

СОЛИТОНЫ РИЧЧИ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

Л. БЕЛАРБИ

University of Mostaganem, Mostaganem, Algeria

Аннотация. В данной работе мы рассматриваем и изучаем существование нетривиальных (т. е. не эйнштейновских) солитонов Риччи на римановых трехмерных и пятимерных разрешимых группах Ли. Более того, мы показываем, что они не являются градиентными солитонами Риччи.

Ключевые слова: солитоны Риччи, разрешимые группы Ли, римановы многообразия, градиентные солитоны Риччи, трехмерные группы Ли, пятимерные группы Ли, метрики Эйнштейна, поток Риччи, лоренцевы многообразия, связность Леви-Чивиты.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Беларби Л. Солитоны Риччи разрешимых групп Ли // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 13–23. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-13-23](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-13-23) EDN: [TGXCNE](https://www.edn.ru/TGXCNE)

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитон Риччи — это естественное обобщение метрики Эйнштейна, и он определяется на псевдоримановом многообразии (M, g) следующим образом:

$$L_X g + \varrho = \lambda g, \quad (1.1)$$

где X — гладкое векторное поле на M , L_X обозначает производную Ли в направлении X , ϱ — тензор Риччи, а λ — действительное число. Солитон Риччи называется *сжимающимся*, *устойчивым* или *расширяющимся*, если $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ или $\lambda < 0$, соответственно. Кроме того, будем говорить, что солитон Риччи (M, g) является *градиентным солитоном Риччи*, если он допускает векторное поле X , удовлетворяющее условию $X = \text{grad } h$ для некоторой потенциальной функции h .

Изучение солитонов Риччи в различных геометрических пространствах является одной из интересных тем в геометрии и математической физике. В частности, эта тема приобрела большее значение после того, как Григорий Перельман применил солитоны Риччи для решения давней гипотезы Пуанкаре. Солитоны Риччи соответствуют автомодельным решениям гамильтонова потока Риччи [15], играют фундаментальную роль в формировании сингулярностей потока, и изучались несколькими авторами (см. [11, 12]). Их можно рассматривать в качестве неподвижных точек потока Риччи как динамической системы на пространстве римановых метрик по модулю диффеоморфизмов и масштабирований. Солитоны Риччи представляют интерес и для физиков, и в физической литературе называются *квазиэйнштейновскими метриками*. Фактически, физики-теоретики изучают уравнение солитонов Риччи в связи с теорией струн. Важный вклад в этом направлении принадлежит Фридану [14].

Лоренцевы солитоны Риччи интенсивно изучались и обнаружили множество существенных различий по сравнению с римановым случаем (см. [7, 21]). В самом деле, хотя существуют трехмерные римановы однородные солитоны Риччи [1, 18], на трехмерных группах Ли [13] не существует левоинвариантных римановых солитонов Риччи [13] (см. также [16]). В работе [8] Кальварузо и Фио (см. также [9]) было доказано, в отличие от риманового случая, существование некомпактных четырехмерных однородных псевдоримановых солитонов Риччи, которые не изометричны солвмногообразиям. Эти результаты стимулируют дальнейшее исследование солитонов Риччи на лоренцевских многообразиях.

2. СОЛИТОНЫ РИЧЧИ ТРЕХМЕРНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ ЛИ

В этом разделе мы анализируем существование солитонов Риччи на трехмерной римановой разрешимой группе Ли (Sol_3, g) .

Пусть $X = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$ — произвольное векторное поле на (Sol_3, g) , где $f_1, \dots, f_3$ — гладкие функции переменных x, y, z . Мы будем обозначать координатный базис $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ через $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$.

Риманова группа Ли Sol_3 — это группа Ли в $\mathbb{R}^3$, снабженная левоинвариантной римановой метрикой

$$g = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2, \quad (2.1)$$

где (x, y, z) — стандартные координаты в $\mathbb{R}^3$.

Левоинвариантный ортонормированный репер $\{E_1, E_2, E_3\}$ в римановой группе Ли Sol_3 задается следующим образом:

$$E_1 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Связность Леви-Чивиты ∇ римановой группы Ли Sol_3 относительно этого репера задается как

$$\begin{cases} \nabla_{E_1} E_1 = -E_3, & \nabla_{E_1} E_2 = 0, & \nabla_{E_1} E_3 = E_1, \\ \nabla_{E_2} E_1 = 0, & \nabla_{E_2} E_2 = E_3, & \nabla_{E_2} E_3 = -E_2, \\ \nabla_{E_3} E_1 = 0, & \nabla_{E_3} E_2 = 0, & \nabla_{E_3} E_3 = 0. \end{cases}$$

Ненулевые компоненты тензора кривизны R вычисляются следующим образом:

$$\begin{cases} R(E_1, E_2)E_1 = -E_2, & R(E_1, E_2)E_2 = E_1, \\ R(E_1, E_3)E_1 = E_3, & R(E_1, E_3)E_3 = -E_1, \\ R(E_2, E_3)E_2 = E_3, & R(E_2, E_3)E_3 = -E_2. \end{cases}$$

Компоненты кривизны Риччи $\{\varrho_{ij}\}$ вычисляются следующим образом:

$$\varrho_{11} = \varrho_{12} = \varrho_{13} = \varrho_{23} = \varrho_{22} = 0, \quad Ric_{33} = -2. \quad (2.2)$$

Скалярная кривизна τ римановой группы Ли Sol_3 постоянна, и мы имеем

$$\tau = tr \varrho = \sum_{i=1}^3 g(E_i, E_i) \varrho(E_i, E_i) = -2.$$

Рассмотрим трехмерную разрешимую группу Ли (Sol_3, g) , снабженную левоинвариантной римановой метрикой (2.1), и пусть X — векторное поле на Sol_3 . Производная Ли метрики (2.1) по X задается формулой

