbf{F}_\gamma)_x[\varphi](\xi) \xi^\gamma d\xi.$$

Когда $\varphi \in L_\gamma^2(\mathbb{R}_+^n)$, этот интеграл можно интерпретировать в смысле L_γ^2 . Это означает, что при фиксированном t преобразование Ханкеля функции $u(x, t)$ по x равно $e^{-i|\xi|^2 t} (\mathbf{F}_\gamma)_x[\varphi](\xi)$. Тогда $u(x, t) \rightarrow \varphi(x)$ в $L_\gamma^2(\mathbb{R}_+^n)$ при $t \rightarrow 0$.

Аналогично можно рассмотреть сингулярное уравнение Шрёдингера дробного порядка вида

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - (-\Delta_\gamma)^{\frac{\beta}{2}} u = 0, \quad (6.3)$$

где $(-\Delta_\gamma)^{\frac{\beta}{2}}$ — B -гиперсингулярный интеграл (3.3) с условием (6.2).

Используя (3.4), получим, что решение задачи (6.3)-(6.2) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) e^{-i|\xi|^\beta t} (\mathbf{F}_\gamma)_x[\varphi](\xi) \xi^\gamma d\xi. \quad (6.4)$$

Мы получили формальное решение задачи (6.3)-(6.2) вида (6.4). Докажем, что в весовом пространстве Соболева дробного порядка (5.1), т. е. при $\varphi \in H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$ для $\alpha > \frac{n+|\gamma|}{4}$, решение $u(x, t)$ оценивается через норму функции φ в пространстве $H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$.

Теорема 6.1. Пусть $\beta > 0$. Для $\varphi \in H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$, $\alpha > \frac{n+|\gamma|}{4}$ справедлива оценка

$$|u(x, t)| \leq C(n, \gamma, \alpha) \|\varphi\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)},$$

где $u(x, t)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u}{\partial t} - (-\Delta_\gamma)^{\frac{\beta}{2}} u &= 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \end{aligned}$$

определяемое формулой (6.4).

Доказательство. Применяя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \left| \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) e^{-i|\xi|^\beta t} (\mathbf{F}_\gamma)_x[\varphi](\xi) \xi^\gamma d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^{-2\alpha} \xi^\gamma d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |e^{-i2|\xi|^\beta t} \mathbf{j}_\gamma^2(x, \xi) (1 + |\xi|^2)^{2\alpha} |(\mathbf{F}_\gamma)_x[\varphi](\xi)|^2 \xi^\gamma d\xi \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \|\varphi\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^{-2\alpha} \xi^\gamma d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Произведя оставшемуся интеграле сферическую замену $\xi = r\sigma$ и используя формулу (2.18), будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^{-2\alpha} \xi^\gamma d\xi = \int_0^\infty (1 + r^2)^{-2\alpha} r^{n+|\gamma|-1} dr \int_{S_1^+(n)} \sigma^\gamma dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int_0^\infty (1 + r^2)^{-2\alpha} r^{n+|\gamma|-1} dr.$$

Легко видеть, что при $\alpha > \frac{n+|\gamma|}{4}$ полученный интеграл сходится:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^{-2\alpha} \xi^\gamma d\xi &= \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \Gamma\left(2\alpha - \frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{2\Gamma(2\alpha)} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) \Gamma\left(2\alpha - \frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{2^n \Gamma(2\alpha)} = A^2(n, \gamma, \alpha). \end{aligned}$$

Тогда

$$|u(x, t)| \leq C(n, \gamma, \alpha) \|\varphi\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)},$$

где

$$C(n, \gamma, \alpha) = A(n, \gamma, \alpha) \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}.$$

□

7. ОБЩИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ЁМКОСТИ

Выше мы применили построенное в разделе 5 пространство обобщённых потенциалов Бесселя к оценке решения уравнения Шрёдингера с оператором Лапласа—Бесселя дробного порядка. Другое приложение обобщённых потенциалов Бесселя состоит в построении ёмкости для описания тонкой структуры множеств в различных задачах анализа и дифференциальных уравнений в частных производных.

