

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ГРИНА

Ю. П. АПАКОВ^{1,2}, А. А. ХАМИТОВ²

¹Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

²Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан

Аннотация. В данной работе рассматривается третья краевая задача для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве. Единственность решения задачи доказана методом интегралов энергии, а существование — методом разделения переменных. Решение представлено явно с помощью построенной функции Грина. Найдены условия на заданные функции, обеспечивающие регулярность решения задачи. При обосновании равномерной сходимости установлено отличие от нуля «малого знаменателя».

Ключевые слова: третья краевая задача, неоднородное уравнение третьего порядка, интеграл энергии, метод разделения переменных, функция Грина.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Все авторы участвовали в разработке концепции исследования, сборе, обработке и анализе данных, написании текста рукописи, формулировке выводов.

Для цитирования: Апаков Ю. П., Хамитов А. А. Построение решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с помощью функции Грина // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 1–12. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-1-12](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-1-12) EDN: TDHXIW

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, а также фильтрации жидкости в пористых средах [11].

В работе [7], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье—Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени:

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y}u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = \text{const}.$$

Это уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ описывает плоскопараллельный поток [5].

Первые результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах Н. Block [12], Е. Del Vecchio [14]. В работе [13] L. Catabriga для уравнения

$D_x^{2n+1}u - D_y^2u = 0$ было построено фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучены свойства потенциала, решены краевые задачи.

В работах [3, 4] построены фундаментальные решения уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, выраженные через конфлюэнтные гипергеометрические функции, изучены их свойства, найдены оценки при $|t| \rightarrow \infty$.

В работах [8–10] исследованы краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, а также в [2, 6] рассмотрены особенности малых знаменателей, которые появляются при решении дифференциальных уравнений.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области $D = \{(x, y, z) : 0 < x < p, 0 < y < q, 0 < z < r\}$ рассмотрим уравнение третьего порядка вида

$$L[u] \equiv u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = f(x, y, z), \quad (2.1)$$

где $p, q, r \in \mathbb{R}$, и для него исследуем следующую задачу.

Задача А. Найти решение уравнения (2.1) в области D из класса $u(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{3,2,2}(D) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\begin{cases} \alpha u(x, y, 0) + \beta u_z(x, y, 0) = 0, \\ \gamma u(x, y, r) + \delta u_z(x, y, r) = 0, \\ u(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} au(0, y, z) + bu_{xx}(0, y, z) = \psi_1(y, z), \\ cu(p, y, z) + du_{xx}(p, y, z) = \psi_2(y, z), \\ u_x(p, y, z) = \psi_3(y, z), \end{cases} \quad (2.3)$$

где $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ — заданные постоянные, причем $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, а $f(x, y, z), \psi_i(y, z)$, $i = \overline{1, 3}$ — заданные достаточно гладкие функции, для которых выполняется условия

$$\begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \alpha \frac{\partial^3 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3} + \beta \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = 0, & \alpha \frac{\partial^5 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z^2} + \beta \frac{\partial^6 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z^3} = 0, \\ \gamma \frac{\partial^3 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3} + \delta \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = 0, & \gamma \frac{\partial^5 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z^2} + \delta \frac{\partial^6 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z^3} = 0, \\ f(x, 0, z) = f(x, q, z) = 0, & \alpha \frac{\partial^2 f(x, y, 0)}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^3 f(x, y, 0)}{\partial y^2 \partial z} = 0, \\ \gamma \frac{\partial^2 f(x, y, r)}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial^3 f(x, y, r)}{\partial y^2 \partial z} = 0, & \end{cases} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Теорема 3.1. Если задача А имеет решение, то при выполнении условий $ab > 0$, $cd \leq 0$, $\alpha\beta \leq 0$ и $\gamma\delta \geq 0$ оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное: пусть задача А имеет два различных решения $u_1(x, y, z)$ и $u_2(x, y, z)$. Тогда функция $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x, y, z) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$uL[u] \equiv uu_{xxx} - uu_{yy} - uu_{zz} = 0,$$

или

$$uL[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} (uu_y) + u_y^2 - \frac{\partial}{\partial z} (uu_z) + u_z^2 = 0. \quad (3.1)$$

Интегрируя тождество (3.1) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^q \int_0^r u_x^2(0, y, z) dydz - \frac{d}{c} \int_0^q \int_0^r u_{xx}^2(p, y, z) dydz + \frac{b}{a} \int_0^q \int_0^r u_{xx}^2(0, y, z) dydz - \\ & - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^p \int_0^q u_z^2(x, y, 0) dx dy + \frac{\delta}{\gamma} \int_0^p \int_0^q u_z^2(x, y, r) dx dz + \iiint_D u_y^2(x, y, z) dx dy dz + \\ & + \iiint_D u_z^2(x, y, z) dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