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_X g)(E_1, E_1) = 2[f_3 + e^{-z} \partial_x f_1], \\ (\mathcal{L}_X g)(E_1, E_2) = e^{-z} \partial_x f_2 + e^z \partial_y f_1, \\ (\mathcal{L}_X g)(E_1, E_3) = e^{-z} \partial_x f_3 - f_1 + \partial_z f_1, \\ (\mathcal{L}_X g)(E_2, E_2) = -2[f_3 - e^z \partial_y f_2], \\ (\mathcal{L}_X g)(E_2, E_3) = e^z \partial_y f_3 + f_2 + \partial_z f_2, \\ (\mathcal{L}_X g)(E_3, E_3) = 2\partial_z f_3. \end{cases} \quad (2.3)$$

Таким образом, с учетом равенств (2.1), (2.2) и (2.3) в (1.1), простые вычисления показывают, что риманова трехмерная разрешимая группа Ли (Sol_3, g) является солитоном Риччи тогда и только тогда, когда справедлива следующая система:

$$\begin{cases} f_3 + e^{-z}\partial_x f_1 = \frac{\lambda}{2}, \\ e^{-z}\partial_x f_2 + e^z\partial_y f_1 = 0, \\ e^{-z}\partial_x f_3 - f_1 + \partial_z f_1 = 0, \\ f_3 - e^z\partial_y f_2 = -\frac{\lambda}{2}, \\ e^z\partial_y f_3 + f_2 + \partial_z f_2 = 0, \\ \partial_z f_3 - 1 = \frac{\lambda}{2}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Шестое уравнение в (2.4) дает

$$f_3 = \left(\frac{\lambda}{2} + 1\right)z + F(x, y). \quad (2.5)$$

Из первого уравнения в (2.4) имеем

$$\partial_x f_1 = e^z \left[\frac{\lambda}{2} - \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)z - F \right] \quad (2.6)$$

и, выписывая (2.6) относительно z , получим

$$\partial_z \partial_x f_1 = e^z \left[-\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)z - F - 1 \right]. \quad (2.7)$$

Далее выпишем третье уравнение в (2.4) относительно x и, используя (2.6) и (2.7), докажем, что $\lambda = -2$ и

$$\partial_x^2 F = 0. \quad (2.8)$$

С другой стороны, из четвертого уравнения в (2.4) получим

$$\partial_y f_2 = e^{-z} \left[\frac{\lambda}{2} + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)z + F \right] \quad (2.9)$$

и, выписывая уравнение (2.9) относительно z , получим

$$\partial_z \partial_y f_2 = e^{-z} \left[-\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)z - F + 1 \right]. \quad (2.10)$$

Далее выпишем пятое уравнение в (2.4) относительно y и, используя (2.9) и (2.10), убедимся, что $\lambda = -2$, и получим, что

$$\partial_y^2 F = 0. \quad (2.11)$$

Из уравнений (2.5), (2.11) и (2.8) следует, что

$$f_3 = F(x, y) = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 xy + \beta_4, \quad (2.12)$$

где $\beta_i \in \mathbb{R}$.

Из первого уравнения в (2.4) и из (2.12) получим

$$f_1 = e^z \left[-(1 + \alpha_4)x - \frac{\beta_1}{2}x^2 - \beta_2 xy - \frac{\beta_3}{2}x^2 y \right] + T(y, z),$$

где T — гладкая функция.

Из четвертого уравнения в (2.4) и равенства (2.12) получим

$$f_2 = e^{-z} \left[(\beta_4 - 1)y + \beta_1 xy + \frac{\beta_2}{2}y^2 + \frac{\beta_3}{2}xy^2 \right] + I(x, z),$$

где I — гладкая функция.

Далее, заменив f_1 и f_2 во втором уравнении в (2.4), получим

$$\left(e^z \partial_y T + e^{-2z} \left[\beta_1 y + \frac{\beta_3}{2} y^2 \right] \right) + \left(e^{-z} \partial_x I - e^{2z} \left[\beta_2 x + \frac{\beta_3}{2} x^2 \right] \right) = 0. \quad (2.13)$$

Поскольку приведенное выше уравнение (2.13) выполняется для всех значений z , в частности, это означает, что

$$\begin{cases} e^z \partial_y T + e^{-2z} \left[\beta_1 y + \frac{\beta_3}{2} y^2 \right] = 0, \\ e^{-z} \partial_x I - e^{2z} \left[\beta_2 x + \frac{\beta_3}{2} x^2 \right] = 0. \end{cases}$$

откуда, интегрируя, получим

$$\begin{cases} T = -e^{-3z} \left[\frac{\beta_1}{2} y^2 + \frac{\beta_3}{6} y^3 \right] + \overline{T}(z), \\ I = e^{3z} \left[\frac{\beta_2}{2} x^2 + \frac{\beta_3}{6} x^3 \right] + \overline{I}(z). \end{cases}$$

где $\overline{T}$ и $\overline{I}$ — гладкие функции.

Таким образом,

$$\begin{cases} f_1 = e^z \left[-(1 + \beta_4)x - \frac{\beta_1}{2} x^2 - \beta_2 xy - \frac{\beta_3}{2} x^2 y \right] - e^{-3z} \left[\frac{\beta_1}{2} y^2 + \frac{\beta_3}{6} y^3 \right] + \overline{T}(z), \\ f_2 = e^{-z} \left[(\beta_4 - 1)y + \beta_1 xy + \frac{\beta_2}{2} y^2 + \frac{\beta_3}{2} xy^2 \right] + e^{3z} \left[\frac{\beta_2}{2} x^2 + \frac{\beta_3}{6} x^3 \right] + \overline{I}(z). \end{cases}$$

Подставляя f_1 и f_3 в третье уравнение в (2.4), получим

$$e^{-z} [\beta_1 + \beta_3 y] + 4e^{-3z} \left[\frac{\beta_1}{2} y^2 + \frac{\beta_3}{6} y^3 \right] - \overline{T}(z) + \overline{T}'(z) = 0. \quad (2.14)$$

Поскольку приведенное выше уравнение (2.14) выполняется для всех значений z , в частности, это означает, что $\beta_1 = \beta_3 = 0$ и

$$\overline{T} = t_1 e^z,$$

где $t_1 \in \mathbb{R}^{*,+}$.

