

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

В. А. ШТРАУС

*Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет),
Челябинск, Россия*

Аннотация. Рассмотрен унитарный оператор, действующий в пространстве Крейна и обладающий инвариантным подпространством, которое является максимальным неотрицательным и распадается в прямую сумму равномерно положительного (т. е. эквивалентного гильбертову пространству по отношению к внутреннему псевдоскалярному произведению) и конечномерного нейтрального подпространств. Доказано существование для такого оператора спектральной функции с конечным числом спектральных особенностей и разностного выражения, преобразующего порождённую этим оператором бесконечную в обе стороны последовательность моментов в последовательность, представимую как разность позитивных последовательностей моментов. В частном случае циклического унитарного оператора в пространстве Понтрягина построено функциональное пространство, в котором исследуемый оператор моделируется как оператор умножения на экспоненту с мнимым аргументом.

Ключевые слова: унитарный оператор, пространство Крейна, пространство Понтрягина, инвариантное подпространство, спектральное разложение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор глубоко признателен доценту Д. А. Закоре, по инициативе которого настоящая работа была написана. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2025-1543.

Для цитирования: Штраус В. А. Спектральное разложение и модельное представление унитарных операторов в пространствах с индефинитной метрикой // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 388–418. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-388-418](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-388-418) EDN: [CBFSCHM](https://www.edn.ru/CBFSCHM)

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно (см. [35, гл. 5, следствие 5.7]), унитарные операторы в пространствах Понтрягина являются обобщёнными спектральными операторами. В случае пространства Крейна на тот же тип операторов такое свойство, вообще говоря, теряет. Вместе с тем для некоторых более узких классов унитарных операторов удаётся доказать их обобщённую спектральность и получить соответствующее спектральное разложение. Одному из таких классов посвящена настоящая работа. Кроме того, в ней сделана попытка построить модельное пространство для унитарных операторов в пространстве Понтрягина на базе регуляризованного интегрального представления соответствующей последовательности моментов.

2. НЕКОТОРЫЕ КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В наиболее общей постановке (см. [2, 6]) *пространство с индефинитной метрикой* определяется как (комплексное) линейное пространство $\mathcal{L}$ с заданной на нём эрмитовой полуторалинейной формой (внутренним эрмитовым произведением) $Q(x, y)$, причём такой, что соответствующая квадратичная форма $q(x) := Q(x, x)$ является знаконеопределённой (т. е. $Q(x, x)$ принимает положительные, отрицательные и нулевые значения). В случае конечномерного пространства $\mathcal{L}$ используется также (см. [22]) термин *псевдоунитарное пространство*.

В качестве промежуточных шагов нам потребуются, включительно, более общие конструкции. Символами $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{T}$ обозначаются, соответственно, комплексная плоскость, вещественная прямая и единичная окружность с центром в нуле.

Итак, пусть $\mathcal{L}$ — комплексное линейное (вообще говоря, бесконечномерное) пространство и на $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ задана полуторалинейная (вообще говоря, неэрмитова) форма $B(x, y)$, т. е. комплекснозначная функция, удовлетворяющая следующим условиям (здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$)

$$\left. \begin{array}{l} \text{a. } B(\alpha x + \beta z, y) = \alpha B(x, y) + \beta B(z, y), \\ \text{b. } B(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} B(x, y) + \bar{\beta} B(x, z). \end{array} \right\}$$

С полуторалинейной формой $B(x, y)$ ассоциируется квадратичная форма $q_B(x, x) = B(x, x)$. Отметим, что для квадратичной формы выполняется тождество параллелограмма (условие $B(x, x) \in \mathbb{R}$ не предполагается) $q_B(x + y) + q_B(x - y) = 2(q_B(x) + q_B(y))$, а полуторалинейная форма восстанавливается по квадратичной форме с помощью поляризационного тождества¹ $4B(x, y) = \sum_{j=0}^3 i^j Q_B(x + i^j y)$. Для дальнейшего нам нужно уметь проверить, является ли некоторая функция квадратичной формой.

Теорема 2.1. Пусть $q(x)$ — комплекснозначная функция, заданная на линейном пространстве $\mathcal{L}$. Функция $q(x)$ тогда и только тогда ассоциируется с некоторой квадратичной формой, когда $q(x)$ удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{array}{l} \text{a. } q(\alpha x) = |\alpha|^2 q(x), \quad x \in \mathcal{L}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\ \text{b. для любых } x, y \in \mathcal{L} \text{ и } \lambda \in \mathbb{C} \text{ верно } \sum_{j=0}^3 i^j q(\lambda x + i^j y) = \lambda \sum_{j=0}^3 i^j q(x + i^j y), \\ \text{c. для } q(\cdot) \text{ верно тождество параллелограмма.} \end{array} \right\}$$

Замечание 2.1. Перед нами не стоит задача минимизации условий теоремы 2.1, которые, в частности, допускают ослабление в пункте b.

Всюду ниже предполагается, что полуторалинейная форма $Q(x, y)$ является эрмитовой, т. е. $Q(y, x) = \overline{Q(x, y)}$ для любых x и y . Ниже мы будем, как это принято в теории пространств с индефинитной метрикой, вместо $Q(x, y)$ писать $[x, y]$. Если подмножество заданного линейного пространства замкнуто относительно линейных операций, то здесь оно будет называться *линеалом*. Линейная оболочка множества X обозначается $\text{Lin } X$. Вектор $0 \neq x \in \mathcal{L}$ называется *положительным*, *неотрицательным* или *нейтральным*, если, соответственно, $[x, x] > 0$, $[x, x] \geq 0$ или $[x, x] = 0$. Аналогично определяются отрицательные и неположительные векторы. Два вектора $x, y \in \mathcal{L}$ называются *Q-ортогональными* ($x \perp y$), если $[x, y] = 0$, аналогично вводятся определения *Q-ортогональных множеств*, *Q-ортогонального дополнения* и т. п. *Q-ортогональное дополнение* к множеству $X \subset \mathcal{L}$ обозначается $X^{[\perp]}$. Линеал называется *положительным*, если все его ненулевые векторы положительны, аналогично определяются отрицательные, неотрицательные и т. п. линеалы. Положительный линеал называется *максимальным положительным*, если он не является собственным линеалом другого положительного линеала. Аналогично определяются максимальные отрицательные, максимальные неположительные и т. п. линеалы. Далее, линеал $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ называется *невырожденным*, если $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{[\perp]} = \{0\}$, в противном случае линеал $\mathcal{M}$ называется *вырожденным*. Если $\mathcal{M}$ является вырожденным линеалом, то линеал $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{[\perp]}$ называется *изотропной частью* $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M}$ — невырожденный линеал, то можно образовать *Q-ортогональную прямую сумму* $\mathcal{M}[\dot{+}] \mathcal{M}^{[\perp]}$. В общем случае эта сумма не совпадает со всем пространством.

¹См. [10, § XIV.8]; отметим, что в этой книге в качестве основного термина используется билинейная, а не полуторалинейная форма.

Обычно пространство с индефинитной метрикой снабжается той или иной топологией. В этом случае термин «подпространство» у нас всегда обозначает замкнутый в топологическом смысле линеал, а замкнутая линейная оболочка множества X — $\text{CLin } X$. Заметим, что Q -ортогональное дополнение к любому множеству в линейном топологическом пространстве с индефинитной метрикой всегда является подпространством.

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$. Пространство $\mathcal{H}$ называется *гильбертовым пространством с индефинитной метрикой*, если оно дополнительно оснащено непрерывной эрмитовой полуторалинейной формой $[\cdot, \cdot]$, такой что соответствующая квадратичная форма знакопеременна. Заметим, что именно внутреннее произведение $[\cdot, \cdot]$ является для нас основным, а вот гильбертово скалярное произведение играет вспомогательную роль и может меняться на топологически ему эквивалентное. В силу непрерывности внутреннее произведение может быть представлено в форме $[\cdot, \cdot] = (G\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$, где G — так называемый оператор Грама, который необходимо является ограниченным. Кроме того, эрмитовость внутреннего произведения влечёт за собой самосопряжённость G как оператора в гильбертовом пространстве. Такие пространства с индефинитной метрикой обычно называют гильбертовыми пространствами с G -метрикой (см. [1]). Наличие в таком пространстве нормы позволяет ввести дополнительные понятия. В частности, положительный линеал $\mathcal{M}$ называется *равномерно положительным*, если найдётся такая константа $c > 0$, что $[x, x] \geq c\|x\|^2$ для любого $x \in \mathcal{M}$, аналогично определяются равномерно отрицательные подпространства.

Теория операторов в гильбертовых G -пространствах сравнительно бедна результатами и, возможно, ещё ждёт своих исследователей. Намного более развитой является теория операторов в гильбертовых пространствах с G -метрикой в случае ограниченно обратимого оператора Грама (т. е. в регулярных гильбертовых пространствах с G -метрикой [1]).

Предложение 2.1. *Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с G -метрикой будет регулярным тогда и только тогда, когда для любого действующего на всём $\mathcal{H}$ непрерывного линейного функционала f найдётся такой вектор y_f , что $fx = [x, y_f]$, $x \in \mathcal{H}$.*

Гильбертово скалярное произведение в регулярном гильбертовом пространстве с G -метрикой может быть заменено топологически эквивалентным ему произведением так, что $[\cdot, \cdot] = (J\cdot, \cdot)$, где $J = P_+ - P_-$, P_+ и P_- — (гильбертовы) ортопроекторы, $P_+ + P_- = I$. Последнее равенство влечёт равенство $P_+(P_+ + P_-) = P_+$, откуда следует

$$P_+P_- = 0 \text{ и } P_-P_+ = 0. \quad (2.1)$$

Положим $\mathcal{H}_+ = P_+\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_- = P_-\mathcal{H}$. В силу (2.1) подпространства $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ образуют прямую сумму и, кроме того, ортогональны в смысле внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]$. Разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+[\dot{+}]\mathcal{H}_-$ называется каноническим разложением, а оператор J — канонической симметрией. Пространства с индефинитной метрикой, в которых оператор Грама является канонической симметрией, называется J -пространством или пространством Крейна. В этих заметках мы будем предполагать, что $\mathcal{H}$ является пространством Крейна или его частным случаем — пространством Понтрягина: J -пространство называется пространством Понтрягина, или пространством Π_κ , если $\dim \mathcal{H}_- = \kappa < \infty$. В случае J -пространства такие термины, как Q -ортогональность, заменяется J -ортогональностью и т. п. Иногда пространство Крейна трактуют в более узком смысле как такое J -пространство, у которого в каноническом разложении обе компоненты бесконечномерны.