Из условий теоремы 3.1, т. е. $ab > 0$, $cd \leq 0$, $\alpha\beta \leq 0$, $\gamma\delta \geq 0$, и из интегрального равенства следует

$$u_x(0, y, z) \equiv u_{xx}(0, y, z) \equiv 0, \quad u_y(x, y, z) \equiv u_z(x, y, z) \equiv 0,$$

т. е. $u(x, y, z) = h(x)$, $h'(0) = h''(0) = 0$. Из уравнения вытекает $h'''(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$, далее следует $C_1 = C_2 = 0$, значит, $h(x) = C_3 = \text{const}$. Из первого условия (2.3)

$$au(0, y, z) + bu_{xx}(0, y, z) = 0$$

вытекает, что $C_3 = 0$, т. к. $ab > 0$. Отсюда получим $h(x) = 0$. Следовательно, $u(x, y, z) \equiv 0$, $(x, y, z) \in \bar{D}$. В силу последнего получим $u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z)$.

Теорема 3.1 доказана. $\square$

Замечание 3.1. Отметим, что при нарушении условий теоремы 3.1, т. е. когда $a = -b\theta_{n,m}^2$,

$b > 0$, $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\theta_{n,m} = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{r}\right)^2}$, однородная задача A для однородного уравнения (2.1) может иметь нетривиальное решение. Например, однородная уравнение (2.1) с однородными условиями (2.2) и (2.3) имеет нетривиальное решение

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & \left(\frac{1}{2} (d\theta_{n,m}^2 - c) e^{\theta_{n,m}(\frac{3}{2}p-x)} + e^{\frac{1}{2}\theta_{n,m}x} \left(c \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \theta_{n,m} (p-x) + \frac{\pi}{6} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + d\theta_{n,m}^2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \theta_{n,m} (p-x) \right) \right) Z_m(z) \sin \frac{n\pi y}{q}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где $Z_m(z)$ — решения задачи

$$\begin{cases} Z'' + \mu Z = 0, \\ \alpha Z(0) + \beta Z'(0) = 0, \\ \gamma Z(r) + \delta Z'(r) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

а $\theta_{n,m}$ являются решениями уравнения

$$\bar{\Delta} = 3 \left(c + d\theta_{n,m}^2 \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \theta_{n,m} p - \sqrt{3} (d\theta_{n,m}^2 - c) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \theta_{n,m} p = 0.$$

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Теорема 4.1. Если выполняются следующие условия:

- 1) $\frac{\partial^7 \psi_i(y, z)}{\partial y^3 \partial z^4} \in C$ ($0 \leq y \leq q$, $0 \leq z \leq r$), $i = \overline{1, 3}$;
- 2) $\frac{\partial^5 f(x, y, z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \in C$ ($0 \leq x \leq p$, $0 \leq y \leq q$, $0 \leq z \leq r$),

и (2.4), то решение задачи A существует.

Доказательство. Решение задачи A ищем в виде

$$u(x, y, z) = X(x) V(y, z).$$

Поставляя в уравнение (2.1) и разделяя переменные, для $V(y, z)$ имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} V_{yy} + V_{zz} + \lambda V = 0, \\ \alpha V(y, 0) + \beta V_z(y, 0) = 0, \\ \gamma V(y, r) + \delta V_z(y, r) = 0, \\ V(0, z) = V(q, z) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где λ — параметр разделения.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (4.1). Решение задачи (4.1) будем искать в виде

$$V(y, z) = Y(y) Z(z). \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в уравнение (4.1), разделяя переменные, имеем задачи (3.2) и

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0, \\ Y(0) = Y(q) = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

где ν и μ — положительные постоянные, связанные соотношением $\lambda = \nu + \mu$.

Поступая так же, как в работе [1], для нахождения собственных значений μ в задаче (3.2), получим трансцендентное уравнение

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\mu} q = \frac{\alpha \gamma + \delta \beta \mu}{\sqrt{\mu} (\gamma \beta - \alpha \delta)}. \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что $\sqrt{\mu_m} = \frac{\pi m}{r} + \varepsilon_m$, где $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$, или $\mu_m = O(m^2)$, $m \rightarrow \infty$.

Соответствующие собственные функции имеют вид

$$Z_m(z) = (\alpha \sin \sqrt{\mu_m} z - \beta \sqrt{\mu_m} \cos \sqrt{\mu_m} z) A_m,$$

где A_m — произвольные постоянные, а для задачи (4.3) получим

$$Y_n(y) = A_n \sin \sqrt{\nu_n} y,$$

где A_n — произвольные постоянные, а $\nu_n = \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2$.