Подставив f_2 и f_3 в пятое уравнение в (2.4), получим

$$e^z [\beta_2 + \beta_3 x] + 4e^{3z} \left[\frac{\beta_2}{2} x^2 + \frac{\beta_3}{6} x^3 \right] + \overline{I}(z) + \overline{I}'(z) = 0. \quad (2.15)$$

Поскольку приведенное выше уравнение (2.15) выполняется для всех значений z , в частности, это означает, что $\beta_2 = \beta_3 = 0$ и

$$\overline{I} = t_2 e^{-z},$$

где $t_2 \in \mathbb{R}^{*,+}$.

Наконец, решение системы (2.4) выражается следующим образом:

$$\begin{cases} f_1 = (t_1 - (\beta_4 + 1)x) e^z, \\ f_2 = (t_2 + (\beta_4 - 1)y) e^{-z}, \\ f_3 = \beta_4, \end{cases} \quad (2.16)$$

где $\beta_4 \in \mathbb{R}$, и $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^{*,+}$. Таким образом, легко следует, что векторное поле $X = f_1 E_1 + f_2 E_2 + f_3 E_3$, где $f_1, \dots, f_3$ задаются формулой (2.16), удовлетворяет системе (2.4). Заметим, что $\lambda = -2$. Подводя итог, мы доказали, что риманова трехмерная разрешимая группа Ли Sol_3 допускает векторные поля, для которых выполняется уравнение (1.1). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть (Sol_3, g) — трехмерная разрешимая группа Ли, снабженная левосинвариантной римановой метрикой g , заданной уравнением (2.1). Тогда (Sol_3, g) является расширяющимся солитоном Риччи.

Пусть $X = \text{grad } f$ — произвольное градиентное векторное поле на (Sol_3, g) с потенциальной функцией f , а X задается следующим образом:

$$\text{grad } f = e^{-2z} \partial_x f \partial_x + e^{2z} \partial_y f \partial_y + \partial_z f \partial_z.$$

Из (2.16) следует, что (Sol_3, g) является градиентным солитоном тогда и только тогда, когда потенциальная функция h удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \partial_x f = (t_1 - (\beta_4 + 1)x) e^{2z}, \\ \partial_y f = (t_2 + (\beta_4 - 1)y) e^{-2z}, \\ \partial_z f = \beta_4. \end{cases}$$

Следовательно, взяв производные по z первого уравнения и по x последнего уравнения в приведенной выше системе, мы заключаем, что $\partial_x \partial_z f = 2(t_1 - (\beta_4 + 1)x) e^{2z} = 0$ и, следовательно, $t_1 = 0$ и $\beta_4 = 1$. Далее, взяв производные по z второго уравнения и по y последнего уравнения в приведенной выше системе, мы заключаем, что $\partial_y \partial_z f = -2(t_2 + (\beta_4 - 1)y) e^{-2z} = 0$ и, следовательно, $t_2 = 0$ и $\beta_4 = -1$, что приводит к противоречию. Таким образом, мы доказали следующий результат.

Следствие 2.1. Пусть (Sol_3, g) — трехмерная разрешимая группа Ли, снабженная левоинвариантной римановой метрикой g , заданной уравнением (2.1). Тогда (Sol_3, g) не является градиентным солитоном Риччи.

3. Солитоны Риччи пятимерной разрешимой группы Ли

В этом разделе мы анализируем существование солитонов Риччи на пятимерной римановой разрешимой группе Ли (Sol_5, g) .

Рассмотрим пятимерную разрешимую группу Ли (Sol_5, g) , снабженную левоинвариантной римановой метрикой.

$$g = \sum_{i=0}^2 e^{-2u_i} (dx_i)^2 + a \sum_{\alpha, \beta=1}^2 du_\alpha du_\beta. \quad (3.1)$$

Пусть $V = X\partial_{x_0} + Y\partial_{x_1} + Z\partial_{x_2} + S\partial_{u_1} + T\partial_{u_2}$ — векторное поле на Sol_5 , где X, Y, Z, S, T — гладкие функции переменных x_0, x_1, x_2, u_1, u_2 . Ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\varrho_{u_1 u_1} = \varrho_{u_2 u_2} = -2 \text{ и } \varrho_{u_1 u_2} = -1. \quad (3.2)$$