Опираясь на обзорную работу [1], сформулируем основные аспекты, касающиеся определения ёмкости.

В формулировках многих теорем математического анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и др. участвуют множества, в том или ином смысле слова пренебрежимо малые. Например, хорошо известны множества лебеговой меры нуль. Об утверждениях говорят, что они справедливы «почти всюду», «почти наверняка» и т. д. Кроме того, широко используются теоремы, в которых сходимость ряда Фурье гарантируется во всех точках, не принадлежащих некоторому «исключительному» множеству.

Такие проблемы, как:

- аспекты сходимости и единственности разложения функции в тригонометрический ряд;
- проблемы существования граничных значений и описания особенностей гармонических и аналитических функций;
- вопросы об устранимых множествах на римановой поверхности

— создали потребность в разработке целой системы тонких характеристик малости множества.

Исключительные множества очень разнородны по происхождению и по своей природе. Методы и технические приемы, применяемые для изучения разных классов исключительных множеств, тоже сильно отличаются друг от друга. Таким образом, может оказаться затруднительным ответить на вопрос, в чём же именно состоит единство, несомненно присущее всем объектам, собранным под этим названием.

Интуитивно, исключительные множества — это множества настолько «тонкие», что на них наблюдаются явления, обычным («большим») множествам не присущие. Как правило, эти явления состоят в специальном поведении на рассматриваемых множествах некоторых элементов тех или иных функциональных пространств. Каждому такому явлению отвечает, разумеется, своя особая система исключительных множеств.

Пусть G — локально компактная абелева группа. Семейство $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств группы G называется *системой исключительных множеств*, если выполнены следующие условия.

1. Если $A \subset B \in \mathcal{F}$ и A замкнуто, то $A \in \mathcal{F}$.
2. Если $A \in \mathcal{F}$ и $g \in G$, то $A + g \in \mathcal{F}$.
3. Все множества семейства $\mathcal{F}$ являются в том или ином смысле «малыми».

Это определение служит лишь грубой основой, и его не всегда придерживаются. Так, требование, чтобы все исключительные множества были замкнуты, иногда оказывается слишком тяжелым и его опускают.

Пусть G — локально компактная абелева группа, k — положительная непрерывная функция на $G \setminus \{0\}$, имеющая в нуле предел $+\infty$ (такая функция называется *ядром*). Если μ — неотрицательная мера с компактным носителем, то *потенциалом* меры μ относительно ядра k называется функция u_μ :

$$u_\mu(t) = \int_G k(t-s) d\mu(s),$$

а *энергией* меры μ (относительно того же ядра) — число $I(\mu)$:

$$I(\mu) = \iint_{G \times G} k(t-s) d\mu(s) d\mu(t).$$

Наконец, *ёмкостью* компактного множества E , $E \subset G$, называется число $\text{cap}_k E$:

$$\text{cap}_k E = \sup \{ \|\mu\|^2 : \text{supp } \mu \subset E, I(\mu) \leq 1 \}.$$

Хорошо изучен случай, когда $G = \mathbb{R}^n$, а ядро $k(t) = |t|^{-\alpha} = k_\alpha(t)$, $0 \leq \alpha < n$, где через $|\cdot|$ обозначается обычная евклидова норма (ядра k_α называются *ядрами Рисса*; пишут сар_α вместо сар_{k_α}). В этом случае понятия, введённые только что, изучаются важной и глубокой аналитической дисциплиной — теорией потенциала.

«Исключительными» естественно считать множества нулевой ёмкости. Вообще, оценивать ёмкость множества относительно того или иного ядра — один из способов судить о «размере» этого множества.

