

СУЩЕСТВОВАНИЕ СПИРАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ ДЛЯ БЛОКИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОГНЯ

С. Бьянкини

S.I.S.S.A., Trieste, Italy

Аннотация. В данной работе мы рассматриваем проблему блокирования огня путем строительства стены ζ , имеющей спиралевидную форму. Предполагается, что это наилучшая стратегия в случае, когда один пожарный строит стену с конечной скоростью строительства σ : барьеры, удовлетворяющие этому ограничению скорости строительства, называются допустимыми.

В этом случае мы доказываем точную версию гипотезы Брессана о пожаре [5], т. е. когда допустимые барьеры представляют собой спиралевидные кривые: а именно, спиралевидный барьер, ограничивающий огонь в ограниченной области $\mathbb{R}^2$, существует тогда и только тогда, когда скорость построения барьера σ строго больше критической скорости $\bar{\sigma} = 2,614 \dots$

Существование ограничивающих спиральных барьеров при $\sigma > \bar{\sigma}$ уже известно [7, 15]. В настоящей работе мы исследуем обратную ситуацию, т. е. если $\sigma \leq \bar{\sigma}$, то никакая допустимая спираль не блокирует огонь.

Доказательство этих результатов основано на:

1. точном определении спирального барьера и его представлении;
2. анализе насыщенных спиральных барьеров как дифференциального уравнения с запаздыванием, следуя [15];
3. эквивалентной переформулировке гипотезы как задачи минимизации функционала для заданного функционала;
4. построении оптимальной замыкающей спирали;
5. анализе дифференцируемого пути допустимых спиралей, вдоль которого функционал дифференцируем и, в частности, возрастает при переходе от оптимальной спирали к любой другой.

Ввиду сложности решения, оценка величин, необходимых для доказательства возрастания функционала, выполняется численно.

Ключевые слова: блокирование пожара, спиральные барьеры, гипотеза Брессана, допустимые стратегии, дифференциальное уравнение с запаздыванием, аргумент гомотопии, изотропное распространение пожара, динамическая проблема блокирования, спрямляемые кривые, мера Хаусдорфа.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Бьянкини С. Существование спиральных стратегий для блокирования распространения огня // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 24–34. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-24-34](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-24-34) EDN: [TICEMV](https://www.edn.ru/TICEMV)

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы изучаем динамическую задачу блокирования, впервые предложенную А. Брессаном в работе [4]. Задача касается модели распространения лесного пожара в области плоскости $\mathbb{R}^2$ и возможности его блокирования путем построения *барьеров*, т. е. спрямляемых кривых, которые

не могут быть пересечены огнем. Локальное распространение огня описывается с помощью многозначной функции

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{K \subset \mathbb{R}^2 \text{ компактное, замкнутое}\}$$

такой, что

1. существует $r > 0$ такое, что $B_r(0) \subset F(x) \forall x \in \mathbb{R}^2$;
2. функция $x \rightarrow F(x)$ является липшицево-непрерывной в топологии Хаусдорфа.

Эта функция описывает бесконечно малую эволюцию огня при отсутствии барьеров, т. е. $x + \delta t F(x)$ — это точки, достигнутые огнем за бесконечно малое время δt . Другими словами, если барьеры отсутствуют, то *достижимое множество* $R(t)$ является решением дифференциального включения

$$R(t) = \left\{ x(t), x(\cdot) \text{ абс. непр., } x(0) \in R_0, \dot{x}(\tau) \in F(x(\tau)) \text{ для п.в. } \tau \in [0, t] \right\},$$

где множество $R_0 \subset \mathbb{R}^2$ — открытая область, выжженная огнем в начальный момент времени $t = 0$.

Когда огонь начинает распространяться, пожарный может построить несколько барьеров, смоделированных одномерным спрямляемым множеством $\zeta \subset \mathbb{R}^2$, чтобы заблокировать огонь. Более подробно рассмотрим непрерывную функцию $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ вместе с положительной константой $\psi_0 > 0$ такой, что $\psi \geq \psi_0$. Если обозначить через $\zeta(t) \subset \mathbb{R}^2$ часть барьера, построенного за время $t \geq 0$, то мы говорим, что ζ является *допустимым барьером* (или *допустимой стратегией*), если

(Н1):

$$\zeta(t_1) \subset \zeta(t_2), \quad \forall t_1 \leq t_2;$$

(Н2):

$$\int_{\zeta(t)} \psi d\mathcal{H}^1 \leq t, \quad \forall t \geq 0,$$

где $\mathcal{H}^1$ обозначает одномерную меру Хаусдорфа.