Производная Ли метрики (3.1) по V задается формулой

$$\left\{ \begin{array}{l} (L_V g)(\partial_{x_0}, \partial_{x_0}) = 2e^{2(u_1+u_2)}(S+T+\partial_{x_0}X), \\ (L_V g)(\partial_{x_0}, \partial_{x_1}) = e^{-2u_1}\partial_{x_0}Y + e^{2(u_1+u_2)}\partial_{x_1}X, \\ (L_V g)(\partial_{x_0}, \partial_{x_2}) = e^{-2u_2}\partial_{x_0}Z + e^{2(u_1+u_2)}\partial_{x_2}X, \\ (L_V g)(\partial_{x_0}, \partial_{u_1}) = a\partial_{x_0}S + \frac{a}{2}\partial_{x_0}T + e^{2(u_1+u_2)}\partial_{u_1}X, \\ (L_V g)(\partial_{x_0}, \partial_{u_2}) = a\partial_{x_0}T + \frac{a}{2}\partial_{x_0}S + e^{2(u_1+u_2)}\partial_{u_2}X, \\ (L_V g)(\partial_{x_1}, \partial_{x_1}) = 2e^{-2u_1}(-S+\partial_{x_1}Y), \\ (L_V g)(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) = e^{-2u_2}\partial_{x_1}Z + e^{-2u_1}\partial_{x_2}Y, \\ (L_V g)(\partial_{x_1}, \partial_{u_1}) = a\partial_{x_1}S + \frac{a}{2}\partial_{x_1}T + e^{-2u_1}\partial_{u_1}Y, \\ (L_V g)(\partial_{x_1}, \partial_{u_2}) = a\partial_{x_1}T + \frac{a}{2}\partial_{x_1}S + e^{-2u_1}\partial_{u_2}Y, \\ (L_V g)(\partial_{x_2}, \partial_{x_2}) = 2e^{-2u_2}(-T+\partial_{x_2}Z), \\ (L_V g)(\partial_{x_2}, \partial_{u_1}) = a\partial_{x_2}S + \frac{a}{2}\partial_{x_2}T + e^{-2u_2}\partial_{u_1}Z, \\ (L_V g)(\partial_{x_2}, \partial_{u_2}) = a\partial_{x_2}T + \frac{a}{2}\partial_{x_2}S + e^{-2u_2}\partial_{u_2}Z, \\ (L_V g)(\partial_{u_1}, \partial_{u_1}) = 2a\partial_{u_1}S + a\partial_{u_1}T, \\ (L_V g)(\partial_{u_1}, \partial_{u_2}) = a\partial_{u_1}T + a\partial_{u_2}S + \frac{a}{2}\partial_{u_1}S + \frac{a}{2}\partial_{u_2}T, \\ (L_V g)(\partial_{u_2}, \partial_{u_2}) = 2a\partial_{u_2}T + a\partial_{u_2}S. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Таким образом, подставляя равенства (3.1), (3.2) и (3.3) в уравнение (1.1), с помощью стандартных вычислений получаем, что риманова пятимерная разрешимая группа Ли (Sol_5, g) является

солитоном Риччи тогда и только тогда, когда справедлива следующая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} S + T + \partial_{x_0} X = \frac{\lambda}{2}, \\ e^{-2u_1} \partial_{x_0} Y + e^{2(u_1+u_2)} \partial_{x_1} X = 0, \\ e^{-2u_2} \partial_{x_0} Z + e^{2(u_1+u_2)} \partial_{x_2} X = 0, \\ a \partial_{x_0} S + \frac{a}{2} \partial_{x_0} T + e^{2(u_1+u_2)} \partial_{u_1} X = 0, \\ a \partial_{x_0} T + \frac{a}{2} \partial_{x_0} S + e^{2(u_1+u_2)} \partial_{u_2} X = 0, \\ \partial_{x_1} Y - S = \frac{\lambda}{2}, \\ e^{-2u_2} \partial_{x_1} Z + e^{-2u_1} \partial_{x_2} Y = 0, \\ a \partial_{x_1} S + \frac{a}{2} \partial_{x_1} T + e^{-2u_1} \partial_{u_1} Y = 0, \\ a \partial_{x_1} T + \frac{a}{2} \partial_{x_1} S + e^{-2u_1} \partial_{u_2} Y = 0, \\ \partial_{x_2} Z - T = \frac{\lambda}{2}, \\ a \partial_{x_2} S + \frac{a}{2} \partial_{x_2} T + e^{-2u_2} \partial_{u_1} Z = 0, \\ a \partial_{x_2} T + \frac{a}{2} \partial_{x_2} S + e^{-2u_2} \partial_{u_2} Z = 0, \\ 2a \partial_{u_1} S + a \partial_{u_1} T = \lambda a + 2, \\ a \partial_{u_1} T + a \partial_{u_2} S + \frac{a}{2} \partial_{u_1} S + \frac{a}{2} \partial_{u_2} T = \lambda \frac{a}{2} + 1, \\ 2a \partial_{u_2} T + a \partial_{u_2} S = \lambda a + 2. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Выпишем тринадцатое и последнее уравнения в (3.4) относительно u_2 и u_1 соответственно, получим

$$\partial_{u_1} \partial_{u_2} S = \partial_{u_1} \partial_{u_2} T = 0.$$

Производные четырнадцатого и последнего уравнения (3.4) по u_2 дают

$$\partial_{u_2}^2 S = \partial_{u_2}^2 T = 0.$$

Снова выпишем тринадцатое и четырнадцатое уравнения в (3.4) относительно u_1 , получим

$$\partial_{u_1}^2 S = \partial_{u_1}^2 T = 0.$$

Следовательно, имеем

$$S = \overline{S}u_2 + \overline{\overline{S}}u_1 + \widehat{S},$$

$$T = \overline{T}u_2 + \overline{\overline{T}}u_1 + \widehat{T},$$

где $\overline{S}, \overline{\overline{S}}, \widehat{S}, \overline{T}, \overline{\overline{T}}, \widehat{T}$ — вещественнозначные гладкие функции, зависящие от (x_0, x_1, x_2) .