Тогда в качестве решения спектральной задачи (3.2) и (4.3) возьмем функции

$$V_{n,m}(y, z) = \frac{1}{\|V_{n,m}\|^2} Z_m(z) \sin \frac{n\pi}{q} y, \quad (4.5)$$

здесь

$$\|V_{n,m}\|^2 = \left[\frac{1}{2} (\alpha^2 r + \beta^2 r \mu_m - \alpha \beta) + \left(\frac{\beta^2 \sqrt{\mu_m}}{4} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{\mu_m}} \right) \sin 2\sqrt{\mu_m} r + \frac{\alpha \beta}{2} \cos 2\sqrt{\mu_m} r \right] \frac{q}{2}.$$

Докажем, что

$$\|V_{n,m}\|^2 > 0$$

при всех действительных α , β и положительных μ_m , r , q .

Так как $q > 0$, достаточно доказать положительность выражения в квадратных скобках:

$$E = \frac{1}{2} (\alpha^2 r + \beta^2 r \mu_m - \alpha \beta) + \left(\frac{\beta^2 \sqrt{\mu_m}}{4} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{\mu_m}} \right) \sin 2\sqrt{\mu_m} r + \frac{\alpha \beta}{2} \cos 2\sqrt{\mu_m} r,$$

здесь $E = \|V_{n,m}\|^2$.

Заметим, что E является квадратичной формой по α и β :

$$E = A(r) \alpha^2 + B(r) \beta^2 + C(r) \alpha \beta,$$

где

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{r}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\mu_m}} \sin(2\sqrt{\mu_m} r), \\ B(r) &= \frac{r\mu_m}{2} + \frac{\sqrt{\mu_m}}{4} \sin(2\sqrt{\mu_m} r), \end{aligned}$$

$$C(r) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{\mu_m}r).$$

Используем неравенство $|\sin x| \leq x$ при $x \geq 0$:

$$A(r) > \frac{r}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\mu_m}} 2\sqrt{\mu_m}r = 0,$$

$$B(r) > \frac{r\mu_m}{2} + \frac{\sqrt{\mu_m}}{4} 2\sqrt{\mu_m}r = 0.$$

Следовательно, $A(r) > 0$, $B(r) > 0$.

Для положительности квадратичной формы достаточно показать:

$$\Delta = (C(r))^2 - 4A(r)B(r) < 0.$$

Используем тождества:

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

После подстановки и упрощения получаем:

$$4A(r)B(r) - (C(r))^2 = (\sqrt{\mu_m}r - \sin \sqrt{\mu_m}r \cos \sqrt{\mu_m}r)^2 + \sin^4 \sqrt{\mu_m}r > 0.$$

Следовательно,

$$\Delta < 0.$$

Квадратичная форма $E(\alpha, \beta)$ положительна при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Учитывая $q > 0$, получаем:

$$\|V_{n,m}\|^2 > 0.$$

Теперь разложим $f(x, y, z)$ в ряд Фурье по $\{V_{n,m}(y, z)\}$:

$$f(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} f_{n,m}(x) V_{n,m}(y, z),$$

где $f_{n,m}(x) = \int_0^q \int_0^r f(x, y, z) V_{n,m}(y, z) dy dz.$

Интегрируя функцию $f_{n,m}(x)$ по частям и учитывая условия (2.4), имеем оценку

$$|f_{n,m}(x)| \leq M \frac{|F_{n,m}(x)|}{n^2 m^2}, \quad (4.6)$$

здесь

$$F_{n,m}(x) = \int_0^q \int_0^r \frac{\partial^4 f(x, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} V_{n,m}(y, z) dy dz.$$

В дальнейшем максимальное значение всех найденных положительных известных чисел в оценках будем обозначать через M .

Решение задачи A ищем в виде

$$u(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} X_{n,m}(x) V_{n,m}(y, z). \quad (4.7)$$

Поставляя (4.7) в уравнение (2.1), учитывая граничные условия (2.3), получим следующую задачу:

$$\begin{cases} X'''_{n,m}(x) + \lambda_{n,m} X_{n,m}(x) = f_{n,m}(x), \\ aX_{n,m}(0) + bX''_{n,m}(0) = \psi_{1n,m}, \\ cX_{n,m}(p) + dX''_{n,m}(p) = \psi_{2n,m}, \\ X'_{n,m}(p) = \psi_{3n,m}, \end{cases} \quad (4.8)$$

где $\psi_{in,m} = \int_0^q \int_0^r \psi_i(y, z) V_{n,m}(y, z) dy dz, \quad i = \overline{1, 3}.$

Применяя интегрирование по частям к $\psi_{in,m}$ с учетом условия (2.4), получаем оценку

$$|\psi_{in,m}| \leq M \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^4}, \quad (4.9)$$

здесь

$$\Psi_{in,m} = \frac{1}{\|V_{n,m}\|^2} \int_0^q \int_0^r \frac{\partial^7 \psi_i(y, z)}{\partial y^3 \partial z^4} Z_m(z) \cos \frac{n\pi y}{q} dy dz.$$

Решение задачи (4.8) находим методом построения функции Грина, для этого с помощью замены

$$U_{n,m}(x) = X_{n,m}(x) - \rho_{n,m}(x) \quad (4.10)$$

изменим граничные условия на однородные.