Если $\mathcal{L}$ — невырожденное подпространство J -пространства, то корректно определена J -ортогональная прямая сумма $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]}$. В общем случае эта сумма плотна в J -пространстве, но не совпадает с ним, если же $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{H}$, то подпространство $\mathcal{L}$ называется проекционно полным.

Предложение 2.2. *Положительное подпространство $\mathcal{L}$ является проекционно полным тогда и только тогда, когда оно является регулярным гильбертовым G -пространством, на котором внутреннее произведение — это $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{L}}$.*

Заметим, что в пространстве Π_κ подпространство является проекционно полным тогда и только тогда, когда оно невырождено. Вместе с тем невырожденный положительный линеал как в общем J -пространстве, так и в пространстве Понтрягина при замыкании может превратиться в вырожденное подпространство.

Предложение 2.3. Пусть $\mathcal{H}$ — пространство Понтрягина, $\mathcal{L}_+$ — некоторый положительный идеал. Для того, чтобы замыкание этого идеала было положительным, необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ и любой последовательности $\{y_n\} \subset \mathcal{L}_+$, такой что $\lim_{n \rightarrow \infty} [y_n, y_n] = 0$, было бы верно $\lim_{n \rightarrow \infty} [x, y_n] = 0$.

Доказательство. Пусть в рамках сделанных допущений верно $\lim_{n \rightarrow \infty} [y_n, y_n] = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [x, y_n] = 0$ и необходимо доказать, что замыкание $\overline{\mathcal{L}_+}$ положительно. Допустим противное. Тогда найдётся такая сходящаяся последовательность $\{y_n\} \subset \mathcal{L}_+$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \neq 0$, $[y, y] = 0$. Поскольку квадратичная форма $[\cdot, \cdot]$ непрерывна, то $\lim_{n \rightarrow \infty} [y_n, y_n] = 0$, но для $x = Ju$ верно $\lim_{n \rightarrow \infty} [x, y_n] = \|y\|^2 \neq 0$. Противоречие. Обратно, пусть подпространство $\overline{\mathcal{L}_+}$ положительно. В пространстве Понтрягина всякое положительное подпространство равномерно положительно, поэтому на $\overline{\mathcal{L}_+}$ выражение $\sqrt{[\cdot, \cdot]}$ эквивалентно гильбертовой норме. Дальнейшее очевидно. $\square$

Все определения, равно как и большинство упомянутых результатов и их доказательства, а также дальнейшее описание геометрии J -пространств можно найти в монографии [3] и лекциях [4, 5]. Мы будем придерживаться стандартных обозначений в случае понятий, связанных с гильбертовой структурой на $\mathcal{H}$ (ортогональность, ортогональное дополнение, ортогональная сумма и т. п.).

Все операторы, упомянутые в этой работе, полагаются, если только прямо не оговорено противное, линейными и ограниченными, символами $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ обозначаются, соответственно, спектр и множество регулярных точек (в другой терминологии — резольвентное множество) оператора A . Итак, пусть $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — некоторый оператор. Оператор A^c называется J -сопряжённым (J -с.) к оператору A , если $[Ax, y] = [x, A^c y]$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$. Отметим, что спектры операторов A и A^c расположены симметрично относительно вещественной оси (т. е. $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^c)$). Оператор A называется J -самосопряжённым (J -с.с.) если $A = A^c$. Заметим, что часть спектра J -с.с. оператора может быть невещественной, а собственным значениям оператора могут соответствовать нетривиальные жордановы цепочки из собственных и присоединённых векторов, причём это верно не только для операторов в пространстве Крейна, но и в псевдоунитарном пространстве (см. [3, 4, 5, 22]).

Замечание 2.2. Структура пространства Крейна позволяет переформулировать в терминах внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]$ многие результаты, обычно формулируемые в терминах гильбертова скалярного произведения. Приведем три примера.

1. Пусть $\langle x, y \rangle$ — дополнительная непрерывная полуторалинейная форма, заданная в пространстве Крейна $\mathcal{H}$. Тогда найдётся такой оператор D , что $\langle x, y \rangle = [Dx, y]$, причём если форма $\langle x, y \rangle$ — эрмитова, то D — J -с.с. оператор, а если соответствующая квадратичная форма $\langle x, x \rangle$ неотрицательна, то D — J -неотрицательный оператор.
2. Если C — J -неотрицательный оператор, то $\|C\| = \sup_{x: \|x\|=1} \{[Cx, x]\}$.
3. Аналог теоремы Вижье—Надя о монотонной последовательности самосопряжённых операторов (см. [26, гл. VII, п. 104]): всякая J -монотонная ограниченная последовательность J -с.с. операторов сходится в сильной операторной топологии к J -с.с. оператору.

3. БАЗОВЫЕ СВОЙСТВА J -ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ И J -УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА

В этом разделе напоминаются некоторые свойства изометрических операторов в пространстве Крейна, которые делают изучение этих операторов заметно более сложной задачей по сравнению с той, которая имеет место в случае пространства Гильберта. Здесь мы допускаем неограниченность рассматриваемых операторов. Итак, пусть U — действующий в пространстве Крейна $\mathcal{H}$ оператор с областью определения $\mathfrak{D}(U)$, при этом выполнение равенства $\mathfrak{D}(U) = \mathcal{H}$ не предполагается.

Определение 3.1. Оператор U называется J -изометрическим, если равенство $[Ux, Ux] = [x, x]$ верно для любого $x \in \mathfrak{D}(U)$.

Может ли J -изометрический оператор быть неограниченным? Продемонстрируем, что да.

Пример 3.1. Пусть $g, h, e_1, e_2, \dots$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, операторы J и U заданы соотношениями $J: J e_j = e_j, j = 1, 2, \dots, Jg = h, Jh = g, \mathfrak{D}(U) = \text{Lin}\{e_j\}_1^\infty, U e_j = e_j + h$. Тогда для вектора $y_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_j$ при $n \rightarrow \infty$ мы имеем $\|y_n\| = (\sqrt{n})^{-1} \rightarrow 0, U y_n = h + y_n, \|U y_n\| = \sqrt{1 + n^{-1}} \rightarrow 1$. Отметим, что U обратим, U^{-1} очевидным образом J -изометричен, но, в отличие от U , ограничен, а его замыкание имеет нетривиальное ядро, натянутое на вектор h .

В приведённом примере пространство с индефинитной метрикой — это пространство Понтрягина, а оператор U не допускает замыкания. Покажем, что это не является случайным.

Предложение 3.1. Пусть заданный в пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$ оператор U является J -изометрическим и допускает замыкание. Тогда он ограничен.

Доказательство. Замыкание J -изометричного оператора, очевидно, тоже будет J -изометричным, поэтому мы сразу предполагаем, что U замкнут. Область определения $\mathfrak{D}(U)$ оператора U — это линейал из пространства Понтрягина, поэтому он либо положителен, либо содержит максимальный (как подмножество $\mathfrak{D}(U)$) неположительный конечномерный линейал $\mathfrak{D}_-(U)$. Предположим, что имеет место второй случай, т. е. $\mathfrak{D}_-(U) \neq \{0\}$. Пусть

$$\mathfrak{D}(U) = \mathfrak{D}_-(U) \oplus \mathfrak{D}_+(U), \quad (3.1)$$

где $\oplus$ — символ ортогональной (в гильбертовом смысле!) суммы двух линейалов. Поскольку линейал $\mathfrak{D}_-(U)$ конечномерен, то $\mathfrak{D}_+(U) \subset \mathfrak{D}(U)$ — положительный, но, возможно, незамкнутый линейал. Оператор $U|_{\mathfrak{D}_-(U)}$ заведомо ограничен, поскольку действует на конечномерном пространстве, поэтому вопрос об ограниченности U сводится к проблеме ограниченности $U|_{\mathfrak{D}_+(U)}$ и, тем самым, к первому случаю.

Покажем замкнутость множества $\mathfrak{D}(U)$. Пусть последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ такова, что $x_n \in \mathfrak{D}(U), x_n \rightarrow x_0$. Поскольку $[x, x] > 0$ для любого $x \in \mathfrak{D}(U), x \neq 0$, последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ является последовательностью Коши по отношению к локальной норме $\|x\|_+ = [x, x]^{1/2}$. Перейдём теперь к линейалу $\mathfrak{R}(U) = U\mathfrak{D}(U)$ и его замыканию $\overline{\mathfrak{R}(U)}$. Последнее множество является, вообще говоря, неотрицательным подпространством. Выделим его изотропную часть $M_0 = \overline{\mathfrak{R}(U)} \cap \overline{\mathfrak{R}(U)}^{[\perp]}$ и представим то же пространство в виде ортогональной суммы $\overline{\mathfrak{R}(U)} = M_0 \oplus M_+$. Подпространство M_+ будет равномерно положительным, поэтому найдётся такая константа $c > 0$, что $c[y, y] \geq \|y\|^2$ для любого $y \in M_+$. Далее, пусть Q_0 и Q_+ — гильбертовы ортопроекторы на подпространства M_0 и M_+ соответственно. Рассмотрим поведение последовательностей $\{y_n = U x_n\}_1^\infty, \{Q_0 y_n\}_1^\infty$ и $\{Q_+ y_n\}_1^\infty$. Имеем $[x_n - x_m, x_n - x_m] = [y_n - y_m, y_n - y_m] = [Q_+ y_n - Q_+ y_m, Q_+ y_n - Q_+ y_m] \geq c^{-1} \|Q_+ y_n - Q_+ y_m\|^2$, так что последовательность $\{Q_+ y_n\}_1^\infty$ является последовательностью Коши и поэтому сходится к некоторому элементу $y_0^+ \in M_+$. Перейдём теперь к последовательности $\{Q_0 y_n\}_1^\infty$ и покажем, что она ограничена. Действительно, предположим противное. Тогда у этой последовательности найдётся такая подпоследовательность, что соответствующая последовательность норм стремится к бесконечности. Без ограничения общности можно допустить, что этим свойством обладает сама последовательность, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_0 y_n\| = \infty$.