Затем, заменив S и T в трех последних уравнениях (3.4), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\overline{\overline{S}} + \overline{\overline{T}} = \lambda + \frac{2}{a}, \\ 2\overline{S} + 2\overline{\overline{T}} + \overline{\overline{S}} + \overline{T} = \lambda + \frac{2}{a}, \\ 2\overline{T} + \overline{S} = \lambda + \frac{2}{a}, \end{array} \right.$$

что дает

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{T} = \lambda + \frac{2}{a} - \overline{\overline{S}}, \\ \overline{\overline{T}} = \lambda + \frac{2}{a} - 2\overline{S}, \\ \overline{S} = -\lambda - \frac{2}{a} + 2\overline{\overline{S}}, \end{array} \right.$$

и, следовательно, S и T выражаются в виде

$$S = \bar{\bar{S}}u_1 + \left(-\lambda - \frac{2}{a} + 2\bar{\bar{S}}\right)u_2 + \hat{S}, \quad (3.5)$$

$$T = \left(\lambda + \frac{2}{a} - 2\bar{\bar{S}}\right)u_1 + \left(\lambda + \frac{2}{a} - \bar{\bar{S}}\right)u_2 + \hat{T}.$$

Далее выпишем восьмое уравнение в (3.4) относительно u_1 и, используя (3.5), получим

$$\partial_{u_1}^2 Y - 2\partial_{u_1} Y = 0. \quad (3.6)$$

Дважды продифференцировав шестое уравнение в (3.4) по u_1 и взяв производную от (3.6) по x_1 , мы получим, что, поскольку $\partial_{u_1}^2 S = 0$,

$$\partial_{u_1} S = \partial_{x_1} \partial_{u_1} Y = 0,$$

система (3.5) сводится к

$$S = -\left(\lambda + \frac{2}{a}\right)u_2 + \hat{S}, \quad (3.7)$$

$$T = \left(\lambda + \frac{2}{a}\right)u_1 + \left(\lambda + \frac{2}{a}\right)u_2 + \hat{T}.$$

Теперь выпишем восьмое и девятое уравнения в (3.4) относительно u_2 и u_1 , соответственно, и, используя (3.7), заключим, что $\partial_{u_2} Y = 0$. Следовательно, интегрируя (3.6) по u_1 и учитывая, что $\partial_{x_1} \partial_{u_1} Y = 0$, получим

$$Y = \bar{Y}e^{2u_1} + \bar{\bar{Y}} \quad (3.8)$$

для произвольных гладких функций $\bar{Y} = \bar{Y}(x_0, x_2)$ и $\bar{\bar{Y}} = \bar{\bar{Y}}(x_0, x_1, x_2)$.

С другой стороны, производная шестого уравнения в (3.4) по u_2 дает $\partial_{u_2} S = 0$, и поэтому мы имеем $\lambda = -\frac{2}{a}$. Таким образом, (3.7) записывается как

$$S = \hat{S}(x_0, x_1, x_2),$$

$$T = \hat{T}(x_0, x_1, x_2).$$

Взяв производную одиннадцатого и двенадцатого уравнений в (3.4) по u_2 и u_1 , соответственно, получим $\partial_{u_1} Z = 0$. Затем, выписывая десятое уравнение в (3.4) по u_2 , получим $\partial_{x_2} \partial_{u_2} Z = 0$.

Далее, выпишем двенадцатое уравнение в (3.4) относительно u_2 и получим

$$\partial_{u_2}^2 Z - 2\partial_{u_2} Z = 0,$$

что дает

$$Z = \bar{Z}e^{2u_2} + \bar{\bar{Z}} \quad (3.9)$$

для произвольных гладких функций $\bar{Z} = \bar{Z}(x_0, x_1)$ и $\bar{\bar{Z}} = \bar{\bar{Z}}(x_0, x_1, x_2)$.

Из шестого и десятого уравнений в (3.4) с учетом (3.8) и (3.9) получим

$$S = \partial_{x_1} \bar{\bar{Y}} - \frac{\lambda}{2}, \quad (3.10)$$

$$T = \partial_{x_2} \bar{\bar{Z}} - \frac{\lambda}{2}.$$

Выполнив замены (3.8) и (3.9) в седьмом уравнении (3.4), получим

$$\begin{cases} \bar{\bar{Z}} = \bar{\bar{Z}}(x_0, x_2), \\ \bar{\bar{Y}} = \bar{\bar{Y}}(x_0, x_1), \\ \partial_{x_1} \bar{Z}(x_0, x_1) + \partial_{x_2} \bar{Y}(x_0, x_2) = 0. \end{cases}$$

Используя одиннадцатое и двенадцатое уравнения в (3.4) и тот факт, что $\bar{\bar{Y}} = \bar{\bar{Y}}(x_0, x_1)$, мы заключаем, что $\partial_{x_2}^2 \bar{\bar{Z}}(x_0, x_2) = \bar{Z}(x_0, x_1) = 0$, и, следовательно, $\bar{Y} = \bar{Y}(x_0)$. Таким образом, уравнение (3.9) принимает вид

$$Z = \hat{Z}x_2 + \tilde{Z} \quad (3.11)$$

для произвольных вещественных гладких функций $\widehat{Z} = \widehat{Z}(x_0)$ и $\widetilde{Z} = \widetilde{Z}(x_0)$.

Теперь, выполнив замены (3.10) и (3.8) в восьмом и девятом уравнениях (3.4) и приняв во внимание (3.11), получим

$$\partial_{x_1}^2 \overline{\overline{Y}} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{Y} = 0.$$

Следовательно, равенство (3.8) принимает вид

$$Y = \widehat{Y}x_1 + \widetilde{Y}, \quad (3.12)$$

где $\widehat{Y} = \widehat{Y}(x_0)$ и $\widetilde{Y} = \widetilde{Y}(x_0)$ — гладкие функции.