Функция $\rho_{n,m}(x)$ имеет вид

$$\rho_{n,m}(x) = \frac{1}{ap^2 + 2b} \left[(x-p)^2 \psi_{1n,m} + \frac{2apx - ax^2 + 2b}{c} \psi_{2n,m} + (x-p)(apx + 2b) \psi_{3n,m} \right]. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.10), (4.11) в (4.8), получим задачу

$$\begin{cases} U'''_{n,m}(x) + \lambda_{n,m} U_{n,m}(x) = \lambda_{n,m} g_{n,m}(x), \\ aU_{n,m}(0) + bU''_{n,m}(0) = 0, \\ cU_{n,m}(p) + dU''_{n,m}(p) = 0, \\ U'_{n,m}(p) = 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

здесь

$$g_{n,m}(x) = -\frac{1}{ap^2 + 2b} \left[(x-p)^2 \psi_{1n,m} + \frac{2apx - ax^2 + 2b}{c} \psi_{2n,m} + (x-p)(apx + 2b) \psi_{3n,m} \right] + \frac{f_{n,m}(x)}{\lambda_{n,m}}.$$

Учитывая (4.6), (4.9) и $\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{r}\right)^2 \geq \frac{2\pi^2}{qr} nm$, $n, m \in \mathbb{N}$, имеем оценки

$$\begin{aligned} |g_{n,m}(x)| &\leq M \left(\sum_{i=1}^3 \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^4} + \frac{|F_{n,m}(x)|}{n^3 m^3} \right), \\ |g'_{n,m}(x)| &\leq M \left(\sum_{i=1}^3 \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^4} + \frac{|F'_{n,m}(x)|}{n^3 m^3} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Решение задачи (4.12) ищем в виде:

$$U_{n,m}(x) = \lambda_{n,m} \int_0^p G_{n,m}(x, \xi) g_{n,m}(\xi) d\xi, \quad (4.14)$$

здесь $G_{n,m}(x, \xi)$ — функция Грина задачи (4.12), которая имеет следующий вид:

$$G_{n,m}(x, \xi) = \begin{cases} G_{1n,m}(x, \xi), & 0 \leq x < \xi, \\ G_{2n,m}(x, \xi), & \xi < x \leq p, \end{cases} \quad (4.15)$$

здесь

$$\begin{aligned} G_{1n,m}(x, \xi) &= \\ &= \frac{2}{3k_{n,m}^2 \Delta} \left[e^{-k_{n,m}(\frac{1}{2}\xi + x)} \left(\left(\frac{ad}{k_{n,m}^2} - \frac{ac}{k_{n,m}^4} \right) \sin \left(\beta_{n,m}\xi + \frac{\pi}{6} \right) + \left(\frac{bc}{k_{n,m}^2} - bd \right) \cos \beta_{n,m}\xi \right) - \right. \\ &- e^{k_{n,m}(\xi - \frac{3}{2}p - x)} \left(\left(\frac{bc}{k_{n,m}^2} - \frac{ad}{k_{n,m}^2} \right) \cos \beta_{n,m}p - \frac{ac}{k_{n,m}^4} \sin \left(\beta_{n,m}p + \frac{\pi}{6} \right) + bd \cos \left(\beta_{n,m}p + \frac{\pi}{3} \right) \right) + \\ &+ e^{\frac{1}{2}k_{n,m}(x - \xi)} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) \sin \left(\beta_{n,m}(\xi - x) + \frac{\pi}{6} \right) - \\ &- e^{k_{n,m}(\xi - \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}x)} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m}(p - x) + \frac{\pi}{6} \right) + d \cos \beta_{n,m}(p - x) \right) + \\ &+ e^{-\frac{1}{2}k_{n,m}(\xi + 3p - x)} \left(\left(\frac{a}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m}\xi + \frac{\pi}{6} \right) - b \cos \beta_{n,m}\xi \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{2c}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m} (p-x) + \frac{\pi}{6} \right) + 2d \cos \beta_{n,m} (p-x) \right) + \\ & + \left(\left(\frac{2bc}{k_{n,m}^2} - \frac{2ad}{k_{n,m}^2} \right) \cos \beta_{n,m} p + 2bd \cos \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{3} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2ac}{k_{n,m}^4} \sin \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{6} \right) \right) \sin \left(\beta_{n,m} (\xi-x) + \frac{\pi}{6} \right) \Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{2n,m}(x, \xi) &= \frac{1}{3k_{n,m}^2 \bar{\Delta}} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b - 2e^{-\frac{3}{2}k_{n,m}\xi} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m}\xi + \frac{\pi}{6} \right) - b \cos \beta_{n,m}\xi \right) \right) \times \\ & \times \left[e^{k_{n,m}(\xi-x)} \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) - 2e^{k_{n,m}(\xi-\frac{3}{2}p+\frac{1}{2}x)} \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m}(p-x) + \frac{\pi}{6} \right) + d \cos \beta_{n,m}(p-x) \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(n, m) &= \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) + e^{-\frac{3}{2}k_{n,m}p} \left\{ \left(\frac{2bc}{k_{n,m}^2} - \frac{2ad}{k_{n,m}^2} - \frac{ac}{k_{n,m}^4} + bd \right) \cos \beta_{n,m}p - \right. \\ & \left. - \sqrt{3} \left(\frac{ac}{k_{n,m}^4} + bd \right) \sin \beta_{n,m}p \right\}. \end{aligned}$$