Ёмкость не является аддитивной функцией множества — она только субаддитивна:

$$\text{сар}_\alpha(E_1 \cup E_2) \leq \text{сар}_\alpha(E_1) + \text{сар}_\alpha(E_2).$$

При $n - 2 \leq \alpha < n$ справедливо более сильное неравенство («выпуклость ёмкости»):

$$\text{сар}_\alpha(E_1 \cup E_2) + \text{сар}_\alpha(E_1 \cap E_2) \leq \text{сар}_\alpha(E_1) + \text{сар}_\alpha(E_2).$$

В оставшейся части данной статьи мы сосредоточим своё внимание на ёмкостях, порождённых обобщёнными потенциалами Бесселя. Такие ёмкости приспособлены для работы в классах функций, связанных оператором Лапласа—Бесселя.

8. Ёмкость, построенная с помощью обобщённого потенциала Бесселя

Пусть E — произвольное множество в $\mathbb{R}_+^n$. Будем иметь дело со всевозможными неотрицательными функциями φ , суммируемыми в $\mathbb{R}_+^n$ в степени $p > 1$ с весом x^γ , такими, что для всех $x \in E$

$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) \geq 1,$$

где

$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} G_\gamma^\alpha(y) ({}^\gamma \mathbf{T}_x^\gamma \varphi(y)) y^\gamma dy$$

— обобщённый потенциал Бесселя (4.5).

Если $1 < p < \infty$, определим ёмкость на основе обобщённого потенциала Бесселя.

Определение 8.1. Точная нижняя граница величины $\|\varphi\|_{p,\gamma}^p$, взятая по множеству всех функций $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ таких, что $(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) \geq 1$ для всех $x \in E$, называется $(\alpha, p)_\gamma$ -ёмкостью множества E . Будем использовать обозначение $V_{\alpha,p}^\gamma(E)$ для $(\alpha, p)_\gamma$ -ёмкости множества E . Можно записать

$$V_{\alpha,p}^\gamma(E) = \inf \{ \|\varphi\|_{p,\gamma}^p : (\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) \geq 1 \text{ на } E, \varphi \geq 0 \}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_{\alpha,p}^\gamma(E)$ совокупность всех неотрицательных функций $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ таких, что $(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) \geq 1$ для всех $x \in E$.

Для $\varphi \in \mathfrak{M}_{\alpha,p}^\gamma(E)$ $(\alpha, p)_\gamma$ -ёмкость множества E можно записать в виде

$$V_{\alpha,p}^\gamma(E) = \inf_{\varphi \in \mathfrak{M}_{\alpha,p}^\gamma(E)} \|\varphi\|_{p,\gamma}.$$

Рассмотрим вопрос о нахождении соотношений включения между классами нуль-множеств обобщённых бesselевых ёмкостей. Будем говорить, что ёмкость B *сильнее*, чем ёмкость B' , если из того, что $B(A) = 0$, всегда следует, что $B'(A) = 0$. Если, кроме того, найдётся множество A такое, что $B(A) > 0$, но $B'(A) = 0$, будем говорить, что B *строго сильнее*, чем B' .

Пусть $0 < \alpha < n + |\gamma|$, $\alpha p \leq n + |\gamma|$, тогда $(\alpha, p)_\gamma$ -ёмкость множества $E \subset \mathbb{R}_+^n$ обращается в нуль в том и только в том случае, если существует функция φ , суммируемая в $\mathbb{R}_+^n$ в степени $p > 1$ с весом x^γ , такая, что $(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) = \infty$ для всех $x \in E$.

Приведем некоторые свойства $(\alpha, p)_\gamma$ -ёмкости.

Лемма 8.1. Для $0 \leq \alpha < n + |\gamma|$ и $p > 1$ справедливы следующие утверждения:

1. $V_{\alpha,p}^\gamma(\emptyset) = 0$,
2. если $E_1 \subset E_2$, то $V_{\alpha,p}^\gamma(E_1) \leq V_{\alpha,p}^\gamma(E_2)$,

3. если $E_i \subset \mathbb{R}_+^n$, $i = 1, \dots, n$, то

$$B_{\alpha,p}^\gamma \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} B_{\alpha,p}^\gamma(E_i). \quad (8.1)$$