Таким образом, (3.10) сводится к

$$\begin{aligned} S &= \widehat{Y} - \frac{\lambda}{2}, \\ T &= \widehat{Z} - \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Выписав пятое уравнение в (3.4) относительно x_1 и используя (3.13), получим

$$\partial_{x_1} \partial_{u_2} X = 0.$$

Затем возьмем производную второго уравнения в (3.4) по u_2 и получим (поскольку $\partial_{u_2} Y = 0$)

$$\partial_{x_1} X = 0,$$

что вместе со вторым уравнением в (3.4) дает $\partial_{x_0} Y = 0$, и поэтому (3.12) сводится к

$$Y = c_1 x_1 + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Далее выпишем четвертое уравнение в (3.4) относительно x_2 и, используя (3.13), (3.12) и (3.11), получим

$$\partial_{x_2} \partial_{u_1} X = 0.$$

Таким образом, производная третьего уравнения в (3.4) по u_1 дает (поскольку $\partial_{u_1} Z = 0$)

$$\partial_{x_2} X = 0,$$

что вместе с третьим уравнением (3.4) влечет $\partial_{x_0} Z = 0$, и, следовательно, (3.11) принимает вид

$$Z = c_3 x_2 + c_4, \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Следовательно, из (3.13) получим

$$\begin{aligned} S &= c_1 - \frac{\lambda}{2}, \\ T &= c_3 - \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Наконец, используя первое, четвертое и пятое уравнения в (3.4), мы получим, что

$$X = \left(\frac{3\lambda}{2} - c_1 - c_3 \right) x_0 + c_5, \quad c_5 \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

Таким образом, имеем векторное поле $V = X\partial_{x_0} + Y\partial_{x_1} + Z\partial_{x_2} + S\partial_{u_1} + T\partial_{u_2}$, где X, Y, Z, S, T задаются равенствами (3.17), (3.14), (3.15) и (3.16). Заметим, что $\lambda = -\frac{2}{a} < 0$. Подводя итог, мы доказали, что пятимерная риманова группа Ли Sol_5 допускает векторные поля, для которых выполняется уравнение (1.1), получив следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть (Sol_5, g) — пятимерная разрешимая группа Ли, снабженная левосинвариантной римановой метрикой g , заданной формулой (3.1). Тогда (Sol_5, g) является расширяющимся солитоном Риччи.

Пусть $V = \text{grad } h$ — произвольное градиентное векторное поле на (Sol_5, g) с потенциальной функцией h , тогда V задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{grad } h &= e^{-2(u_1+u_2)} \partial_{x_0} h \partial_{x_0} + e^{2u_1} \partial_{x_1} h \partial_{x_1} + e^{2u_2} \partial_{x_2} h \partial_{x_2} + \\ &+ \frac{2}{3a} (2\partial_{u_1} h - \partial_{u_2} h) \partial_{u_1} + \frac{2}{3a} (2\partial_{u_2} h - \partial_{u_1} h) \partial_{u_2}. \end{aligned}$$

Из (3.17), (3.14), (3.15) и (3.16) следует, что (Sol_5, g) является градиентным солитоном тогда и только тогда, когда потенциальная функция h удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \partial_{x_0} h = e^{2(u_1+u_2)} \left[\left(\frac{3\lambda}{2} - c_1 - c_3 \right) x_0 + c_5 \right], \\ \partial_{x_1} h = e^{-2u_1} (c_1 x_1 + c_2), \\ \partial_{x_2} h = e^{-2u_2} (c_3 x_2 + c_4), \\ \frac{2}{3a} (2\partial_{u_1} h - \partial_{u_2} h) = c_1 - \frac{\lambda}{2}, \\ \frac{2}{3a} (2\partial_{u_2} h - \partial_{u_1} h) = c_3 - \frac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

где $\lambda = -\frac{2}{a}$. Следовательно, взяв производную по x_0 от последних двух уравнений в приведенной выше системе, мы заключаем, что

$$\partial_{x_0} \partial_{u_1} h = 2e^{2(u_1+u_2)} \left[\left(\frac{3\lambda}{2} - c_1 - c_3 \right) x_0 + c_5 \right] = 0,$$

Таким образом, $c_3 = \frac{3\lambda}{2} - c_1$ и $c_5 = 0$. Снова, выписывая последние два уравнения в приведенной выше системе относительно x_1 , получим

$$\partial_{x_1} \partial_{u_1} h = -2e^{-2u_1} (c_1 x_1 + c_2) = 0,$$

откуда $c_1 = c_2 = 0$. Теперь, взяв производную по x_2 от последних двух уравнений в приведенной выше системе, получим, что

$$\partial_{x_2} \partial_{u_2} h = -2e^{-2u_2} (c_3 x_2 + c_4) = 0.$$

Таким образом, мы получили $c_3 = c_4 = 0$, что противоречит $\lambda = -\frac{2}{a}$. Мы доказали следующий результат.