Имея допустимую стратегию ζ , определим *множество достижимых значений* для ζ в момент времени t как

$$R^\zeta(t) = \left\{ x(t) : x \text{ абс. непр., } x(0) \in R_0, \dot{x}(\tau) \in F(x(\tau)) \text{ для п.в. } \tau \in [0, t], x(\tau) \notin \zeta(\tau) \forall \tau \in [0, t] \right\}.$$

Определение 1.1. Пусть $t \rightarrow \zeta(t)$ — допустимая стратегия. Мы говорим, что это *блокирующая стратегия*, если

$$R_\infty^\zeta \doteq \bigcup_{t \geq 0} R^\zeta(t)$$

является ограниченным множеством.

Мы называем *изотропным* случай, когда предполагается, что огонь распространяется с единичной скоростью во всех направлениях, а барьер строится с постоянной скоростью $\sigma > 0$:

$$F \equiv \overline{B_1(0)}, \quad R_0 = B_1(0), \quad \psi \equiv \frac{1}{\sigma}, \quad (1.1)$$

где $\overline{B_1(0)}$ обозначает замыкание единичного шара на плоскости с центром в начале координат. Отметим, что в работе [7] приведены результаты сравнения более общих вариантов выбора данных R_0 и F и изотропной задачи для изучения проблемы пожара в более общей постановке.

Существование допустимых блокирующих стратегий для изотропной задачи блокирования является очень сложной открытой проблемой, которая рассматривалась¹ главным образом в работах [4, 7]. Это одна из главных причин, по которой проблема изучалась в изотропном случае. В частности, справедливы следующие теоремы:

Теорема 1.1. Пусть выполняется условие (1.1). Тогда если $\sigma > 2$, то существует допустимая блокирующая стратегия.

¹Можно доказать [6], что существование блокирующей стратегии не зависит от начального множества R_0 , а только от скорости σ .

Теорема 1.2. Пусть выполняется условие (1.1). Тогда если $\sigma \leq 1$, то допустимой блокирующей стратегии не существует.

Обе теоремы доказаны в работе [4] и обосновывают следующую гипотезу о пожаре [5]:

Гипотеза 1.1. Пусть выполняется условие (1.1). Тогда если $\sigma \leq 2$, то допустимой блокирующей стратегии не существует.

Обзор результатов, связанных с гипотезой 1.1, см. в [6].

Эквивалентная формулировка. На протяжении всей статьи мы будем использовать эквивалентную формулировку задачи динамического блокирования для изотропного случая (доказательство эквивалентности см. в [10]). Пусть $Z \subset \mathbb{R}^2$ — спрямляемое множество. Обозначим

$$R^Z(t) = \left\{ x(t) : x \text{ абс. непр., } \dot{x}(\tau) \in \overline{B_1(0)} \text{ для п.в. } \tau \in [0, t], x(\tau) \notin Z \forall \tau \in [0, t] \right\}. \quad (1.2)$$

Будем говорить, что стратегия Z является *допустимой*, если $\forall t \geq 0$

$$\mathcal{H}^1(Z \cap \overline{R^Z(t)}) \leq \sigma t.$$

Аналогично предыдущей формулировке, обозначим через

$$R_\infty^Z = \bigcup_{t \geq 0} R^Z(t) \quad (1.3)$$

выгоревшую область, и будем говорить, что Z является *допустимой блокирующей стратегией*, если R_∞^Z ограничено. Преимущество этого описания заключается в том, что барьер фиксирован и не увеличивается со временем. Здесь мы можем интерпретировать $Z \cap \overline{R^Z(t)}$ как количество барьера Z , выгоревшего в результате пожара за время t .

Функция минимального времени и формулировка Гамильтона—Якоби. Распространение огня также можно описать с помощью *функции минимального времени*

$$u(x) \doteq \inf \left\{ t \geq 0 : x \in \overline{R^Z(t)} \right\}. \quad (1.4)$$

Функция u — это время, необходимое огню для достижения точки x в зоне выгорания без пересечения барьера. Функцию минимального времени можно вычислить, решив уравнение Гамильтона—Якоби с препятствиями: а именно, u — это супремум среди всех липшицевых функций u' , удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} |\nabla u'(x)| \leq 1, & x \notin Z, \\ u'(x) = 0, & x \in R_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Свойства решения задачи (1.5) описаны в работе [13]. Мы предполагаем, что $|\nabla u(x)| = 1$ для каждого $x \notin Z$, как в классическом случае уравнения эйконала без препятствий. При наличии функции минимального времени u и допустимого барьера Z определяется *функционал допустимости*:

$$\mathcal{A}(x) = u(x) - \frac{1}{\sigma} \mathcal{H}^1(Z \cap \overline{R^Z(u(x))}) \geq 0, \quad \forall x \in Z.$$

Неравенство следует из допустимости барьера Z . В частности, *насыщенное множество* определяется как

$$\mathcal{S} = \{x \in Z : \mathcal{A}(x) = 0\}$$

и соответствует точкам на барьере, где пожарные используют все имеющиеся в их распоряжении средства для блокирования огня.