Доказательство. Пункты 1 и 2 очевидны. В пункте 3 будем считать, что $\sum_{i=1}^{\infty} B_{\alpha,p}^\gamma(E_i) < \infty$, т. е. этот ряд сходится. Тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} B_{\alpha,p}^\gamma(E_i) = 0$, каждый член ряда $B_{\alpha,p}^\gamma(E_i)$ конечен и для каждого $\varepsilon > 0$ существует неотрицательная функция $\varphi_i \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ такая, что

$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi_i)(x) \geq 1 \text{ на } E_i, \quad \|\varphi_i\|_{p,\gamma}^p < B_{\alpha,p}^\gamma(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Пусть $\varphi(x) = \sup_{i=1,\dots,n} \varphi_i(x)$. Очевидно, что $\varphi \geq 0$ и $(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) \geq 1$ на $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Кроме того,

$$\varphi^p(x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^p(x).$$

Тогда

$$B_{\alpha,p}^\gamma \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \|\varphi\|_{p,\gamma}^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|_{p,\gamma}^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} B_{\alpha,p}^\gamma(E_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} B_{\alpha,p}^\gamma(E_i) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем (8.1). $\square$

Из леммы 8.1 следует, что $B_{\alpha,p}^\gamma(E)$ является внешней мерой множества E .

Лемма 8.2. Пусть E — произвольное множество в $\mathbb{R}_+^n$ и $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ — неотрицательная функция такая, что $(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) > \delta > 0$ для всех $x \in E$. Тогда

$$B_{\alpha,p}^\gamma(E) \leq \frac{1}{\delta^p} \|\varphi\|_{p,\gamma}^p.$$

Доказательство. Имеем, что функция $\psi = \frac{\varphi}{\delta} \in \mathfrak{M}_{\alpha,p}^\gamma(E)$, тогда

$$B_{\alpha,p}^\gamma(E) = \inf_{\psi \in \mathfrak{M}_{\alpha,p}^\gamma(E)} \|\psi\|_{p,\gamma}^p \leq \|\psi\|_{p,\gamma}^p = \frac{1}{\delta^p} \|\varphi\|_{p,\gamma}^p.$$

Доказательство закончено. $\square$

Теорема 8.1. Для $p > 1$, $\alpha p < n + |\gamma|$ существует такая константа $C = C(\alpha, p, n, \gamma)$, что

$$\frac{1}{C} r^{n+|\gamma|-\alpha p} \leq B_{\alpha,p}^\gamma(B_r^+(n)) \leq C r^{n+|\gamma|-\alpha p} \quad (8.2)$$

при $0 < r \leq \frac{1}{2}$.

Доказательство. Пусть $B_r^+(2)$ — часть шара $|x| \leq 2$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, принадлежащая $\mathbb{R}_+^n$, функция $f \in L_p(\mathbb{R}_+^n)$, $f \geq 0$ такая, что на $B_2^+(n)$

$$(G_\alpha^\gamma(x) * f)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) {}^\gamma \mathbf{T}_x^\gamma G_\alpha^\gamma(x) y^\gamma dy \geq 1,$$

$$(G_\alpha^\gamma(x) * f)_\gamma = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) y^\gamma dy \int_0^\pi \dots \int_0^\pi G_\alpha^\gamma \left(\sqrt{x_1^2 - 2x_1 y_1 \cos \beta_1 + y_1^2}, \dots, \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos \beta_1 + y_n^2} \right) \times \\ \times \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1} \beta_i d\beta_i.$$