Следствие 3.1. Пусть (Sol_5, g) — пятимерная разрешимая группа Ли, снабженная левоинвариантной римановой метрикой g , заданной формулой (3.1). Тогда (Sol_5, g) не является градиентным солитоном Риччи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baird P., Danielo L. Three-dimensional Ricci solitons which project to surfaces // J. Reine Angew. Math. — 2007. — 608. — С. 65–91. — DOI: [10.1515/CRELLE.2007.053](https://doi.org/10.1515/CRELLE.2007.053).
2. Belarbi L. On the symmetries of Lorentzian four-dimensional generalized symmetric spaces of type C // Mathematica. — 2020. — 62, № 2. — С. 133–147. — DOI: [10.24193/mathcluj.2020.2.03](https://doi.org/10.24193/mathcluj.2020.2.03).
3. Belarbi L. On the symmetries of the Sol_3 Lie group // J. Korean Math. Soc. — 2020. — 57, № 2. — С. 523–537. — DOI: [10.4134/JKMS.j190198](https://doi.org/10.4134/JKMS.j190198).
4. Belarbi L. On the symmetries of three-dimensional generalized symmetric spaces // Bull. Transilv. Univ. Brasov Ser. III. — 2020. — 13, № 2. — С. 451–462. — DOI: [10.31926/but.mif.2020.13.62.2.7](https://doi.org/10.31926/but.mif.2020.13.62.2.7).
5. Belarbi L. Ricci solitons of the $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ Lie group // Elec. Res. Arch. — 2020. — 28, № 1. — С. 157–163. — DOI: [10.3934/era.2020010](https://doi.org/10.3934/era.2020010).
6. Belarbi L. Ricci solitons of the Sol_3 Lie group // J. Indian Math. Soc. — 2025. — 92, № 2. — С. 329–339. — DOI: [10.18311/jims/2025/35442](https://doi.org/10.18311/jims/2025/35442).
7. Calvaruso G., De Leo B. Ricci solitons on Lorentzian Walker three-manifolds // Acta Math. Hungar. — 2011. — 132, № 3. — С. 269–293. — DOI: [10.1007/s10474-010-0049-z](https://doi.org/10.1007/s10474-010-0049-z).
8. Calvaruso G., Fino A. Ricci solitons and geometry of four-dimensional non-reductive homogeneous spaces // Canad. J. Math. — 2012. — 64, № 4. — С. 778–804. — DOI: [10.4153/CJM-2011-091-1](https://doi.org/10.4153/CJM-2011-091-1).
9. Calvaruso G., Fino A. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. — 2015. — 12, № 5. — 1550056. — DOI: [10.1142/S0219887815500565](https://doi.org/10.1142/S0219887815500565).
10. Calvaruso G., Kowalski O., Marinosci A. Homogeneous geodesics in solvable Lie groups // Acta. Math. Hungar. — 2003. — 101, № 4. — С. 313–322. — DOI: [10.1023/B:AMHU.0000004942.87374.0e](https://doi.org/10.1023/B:AMHU.0000004942.87374.0e).
11. Cao H. D. Recent progress on Ricci solitons // В сб.: «Recent Advances in Geometric Analysis. Proc. Int. Conf. on Geometric Analysis, Taipei, Taiwan, June 18–22, 2007». — Beijing—Somerville: International Press, 2010. — С. 1–38.

12. *Cao H. D.* Geometry of complete gradient shrinking Ricci solitons // Б с.: «Geometry and Analysis, No. 1. Collected papers of the conference “Geometric analysis: Present and future,” Harvard Univ., Cambridge, USA, August 27 – September 1, 2008». — Beijing—Somerville: International Press, 2011. — С. 227–246.
13. *Cerbo L. F.* Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. — 2014. — 14, № 2. — С. 225–237. — DOI: [10.1515/advgeom-2013-0031](https://doi.org/10.1515/advgeom-2013-0031).
14. *Friedan D.* Nonlinear models in $2+\varepsilon$ dimensions // Ann. Phys. — 1985. — 163. — С. 318–419. — DOI: [10.1016/0003-4916\(85\)90384-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(85)90384-7).
15. *Hamilton R. S.* Three manifolds with positive Ricci curvature // J. Diff. Geom. — 1982. — 17. — С. 255–306. — DOI: [10.4310/jdg/1214436922](https://doi.org/10.4310/jdg/1214436922).
16. *Hervik S.* Ricci nilsoliton black holes // J. Geom. Phys. — 2008. — 58. — С. 1253–1264. — DOI: [10.1016/j.geomphys.2008.05.001](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2008.05.001).
17. *Kowalski O.* Generalized symmetric spaces. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1980. — DOI: [10.1007/BFb0103324](https://doi.org/10.1007/BFb0103324).
18. *Lauret J.* Ricci soliton solvmanifolds // J. Reine Angew. Math. — 2011. — 650. — С. 1–21. — DOI: [10.1515/crelle.2011.001](https://doi.org/10.1515/crelle.2011.001).
19. *Mostefaoui A., Belarbi L., Batat W.* Ricci solitons of five-dimensional solvable Lie group // Panamer. Math J. — 2019. — 29, № 1. — С. 1–16.
20. *Mostefaoui A., Belarbi L.* On the symmetries of five-dimensional Solvable Lie group // J. Lie Theory. — 2020. — 30, № 1. — С. 155–169.
21. *Onda K.* Lorentz Ricci solitons on 3-dimensional Lie groups // Geom. Dedicata. — 2010. — 147. — С. 313–322. — DOI: [10.1007/s10711-009-9456-0](https://doi.org/10.1007/s10711-009-9456-0).

Л. Беларби

University of Mostaganem, Mostaganem, Algeria

E-mail: lakehalbelarbi@gmail.com, ResearcherID: [ABD-4782-2022](https://orcid.org/0000-0002-9196-1979), Scopus: [55871634700](https://orcid.org/0000-0002-9196-1979),

ORCID: [0000-0002-9196-1979](https://orcid.org/0000-0002-9196-1979)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-13-23](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-13-23)

EDN: [TGXCNE](https://edn.ru/TGXCNE)

UDC 512.81

Research article

Ricci solitons for solvable Lie groups

L. Belarbi

University of Mostaganem, Mostaganem, Algeria

Abstract. In this work, the existence of nontrivial (i.e., not Einstein) Ricci solitons on Riemannian three-dimensional and five-dimensional solvable Lie groups is considered and studied. Moreover, it is shown that they are not gradient Ricci solitons.