Положим $s_n = \frac{1}{\|Q_0 y_n\|} x_n$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0, \quad (3.2)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_+ U s_n = 0, \|Q_0 U s_n\| = 1$ для любого n . Поскольку подпространство M_0 конечномерно, у последовательности $\{Q_0 U s_n\}_1^\infty$ есть сходящаяся подпоследовательность. Чтобы не загромождать обозначения без потери общности можно предположить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_0 U s_n = z_0, \|z_0\| = 1$. Итак,

$\lim_{n \rightarrow \infty} U s_n = z_0 \neq 0$, что невозможно в силу (3.2). Поскольку последовательность $\{Q_0 y_n\}_1^\infty$ ограничена, а подпространство M_0 конечномерно, у этой последовательности найдётся сходящаяся подпоследовательность. Опять-таки без ограничения общности можно считать, что предел имеет сама последовательность и, как результат, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$. Поскольку оператор U замкнут, то $x_0 \in \mathfrak{D}(U)$ и $U x_0 = y_0$. Итак, область определения оператора U является подпространством и он в силу теоремы о замкнутом графике ограничен. $\square$

Замечание 3.1. В условии (3.1) мы не можем заменить символ $\oplus$ ортогональной суммы на символ $[+]$ J -ортогональной суммы, написав $\mathfrak{D}(U) = \mathfrak{D}_-(U)[+]\mathfrak{D}_+(U)$, поскольку, во-первых, в последнем разложении линейал $\mathfrak{D}_+(U)$ определяется неоднозначно и, во-вторых (в данном случае это более важно), мы не можем гарантировать равномерную дефинитность этого линейала.

Пример 3.2. Пусть пространство Понтрягина $\mathcal{H}$ то же, что и в примере 3.1, с тем же базисом $g, h, e_1, e_2, \dots$, а $\mathcal{L}$ — подпространство, определяемое частью этого базиса $h, e_1, e_2, \dots$, которое, очевидно, будет J -неотрицательным. Пусть $\{s_\nu\}_{\nu \in \mathfrak{N}}$ — какой-нибудь базис Гамеля (см. [11]) подпространства $\mathcal{L}$, содержащий систему $h, e_1, e_2, \dots$, первым элементом которого будет вектор h , $\mathfrak{N}$ — (несчётное) вполне упорядоченное множество, включающее в себя натуральные числа в их естественном порядке. Обозначим f заданный всюду на $\mathcal{L}$ линейный функционал, определяемый условиями $fh = 1$, $fe_1 = 2$, $fe_2 = 3$, $\dots$, $fs_\nu = 0$ при $\nu \neq 1, 2, \dots$ (ср. с [11, пример 6.1.4]). Этот функционал будет неограничен, а его ядро $\text{Ker } f$ всюду плотно в $\mathcal{L}$. Пусть $\mathcal{L}_0$ — одномерное подпространство, натянутое на вектор h . Тогда $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0[+] \text{Ker } f$.

В отличие от рассмотренной выше ситуации заданный на пространстве Крейна замкнутый J -изометрический оператор может оказаться неограниченным.

Пример 3.3. Пусть $\mathcal{M}$ — гильбертово пространство, A — действующий в этом пространстве самосопряжённый оператор с неограниченным обратным оператором. Возьмём в качестве пространства Крейна сумму $\mathcal{L} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$, а в качестве канонической симметрии J и оператора U матрицы $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Непосредственно проверяется, что U является оператором с искомыми свойствами.

Предложение 3.2. Пусть заданный в пространстве Крейна $\mathcal{H}$ оператор U является J -изометрическим и имеет всюду плотные область определения и область значений. Тогда он допускает замыкание.

Доказательство. Для доказательства этого предложения достаточно показать, что у U имеется плотно заданный J -сопряжённый оператор U^c . Пусть $x \in \mathfrak{D}(U)$, $y \in \mathfrak{R}(U)$. Тогда $[Ux, y] = [Ux, UU^{-1}y] = [x, U^{-1}y]$ $\square$

Замечание 3.2. Из приведённого доказательства следует, что если U — J -изометрический оператор, $\overline{\mathfrak{D}(U)} = \mathcal{H}$, $\overline{\mathfrak{R}(U)} = \mathcal{H}$, то $U^c = U^{-1}$.

Отметим, что условие $\overline{\mathfrak{R}(U)} = \mathcal{H}$ в 3.2 является существенным.

Пример 3.4. Пусть $\mathcal{M}$ — гильбертово пространство, $\{e_j\}_0^\infty$ — фиксированный ортонормированный базис в этом пространстве, S — действующий там же оператор сдвига, т. е. $Se_j = e_{j+1}$, f — всюду определённый на $\mathcal{M}$ неограниченный линейный функционал. Возьмём в качестве пространства Крейна сумму $\mathcal{L} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$, а в качестве канонической симметрии J и оператора U матрицы $J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (fx)e_0 + Sx & (fy)e_0 \\ (fx)e_0 & (fy)e_0 + Sy \end{pmatrix}$. Непосредственно проверяется, что U является оператором с искомыми свойствами, его график, в частности, не будет замкнутым.

Отметим, в частности, что подобный пример невозможен в пространстве Понтрягина.

Предложение 3.3. Пусть заданный в пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$ оператор U является J -изометрическим и имеет всюду плотную область определения. Тогда он ограничен и, следовательно, допускает замыкание.

Доказательство. Пусть κ — это размерность максимального отрицательного подпространства пространства $\mathcal{H}$. Область определения $\mathfrak{D}(U)$ оператора U — это всюду плотный линейал из пространства Понтрягина, поэтому он представим в виде J -ортогональной суммы

$$\mathfrak{D}(U) = \mathfrak{D}_-(U)[+]\mathfrak{D}_+(U), \quad (3.3)$$

где $\mathfrak{D}_-(U)$ — отрицательный κ -мерный (и потому максимальный как в $\mathfrak{D}(U)$, так и во всём пространстве) линеал. Знакоопределённость обеих компонент отличает это разложение от разложения (3.1). Благодаря указанной знакоопределённости разложение (3.3) определяется однозначно, конечномерность линеала $\mathfrak{D}_-(U)$ означает, что он является равномерно отрицательным подпространством, поэтому $\mathfrak{D}_+(U)$ — равномерно положительный линеал. Далее, $U\mathfrak{D}_-(U)$ — κ -мерное отрицательное подпространство, поэтому замыкание $\overline{\mathfrak{R}_+(U)}$ положительного линеала $\mathfrak{R}_+(U) = U\mathfrak{D}_+(U)$ тоже положительно, поскольку, если допустить противное, т. е. что существует ненулевой вектор $y_0 \in \overline{\mathfrak{R}_+(U)}$, $[y_0, y_0] = 0$, то линейная оболочка $U\mathfrak{D}_-(U)$ и y_0 будет $1 + \kappa$ -мерным неположительным линеалом, что невозможно. Итак, на $\mathfrak{R}_+(U)$ и $\mathfrak{D}_+(U)$ внутренние нормы $[\cdot, \cdot]^{1/2}$ будут эквивалентны исходной гильбертовой норме, так что оператор $U|_{\mathfrak{D}_+(U)}$ будет ограничен. Дальнейшее очевидно. $\square$

Определение 3.2. J -изометрический оператор U называется J -унитарным, если $\mathfrak{D}(U) = \mathcal{H}$, $\mathfrak{R}(U) = \mathcal{H}$.

В силу предложения 3.2 и замечания 3.2 J -унитарный оператор U является ограниченным и $U^c = U^{-1}$.

Рассмотрим J -унитарный оператор U , такой что для него найдётся неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+$. Как хорошо известно, сужение унитарного оператора (как в гильбертовом, так и в случае пространства с индефинитной метрикой) на своё инвариантное подпространство может оказаться не унитарным, а изометрическим оператором, поэтому структура оператора $U|_{\mathcal{L}_+}$ требует отдельного рассмотрения.

Предложение 3.4. Пусть J -унитарный оператор U обладает инвариантным подпространством $\mathcal{L}_+$, которое является максимальным неотрицательным подпространством. Тогда его J -ортогональное дополнение, т. е. подпространство $\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_+^{[\perp]}$ также будет инвариантным подпространством для U .

Доказательство. В силу замечания 3.2 достаточно показать, что подпространство $\mathcal{L}_+$ является инвариантным для оператора U^{-1} . Допустим противное. В данном случае это означает, что $U\mathcal{L}_+ \neq \mathcal{L}_+$, т. е. найдётся такой вектор $x_+ \in \mathcal{L}_+$, что $x_+ \notin U\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$. Оператор U^{-1} J -унитарен, поэтому подпространство $U^{-1}\mathcal{L}_+$ будет неотрицательным, но $U^{-1}x_+ \notin \mathcal{L}_+$, поэтому $\mathcal{L}_+ \subset U\mathcal{L}_+$ и, одновременно, $\mathcal{L}_+ \neq U\mathcal{L}_+$. Противоречие. $\square$

Легко видеть, что « J -унитарность» оператора $U|_{\mathcal{L}_+}$ в условиях предложения 3.4 была обеспечена максимальностью неотрицательного подпространства $\mathcal{L}_+$.

Предложение 3.5. Пусть $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, $\delta > 0$, $T_{ext} = \{(1 + \delta)e^{it}\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ и $T_{int} = \{(1 + \delta)^{-1}e^{it}\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ — две дуги на комплексной плоскости со стандартной ориентацией, а U — такой J -унитарный оператор, что некоторая окрестность дуг T_{ext} и T_{int} (состоящая, возможно, из двух несвязных открытых множеств) принадлежит к его области регулярности. Тогда

оператор $i \left(\int_{T_{ext}} R_\xi(U) d\xi - \int_{T_{int}} R_\xi(U) d\xi \right)$ является J -с.с.