Легко доказать [4], что если стратегия Z состоит из простой замкнутой кривой, то она недопустима при $\sigma \leq 2$ (ключевая идея заключается в том, чтобы взять последнюю точку P на кривой, достигнутую огнем, и заметить, что $\mathcal{A}(P) < 0$). Однако известны лишь частичные результаты для случая, когда стратегия имеет более сложные структуры, например, наличие внутренних барьеров, замедляющих распространение огня.

Оптимизационная задача. Возможный подход к решению гипотезы Брессана о пожаре (1.1) — рассмотреть оптимальные стратегии для данной задачи минимизации и доказать, что они не могут быть допустимыми блокирующими стратегиями, сводя анализ к конкретным случаям. В этом духе можно сформулировать задачу оптимизации среди блокирующих барьеров следующим образом: вводится *функционал стоимости*

$$J(Z) = \int_{R_\infty^Z} \kappa_1 d\mathcal{L}^2 + \int_Z \kappa_2 d\mathcal{H}^1 \quad (1.6)$$

среди всех возможных допустимых блокирующих стратегий, где $\kappa_1, \kappa_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ — две неотрицательные непрерывные функции. В работе [9] доказано, что если класс допустимых блокирующих стратегий непуст, то существует оптимальная стратегия. Более того, существует оптимальная стратегия Z^* , которая является полной:

Определение 1.2. Пусть $Z \subset \mathbb{R}^2$ — спрямляемое множество. Z является *полным*, если оно содержит все свои точки положительной верхней плотности, т. е. такие точки $x \in \mathbb{R}^2$, для которых

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^1(Z \cap B_r(x))}{2r} > 0 \implies x \in Z.$$

Также справедливо следующее следствие [10]:

Следствие 1.1. Если существует допустимая блокирующая стратегия Z с $\mathcal{H}^1(Z) < \infty$, то существует оптимальная блокирующая стратегия Z^* такая, что

$$Z^* = \left(\bigcup_i Z_i \right) \cup \mathcal{N},$$

где Z_i — счетное число компактных спрямляемых связных компонент, и $\mathcal{H}^1(\mathcal{N}) = 0$.

Также упомянем недавний результат в работе [8], где доказано, что оптимальная стратегия нигде не является плотной. Что действительно усложняет задачу оптимизации, так это то, что класс допустимых стратегий может быть пустым (и предполагается, что он пуст, если $\sigma \leq 2$, гипотеза 1.1).

Определение необходимых условий оптимальности — сложная открытая проблема. Некоторые необходимые условия оптимальности выведены в работе [12] с предположением о дополнительной регулярности оптимальной стратегии. В работе [2] приведены некоторые необходимые условия оптимальности для характеристики границы ∂R_∞^Z в случае, когда Z является оптимальной стратегией (для задачи с $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$) без предположения о какой-либо регулярности барьера. Там выведены некоторые свойства оптимального барьера, такие как связность в случае $Z = Z^2 \cup Z^1$, где $Z^2 = \partial R_\infty^Z$ и Z^1 — единая внутренняя кривая, и проанализированы некоторые конкретные случаи. Однако основной проблемой остается вывод необходимых условий для внутренних барьеров.

2. НЕДОПУСТИМОСТЬ СПИРАЛЕВИДНЫХ СТРАТЕГИЙ

В данной работе мы изучаем стратегии спиралевидной формы: а именно, допустимые стратегии, построенные таким образом, чтобы все усилия были сосредоточены на одной кривой. Изучение спиралевидных стратегий имеет ключевое значение для полного решения гипотезы Брессана о пожаре; действительно, предполагается, что эти стратегии являются «наилучшими» возможными барьерами, которые можно построить при $\sigma \leq 2$. Эвристическое обоснование заключается в том, что если $\sigma \leq 2$, то мы не можем иметь двух пожарных (одновременно строящих две ветви стратегии) со скоростью, строго превышающей скорость огня, так что они будут поглощены огнем: таким образом, наилучшей стратегией должна быть одна кривая. В случае $\sigma > 2$ мы ожидаем, что оптимальными стратегиями являются простые замкнутые кривые. В работе [11] авторы строят наилучшую стратегию для задачи оптимизации (1.6) среди простых замкнутых кривых.

Начнем с определения спиральных стратегий.

Определение 2.1. Пусть $Z = \zeta([0, S]) \subset \mathbb{R}^2$ — стратегия, где ζ — липшицева кривая, параметризованная длиной дуги. Мы говорим, что это *спиральная стратегия*, если она удовлетворяет условиям:

1. $\zeta(0) = (1, 0)$ и $\zeta|_{[0, S]}$ инъективна,
2. $s \mapsto u \circ \zeta(s)$ возрастает,
3. функция ζ локально выпукла, т. е. локально является графиком выпуклой функции: для каждого $s > 0$ существует система координат вокруг $\zeta(s)$ такая, что $\text{Graph}(\zeta)$ совпадает с графиком выпуклой функции в окрестности $\zeta(s)$ ($\dot{\zeta}(s)$ можно записать как $\dot{\zeta}(s) = e^{i\theta(s)}$ с монотонной $\theta(s)$).
4. ζ вращается против часовой стрелки вокруг 0.