Покажем, что $\bar{\Delta}(n, m) \neq 0$. Для этого докажем следующую лемму:

Лемма 4.1. *Краевая задача*

$$\begin{cases} X'''_{n,m} + \lambda_{n,m} X_{n,m} = 0, \\ aX_{n,m}(0) + bX''_{n,m}(0) = 0, \\ cX_{n,m}(p) + dX''_{n,m}(p) = 0, \\ X'_{n,m}(p) = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Предположим обратное, пусть $X_{n,m}(x) \neq 0$. Рассмотрим тождество

$$X_{n,m} (X'''_{n,m} + \lambda_{n,m} X_{n,m}) = 0,$$

или

$$\left(X_{n,m} X''_{n,m} - \frac{1}{2} (X'_{n,m})^2 \right)' + \lambda_{n,m} X_{n,m}^2 = 0.$$

Интегрируя по $0 \leq x \leq p$ и учитывая краевые условия, получим

$$-\frac{d}{c} (X''_{n,m}(p))^2 + \frac{b}{a} (X''_{n,m}(0))^2 + \frac{1}{2} X'_n(0)^2 + \lambda_{n,m} \int_0^p X_{n,m}^2 dx = 0.$$

Так как $ab > 0$, $cd < 0$, $\lambda_{n,m} > 0$, то $X_{n,m} \equiv 0$. Лемма доказана. $\square$

Пусть существует такой номер n^*, m^* , что $\overline{\Delta}(n^*, m^*) = 0$, тогда существуют постоянные C_1^*, C_2^*, C_3^* , одновременно не все равные нулю, удовлетворяющие системе

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{1n^*, m^*}^* (a + bk_{n^*, m^*}^2) + C_{2n^*, m^*}^* \left(a - \frac{1}{2}bk_{n^*, m^*}^2 \right) + C_{3n^*, m^*}^* \frac{\sqrt{3}bk_{n^*, m^*}^2}{2} = 0, \\ C_{1n^*, m^*}^* e^{-k_{n^*, m^*}^* p} (c + dk_{n^*, m^*}^2) + C_{2n^*, m^*}^* e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* p} \left(c \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* p + \right. \\ \quad \left. + dk_{n^*, m^*}^2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* p + \frac{2\pi}{3} \right) \right) + C_{3n^*, m^*}^* e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* p} \left(c \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* p + \right. \\ \quad \left. + dk_{n^*, m^*}^2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* p + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = 0, \\ -C_{1n^*, m^*}^* e^{-k_{n^*, m^*}^* p} + C_{2n^*, m^*}^* e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* p} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* p + \frac{\pi}{3} \right) + \\ \quad + C_{3n^*, m^*}^* e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* p} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* p + \frac{\pi}{3} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Отсюда имеем, что функция

$$X_{n^*, m^*}(x) = C_{1n^*, m^*}^* e^{-k_{n^*, m^*}^* x} + e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* x} \left(C_{2n^*, m^*}^* \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x + C_{3n^*, m^*}^* \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x \right)$$

является решением краевой задачи (4.16). Однако по доказанной лемме должно быть

$$C_{1n^*, m^*}^* e^{-k_{n^*, m^*}^* x} + e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* x} \left(C_{2n^*, m^*}^* \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x + C_{3n^*, m^*}^* \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x \right) \equiv 0,$$