Доказательство. Утверждение, содержащееся в данном предложении, не вполне тривиально, поскольку операторы $\int_{T_{ext}} R_\xi(U) d\xi$ и $\int_{T_{int}} R_\xi(U) d\xi$ не J -сопряжены. Имеем $\int_{T_{ext}} R_\xi(U) d\xi = i(1 + \delta) \int_{\alpha}^{\beta} R_{(1+\delta)e^{it}}(U) e^{it} dt$, откуда

$\left(\int_{T_{ext}} R_\xi(U) d\xi \right)^c = -i(1 + \delta) \int_{\alpha}^{\beta} (R_{(1+\delta)e^{it}}(U))^c e^{-it} dt$. С другой стороны $(R_{(1+\delta)e^{it}}(U))^c = -\frac{e^{it}}{1 + \delta} U R_{\frac{e^{it}}{1+\delta}}(U)$, поэтому

$$\left(\int_{T_{ext}} R_\xi(U) d\xi \right)^c = i \int_{\alpha}^{\beta} U R_{\frac{e^{it}}{1+\delta}}(U) dt, \quad \left(\int_{T_{ext}} R_\xi(U) d\xi \right)^c - \int_{T_{int}} R_\xi(U) d\xi = i(\beta - \alpha)I.$$

Дальнейшее очевидно. $\square$

Замечание 3.3. Предложение 3.5 применимо к гильбертову пространству.

4. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ J -УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ПОНТЯГИНА

В этом разделе пространство с индефинитной метрикой — это пространство Понтрягина и указанное условие дальше оговариваться не будет, размерность максимального неотрицательного подпространства будем полагать равной $\varkappa$ (в этом случае пространство Понтрягина часто называют пространством $\Pi_\varkappa$). Если J -унитарный оператор U имеет только унитарный спектр, то у него есть собственная спектральная функция (с.с.ф.) E_λ с конечным множеством критических точек Λ . Точные формулировки будут приведены ниже. Поскольку некоторые формулы, полученные в процессе доказательства существования с.с.ф., используются для построения модельного пространства по схеме, аналогичной [36], то мы приведём его набросок по пути, предложенному в [15, 38] (класс операторов, охваченный в [38], шире, чем рассматриваемый нами). На первом этапе унитарность спектра оператора U предполагаться не будет. Итак, по известной теореме Понтрягина найдётся такое максимальное неположительное подпространство $\mathcal{L}_-$, что $U\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$. В силу определения пространства Понтрягина размерность подпространства $\mathcal{L}_-$ равна $\varkappa$, поэтому оператор $U|_{\mathcal{L}_-}$ действует в конечномерном пространстве и его спектр — конечное множество. Пусть $N(\xi)$ — минимальный аннулирующий многочлен для $U|_{\mathcal{L}_-}$ (т. е. $N(U|_{\mathcal{L}_-}) = 0$ и $N(\xi)$ имеет минимальную степень среди всех многочленов с таким свойством), коэффициент которого при старшей степени для определённости равен единице, степень $N(\xi)$ равна n , $n \leq \varkappa$. Далее, пусть $\overline{N}(\xi)$ — многочлен, коэффициенты которого сопряжены к коэффициентам многочлена $N(\xi)$. Тогда

$$0 = [N(U)x, y] = [x, \overline{N}(U^{-1})y], \quad \text{где } x \in \mathcal{L}_-, y \in \mathcal{H} \quad (4.1)$$

и $\overline{N}(U^{-1})\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_+$, где $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{\perp}$ — максимальное неотрицательное подпространство. Введём на $\mathcal{H}$ новую полуторалинейную форму $\langle x, y \rangle := [N(U)x, N(U)y]$. Тогда

$$\langle x, x \rangle = [\overline{N}(U^{-1})N(A)x, x] = [N(U)\overline{N}(U^{-1})x, x] = [\overline{N}(U^{-1})x, \overline{N}(U^{-1})x] \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (4.2)$$

Отметим, что свойство (4.2) называется дефинизируемостью оператора U , а рациональная функция $N(\xi) \cdot \overline{N}(\xi^{-1})$ — дефинизирующей. Для дальнейшего полезно отметить, что пространство $\mathcal{H}$, рассматриваемое как линеал, оснащённый полуторалинейной формой $\langle x, y \rangle$, превращается после факторизации по нейтральному подмножеству в предгильбертово пространство, а оператор U — в унитарный оператор в этом пространстве.

Рассмотрим двустороннюю последовательность моментов

$$\{d_l = \langle U^l x, x \rangle\}_{l=-\infty}^{+\infty}, \quad (4.3)$$

которая, очевидно, удовлетворяет следующему условию сопряжённости $d_{-l} = \bar{d}_l$, $l = 0, \pm 1, \dots$. Так как квадратичная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ неотрицательна, то по теореме Рисса—Херглотца (см., например, [7, теорема 5.1.2]) последовательность $\{d_l\}_{l=-\infty}^{+\infty}$ допускает представление

$$d_l = \int_0^{2\pi} e^{ilt} d\sigma^{(x)}(t), \quad (4.4)$$

где $\sigma^{(x)}(t)$ — неубывающая функция, $\sigma^{(x)}(0) = 0$, $\sigma^{(x)}(t - 0) = \sigma^{(x)}(t) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$. Причём функция $\sigma^{(x)}(t)$ перечисленными условиями определяется единственным образом (тригонометрическая проблема моментов является определённой), в частности, $\sigma^{(x)}(2\pi) = \langle x, x \rangle$. Укажем также, что $\sigma^{(x)}(t)$ может быть восстановлена по $\{d_l\}_{l=-\infty}^{+\infty}$ с помощью порождаемой резольвентой оператора U аналитической функции $f(\xi)$, первоначально заданной в окрестности бесконечно удалённой точки рядом $f(\xi) = -\sum_{l=0}^{\infty} d_l \xi^{-(l+1)}$, а в окрестности нуля — рядом $f(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} d_{-(l+1)} \xi^l$. Использование представления (4.4) приводит к представлению

$$f(\xi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it} - \xi} d\sigma^{(x)}(t). \quad (4.5)$$

верному как в окрестности нуля, так и бесконечно удалённой точки. Последняя формула позволяет полагать функцию $f(\xi)$ аналитически продолженной на область $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$.

Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, $0 < r < 1$, $\Gamma^{(\Delta)}$ — положительно ориентированный замкнутый контур, образованный двумя дугами $\left\{\frac{1}{r}e^{i\tau}\right\}_{\tau \in \Delta}$ и $\{re^{i\tau}\}_{\tau \in \Delta}$, а также двумя отрезками $\{\rho e^{i\alpha}\}_{\rho \in [r, \frac{1}{r}]}$ и $\{\rho e^{i\beta}\}_{\rho \in [r, \frac{1}{r}]}$. Наша цель — подсчитать интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^{(\Delta)}} f(\xi) d\xi, \quad (4.6)$$

который, однако, может не существовать в стандартном смысле, поскольку, вообще говоря, точки $e^{i\alpha}$ и $e^{i\beta}$ являются особыми для данной подынтегральной функции. В силу сказанного указанный интеграл заменяется интегралом в смысле главного значения

$$-\frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} f(\xi) d\xi, \quad (4.7)$$

где $\Gamma_\delta^{(\Delta)}$ — часть контура $\Gamma^{(\Delta)}$: $\Gamma_\delta^{(\Delta)} = \Gamma^{(\Delta)} \setminus \left(\{\rho e^{i\alpha}\}_{\rho \in (\frac{1}{1+\delta}, 1+\delta)} \cup \{\rho e^{i\beta}\}_{\rho \in (\frac{1}{1+\delta}, 1+\delta)} \right)$.

Итак, нам надо найти предел $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it} - \xi} d\sigma^{(x)}(t) \right) d\xi$, или, после смены порядка интегрирования, $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \frac{1}{e^{it} - \xi} d\xi \right) d\sigma^{(x)}(t)$. Нахождение этого предела сводится к оценке интеграла

$$K_\delta^{(\Delta)} = \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \frac{1}{e^{it} - \xi} d\xi, \quad (4.8)$$

что, в свою очередь, требует определённости в выборе ветви многозначной логарифмической функции $\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$. Ниже мы будем использовать стандартно определяемое (см, скажем, [23]) главное значение логарифмической функции $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, а также дополнительную функцию $\widetilde{\ln} z = i\pi + \ln(-z)$. Для дальнейших ссылок отметим, что если ненулевые комплексные числа ξ и ζ принадлежат, соответственно, второй и третьей четвертям комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то

$$\ln \xi - \ln \zeta = \ln \frac{\xi}{\zeta} - 2i\pi, \quad \widetilde{\ln} \xi = \ln \xi, \quad \widetilde{\ln} \zeta = 2i\pi + \ln \zeta. \quad (4.9)$$

Пусть $\eta = \frac{\xi}{e^{it}} - 1$, $\widetilde{\Gamma}_\delta^{(\Delta)}$ — кривая, являющаяся образом кривой $\Gamma_\delta^{(\Delta)}$ при переходе от ξ к η . Тогда (см. (4.8)) $K_\delta^{(\Delta)} = \widetilde{K}_\delta^{(\Delta)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\widetilde{\Gamma}_\delta^{(\Delta)}} \frac{1}{1 - \eta} d\eta$. Пусть

$$\alpha < t < \beta, \quad \beta - \alpha < \pi. \quad (4.10)$$

Прямой подсчёт даёт

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_\delta^{(\Delta)} &= -\left(\ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1} + \ln \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1} \right) = \\ &= -\left(\ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1} + 2i\pi + \ln \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1} \right) = \\ &= -\left(2i\pi + \ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1} + \ln \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1} \right). \end{aligned}$$

При выводе последних равенств были учтены отношения (4.9) и (4.10), а также то, что при достаточно малом δ точки $((1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1)$ и $((1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1)$ попадают во вторую, в то время как точки $((1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1)$ и $((1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1)$ — в третью четверть комплексной плоскости.