Спираль ζ является *допустимой*, если она также является допустимым барьером.

Предположение о том, что ζ локально выпукла, позволяет определить направление вращения кривой, после чего условие 4 задает направление вращения.

Более глубокого обсуждения требует предположение

$$s \rightarrow u \circ \zeta(s) \quad \text{возрастает,}$$

соответствующее тому факту, что либо часть барьера лежит на множестве уровня $\{u = t\}$, либо огонь не может одновременно сжечь две части барьера. Иными словами, $\zeta^{-1}(\{u < t\})$ является связным отрезком. Отметим, что, имея барьер до момента времени $\bar{t}$ (или, эквивалентно, длиной $\bar{s}$), мы можем задаться вопросом, какой барьер является оптимальным для данной задачи оптимизации с той же степенью свободы, что и для исходной задачи. Это последнее наблюдение будет иметь фундаментальное значение в нашем гомотопическом аргументе (пункт 5 в аннотации).

Единственные известные результаты об этом семейству барьеров можно найти в работах [7, 15]. В этих двух работах независимо и с использованием различных методик доказан следующий результат:

Теорема 2.1. Пусть $\sigma > 2,6144\dots$ (*критическая скорость*). Тогда существует спиралевидная стратегия, которая ограничивает распространение огня.

Доказательство этого результата получается путем изучения конкретной спирали, которую мы назовем насыщенной спиралью. Пусть Z — допустимая спираль. Мы говорим, что $Z = Z_{\text{sat}}$ является *насыщенной спиралью*, если

$$\mathcal{S}(Z_{\text{sat}}) = \{t \in [0, T] : \mathcal{H}^1(Z_{\text{sat}} \cap \overline{R^{Z_{\text{sat}}}(t)}) = \sigma t\} = [0, T].$$

В терминах ранее определенного функционала допустимости каждая точка $P \in Z$ на насыщенной спирали является *насыщенной*, т. е. $\mathcal{A}(P) = 0$.

Насыщенные спирали (или компактные и связные подмножества насыщенных спиралей) считаются строительными блоками для оптимальных стратегий. Действительно, в работе [11] доказано, что если $\sigma > 2$, то оптимальная стратегия (минимизирующая функционал стоимости (1.6)) среди простых замкнутых кривых представляет собой объединение дуги окружности и двух ветвей насыщенных логарифмических спиралей в полярных координатах. Как мы увидим, между логарифмическими спиралями и насыщенными спиралями существуют тесные связи. Также в работе [2] доказано, что при $\sigma < 2$, если стратегия Z является оптимальной ($\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$) и ее внутренний барьер представляет собой отрезок, то граница ∂R_{∞}^Z представляет собой объединение отрезка и ветви логарифмической спирали.

Доказательство теоремы 2.1 основано на следующем факте: насыщенная спираль Z_{sat} может быть представлена в полярных координатах $(\phi, r_{\text{sat}}(\phi)) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^+$, и, кроме того, $r_{\text{sat}}(\phi)$ является решением следующего уравнения с запаздыванием:

$$\frac{d}{d\phi} r_{\text{sat}}(\phi) = \text{ctg}(\alpha) r_{\text{sat}}(\phi) - \frac{r_{\text{sat}}(\phi - (2\pi + \alpha))}{\sin(\alpha)} \quad (2.1)$$

с начальными данными

$$r_{\text{sat}}(\phi) = \begin{cases} e^{\text{ctg} \alpha \phi} & \forall \phi \in [0, 2\pi), \\ (e^{2\pi \text{ctg} \alpha} - 1) e^{\text{ctg} \alpha (\phi - 2\pi)} & \forall \phi \in [2\pi, 2\pi + \alpha]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Угол $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ задается формулой

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

(это именно тот подход, которому следует работа [15]). Угол α — это постоянный угол, образованный лучом пожара со спиралью. Здесь начальное условие для пожара — это множество $R_0 = B_1(0)$, а спираль начинается в точке $P = (1, 0)$. Заметим, что при $\phi < 2\pi$ решение представляет собой дугу логарифмической спирали в полярных координатах $r_{\text{sat}}(\phi) = e^{\text{ctg } \alpha \phi}$.

Доказательство теоремы 2.1 осуществляется исследованием собственных значений оператора, связанного с уравнением выше: существует критическое значение ($\bar{\sigma} = 2,6144\dots$, решение трансцендентного уравнения) такое, что если $\sigma > \bar{\sigma}$, то все собственные значения соответствующего линейного оператора являются комплексно сопряженными: в частности, решение колеблется, следовательно, существует некоторый первый угол $\bar{\phi}$ такой, что $r_{\text{sat}}(\bar{\phi}) = 0$. Это точно соответствует тому факту, что Z_{sat} блокирует огонь.