но это невозможно в силу линейной независимости функций

$$e^{-k_{n^*, m^*}^* x}, \quad e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x, \quad e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x.$$

Отсюда функция вида

$$u^*(x, y, z) = \sum_{n^*, m^*=1}^{\infty} \left[C_{1n^*, m^*}^* e^{k_{n^*, m^*}^* x} + e^{-\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* x} \left(C_{2n^*, m^*}^* \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x + \right. \right. \\ \left. \left. + C_{3n^*, m^*}^* \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x \right) \right] V_{n^*, m^*}(y, z)$$

является нетривиальным решением задачи A , а это противоречит теореме единственности.

Легко можно убедиться, что функция, определенная формулой (4.15), обладают всеми свойствами функции Грина.

В силу (4.7) и (4.10) решение задачи A имеет вид

$$u(x, y, z) = \sum_{n, m=1}^{+\infty} (U_{n, m}(x) + \rho_{n, m}(x)) V_{n, m}(y, z). \quad (4.17)$$

Если функция $u(x, y, z)$, определяемая рядом (4.17), и ее производные u_{xxx} , u_{yy} и u_{zz} сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$, то она дает решение задачи A .

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (4.17). Из (4.17) имеем оценку

$$|u(x, y, z)| \leq M \sum_{n, m=1}^{+\infty} (|U_{n, m}(x)| + |\rho_{n, m}(x)|).$$

Теперь подставляя $G_{n,m}(x, \xi) = -\frac{1}{\lambda_{n,m}} G_{n,m\xi\xi\xi}(x, \xi)$ в (4.14) и интегрируя, имеем

$$U_{n,m}(x) = -g_{n,m}(x) + g_{n,m}(0) G_{2n,m\xi\xi}(x, 0) - g_{n,m}(p) G_{1n,m\xi\xi}(x, p) + \int_0^p G_{n,m\xi\xi}(x, \xi) g_{n,m}'(\xi) d\xi.$$

Учитывая (4.11), (4.13) и

$$|G_{2n,m\xi\xi}(x, 0)| \leq M, \quad |G_{1n,m\xi\xi}(x, p)| \leq M, \quad |G_{n,m\xi\xi}(x, \xi)| \leq M,$$

из функции Грина (4.15) получим оценки

$$|\rho_{n,m}(x)| \leq \frac{M}{n^3 m^4} (|\Psi_{1n,m}| + |\Psi_{2n,m}| + |\Psi_{3n,m}|),$$

$$|U_{n,m}(x)| \leq M \left[\sum_{i=1}^3 \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^4} + \frac{1}{n^3 m^3} (|F_{n,m}(0)| + |F_{n,m}(p)| + |F_{n,m}(x)| + |F'_{n,m}(x)|) \right].$$

Отсюда

$$|u(x, y, z)| \leq M \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^3 \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^4} + \frac{1}{n^3 m^3} (|F_{n,m}(0)| + |F_{n,m}(p)| + |F_{n,m}(x)| + |F'_{n,m}(x)|) \right] < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд (4.17) сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$.

Теперь докажем, что частные производные ряда (4.17), входящие в уравнение (2.1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$. Для этого вычислим частные производные ряда (4.17) по переменным y и z до второго порядка, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{q^2} \sum_{n,m=1}^{+\infty} n^2 (U_{n,m}(x) + \rho_{n,m}(x)) V_{n,m}(y, z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\pi^2}{r^2} \sum_{n,m=1}^{+\infty} m^2 (U_{n,m}(x) + \rho_{n,m}(x)) V_{n,m}(y, z).$$

Учитывая оценку $u(x, y, z)$, получим

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \leq M \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^3 \frac{|\Psi_{in,m}|}{nm^4} + \frac{1}{nm^3} (|F_{n,m}(0)| + |F_{n,m}(p)| + |F_{n,m}(x)| + |F'_{n,m}(x)|) \right],$$

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \leq M \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^3 \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^2} + \frac{1}{n^3 m} (|F_{n,m}(0)| + |F_{n,m}(p)| + |F_{n,m}(x)| + |F'_{n,m}(x)|) \right].$$