Рассмотрим выражение $\ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1}$. То, что оно в рамках наложенных ограничений стремится к нулю, вполне очевидно, но нам для дальнейшего нужен точный результат. Итак, $\left| \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1} \right| = (1+\delta) \left| \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)e^{-i(\beta-t)} - 1} \right| = (1+\delta)$, так что вещественная часть выражения $\ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1}$ не зависит от β и t . Далее, $\arg \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1} = \arg \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{e^{i(\beta-t)} - (1+\delta)} = -2 \arctan \left(\frac{\delta \cos(\frac{\beta-t}{2})}{(2+\delta) \sin(\frac{\beta-t}{2})} \right)$. Последнее выражение отрицательно и монотонно стремится к нулю при фиксированных t и β , удовлетворяющих условиям $0 < \beta - t < \pi$. Аналогичным образом оценивается выражение $\ln \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1}$. Прямой подсчёт даёт $\left| \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1} \right| = \frac{1}{1+\delta}$, $\arg \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1} = 2 \arctan \left(\frac{\delta \cos(\frac{\alpha-t}{2})}{(2+\delta) \sin(\frac{\alpha-t}{2})} \right)$, так что (с учётом условия $\alpha - t < 0$) выражение

$$i^{-1} \left(\ln \frac{((1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1)}{((1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1)} + \ln \frac{((1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1)}{((1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1)} \right) \quad (4.11)$$

является отрицательным и монотонно стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Пусть теперь $t = \beta$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\delta^{(\Delta)} &= - \left(\ln \frac{\delta}{((1+\delta)e^{i(\alpha-\beta)} - 1)} + \ln \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-\beta)} - 1}{(1+\delta)^{-1} - 1} \right) = \\ &= - \left(-i\pi + \ln(\delta + 1) + 2i\pi + \ln \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-\beta)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-\beta)} - 1} \right) = -i \left(\pi + 2 \arctan \left(\frac{\delta \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{(2+\delta) \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

так что коэффициент при $-i$ монотонно стремится к π при $\delta \rightarrow 0$. Рассмотрим $t = \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\delta^{(\Delta)} &= - \left(\ln \frac{((1+\delta)e^{i(\beta-\alpha)} - 1)}{\delta} + \ln \frac{(1+\delta)^{-1} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-\alpha)} - 1} \right) = \\ &= - \left(-\ln(\delta) + \widetilde{\ln}(-\delta) + \ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-\alpha)} - 1}{e^{i(\beta-\alpha)} - (1+\delta)} \right) = -i \left(\pi - 2 \arctan \left(\frac{\delta \cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}{(2+\delta) \sin(\frac{\beta-\alpha}{2})} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

так что коэффициент при $-i$ в (4.13) ведёт себя аналогично соответствующему коэффициенту в (4.12).

Пусть $t \notin [\alpha, \beta]$. Тогда при достаточно малом δ все граничные точки кривой $\Gamma_\delta^{(\Delta)}$, состоящей из двух связных частей, лежат в открытой левой полуплоскости, поэтому $-\tilde{K}_\delta^{(\Delta)} = \widetilde{\ln}((1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1) - \widetilde{\ln}((1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1) - \widetilde{\ln}((1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1) + \widetilde{\ln}((1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1)$, или, после очевидных преобразований, $\tilde{K}_\delta^{(\Delta)} = - \left(\ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{e^{i(\beta-t)} - (1+\delta)} + \ln \frac{e^{i(\alpha-t)} - (1+\delta)}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1} \right)$.

После подсчёта мнимой части соответствующих логарифмов получаем выражение

$$\tilde{K}_\delta^{(\Delta)} = -2i \left(-\arctan \left(\frac{\delta \cos(\frac{\beta-t}{2})}{(2+\delta) \sin(\frac{\beta-t}{2})} \right) + \arctan \left(\frac{\delta \cos(\frac{\alpha-t}{2})}{(2+\delta) \sin(\frac{\alpha-t}{2})} \right) \right). \quad (4.14)$$

В отличие от (4.11) выражение в круглых скобках в (4.14) не имеет определённого знака, однако каждое из составляющих его двух слагаемых монотонно стремится к нулю, причём тип их монотонности сохраняется на интервалах знакопостоянства, соответственно, функций $\operatorname{ctg} \left(\frac{\beta-t}{2} \right)$ и $\operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha-t}{2} \right)$. Итак, по теоремам о предельном переходе под знаком интеграла Лебега—Стилтьеса

(см., скажем, [27, гл. 7, §30, теоремы 2 и 3]) предел (4.7) принимает вид

$$\frac{-1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} f(\xi) d\xi = \frac{\sigma^{(x)}(\beta) + \sigma^{(x)}(\beta + 0)}{2} - \frac{\sigma^{(x)}(\alpha) + \sigma^{(x)}(\alpha + 0)}{2}. \quad (4.15)$$

В нашем случае упомянутая теорема 2 играет ключевую роль при переходе в дальнейшем к операторным пределам. Полученное представление (4.15) позволяет (см. (4.4)) полностью восстановить функцию $\sigma^{(x)}(t)$.

Далее, для фиксированного t функция $\sigma^{(x)}(t)$ определяет по отношению к x неотрицательную числовую функцию. Эта функция получена предельным переходом, применённым к интегралам (4.7) и (4.8). Подынтегральная функция $f(\xi)$ из (4.7) и (4.15), в свою очередь, является, в силу (4.3), квадратичной формой, для которой, очевидно, выполняются условия (2.1). В силу единственности представления (4.4) и формулы восстановления (4.15), условия (2.1) выполнены и для $\sigma^{(x)}(t)$. Кроме того, $\sigma^{(x)}(t) \leq [N(A)x, N(A)x]$, поэтому функция $\sigma^{(x)}(t)$ непрерывна по x в нормированной топологии. Итак, для $\sigma^{(x)}(t)$ выполнены условия теоремы 2.1. Последнее обстоятельство открывает возможность ввести эрмитову полуторалинейную форму $\prec x, y \succ^{(t)} := \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 i^m \cdot \sigma^{(x+i^m y)}(t)$. Поскольку квадратичная форма $\sigma^{(x)}(t)$ непрерывна по x , введённая полуторалинейная форма $\prec x, y \succ^{(t)}$ непрерывна в гильбертовой нормированной топологии. В силу сказанного (см. также замечание 2.2) найдётся операторнозначная функция G_t , такая что $(s - \lim - \text{предел в сильной операторной топологии, существование этого предела следует из теоремы о существовании сильного предела у } J\text{-монотонной ограниченной последовательности операторов в } J\text{-пространстве (см. 2.2, а также [37, 38] или [30])})$.

- $G_0 = 0$, $G_t = s - \lim_{\tau \rightarrow t-0} G_\tau$ для любого $t \in [0, 2\pi]$;
- для любого $t \in [0, 2\pi]$ и $\tau \in (0, t)$ оператор $(G_t - G_\tau)$ является J -неотрицательным;
- $N(U)\overline{N}(U^{-1})U^k x = \int_0^{2\pi} e^{ikt} dG_t x$, $x \in \mathcal{H}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Указанное интегральное представление степеней оператора U и стандартное разложение его резольвенты $R_\xi(U)$ в окрестностях нуля и бесконечно удалённой точки (см. [26, гл. IV, §1, п. 67, формула 15 и гл. XI, §1, п. 148, формула 5], а также (4.5)) приводит к представлению $N(U)\overline{N}(U^{-1})R_\xi(U) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t$, где $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$. Если $N(1) \neq 0$ и функция G_t непрерывна в нуле, то оставляем полученное представление в неизменном виде, в противном случае воспользуемся 2π -периодичностью функции $\frac{1}{e^{it} - \xi}$ по t , продолжим G_t так, чтобы соответствующая операторная мера стала 2π -периодичной и положим

$$N(U)\overline{N}(U^{-1})R_\xi(U) = \int_\gamma^{2\pi+\gamma} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t, \quad (4.16)$$

где $N(e^{i\gamma}) \neq 0$ и G_t непрерывна в точке $t = \gamma$. Если $\gamma = 0$, то мы получаем первоначальную версию представления (4.16). Преобразуем (4.16):

$$N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})R_\xi(U) = (N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})I - N(U)\overline{N}(U^{-1}))R_\xi(U) + \int_\gamma^{2\pi+\gamma} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t, \quad (4.17)$$

Далее, выражение $M(\zeta, \xi) = \frac{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1}) - N(\zeta)\overline{N}(\zeta^{-1})}{\zeta - \xi}$ превращается после его очевидного доопределения в исключительной подобласти $\zeta = \xi$ в дробно-рациональную функцию от двух переменных, причём ряд Лорана с центром в нуле по каждой из этих переменных будет содержать лишь конечное число членов, т. е. выражению $M(U, \xi) = R_\xi(U)(N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})I - N(U)\overline{N}(U^{-1}))$ можно придать корректный смысл $\xi \neq 0$. Последняя формула и представление (4.17) приводят

к новому представлению

$$R_\xi(U) = \frac{1}{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})} \left(M(U, \xi) + \int_{\gamma}^{\gamma+2\pi} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t \right), \quad (4.18)$$

где сходимость интеграла можно понимать как в сильной, так и в равномерной операторной топологиях. Непосредственно из этого представления следует, что вне $\mathbb{T}$ функция $R_\xi(A)$ аналитична всюду за исключением, быть может, конечного числа полюсов, причём ноль полюсом быть не может. В силу сказанного неунитарный спектр оператора U состоит из конечного числа собственных значений с конечной длиной жордановых цепочек. Несложно показать, что инвариантное подпространство оператора U , состоящее из всех его собственных и присоединённых векторов, отвечающих ровно одному собственному значению из неунитарной части спектра, нейтрально и поэтому в случае пространства Понтрягина конечномерно. Кроме того, спектр любого J -унитарного оператора (как в случае пространства Понтрягина, так и пространства Крейна) симметричен относительно $\mathbb{T}$. Всё сказанное позволяет отделить инвариантное подпространство оператора U , отвечающее его неунитарному спектру, от инвариантного подпространства, отвечающего его унитарному спектру. Эти подпространства оказываются J -ортогональными и проекционно полными, а первое подпространство — ещё и конечномерным. Соответствующие J -ортогональные проекторы могут быть построены как проекторы Рисса (по поводу последних см., например, [12, гл. I, §1, п. 3], [26, гл. XI, §1, п. 148, теорема о разложении]). J -унитарные и J -унитарные операторы в конечномерных J -пространствах полностью описываются методами линейной алгебры [22], поэтому в дальнейшем, если прямо не оговорено противное, мы будем предполагать, что

$$\sigma(U) \subset \mathbb{T}. \quad (4.19)$$

При условии (4.19) $\overline{N}(\xi^{-1}) = \frac{(-1)^n}{\xi^n \prod_{k=1}^n e^{it_k}} N(\xi)$ и формула (4.18) может быть заменена на формулу

$$R_\xi(U) = \frac{(-\xi)^n \prod_{k=1}^n e^{it_k}}{N^2(\xi)} \left(M(A, \xi) + \int_{\gamma}^{\gamma+2\pi} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t \right), \quad (4.20)$$

где n — степень многочлена $N(\xi)$, а e^{it_k} — его корни с учётом кратности $t_k \in (\gamma, \gamma + 2\pi)$. Обозначим

$$\Lambda := \{\lambda : N(e^{i\lambda}) = 0, \lambda \in (\gamma, \gamma + 2\pi)\}. \quad (4.21)$$

Множество Λ вводится так, что в нём нет повторяющихся точек, и называется в дальнейшем множеством *критических точек* оператора U и его спектральной функции, к определению которой мы переходим. Укажем также, что при $\xi = e^{it}$ верно $N(\xi)\overline{N}(\frac{1}{\xi}) = |N(e^{it})|^2$.