Однако в работе [7] не доказано, что, наоборот, при $\sigma \leq \bar{\sigma}$ насыщенная спираль не ограничивает огонь, т. е. $r_{\text{sat}}(\phi) > 0$ для любого угла ϕ : этот факт можно вывести из утверждения [15, теорема 3], которая дает оценку

$$\text{минимальный угол закрытия} \sim (\text{мнимая часть наибольшего собственного значения})^{-1}.$$

Полученные результаты обосновывают следующую гипотезу относительно спиралей общего типа.

Гипотеза 2.1. *Если $\sigma \leq \bar{\sigma}$, то никакая спиралевидная стратегия не сможет остановить огонь.*

Здесь отметим, что из-за ограничений на барьер критическая скорость $\bar{\sigma}$ больше скорости $\sigma = 2$ для исходной гипотезы 1.1.

Частичный ответ на это предположение был дан в работе [15], где авторы используют геометрический аргумент для доказательства следующего результата:

Теорема 2.2. *Если $\sigma \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, то никакая спиралевидная стратегия не является допустимой.*

Эта оценка получена в предположении, что допустимы лишь некоторые точки на спирали, тогда как предположение о допустимости всего барьера требует больших усилий.

Цель нашего исследования — доказать предположение выше:

Теорема 2.3. *Никакая допустимая спиралевидная стратегия не сможет локализовать огонь, если $\sigma \leq \bar{\sigma}$.*

Здесь мы приводим значительно упрощенное представление о нашем подходе. Мы опустим некоторые технические вопросы, которые потребовали бы глубокого анализа; см. [3], где также приведен численный метод, необходимый для анализа.

Во-первых, спиральная стратегия допускает полярное представление $(\phi, r(\phi)) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^+$, как показано на рис. 1 (мы будем называть это представление *уголо-лучевыми* координатами):

- r — длина отрезка, начинающегося от одной точки ζ и направленного по $\dot{\zeta}$, заканчивающегося в следующем витке ζ ;
- ϕ — угол поворота r ;
- $\beta(\phi)$ — угол между ζ в конечной точке $r(\phi)$ и направлением $r(\phi)$.

Мы также можем рассматривать $r(\phi)$ как последнюю часть оптимального луча, необходимую для вычисления функции минимального времени u в точке $\zeta(\phi)$, где используется ϕ вместо s .

Параметр $\beta(\phi)$ является управляющим параметром: после его выбора уравнение на $r(\phi)$ принимает вид

$$\frac{d}{d\phi} r(\phi) = \text{ctg}(\beta(\phi)) r(\phi) - \frac{r(\phi^-)}{\sin(\beta(\phi^-))},$$

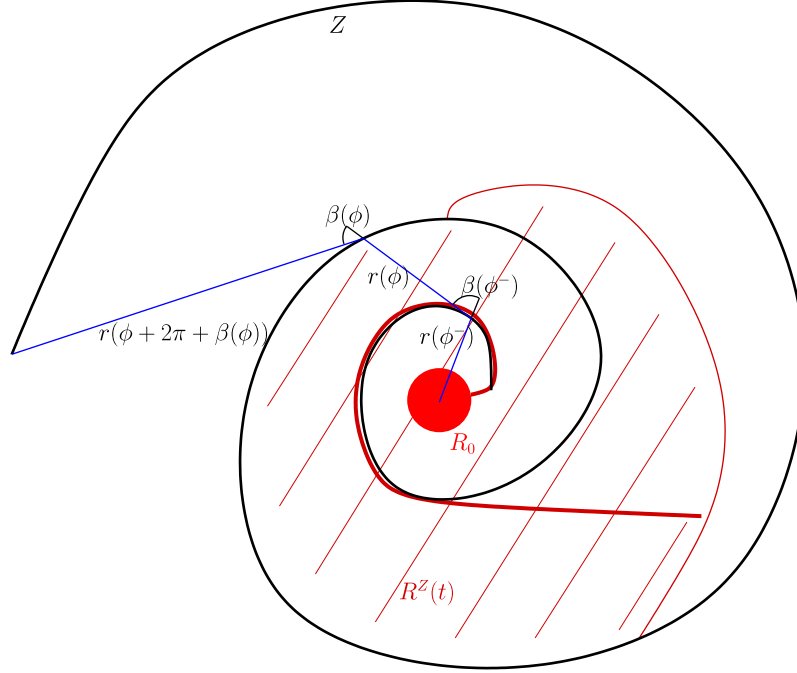


Рис. 1. Угло-лучевая параметризация $(\phi, r(\phi))$ спирального барьера: оптимальный луч пожара обозначен красным цветом, а красная кривая — множество уровня функции минимального времени u . Синим цветом обозначены координаты углового луча.

FIG. 1. The angle-ray parametrization $(\phi, r(\phi))$ of a spiral barrier: the optimal fire ray is red, and the red curve is the level set of the minimum time function u . In blue, the angle-ray coordinates.