Переходя к координатам

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= y_1 \cos \beta_1, & \tilde{y}_2 &= y_1 \sin \beta_1, \\ \tilde{y}_3 &= y_2 \cos \beta_2, & \tilde{y}_4 &= y_2 \sin \beta_2, \\ &\dots \\ \tilde{y}_{2n-1} &= y_n \cos \beta_n, & \tilde{y}_{2n} &= y_n \sin \beta_n,\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}(G_\alpha^\gamma(x) * f)_\gamma &= C(\gamma) \int_{\tilde{\mathbb{R}}_+^{2n}} G_\alpha^\gamma \left(\sqrt{(x_1 - \tilde{y}_1)^2 + \tilde{y}_2^2}, \dots, \sqrt{(x_n - \tilde{y}_{2n-1})^2 + \tilde{y}_{2n}^2} \right) \times \\ &\quad \times f \left(\sqrt{\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2}, \dots, \sqrt{\tilde{y}_{2n-1}^2 + \tilde{y}_{2n}^2} \right) \prod_{i=1}^n \tilde{y}_{2i}^{\gamma_i-1} d\tilde{y},\end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbb{R}}_+^{2n} = \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^{2n} : \tilde{y}_{2i} > 0, i = 1, \dots, n\}$. Поскольку

$$G_\alpha^\gamma(x) = A(\alpha, n, \gamma) \tilde{K}_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|), \quad \tilde{K}_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|) = \frac{K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|)}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}},$$

$$A(\alpha, n, \gamma) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)},$$

то

$$\begin{aligned}G_\alpha^\gamma \left(\sqrt{(x_1 - \tilde{y}_1)^2 + \tilde{y}_2^2}, \dots, \sqrt{(x_n - \tilde{y}_{2n-1})^2 + \tilde{y}_{2n}^2} \right) &= \\ &= A(\alpha, n, \gamma) \tilde{K}_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}} \left(\left[(x_1 - \tilde{y}_1)^2 + \tilde{y}_2^2 + \dots + (x_n - \tilde{y}_{2n-1})^2 + \tilde{y}_{2n}^2 \right]^{1/2} \right) = \\ &= A(\alpha, n, \gamma) \tilde{K}_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|\tilde{x} - \tilde{y}|) = \tilde{G}_\alpha^\gamma(|\tilde{x} - \tilde{y}|),\end{aligned}$$

где $\tilde{x} = (x_1, 0, x_2, 0, \dots, x_n, 0) \in \tilde{\mathbb{R}}_+^{2n}$. Таким образом,

$$(G_\alpha^\gamma(x) * f)_\gamma = C(\gamma) \int_{\tilde{\mathbb{R}}_+^{2n}} \tilde{G}_\alpha^\gamma(|\tilde{x} - \tilde{y}|) \tilde{f}(\tilde{y}) \prod_{i=1}^n \tilde{y}_{2i}^{\gamma_i-1} d\tilde{y},$$

где

$$\tilde{f}(\tilde{y}) = f \left(\sqrt{\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2}, \dots, \sqrt{\tilde{y}_{2n-1}^2 + \tilde{y}_{2n}^2} \right).$$

Производя замену переменных $\tilde{y} \rightarrow \tilde{y}/r$, $\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}/r$, получим

$$1 \leq C(\gamma) \int_{\tilde{\mathbb{R}}_+^{2n}} \tilde{G}_\alpha^\gamma \left(\frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|}{r} \right) \tilde{f} \left(\frac{\tilde{y}}{r} \right) \prod_{i=1}^n \tilde{y}_{2i}^{\gamma_i-1} r^{-n-|\gamma|} d\tilde{y}, \quad (8.3)$$

при всех $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{R}}_+^{2n}$ таких, что $|\tilde{x}| \leq 2r$, что соответствует $x \in B_{2r}^+(n)$.

Из свойств функции K_ν следует, что для некоторой константы $C > 0$

$$\frac{e^{-2|\tilde{x}-\tilde{y}|}}{C|\tilde{x} - \tilde{y}|^{n+|\gamma|-\alpha}} \leq \tilde{G}_\alpha^\gamma(|\tilde{x} - \tilde{y}|) \leq \frac{C e^{-|\tilde{x}-\tilde{y}|}}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{n+|\gamma|-\alpha}},$$

тогда

$$\tilde{G}_\alpha^\gamma \left(\frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|}{r} \right) \leq \frac{C r^{n+|\gamma|-\alpha}}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{n+|\gamma|-\alpha}} e^{-|\tilde{x}-\tilde{y}|/r} \leq \frac{C r^{n+|\gamma|-\alpha}}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{n+|\gamma|-\alpha}} e^{-2|\tilde{x}-\tilde{y}|} \leq C^2 r^{n+|\gamma|-\alpha} \tilde{G}_\alpha^\gamma(|\tilde{x} - \tilde{y}|)$$

при $r \leq 1/2$.