Обозначим $[\gamma, \gamma + 2\pi]_G$ множество тех $t \in [\gamma, \gamma + 2\pi]$, для которых G_t непрерывна в сильной операторной топологии. Пусть интервал $\Delta = [\alpha, \beta]$ тот же, что и в (4.6) с дополнительным условием

$$\alpha, \beta \in [\gamma, \gamma + 2\pi]_G, \quad \gamma < \alpha < \beta < \gamma + 2\pi, \quad [\alpha, \beta] \cap \Lambda = \emptyset. \quad (4.22)$$

Действуя так же, как и в (4.7), положим

$$E(\Delta) = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) s - \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} R_\xi(U) d\xi. \quad (4.23)$$

Существование предела в (4.23) сводится к исследованию предела

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \frac{1}{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})(e^{it} - \xi)} d\xi. \quad (4.24)$$

Для анализа этого предела, который зависит от t , рассмотрим два случая. Возьмём какое-нибудь $\epsilon > 0$, такое что $[\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon] \subset [\gamma, \gamma + 2\pi] \setminus \Lambda$. Пусть $t \notin [\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon]$. Тогда дробно-рациональная

функция $\frac{1}{N(\xi)N(\xi^{-1})(e^{it}-\xi)}$ равномерно непрерывна на контуре $\Gamma^{(\Delta)}$ и все её полюса находятся вне указанного контура, поэтому рассматриваемый предел равен нулю, причём сходимость в (4.24) будет равномерной по t . Пусть теперь $t \in [\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon]$. Преобразуем

$$\frac{1}{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})(e^{it}-\xi)} = -\frac{M(\xi, e^{-it})}{(N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})(N(e^{it})\overline{N}(e^{-it})))} + \frac{1}{(N(e^{it})\overline{N}(e^{-it})(e^{it}-\xi))}.$$

Поскольку $\Lambda \cap [\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon] = \emptyset$, то $N(e^{it})\overline{N}(e^{-it}) > 0$ и

$$\int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} \frac{d\xi}{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})(e^{it}-\xi)} = \frac{1}{(N(e^{it})\overline{N}(e^{-it}))} \left(- \int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} \frac{M(\xi, e^{-it})d\xi}{(N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1}))} + \int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} \frac{d\xi}{(e^{it}-\xi)} \right). \quad (4.25)$$

Первый интеграл в (4.25) стремится к нулю равномерно по t , а поведение второго уже было описано при выводе представления (4.15). Итак, существование предела (4.23) следует, грубо говоря, из упомянутой в замечании 2.2 теоремы о существовании сильного предела у J -монотонной ограниченной последовательности операторов в гильбертовом J -пространстве, а из предложения 3.5 вытекает, что этот предел J -с.с. Прямой подсчёт (4.22) даёт

$$E(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{1}{|N(e^{it})|^2} dG_t. \quad (4.26)$$

То, что построенный оператор является проектором, доказывается с использованием тождества Гильберта для резольвент по той же схеме (см. [12, гл. I, §1, п. 3] или [26, гл. XI п. 148]), что и для обычного проектора Рисса, но с некоторой модификацией, поскольку в данном случае соответствующая Δ часть спектра, вообще говоря, изолированной не является. Итак, пусть $\Omega = [\alpha + \epsilon, \beta - \epsilon]$, $\alpha + \epsilon < \beta - \epsilon$, $r < d < 1$, $\Upsilon^{(\Omega)}$ — положительно ориентированный замкнутый контур, образованный двумя дугами $\left\{\frac{1}{d}e^{i\tau}\right\}_{\tau \in \Omega}$ и $\{de^{i\tau}\}_{\tau \in \Omega}$, а также двумя отрезками $\{\rho e^{i(\alpha+\epsilon)}\}_{\rho \in [d, \frac{1}{d}]}$ и $\{\rho e^{i(\beta-\epsilon)}\}_{\rho \in [d, \frac{1}{d}]}$, $\Upsilon_{\delta}^{(\Omega)}$ образуется из $\Upsilon^{(\Omega)}$ так же, как и выше. Чтобы избежать дополнительных сложностей допустим, что $\alpha + \epsilon, \beta - \epsilon \in [0, 2\pi i]_G$. В силу поставленных корректно определён оператор $E(\Omega) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Omega)}} R_{\zeta}(U) d\zeta = \int_{\Omega} \frac{1}{|N(e^{it})|^2} dG_t$. Наша цель — найти произведение $E(\Delta)E(\Omega)$. Итак, $E(\Delta)E(\Omega) = -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} \int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Omega)}} R_{\xi}(U) R_{\zeta}(U) d\zeta d\xi$, но

$$R_{\xi}(U) R_{\zeta}(U) = \frac{R_{\xi}(U) - R_{\zeta}(U)}{\xi - \zeta}, \text{ поэтому}$$

$$\int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} \int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Omega)}} R_{\xi}(U) R_{\zeta}(U) d\zeta d\xi = \int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} R_{\xi}(U) \left(\int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Omega)}} \frac{d\zeta}{\xi - \zeta} \right) d\xi - \int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Omega)}} R_{\zeta}(U) \left(\int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} \frac{d\xi}{\xi - \zeta} \right) d\zeta,$$

т. е. $E(\Delta)E(\Omega) = E(\Omega)$. Поскольку $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} E(\Omega) = E(\Delta)$, то $E^2(\Delta) = E(\Delta)$, следовательно, $E(\Delta)$ — оператор проектирования (не обязательно ортогонального). Поскольку одновременно $E(\Delta)$ — J -с.с. оператор, то $E(\Delta)$ — J -ортогональный проектор. Из формулы (4.23) следует, что $E(\Delta)$ перестановочен с U , поэтому $E(\Delta)\mathcal{H}$ и $(I - E(\Delta))\mathcal{H}$ — инвариантные подпространства оператора U . Для дальнейшего нам надо определить локализацию спектров операторов $U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ и $U|_{(I-E(\Delta))\mathcal{H}}$. Рассмотрим произведение

$$(U - \zeta I) \frac{R_{\xi}(U)}{\xi - \zeta} = \frac{(U - \xi I) + (\xi - \zeta)I}{\xi - \zeta} R_{\xi}(U) = \frac{I}{\xi - \zeta} + R_{\xi}(U).$$

Пусть ζ находится в открытой области вне контура $\Gamma^{(\Delta)}$. Тогда

$$(U - \zeta I) \operatorname{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \frac{R_\xi(U) d\xi}{\xi - \zeta} = -2\pi i E(\Delta).$$

Последнее равенство означает, что вне контура $\Gamma^{(\Delta)}$ у оператора $U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ нет спектра, что с учётом условия (4.19) даёт $\sigma(U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}) \subset \{e^{it}\}_{t \in \Delta}$. Более того, подпространство $E(\Delta)\mathcal{H}$ с внутренним произведением $[\cdot, \cdot]$ является гильбертовым пространством, поэтому $U|_{E(\Delta)\mathcal{H}} = \int_{\Delta} e^{it} dE_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$, где

$$dE_t = \frac{1}{|N(e^{it})|^2} dG_t.$$

Пусть теперь ζ находится в открытой области ограниченной контуром $\Gamma^{(\Delta)}$. Тогда

$$(U - \zeta I) \operatorname{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \frac{R_\xi(U) d\xi}{\xi - \zeta} = 2\pi i (I - E(\Delta)).$$

Последнее равенство означает, что в открытой области, ограниченной контуром $\Gamma^{(\Delta)}$ у оператора $U|_{(I-E(\Delta))\mathcal{H}}$ нет спектра, что с учётом условия (4.19) даёт $\sigma(U|_{(I-E(\Delta))\mathcal{H}}) \subset (\mathbb{T} \setminus \{e^{it}\}_{t \in (\alpha, \beta)})$.

Окончательно результатом всех последних вычислений является следующая теорема.

Теорема 4.1. *В пространстве Понтрягина J -унитарный оператор U с унитарным спектром обладает спектральной функцией E_t , такой что (здесь $\Delta = [\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \notin \Lambda$, γ — некоторая константа)*

$$\left. \begin{aligned} \text{a.} \quad & \text{для любого } t \in [\gamma, 2\pi + \gamma] \setminus \Lambda \text{ верно } \operatorname{s-lim}_{\tau \rightarrow t-0} E_\tau = E_t, E_\gamma = \operatorname{s-lim}_{\tau \rightarrow \gamma+0} E_\tau = 0, E_{2\pi+\gamma} = I; \\ \text{b.} \quad & \text{для любого } t \in [\gamma, 2\pi + \gamma] \setminus \Lambda \text{ верно } U E_t = E_t U; \\ \text{c.} \quad & \text{если } E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}, \text{ то } \sigma(U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}) \subset \{e^{it}\}_{t \in \Delta}; \\ \text{d.} \quad & \text{если } \Delta \cap \Lambda = \emptyset \text{ и } E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}, \text{ то подпространство } E(\Delta)\mathcal{H} \text{ положительно и} \\ & U E(\Delta) = \int_{\Delta} e^{it} dE_t; \\ \text{e.} \quad & \text{если } \Delta \cap \Lambda \neq \emptyset, \text{ то подпространство } E(\Delta)\mathcal{H} \text{ либо отрицательно, либо инде-} \\ & \text{финитно.} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Доказательство. Зафиксируем γ на тех же условиях, что и в (4.16). Далее, упорядочим точки из Λ в порядке возрастания: $\gamma < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < 2\pi + \gamma$ и выберем интервалы $E(\Delta_j) = [\alpha_j, \beta_j]$ $j = 0, 1, 2, \dots, k$ удовлетворяющие условиям (4.22) и

$$\beta_0 < \lambda_1 < \alpha_1, \beta_1 < \lambda_2 < \alpha_2, \dots, \beta_{k-1} < \lambda_k < \alpha_k. \quad (4.28)$$

Положим $\mathcal{H}_{reg} = E(\Delta_0)\mathcal{H}[\dot{+}]E(\Delta_1)\mathcal{H}[\dot{+}] \dots [\dot{+}]E(\Delta_k)\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{sing} = \mathcal{H}_{reg}^{[\perp]}$.