Используя неравенства Коши—Буняковского и Бесселя, получим

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \leq M \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{nm^4} \right)^2} \left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{1n,m}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{2n,m}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{3n,m}|^2} \right) +$$

$$+ M \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{nm^3} \right)^2} \left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(0)|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(p)|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(x)|^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F'_{n,m}(x)|^2} \right) \leq \overline{M} \left(\sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial^7 \psi_i(y, z)}{\partial y^3 \partial z^4} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \left\| \frac{\partial^4 f(0, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{\partial^4 f(p, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \left\| \frac{\partial^4 f(x, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(D)} + \left\| \frac{\partial^5 f(x, y, z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(D)} \right) < \infty,$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| &\leq M \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^3 m} \right)^2} \left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(0)|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(p)|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(x)|^2} + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F'_{n,m}(x)|^2} \right) \leq \overline{M} \left(\left\| \frac{\partial^4 f(0, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \left\| \frac{\partial^4 f(p, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \right. \\ &+ \left. \left\| \frac{\partial^4 f(x, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(D)} + \left\| \frac{\partial^5 f(x, y, z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(D)} \right) < \infty, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{in,m}|^2 &\leq \left\| \frac{\partial^7 \psi_i(y, z)}{\partial y^3 \partial z^4} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)}^2, \quad i = \overline{1, 3}, \\ \sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(x)|^2 &\leq \left\| \frac{\partial^4 f(x, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(D)}^2, \\ \sum_{n,m=1}^{+\infty} |F'_{n,m}(x)|^2 &\leq \left\| \frac{\partial^5 f(x, y, z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(D)}^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$. Абсолютная и равномерная сходимость третьей производной по x ряда (4.17) следует из неравенства $\left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right| \leq \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|$ и доказанного выше.

Теорема 4.1 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апаков Ю. П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. — Ташкент: Fan va texnologiya, 2019.
2. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Усп. мат. наук. — 1963. — 18, № 6. — С. 91–192.
3. Джураев Т. Д., Апаков Ю. П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2007. — 15, № 2. — С. 18–26. — DOI: [10.14498/vsgtu525](https://doi.org/10.14498/vsgtu525).
4. Джураев Т. Д., Апаков Ю. П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Укр. мат. ж. — 2010. — 62, № 1. — С. 40–51.
5. Диесперов Т. К. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1972. — 12, № 5. — С. 1265–1279.
6. Козлов В. В. Условие вмерзновения поля направлений, малые знаменатели и хаотизация стационарных течений вязкой жидкости // Прикл. мат. мех. — 1999. — 63, № 2. — С. 237–244.
7. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. мат. мех. — 1965. — 29, № 6. — С. 1004–1014.
8. Сабитов К. Б. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка // Докл. РАН. — 2009. — 427, № 5. — С. 593–596.
9. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Дифф. уравн. — 2011. — 47, № 5. — С. 705–713.
10. Сабитов К. Б., Удалова Г. Ю. Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с условиями периодичности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2013. — 32, № 3. — С. 29–45. — DOI: [10.14498/vsgtu1220](https://doi.org/10.14498/vsgtu1220).
11. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — 34, № 1. — С. 56–65. — DOI: [10.14498/vsgtu1299](https://doi.org/10.14498/vsgtu1299).
12. Block H. Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1. — 1912. — 13, № 7. — С. 1–34.
13. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabilia caratteristiche multiple // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1961. — 31. — С. 1–45.

14. *Del Vecchio E.* Sulle equazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$ // *Memorie R. Accad. Sci. Ser. 2.* — 1915. — 66. — С. 1–41.

Ю. П. Апаков

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан

E-mail: yusupjonapakov@gmail.com, РИНЦ AuthorID: [261525](#), ResearcherID: [ABG-4969-2020](#),

Scopus: [36452842000](#), ORCID: [0000-0001-9611-1466](#)

А. А. Хамитов

Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан

E-mail: azizbek.khamitov.93@mail.ru

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-1-12](#)

EDN: [TDH XIW](#)

UDC 517.956:517.956.6

Research article

Construction of a solution to a boundary-value problem for a third-order nonhomogeneous equation using Green's function

Yu. P. Apakov^{1,2} and A. A. Khamitov²

¹ *V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

² *Namangan State Technical University, Namangan, Uzbekistan*

Abstract. In this paper, we consider the third boundary-value problem for a third-order nonhomogeneous equation with multiple characteristics in three-dimensional space. We prove the uniqueness of the solution using the energy integral method, and we prove the existence of the solution using the separation of variables method. We present the solution explicitly using the constructed Green's function. We find the conditions on the given functions that ensure the regularity of the solution. Proving the uniform convergence, we establish that the “small denominator” is nonzero.

Keywords: third boundary-value problem, third-order nonhomogeneous equation, energy integral, separation of variables, Green's function.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors' contribution. All authors participated in the development of the study concept, collection, processing, and analysis of data, writing the manuscript, and formulation of conclusions.