где угол ϕ^- задается формулой (см. рис. 1)

$$\phi = \phi^- + 2\pi + \beta(\phi^-).$$

Используя это представление и заметив, что $r(\bar{\phi}) = 0$ означает, что спираль замыкается сама на себя и, таким образом, блокирует огонь, мы заменяем задачу замыкания следующей задачей минимизации:

$$\text{выбрать } \phi \mapsto \beta(\phi) \text{ для минимизации } r(\bar{\phi}) \text{ при заданном угле поворота } \bar{\phi}. \quad (2.3)$$

В отличие от исходной задачи (где нам нужно показать, что множество допустимых стратегий пусто), мы доказываем, что приведенная выше задача имеет оптимальное решение.

Отметим, что хотя уравнение на r является линейным, выбор параметра управления влияет на него, изменяя коэффициенты на следующем витке, а также изменяя интервал задержки $2\pi + \beta(\phi^-)$: поэтому кажется довольно сложным найти положительную нижнюю границу для задачи оптимизации (2.3), или тем более доказать, что выбор управления $\beta(\phi)$ является оптимальным. Заметим также, что β зависит от угла $\bar{\phi}$, т. е. оптимальная спираль не одинакова для всех углов (и, в частности, мы докажем, что это не насыщенная спираль).

Для преодоления этих трудностей мы используем гомотопический подход, описанный ниже. Мы будем ссылаться на рис. 2.

Пусть $\bar{\zeta}(\phi)$ — заданная спиральная стратегия, параметризованная углом поворота: для каждого ϕ_0 мы строим новую спираль $\check{\zeta}(\phi; \bar{\zeta}([0, \phi_0]))$ со следующими свойствами:

1. $\check{\zeta}(\phi; \bar{\zeta}([0, \phi_0])) = \bar{\zeta}(\phi)$ для всех $\phi \in [0, \phi_0]$;
2. если $\check{r}(\phi; \bar{\zeta}([0, \phi_0]))$ — представление спирали в угло-лучевых координатах, то конечное значение $\phi_0 \mapsto \check{r}(\phi; \bar{\zeta}([0, \phi_0]))$ дифференцируемо и имеет положительную производную;
3. спираль $\check{\zeta}(\phi) = \check{\zeta}(\phi; \bar{\zeta}(\{0\}))$ такова, что $\check{r}(\bar{\phi}) > 0$.

спираль не является регулярной, а лишь липшицевой на последнем витке. Это можно эвристически объяснить тем, что последний виток не оказывает влияния на следующую эволюцию (будучи последним), поэтому регуляризующий эффект уравнения с запаздыванием не действует.

Описав оптимальную спираль, можно дать оценки, в частности, доказать асимптотическую расходимость оптимальной спирали:

Следствие 2.2. *Спираль Z_{opt} , оптимальная под углом $\bar{\phi}$, удовлетворяет условию*

$$\dot{r}(\bar{\phi}) \simeq \bar{\phi} e^{\bar{c}\bar{\phi}},$$

где $\bar{c}$ — единственное положительное собственное значение уравнения с запаздыванием.

Мы также можем точно определить значение константы перед $\phi e^{\bar{c}\phi}$.