Keywords: Ricci solitons, solvable Lie groups, Riemannian manifolds, gradient Ricci solitons, three-dimensional Lie groups, five-dimensional Lie groups, Einstein metrics, Ricci flow, Lorentzian manifolds, Levi-Civita connection.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: L. Belarbi, “Ricci solitons for solvable Lie groups,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 1, 13–23. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-13-23](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-13-23) EDN: [TGXCNE](https://edn.ru/TGXCNE)

REFERENCES

1. P. Baird, L. Danielo, “Three-dimensional Ricci solitons which project to surfaces,” *J. Reine Angew. Math.*, 2007, **608**, 65–91, DOI: [10.1515/CRELLE.2007.053](https://doi.org/10.1515/CRELLE.2007.053).
2. L. Belarbi, “On the symmetries of Lorentzian four-dimensional generalized symmetric spaces of type C,” *Mathematica*, 2020, **62**, No. 2, 133–147, DOI: [10.24193/mathcluj.2020.2.03](https://doi.org/10.24193/mathcluj.2020.2.03).
3. L. Belarbi, “On the symmetries of the Sol_3 Lie group,” *J. Korean Math. Soc.*, 2020, **57**, No. 2, 523–537, DOI: [10.4134/JKMS.j190198](https://doi.org/10.4134/JKMS.j190198).
4. L. Belarbi, “On the symmetries of three-dimensional generalized symmetric spaces,” *Bull. Transilv. Univ. Brasov Ser. III*, 2020, **13**, No. 2, 451–462, DOI: [10.31926/but.mif.2020.13.62.2.7](https://doi.org/10.31926/but.mif.2020.13.62.2.7).
5. L. Belarbi, “Ricci solitons of the $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ Lie group,” *Elec. Res. Arch.*, 2020, **28**, No. 1, 157–163, DOI: [10.3934/era.2020010](https://doi.org/10.3934/era.2020010).
6. L. Belarbi, “Ricci solitons of the Sol_3 Lie group,” *J. Indian Math. Soc.*, 2025, **92**, No. 2, 329–339, DOI: [10.18311/jims/2025/35442](https://doi.org/10.18311/jims/2025/35442).
7. G. Calvaruso and B. De Leo, “Ricci solitons on Lorentzian Walker three-manifolds,” *Acta Math. Hungar.*, 2011, **132**, No. 3, 269–293, DOI: [10.1007/s10474-010-0049-z](https://doi.org/10.1007/s10474-010-0049-z).
8. G. Calvaruso and A. Fino, “Ricci solitons and geometry of four-dimensional non-reductive homogeneous spaces,” *Canad. J. Math.*, 2012, **64**, No. 4, 778–804, DOI: [10.4153/CJM-2011-091-1](https://doi.org/10.4153/CJM-2011-091-1).
9. G. Calvaruso and A. Fino, “Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons,” *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2015, **12**, No. 5, 1550056, DOI: [10.1142/S0219887815500565](https://doi.org/10.1142/S0219887815500565).
10. G. Calvaruso, O. Kowalski, and A. Marinosci, “Homogeneous geodesics in solvable Lie groups,” *Acta Math. Hungar.*, 2003, **101**, No. 4, 313–322, DOI: [10.1023/B:AMHU.0000004942.87374.0e](https://doi.org/10.1023/B:AMHU.0000004942.87374.0e).
11. H. D. Cao, “Recent progress on Ricci solitons,” In: *Recent Advances in Geometric Analysis. Proc. Int. Conf. on Geometric Analysis, Taipei, Taiwan, June 18–22, 2007*, International Press, Beijing—Somerville, 2010, pp. 1–38.
12. H. D. Cao, “Geometry of complete gradient shrinking Ricci solitons,” In: *Geometry and Analysis, No. 1. Collected papers of the conference “Geometric analysis: Present and future,” Harvard Univ., Cambridge, USA, August 27 – September 1, 2008*, International Press, Beijing—Somerville, 2011, pp. 227–246.
13. L. F. Cerbo, “Generic properties of homogeneous Ricci solitons,” *Adv. Geom.*, 2014, **14**, No. 2, 225–237, DOI: [10.1515/advgeom-2013-0031](https://doi.org/10.1515/advgeom-2013-0031).
14. D. Friedan, “Nonlinear models in $2 + \varepsilon$ dimensions,” *Ann. Phys.*, 1985, **163**, 318–419, DOI: [10.1016/0003-4916\(85\)90384-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(85)90384-7).
15. R. S. Hamilton, “Three manifolds with positive Ricci curvature,” *J. Diff. Geom.*, 1982, **17**, 255–306, DOI: [10.4310/jdg/1214436922](https://doi.org/10.4310/jdg/1214436922).
16. S. Hervik, “Ricci nilsoliton black holes,” *J. Geom. Phys.*, 2008, **58**, 1253–1264, DOI: [10.1016/j.geomphys.2008.05.001](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2008.05.001).
17. O. Kowalski, *Generalized symmetric spaces*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1980, DOI: [10.1007/BFb0103324](https://doi.org/10.1007/BFb0103324).
18. J. Lauret, “Ricci soliton solvmanifolds,” *J. Reine Angew. Math.*, 2011, **650**, 1–21, DOI: [10.1515/crelle.2011.001](https://doi.org/10.1515/crelle.2011.001).
19. A. Mostefaoui, L. Belarbi, and W. Batat, “Ricci solitons of five-dimensional solvable Lie group,” *Panamer. Math J.*, 2019, **29**, No. 1, 1–16.
20. A. Mostefaoui and L. Belarbi, “On the symmetries of five-dimensional Solvable Lie group,” *J. Lie Theory*, 2020, **30**, No. 1, 155–169.
21. K. Onda, “Lorentz Ricci solitons on 3-dimensional Lie groups,” *Geom. Dedicata*, 2010, **147**, 313–322, DOI: [10.1007/s10711-009-9456-0](https://doi.org/10.1007/s10711-009-9456-0).

L. Belarbi

University of Mostaganem, Mostaganem, Algeria

E-mail: lakehalbelarbi@gmail.com, ResearcherID: [ABD-4782-2022](https://orcid.org/0000-0002-9196-1979), Scopus: [55871634700](https://orcid.org/0000-0002-9196-1979),

ORCID: [0000-0002-9196-1979](https://orcid.org/0000-0002-9196-1979)