Следовательно, из (8.3) получаем

$$1 \leq C(\gamma) C^2 r^{-\alpha} \int_{\widehat{\mathbb{R}}_+^{2n}} \tilde{G}_\alpha^\gamma(|\tilde{x} - \tilde{y}|) \tilde{f}\left(\frac{\tilde{y}}{r}\right) \prod_{i=1}^n \tilde{y}_{2i}^{\gamma_i-1} d\tilde{y}$$

при всех $x \in B_{2r}^+(n)$, где $r \leq 1/2$. Возвращаясь к переменным y , будем иметь

$$1 \leq C^2 r^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}_+^n} \gamma \mathbf{T}_x^y G_\alpha^\gamma(x) f\left(\frac{y}{r}\right) y^\gamma dy = (G_\alpha^\gamma(x) * C^2 r^{-\alpha} f(x/r))_\gamma.$$

Поскольку

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(C^2 r^{-\alpha} f\left(\frac{y}{r}\right)\right)^p y^\gamma dy = C^{2p} r^{n+|\gamma|-\alpha p} \int_{\mathbb{R}_+^n} f^p(y) y^\gamma dy = C^{2p} r^{n+|\gamma|-\alpha p} \|f\|_{L_p^\gamma}^p,$$

то при $r \leq 1/2$

$$B_{\alpha,p}^\gamma(B_{2r}^+(n)) = \inf\{C^{2p} r^{n+|\gamma|-\alpha p} \|f\|_{L_p^\gamma}^p : (G_\alpha^\gamma(x) * C^2 r^{-\alpha} f(x/r))_\gamma \geq 1 \text{ на } B_{2r}^+(n), f \geq 0\}$$

и

$$B_{\alpha,p}^\gamma(B_{2r}^+(n)) \leq C^{2p} r^{n+|\gamma|-\alpha p} \|f\|_{L_p^\gamma}^p, \quad r \leq 1/2$$

для всех f таких, что $(G_\alpha^\gamma(x) * f(x))_\gamma \geq 1$ на $B_2^+(n)$, $f \geq 0$. Следовательно, переходя к инфимуму по f ,

$$B_{\alpha,p}^\gamma(B_{2r}^+(n)) \leq C^{2p} r^{n+|\gamma|-\alpha p} B_{\alpha,p}^\gamma(B_2^+(n)), \quad r \leq 1/2,$$

что даёт правую часть (8.2).

Для доказательства левой части в (8.2) возьмём $f \in L_p^\gamma$, $f \geq 0$, такую, что

$$(G_\alpha^\gamma(x) * f(x))_\gamma \geq 1 \quad \text{на } B_r^+(n).$$

Тогда

$$|B_1^+(n)|_\gamma = \int_{B_1^+(n)} (G_\alpha^\gamma(x) * f(x))_\gamma x^\gamma dx = |B_1^+(n)|_\gamma^{1/q'} \|(G_\alpha^\gamma(x) * f(x))_\gamma\|_{L_q^\gamma},$$

где $1/q' + 1/q = 1$, $q = (n + |\gamma|)/(n + |\gamma| - \alpha p)$. Оценивая $G_\alpha^\gamma(x) \leq C r^{\alpha-n-|\gamma|}$, получим

$$r^{n+|\gamma|-\alpha p} \leq C \|f\|_{L_p^\gamma}.$$

Взятие инфимума по всем таким f даёт левую часть в виде (8.2). $\square$

Следствие 8.1. Имеем $B_{\alpha,p}^\gamma(B_r^+(n)) \approx r^{n+|\gamma|-\alpha p}$, и при $\alpha p > n + |\gamma|$ существует такая константа $C = C(\alpha, p, n, \gamma)$, что