Подведем итоги. Разработан новый дифференциальный инструмент для работы со спиралевидными стратегиями. Выбор угло-лучевых координат для данной спирали является одной из ключевых идей этой статьи. В частности, в этих координатах спираль является решением дифференциального уравнения с запаздыванием, что позволяет сформулировать новую задачу оптимизации, допускающую дифференциальную структуру. Для любой спирали $\bar{Z}$ действительно можно найти дифференциальное семейство спиралей и использовать подход гомотопического типа, чтобы доказать, что любая спиралевидная стратегия не ограничивает огонь при $\sigma \leq \bar{\sigma} = 2,6144\dots$. Главное — угадать правильное выражение семейства спиралей, доказать его дифференцируемость и вычислить производную, и, наконец, показать, что эта производная положительна. Для этого потребуются подробное исследование, проведенное в [3], а также использование программного обеспечения *Mathematica* для вычисления трансцендентных функций. Каждый отдельный строительный блок имеет фундаментальное значение в доказательстве гипотезы Брессана о пожаре для спиралей в ее точной форме. Отметим, что важность этой работы заключается не только в доказательстве гипотезы в контексте спиралевидных стратегий, но и в реализации структуры, которая может быть применена для изучения более общих ситуаций, что, как мы надеемся, приведет к полному решению гипотезы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1951.
2. *Bianchini S., Zizza M.* A case study in fire confinement problems // *Препринт*.
3. *Bianchini S., Zizza M.* Existence of spiral strategies for blocking fire spreading // ArXiv. — 2025. — 2508.05324 [math.AP]. — DOI: [10.48550/arXiv.2508.05324](https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.05324).
4. *Bressan A.* Differential inclusions and the control of forest fires // J. Differ. Equ. — 2007. — 243. — С. 179–207. — DOI: [10.1016/j.jde.2007.03.009](https://doi.org/10.1016/j.jde.2007.03.009).
5. *Bressan A.* Prize offered for the solution of a dynamic blocking problem // Sites at Penn State. Alberto Bressan. — 2011. — Режим доступа: <https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.psu.edu/dist/c/168431/files/2023/07/prize2.pdf> (дата обращения 24.03.2026).
6. *Bressan A.* Dynamic blocking problems for a model of fire propagation // В сб.: «Advances in Applied Mathematics, Modeling, and Computational Science». — Boston: Springer, 2013. — С. 11–40. — DOI: [10.1007/978-1-4614-5389-5_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5389-5_2).
7. *Bressan A., Burago M., Friend A., Jou J.* Blocking strategies for a fire control problem // Anal. Appl. — 2008. — 6. — С. 229–246. — DOI: [10.1142/S0219530508001146](https://doi.org/10.1142/S0219530508001146).
8. *Bressan A., Chiri M. T.* On the regularity of optimal dynamic blocking strategies // Calc. Var. Partial Differ. Equ. — 2022. — 61, № 1. — 36. — DOI: [10.1007/s00526-021-02148-6](https://doi.org/10.1007/s00526-021-02148-6).
9. *Bressan A., De Lellis C.* Existence of optimal strategies for a fire confinement problem // Commun. Pure Appl. Math. — 2009. — 62. — С. 789–830. — DOI: [10.1002/cpa.20271](https://doi.org/10.1002/cpa.20271).
10. *Bressan A., Wang T.* Equivalent formulation and numerical analysis of a fire confinement problem // ESAIM Control Optim. Calc. Var. — 2010. — 16. — С. 974–1001. — DOI: [10.1051/cocv/2009033](https://doi.org/10.1051/cocv/2009033).
11. *Bressan A., Wang T.* On the optimal strategy for an isotropic blocking problem // Calc. Var. Partial Differ. Equ. — 2012. — 45, № 1-2. — С. 125–145. — DOI: [10.1007/s00526-011-0453-4](https://doi.org/10.1007/s00526-011-0453-4).
12. *Bressan A., Wang T.* Global necessary conditions for a dynamic blocking problem // ESAIM Control Optim. Calc. Var. — 2012. — 18. — С. 124–145. — DOI: [10.1051/cocv/2010053](https://doi.org/10.1051/cocv/2010053).
13. *De Lellis C., Robyr R.* Hamilton–Jacobi equation with obstacles // Arch. Ration. Mech. Anal. — 2011. — 200. — С. 1051–1073. — DOI: [10.1007/s00205-010-0382-y](https://doi.org/10.1007/s00205-010-0382-y).

14. Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. Introduction to Functional Differential Equations. — New York: Springer, 1993. — DOI: [10.1007/978-1-4612-4342-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4342-7).
15. Klein R., Langetepe E., Levcopoulos C., Lingas A., Schwarzwald B. On a fire fighter's problem // Int. J. Found. Comput. Sci. — 2019. — 30, № 2. — С. 231–246. — DOI: [10.1142/S0129054119500023](https://doi.org/10.1142/S0129054119500023).
16. Fitzpatrick P. M., Royden H. I. Real Analysis. — New York: Prentice Hall, 2010.

С. Бьянкини

S.I.S.S.A., Trieste, Italy

E-mail: bianchin@sissa.it, РИНЦ SPIN-код: 8421-6093, РИНЦ AuthorID: [1100693](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=1100693), ResearcherID: [AAC-6123-2021](https://orcid.org/0000-0001-7886-3285), Scopus: [6603954512](https://orcid.org/0000-0001-7886-3285), ORCID: [0000-0001-7886-3285](https://orcid.org/0000-0001-7886-3285)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-24-34](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-24-34)
EDN: [TICEMV](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=1100693)

UDC 517.974:517.911:517.977.1
Research article

Existence of the spiral strategies for blocking fire spreading

S. Bianchini

S.I.S.S.A., Trieste, Italy

Abstract. In this work, we study the problem on blocking fire by constructing a wall ζ whose shape is spiral-like. This is supposed to be the best strategy in the case where a single firefighter is constructing the wall with a finite construction speed σ : the barriers that satisfy this restriction on the construction speed are called admissible.

We prove a sharp version of Bressan's Fire Conjecture [5] in this case, i.e. when admissible barriers are spiral-like curves: namely, there exists a spiral-like barrier confining the fire in a bounded domain of $\mathbb{R}^2$ if and only if the speed of construction of the barrier σ is strictly larger than a critical speed $\bar{\sigma} = 2,614\dots$

The existence of confining spiral barriers for $\sigma > \bar{\sigma}$ is already known [7, 15], while we concentrate on the negative side, i.e. if $\sigma \leq \bar{\sigma}$, then no admissible spiral blocks the fire.