Спектр оператора $U|_{\mathcal{H}_{sing}}$ состоит из k изолированных дуг $Ark_j = \{e^{it}\}_{t \in [\beta_{j-1}, \alpha_j]}$, каждая из которых содержит ровно одну точку из Λ , и (напомним условие (4.19)) дуги $Ark_+ = \{e^{it}\}_{t \in [\beta_k, \gamma+2\pi] \cup [\gamma, \alpha_0]}$. Дуга Ark_+ соответствует положительному инвариантному подпространству (обозначим его $\mathcal{L}$) оператора U , поскольку в противном случае у оператора U нашёлся бы неположительный собственный вектор g , отвечающий собственному числу $\nu \notin \sigma_p(U|_{\mathcal{L}_-})$. Но тогда (см. [14, теорема 2.3]) $g[\perp]\mathcal{L}_-$, что противоречит максимальности $\mathcal{L}_-$ как неположительного подпространства. Оператор $\hat{U} = U|_{\mathcal{L}}$ — это унитарный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{L}$ со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$ причём $\sigma(\hat{U}) \subset Ark_+$, поэтому для $\hat{U}$ существует спектральная функция $\hat{E}$ и соответствующее интегральное представление. Если при интегральном представлении в качестве пределов интегрирования взяты точки γ и $2\pi + \gamma$, то носитель спектральной меры имеет вид $[\beta_k, 2\pi + \gamma] \cup [\gamma, \alpha_0]$, так что проекторы $\hat{E}([\beta_k, 2\pi + \gamma])$ и $\hat{E}([\gamma, \alpha_0])$ будут корректно определены. Доопределим $\hat{E}([\beta_k, 2\pi + \gamma])$ и $\hat{E}([\gamma, \alpha_0])$ до проекторов $E([\beta_k, 2\pi + \gamma])$ и $E([\gamma, \alpha_0])$, заданных на всём пространстве $\mathcal{H}$, полагая $E([\beta_k, 2\pi + \gamma])|_{\mathcal{L}^{[\perp]}} = E([\gamma, \alpha_0])|_{\mathcal{L}^{[\perp]}} = 0$. Ясно, что $E([\beta_k, 2\pi + \gamma])U = UE([\beta_k, 2\pi + \gamma])$ и $E([\gamma, \alpha_0])U = UE([\gamma, \alpha_0])$. Разумеется, эти же проекторы

можно было построить просто изменив пределы интегрирования в (4.20). Далее, поступим сходным образом для построения проекторов $E([\beta_{j-1}, \alpha_j])$ $j = 1, 2, \dots, k$: сначала возьмём сужение оператора $U|_{\mathcal{H}_{sing}}$, построив проектор Рисса для изолированной части Ark_j его спектра. Предложение 3.5 гарантирует, что полученный при этом проектор будет J -ортогональным, следующий шаг — доопределение нулём этого проектора на $\mathcal{H}_{reg}$. Итак, $E_\gamma = 0$, $E_{\alpha_0} = E([\gamma, \alpha_0])$,

$$E_{\beta_0} = E_{\alpha_0} + E([\alpha_0, \beta_0]), \quad E_{\alpha_1} = E_{\beta_0} + E([\beta_0, \alpha_1]), \dots, \quad E_{2\pi+\gamma} = I. \quad (4.29)$$

В силу (4.28) набор $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=0}^k$ легко меняется, причём согласованность разных вариантов при этом обеспечена формулой (4.26), так что проектор E_t по схеме (4.29) можно определить для любого $t \in [\gamma, 2\pi+\gamma]_G \setminus \Lambda$. Осталось определить E_t в точках разрыва функции G_t : $E_t = s - \lim_{\tau \rightarrow t-0} E_\tau$ для любого $t \notin \Lambda$. В заключение отметим, что выполнение условий (4.27) гарантировано алгоритмом построения E_t . $\square$

Обратимся к последнему пункту в (4.27). В его условиях проекционно полное подпространство $E(\Delta)\mathcal{H}$ содержит либо отрицательный, либо нейтральный собственный вектор оператора U . Проекционно полное подпространство не может быть семидефинитным (в данном случае — неположительным), поэтому оно либо отрицательно, либо (если найдется нейтральный собственный вектор) индефинитно. Итак, пусть $\lambda_0 \in \Lambda$. Тогда возможны три взаимоисключающих варианта:

- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$, такого что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ ограничена и после доопределения $E_{\lambda_0} = s - \lim_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$ справедливо $UE(\Delta) = \int_{\Delta} e^{it} dE_t$;
- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$, такого что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ ограничена, но после доопределения $E_{\lambda_0} = s - \lim_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$ имеем $UE(\Delta) \neq \int_{\Delta} e^{it} dE_t$;
- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$, такого что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ неограничена.

Отметим, что ограниченность спектральной функции $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ имеет (или не имеет) место одновременно для всех интервалов $\Delta = [a, b)$, подчинённых условиям $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$ с фиксированным λ_0 , а наличие предела $s - \lim_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$ следует из теоремы о существовании сильного

предела у J -монотонной последовательности операторов (аналог теоремы Вижье—С.-Надя [26, гл. VII, §1, п. 104]). Рассмотрим теперь каждую из этих опций в терминах теории спектральных операторов (см. [13]). Первый вариант означает, что оператор $U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ подобен унитарному оператору, т. е. является скалярным спектральным оператором с унитарным спектром. Второй вариант соответствует случаю, когда оператор $U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ является спектральным оператором, состоящим из суммы скалярного спектрального оператора и нетривиального конечномерного нильпотентного оператора. Итак, только третий вариант отвечает случаю обобщённых спектральных операторов.

Замечание 4.1. При выводе (4.27) предполагалось, что $N(\xi)$ — минимальный аннулирующий многочлен для $U|_{\mathcal{L}_-}$, но реально важным для него является выполнение (4.1) и отсутствие нулей вне множества $\sigma(U|_{\mathcal{L}_-})$, т. е. степень $N(\xi)$ принципиального значения не имеет и при необходимости может быть увеличена.

5. МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО J -УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ПОНТЯГИНА

Для начала напомним формулу, по которой вычисляется значение функции от оператора, голоморфной на спектре этого оператора (см. [26, гл. XI, п. 151]): $f(C) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{D}} f(\xi) R_\xi(C) d\xi$, где C — заданный оператор, $\mathcal{D}$ — открытая область комплексной области, содержащая спектр указанного оператора, граница $\partial \mathcal{D}$ которой положительно ориентирована и состоит из конечного числа замкнутых кривых.

В нашем случае роль C будет играть действующий в пространстве Понтрягина J -унитарный оператор U , а $\mathcal{D}$ — это кольцо $\mathcal{Z} = \{\xi : r < |xi| < R\}$, $r < 1 < R$. Воспользуемся представлением (4.18). Временно допустим, что функция $\frac{f(\xi)}{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})}$ имеет устранимые особенности в нулях дробно-рациональной функции $N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})$. Тогда

$$f(U) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{Z}} \frac{f(\xi)}{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})} \left(\int_{\gamma}^{\frac{2\pi+\gamma}{\xi}} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t \right) d\xi,$$

откуда

$$f(U) = \int_{\gamma}^{\frac{2\pi+\gamma}{\xi}} \frac{f(e^{it})}{N(e^{it})\overline{N}(e^{-it})} dG_t. \quad (5.1)$$

Пусть теперь $f(\xi)$ — произвольная функция, голоморфная в области $\mathcal{A}$ и на её границе, $P_f(\xi)$ — интерполяционный полином для функции $f(\xi)$ с узлами интерполяции, совпадающие с нулями функции $N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})$ с учётом их кратности. Заменяя $f(\xi)$ на $f(\xi) - P_f(\xi)$ в (5.1), получим

$$f(U) = P_f(U) + \int_{\gamma}^{\frac{2\pi+\gamma}{\xi}} \frac{f(e^{it}) - P_f(e^{it})}{N(e^{it})\overline{N}(e^{-it})} dG_t. \quad (5.2)$$

При построении модельного пространства роль функции $f(\xi)$ будут играть произведения тригонометрических полиномов или, точнее, соответствующих дробно-рациональных аналитических функций, а именно, пусть

$$u(e^{it}) = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \alpha_j e^{ijt} \quad \text{и} \quad v(e^{it}) = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \beta_j e^{ijt} \quad (5.3)$$

— два тригонометрических полинома. Формально они записаны как полиномы одного порядка, но реально благодаря равенству нулю некоторых коэффициентов их степени могут различаться. Итак, с полиномом $u(e^{it})$ мы свяжем функцию

$$u(\xi) = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \alpha_j \xi^j, \quad (5.4)$$

с полиномом $v(e^{it})$ — функцию $v(\xi) = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \beta_j \xi^j$, при этом полиному $\overline{v(e^{it})} = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \overline{\beta_j} e^{-ijt}$ соответ-

ствует функция $\overline{v\left(\frac{1}{\xi}\right)}$, произведению полиномов, очевидно, отвечает произведение соответствующих дробно-рациональных функций. Отметим для дальнейшего формулу дифференцирования $\left(\overline{v\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right)'_{\xi} = -\frac{1}{\xi^2} \overline{v'\left(\frac{1}{\xi}\right)}$.

Предположим теперь дополнительно, что U — циклический оператор в следующей версии: найдётся такой вектор $h \in \mathcal{H}$, что система $h_l = U^l h$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ является полной в $\mathcal{H}$. Положим $c_l = [U^l h, h] = [h_l, h_0]$, где $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Полагая $f(\xi) = \xi^l$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, из (5.2) получаем (ср. с [39])

$$c_l = \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j^{(l)} c_j + \int_{\gamma}^{\frac{2\pi+\gamma}{\xi}} \frac{e^{itl} - \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j^{(l)} e^{itj}}{N(e^{it})\overline{N}(e^{-it})} d[G_t h, h], \quad (5.5)$$

где $\sum_{j=0}^{2n} \alpha_j^{(l)} \xi^j$ — интерполяционный многочлен для ξ^l , $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n$ $Q(\xi)$. Поясним, что для $0 \leq l < 2n$ представление (5.5) сводится к тривиальному равенству $c_l = c_l$.