$$B_{\alpha,p}^\gamma(E) \geq C$$

для всякого множества $E \neq \emptyset$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кисляков С. В. Исключительные множества в гармоническом анализе // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направл. — 1989. — 41. — С. 199–227.
2. Ляхов Л. Н. Об одном классе гиперсингулярных интегралов // Докл. АН СССР. — 1990. — 315, № 2. — С. 291–296.
3. Ляхов Л. Н. Обращение В-потенциалов Рисса // Докл. АН СССР. — 1991. — 321, № 3. — С. 466–469.
4. Ляхов Л. Н., Половинкина М. В. Пространство весовых потенциалов Бесселя // Тр. МИАН. — 2005. — 250. — С. 192–197.
5. Лизоркин П. И. Обобщённое лиувиллевское дифференцирование и функциональное пространство $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения // Мат. сб. — 1963. — 60, № 3. — С. 325–353.
6. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
7. Слободецкий Л. Н. Пространства С. Л. Соболева дробного порядка и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. — 1958. — 118, № 2. — С. 243–246.

8. Aronszajn N., Smith K. T. Theory of Bessel potentials // I. Ibid.—1961.—11.—С. 365–475.—DOI: [10.5802/aif.116](https://doi.org/10.5802/aif.116).
9. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. Two forms of an inverse operator to the generalized Bessel potential // Axioms.—2021.—10, № 3.—С. 1–20.—DOI: [10.3390/axioms10030232](https://doi.org/10.3390/axioms10030232).
10. Riesz M. L'intégrale de Riemann–Liouville et le problème de Cauchy // Acta Math.—1949.—81, № 1-2.—С. 1–223.—DOI: [10.1007/BF02395016](https://doi.org/10.1007/BF02395016).
11. Shishkina E., Ekincioglu I., Keskin C. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation // Integral Transforms Spec. Funct.—2021.—32, № 12.—С. 932–947.—DOI: [10.1080/10652469.2020.1867983](https://doi.org/10.1080/10652469.2020.1867983).

А. Л. Джабраилов

Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова, Грозный, Россия

E-mail: ahmed_0065@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 3419-5303, РИНЦ AuthorID: [654720](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=654720), ResearcherID: [AAF-3792-2020](https://orcid.org/0000-0002-3792-2020), Scopus: [57220747140](https://orcid.org/0000-0002-5722-0747)

Э. Л. Шишкина

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова, Грозный, Россия

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

E-mail: shishkina@amm.vsu.ru, РИНЦ SPIN-код: 8731-8301, РИНЦ AuthorID: [173810](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=173810), ResearcherID: [M-5413-2015](https://orcid.org/0000-0002-5413-2015), Scopus: [13005142800](https://orcid.org/0000-0002-1300-5142), ORCID: [0000-0003-4083-1207](https://orcid.org/0000-0003-4083-1207)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-35-50](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-35-50)

EDN: [TLBNOI](https://elibrary.ru/TLBNOI)

UDC 517.987.4

Research article

On applications of the generalized Bessel potential to solving the singular fractional Schrödinger equation and capacity theory

A. L. Dzhabrailov³ and E. L. Shishkina^{1,2,3,4}

¹Voronezh State University, Voronezh, Russia

²Belgorod State University, Belgorod, Russia

³Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia

⁴HSE University, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we construct a weighted Sobolev space of fractional order based on the generalized Bessel potential. We apply these results to the analysis of the singular fractional Schrödinger equation. To solve the Cauchy problem for this equation, we prove an estimate that relates the norm of the solution to the norm of the initial condition in the weighted Sobolev space. We devote the remainder of the paper to aspects of capacity theory constructed based on the generalized Bessel potential.

Keywords: generalized Bessel potential, weighted Sobolev space, singular Schrödinger equation, capacity theory.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (FEFS-2026-0004).



Authors' contribution. *E. L. Shishkina* — scientific supervision, formulation of the idea, hypothesis, research objectives, development of methods and procedures, text revision; *A. L. Dzhabrailov* — writing the initial text of the article, checking the results, editing, text revision, organizational management.