The proof of these results relies on:

1. the precise definition of a spiral barrier and its representation;
2. the analysis of saturated spiral barriers as a Retarded Differential Equation (RDE) in the spirit of [15];
3. the equivalent reformulation of the conjecture as a minimum problem of a functional for a prescribed functional;
4. the construction of the optimal closing spiral;
5. the analysis of a differentiable path of admissible spirals along which the functional is differentiable, and in particular increasing when moving from the optimal spiral to any other one (homotopy argument).

Due to the complexity of the solution, the evaluation of the quantities needed to prove that the functional is increasing is performed numerically.

Keywords: fire blocking, spiral barriers, Bressan fire conjecture, admissible strategies, delay differential equation, homotopy argument, isotropic fire propagation, dynamic blocking problem, rectifiable curves, Hausdorff measure.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: S. Bianchini, “Existence of the spiral strategies for blocking fire spreading,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 24–34. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-24-34](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-24-34) EDN: [TICEMV](https://www.edn.ru/TICEMV)

REFERENCES

1. A. D. Myshkis, *Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear Differential Equations with Retarded Argument], GITTL, Moscow–Leningrad, 1951 (in Russian).
2. S. Bianchini and M. Zizza, “A case study in fire confinement problems,” *Preprint*.
3. S. Bianchini and M. Zizza, “Existence of spiral strategies for blocking fire spreading,” *ArXiv*, 2025, — 2508.05324 [math.AP], DOI: [10.48550/arXiv.2508.05324](https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.05324).
4. A. Bressan, “Differential inclusions and the control of forest fires,” *J. Differ. Equ.*, 2007, **243**, 179–207, DOI: [10.1016/j.jde.2007.03.009](https://doi.org/10.1016/j.jde.2007.03.009).
5. A. Bressan, “Prize offered for the solution of a dynamic blocking problem,” *Sites at Penn State. Alberto Bressan*, 2011. Available online: <https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.psu.edu/dist/c/168431/files/2023/07/prize2.pdf>, accessed on March 24, 2026.
6. A. Bressan, “Dynamic blocking problems for a model of fire propagation,” In: *Advances in Applied Mathematics, Modeling, and Computational Science*, Springer, Boston, 2013, pp. 11–40, DOI: [10.1007/978-1-4614-5389-5_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5389-5_2).
7. A. Bressan, M. Burago, A. Friend, and J. Jou, “Blocking strategies for a fire control problem,” *Anal. Appl.*, 2008, **6**, 229–246, DOI: [10.1142/S0219530508001146](https://doi.org/10.1142/S0219530508001146).
8. A. Bressan and M. T. Chiri, “On the regularity of optimal dynamic blocking strategies,” *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 2022, **61**, No. 1, 36, DOI: [10.1007/s00526-021-02148-6](https://doi.org/10.1007/s00526-021-02148-6).
9. A. Bressan and C. De Lellis, “Existence of optimal strategies for a fire confinement problem,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 2009, **62**, 789–830, DOI: [10.1002/cpa.20271](https://doi.org/10.1002/cpa.20271).
10. A. Bressan and T. Wang, “Equivalent formulation and numerical analysis of a fire confinement problem,” *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2010, **16**, 974–1001, DOI: [10.1051/cocv/2009033](https://doi.org/10.1051/cocv/2009033).
11. A. Bressan and T. Wang, “On the optimal strategy for an isotropic blocking problem,” *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 2012, **45**, No. 1-2, 125–145, DOI: [10.1007/s00526-011-0453-4](https://doi.org/10.1007/s00526-011-0453-4).
12. A. Bressan and T. Wang, “Global necessary conditions for a dynamic blocking problem,” *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2012, **18**, 124–145, DOI: [10.1051/cocv/2010053](https://doi.org/10.1051/cocv/2010053).
13. C. De Lellis and R. Robyr, “Hamilton–Jacobi equation with obstacles,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2011, **200**, 1051–1073, DOI: [10.1007/s00205-010-0382-y](https://doi.org/10.1007/s00205-010-0382-y).
14. J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1993, DOI: [10.1007/978-1-4612-4342-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4342-7).
15. R. Klein, E. Langetepe, C. Levcopoulos, A. Lingas, and B. Schwarzwald, “On a fire fighter’s problem,” *Int. J. Found. Comput. Sci.*, 2019, **30**, No. 2, 231–246, DOI: [10.1142/S0129054119500023](https://doi.org/10.1142/S0129054119500023).
16. P. M. Fitzpatrick and H. I. Royden, *Real Analysis*, Prentice Hall, New York, 2010.

S. Bianchini

S.I.S.S.A., Trieste, Italy

E-mail: bianchin@sissa.it, eLIBRARY SPIN-code: 8421-6093, eLIBRARY AuthorID: [1100693](https://www.e-library.ru/author/1100693), ResearcherID: [AAC-6123-2021](https://orcid.org/0000-0001-7886-3285), Scopus: [6603954512](https://orcid.org/6603954512), ORCID: [0000-0001-7886-3285](https://orcid.org/0000-0001-7886-3285)