For citation: Yu. P. Apakov, A. A. Khamitov, “Construction of a solution to a boundary-value problem for a third-order nonhomogeneous equation using Green's function,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 1, 1–12. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-1-12](#) EDN: [TDH XIW](#)

REFERENCES

1. Yu. P. Apakov, *K teorii uravneniy tret'ego por'yadka s kratnymi kharakteristikami* [On the Theory of Third-Order Equations with Multiple Characteristics], Fan Va Texnologiya, Tashkent, 2019 (in Russian).



2. V. I. Arnol'd, "Mal'ye znamenateli i problemy ustoychivosti dvizheniya v klassicheskoy i nebesnoy mekhanike" [Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1963, **18**, No. 6, 91–192 (in Russian).
3. T. D. Dzhuraev and Yu. P. Apakov, "Ob avtomodel'nom reshenii odnogo uravneniya tret'ego poryadka s kratnymi kharakteristikami" [On a self-similar solution of one third-order equation with multiple characteristics], *Vestn. Sam. Gos. tekhn. Un-ta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2007, **15**, No. 2, 18–26 (in Russian), DOI: [10.14498/vsgtu525](https://doi.org/10.14498/vsgtu525).
4. T. D. Dzhuraev and Yu. P. Apakov, "K teorii uravneniya tret'ego poryadka s kratnymi kharakteristikami, soderzhashchego vtoruyu proizvodnyuyu po vremeni" [On the theory of a third-order equation with multiple characteristics containing a second derivative with respect to time], *Ukr. Mat. Zh.* [Ukr. Math. J.], 2010, **62**, No. 1, 40–51 (in Russian).
5. T. K. Diesperov, "O funktsii Grina linearizovannogo vyazkogo transzvukovogo uravneniya" [On the Green's function of the linearized viscous transonic equation], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1972, **12**, No. 5, 1265–1279 (in Russian).
6. V. V. Kozlov, "Uslovie vmorozhennosti polya napravleniy, mal'ye znamenateli i khaotizatsiya statsionarnykh techeniy vyazkoy zhidkosti" [The condition of freezing the direction field, small denominators and chaotization of stationary flows of viscous fluid], *Prikl. Mat. Mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1999, **63**, No. 2, 237–244 (in Russian).
7. O. S. Ryzhov, "Asimptoticheskaya kartina obtekaniya tel vrashcheniya so zvukovym potokom vyazkogo i teploprovodnyashchego gaza" [Asymptotic view of the flow around bodies of revolution with a sonic flow of viscous and heat-conducting gas], *Prikl. Mat. Mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1965, **29**, No. 6, 1004–1014 (in Russian).
8. K. B. Sabitov, "Ob odnoy kraevoy zadache dlya uravneniya smeshannogo tipa tret'ego poryadka" [On a boundary-value problem for a third-order equation of mixed type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **427**, No. 5, 593–596 (in Russian).
9. K. B. Sabitov, "Zadacha Dirikhle dlya uravneniya smeshannogo tipa tret'ego poryadka v pryamougol'noy oblasti" [The Dirichlet problem for a third-order mixed-type equation in a rectangular domain], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2011, **47**, No. 5, 705–713 (in Russian).
10. K. B. Sabitov and G. Yu. Udalova, "Kraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa tret'ego poryadka s usloviyami periodichnosti" [Boundary-value problem for a third-order equation of mixed-type with periodicity conditions], *Vestn. Sam. Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2013, **32**, No. 3, 29–45 (in Russian), DOI: [10.14498/vsgtu1220](https://doi.org/10.14498/vsgtu1220).
11. T. K. Yuldashev, "Obratnaya zadacha dlya odnogo integro-differentsial'nogo uravneniya Fredgol'ma v chastnykh proizvodnykh tret'ego poryadka" [Inverse problem for one Fredholm integro-differential equation in partial derivatives of the third order], *Vestn. Sam. Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2014, **34**, No. 1, 56–65 (in Russian), DOI: [10.14498/vsgtu1299](https://doi.org/10.14498/vsgtu1299).
12. H. Block, "Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples," *Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1*, 1912, **13**, No. 7, 1–34.
13. L. Cattabriga, "Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabilia caratteristiche multiple," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1961, **31**, 1–45.
14. E. DelVecchio, "Sulle equazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$," *Memorie R. Accad. Sci. Ser. 2*, 1915, **66**, 1–41.

Yu. P. Apakov

V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

Namangan State Technical University, Namangan, Uzbekistan

E-mail: yusupjonapakov@gmail.com, eLIBRARY AuthorID: 261525,

ResearcherID: [ABG-4969-2020](https://orcid.org/0000-0001-9611-1466), Scopus: 36452842000, ORCID: 0000-0001-9611-1466

A. A. Khamitov

Namangan State Technical University, Namangan, Uzbekistan

E-mail: azizbek.khamitov.93@mail.ru