For citation: A. L. Dzhabrailov, E. L. Shishkina, “On applications of the generalized Bessel potential to solving the singular fractional Schrödinger equation and capacity theory,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 35–50. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-35-50](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-35-50) EDN: [TLBNOI](https://www.edn.ru/TLBNOI)

REFERENCES

1. S. V. Kislyakov, “Isklyuchitel'nye mnozhestva v garmonicheskom analize” [Exceptional sets in harmonic analysis], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fundam. Napravl.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 1989, **41**, 199–227 (in Russian).
2. L. N. Lyakhov, “Ob odnom klasse gipersingulyarnykh integralov” [On a class of hypersingular integrals], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **315**, No. 2, 291–296 (in Russian).
3. L. N. Lyakhov, “Obrashchenie B-potentsialov Rissa” [Inversion of Riesz B-potentials], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1991, **321**, No. 3, 466–469 (in Russian).
4. L. N. Lyakhov and M. V. Polovinkina, “Prostranstvo vesovykh potentsialov Besselya” [The space of Bessel weighted potentials], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **250**, 192–197 (in Russian).
5. P. I. Lizorkin, “Obobshchennoe liouvillevskoe differentsirovanie i funktsional'noe prostranstvo $L_p^r(E_n)$. Teoremy vlozheniya” [Generalized Liouville differentiation and the functional space $L_p^r(E_n)$. Embedding theorems], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1963, **60**, No. 3, 325–353 (in Russian).
6. S. M. Sitnik and E. L. Shishkina, *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravneniy s operatorami Besselya* [Method of Transmutation Operators for Differential Equations with Bessel Operators], Fizmatlit, Moscow, 2019 (in Russian).
7. L. N. Slobodetskiy, “Prostranstva S. L. Soboleva drobnogo poryadka i ikh prilozhenie k kraevym zadacham dlya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh” [S. L. Sobolev spaces of fractional order and their application to boundary-value problems for partial differential equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1958, **118**, No. 2, 243–246 (in Russian).
8. N. Aronszajn and K. T. Smith, “Theory of Bessel potentials,” *I. Ibid.*, 1961, **11**, 365–475, DOI: [10.5802/aif.116](https://doi.org/10.5802/aif.116).
9. A. Dzhabrailov, Y. Luchko, and E. Shishkina, “Two forms of an inverse operator to the generalized Bessel potential,” *Axioms*, 2021, **10**, No. 3, 1–20, DOI: [10.3390/axioms10030232](https://doi.org/10.3390/axioms10030232).
10. M. Riesz, “L'intégrale de Riemann–Liouville et le probleme de Cauchy,” *Acta Math.*, 1949, **81**, No. 1–2, 1–223, DOI: [10.1007/BF02395016](https://doi.org/10.1007/BF02395016).
11. E. Shishkina, I. Ekincioglu, and C. Keskin, “Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation,” *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2021, **32**, No. 12, 932–947, DOI: [10.1080/10652469.2020.1867983](https://doi.org/10.1080/10652469.2020.1867983).

A. L. Dzhabrailov

Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia

E-mail: ahmed_0065@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 3419-5303, eLIBRARY AuthorID: [654720](https://www.elibrary.ru/654720),

ResearcherID: [AAF-3792-2020](https://orcid.org/0000-0002-3792-2020), Scopus: [57220747140](https://orcid.org/0000-0002-57220747140)

E. L. Shishkina

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Belgorod State University, Belgorod, Russia

Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia

HSE University, Moscow, Russia

E-mail: shishkina@amm.vsu.ru, eLIBRARY SPIN-code: 8731-8301, eLIBRARY AuthorID:

[173810](https://orcid.org/0000-0003-173810), ResearcherID: [M-5413-2015](https://orcid.org/0000-0003-M-5413-2015), Scopus: [13005142800](https://orcid.org/0000-0003-13005142800), ORCID: [0000-0003-4083-1207](https://orcid.org/0000-0003-4083-1207)