Перейдём теперь к формированию модельного пространства Понтрягина как некоторого пространства функций. отождествим (циклический) вектор h с тождественной единицей, вектор

$Uh - c e^{it}$, $U^2h - c e^{2it}$, $U^{-1}h - c e^{-it}$ и т. д. Итак, стартовым линейным многообразием функций у нас будет множество тригонометрических полиномов $\mathfrak{T}$, записанных в комплексной форме. Превратим множество $\mathfrak{T}$ в линейное пространство с внутренним скалярным произведением $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{T}}$ полагая $[e^{ijt}, e^{ilt}]_{\mathfrak{T}} = c_{j-l}$, $j, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где величины c_{j-l} заданы в (5.5). По построению линеал $\mathfrak{T}$ изометричен плотному подмножеству пространства Понтрягина $\mathcal{H}$, поэтому он после пополнения превращается в пространство Понтрягина, которое мы обозначим $\Pi(\Phi)$, а исходный оператор будет подобен действующему в $\Pi(\Phi)$ оператору умножения U_{Θ} на функцию e^{it} . Указанное пополнение можно реализовать разными способами, но все эти способы топологически эквивалентны. Один из вариантов — выделить в $\mathfrak{T}$ максимальное отрицательное подпространство $\mathcal{L}_-$ и найти в $\mathfrak{P}$ J -ортогональное дополнение $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{\perp}$. Линеал $\mathcal{L}_+$ с внутренним эрмитовым произведением $[\cdot, \cdot]$ — это предгильбертово пространство, пополнив которое мы и получим (в прямой сумме с $\mathcal{L}_-$) пространство Понтрягина $\Pi(\Phi)$. Формулы (5.5) показывают, что, вообще говоря, как гильбертова структура, так и структура пространства Понтрягина на функциональном пространстве $\Pi(\Phi)$ может задаваться не обычной мерой Лебега—Стилтьеса, а некоторым распределением (обобщённой функцией) Φ . Причину этого явления легко понять, если обратиться к представлению (5.2). Действительно, в этой формуле важную роль играет интерполяционный многочлен $P_f(\xi)$ для функции $f(\xi)$, причём с кратными узлами интерполяции, поэтому нахождение такого многочлена требует вычисления в узлах интерполяции не только значения функции $f(\xi)$, но и её производных. Если вычисление значения функции в точке может быть реализовано через дискретную меру, то вычисление производной — задача, к теории меры не сводящаяся. Разбор конкретного примера, связанного не с J -унитарным, а с J -с.с. оператором, можно найти в [30], здесь же мы рассмотрим примеры, непосредственно иллюстрирующие классификацию особенностей для J -унитарного оператора.

Пример 5.1. Пусть $\mathcal{H} = L^2(0, 2\pi) \dot{+} \mathbb{C}^2$, где $\mathbb{C}^2$ — двумерное унитарное пространство. Зафиксируем в $\mathbb{C}^2$ ортонормированный базис $\{s, z\}$ и положим

- $Jf(t) = f(t)$, $Uf(t) = e^{it}f(t)$, $f(t) \in L^2(0, 2\pi)$;
- $Js = z$, $Jz = s$, $Us = -s + iz$, $Uz = -z$;
- $[f(t), g(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, $[f(t), s] = [f(t), z] = [s, s] = [z, z] = 0$, $[s, z] = 1$,
- $h = 1 + s$.

Непосредственно проверяется, что U — циклический J -унитарный оператор, а h — соответствующий циклический вектор. Далее, $U^l h = (-1)^l s + (-1)^{l-1} l i z + e^{ilt}$, где $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, откуда $c_0 = 1$, $c_l = (-1)^{(l-1)} l i$, $l = \pm 1, \pm 2, \dots$, а для $d_l = c_{l-1} + c_l + c_{l+1}$ $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ верно $d_{-1} = d_1 = 1$, $d_0 = 2$, $d_l = 0$ $l = \pm 2, \pm 3, \dots$ и $d_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ilt} d\sigma(t)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$\sigma(t) = \int_0^t |e^{i\tau} + 1|^2 d\tau$. Последнее представление — это представление вида (4.3), поэтому

$$c_l = (-1)^{l-1} ((l-1)c_0 + l c_1) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{itl} - (-1)^{l-1} ((l-1) + l e^{it})}{|e^{it} + 1|^2} d\sigma(t),$$

где c_0 и c_1 те же, что и выше, $(-1)^l + l(-1)^{l-1}(\xi + 1)$ — интерполяционный многочлен для ξ^l , $l = -1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Последняя формула с учетом (5.2), (5.3) и (5.4) даёт представление

$$[u(e^{it}, 1)]_{\mathfrak{T}} = [u(U)h, h] = u(-1)c_0 + u'(-1)(c_1 + c_0) + \int_0^{2\pi} \frac{u(e^{it}) - u(-1) - u'(-1)(e^{it} + 1)}{|e^{it} + 1|^2} d\sigma(t). \quad (5.6)$$

Вывод представления (5.6) носил в целом общий характер, специфическим было только условие $N(e^{it}) = e^{it} + 1$. С учётом конкретного вида функции $\sigma(t)$, а также значений c_0 и c_1 представление (5.6) сильно упрощается:

$$[u(e^{it}, 1)]_{\mathfrak{T}} = u'(-1)i + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt. \quad (5.7)$$

Представление (5.7) можно использовать для непосредственного построения модельного пространства Понтрягина и анализа полученного результата. Заменим в (5.7) функцию $u(\xi)$ на произведение $u(\xi)\overline{v(\frac{1}{\xi})}$

$$[u(e^{it}), v(e^{it})]_{\mathfrak{T}} = [u(e^{it})\overline{v(e^{it})}, 1]_{\mathfrak{T}} = (u'(-1)\overline{v(-1)} - u(-1)\overline{v'(-1)})i + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it})\overline{v(e^{it})} dt. \quad (5.8)$$

Рассмотрим линеал $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{T}$, состоящий из тригонометрических полиномов вида $\tilde{u}(e^{it}) = (e^{it} + 1)u(e^{it})$, где $u(e^{it}) \in \mathfrak{T}$. Для $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathfrak{M}$ имеем $[\tilde{u}(e^{it}), \tilde{v}(e^{it})]_{\mathfrak{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{it})\overline{\tilde{v}(e^{it})} dt$.

Если рассмотреть (5.8) как линеал в $L^2(0, 2\pi)$, то, как легко проверить, замыкание $\mathfrak{M}$ по норме совпадает с $L^2(0, 2\pi)$, но, тем не менее, замыкание $\mathfrak{M}$ как подмножества в $\Pi(\Phi)$, будет вырождено. Действительно, пусть $\tilde{v}_j(\xi) = \frac{1}{2^{2j+1}}(\xi - 1)^{2j}(\xi^2 - 1)$, $j = 1, 2, \dots$, $u(e^{it})$ — произвольный элемент из $\mathfrak{T}$. Тогда $\tilde{v}_j(-1) = 0$, $\tilde{v}'_j(-1) = 1$,

$$[\tilde{v}_l(e^{it}), \tilde{v}_l(e^{it})]_{\mathfrak{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{2l} dt \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} [u(e^{it}), \tilde{v}(e^{it})] = -iu(-1) \quad (5.9)$$

и согласно предложению 2.3 замыкание $\mathfrak{M}$ является вырожденным неотрицательным подпространством. При доказательстве предложения 2.3 использовалась последовательность из $\mathfrak{M}$, сходящаяся к вектору (функции) из изотропной части замыкания, который в силу (5.9) можно отождествить с обобщённой функцией $i\delta(t + \pi)$. Поскольку в роли пространства пробных функций у нас выступают тригонометрические многочлены или, в более общей постановке, представители некоторого класса 2π -периодических функций, поясним исходные позиции.

Пространство пробных функций здесь — это множество 2π -периодических функций вида $f(e^{it})$, где $f(\xi)$ — произвольная функция, заданная и аналитическая на множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. В силу теоремы Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций (см. [24, гл. 3, §4, с. 265] или [21, гл. I, §5, п. 19, с. 68-69]) такое пространство аналитических функций является счётно-нормированным пространством с системой норм $\{\|f(\xi)\|_k = \max_{\frac{1}{k+1} \leq |\xi| \leq k+1} \{|f(\xi)|\}\}_{k=1}^{\infty}$.

Обозначим это пространство символом $\mathcal{A}$, а соответствующее пространство пробных функций — $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, при этом указанные пространства гомеоморфны как линейные топологические пространства, но, тем не менее, оператор дифференцирования в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ — это разные (в том числе и с точки зрения спектральных свойств) операторы.

Действительно, $\frac{df(z)}{dz} = f'(z)$, $\frac{dg(t)}{dt} = \frac{df(e^{it})}{dt} = f'(e^{it}) \cdot i \cdot e^{it}$, т. е. действующему в $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ оператору $g(t) \mapsto g'(t)$ соответствует действующий в $\mathcal{A}$ оператор $f(z) \mapsto izf'(z)$. Добавим, что структурой, альтернативной $\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ является пространство $\mathfrak{s}_{(sc)}$ двусторонних последовательностей со сверхлинейной сходимостью (об этом понятии см., напр., [9]), в нашем случае удобнее определять это пространство, как пространство таких последовательностей $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, что $\sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| + |c_{-k}|)\rho^k < \infty$ для любого $\rho > 1$. Последнее пространство удобно для описания $\mathfrak{s}_{(sc)}^*$, но нам достаточно иметь конкретную функциональную реализацию некоторых (а не всех) функционалов из $\mathcal{A}(\mathcal{T})^*$.

Итак, далее обобщённые функции — это непрерывные линейные функционалы на пространстве $\mathcal{A}(\mathcal{T})$. Опишем некоторые из них. Как и обычно, функцию Дирака определим равенством $\ll f(t), \delta(t - t_0) \gg = f(t - t_0)$. Эту обобщённую функцию, разумеется, можно определить и как предел обычных 2π -периодических функций. Возьмём, скажем, ядро Фейера $F_k(\tau - t_0) = \frac{\sin^2(\frac{k+1}{2}(\tau - t_0))}{2(k+1)\sin^2(\frac{\tau - t_0}{2})}$. О ядре Фейера и его свойствах упоминается в некоторых книгах по математическому анализу (см., напр., [19, гл. 7, §55.5]) из специализированных монографий укажем

на [8, §47]. Тогда для любой функции $f(t) \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ верно $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(t) F_k(t - t_0) dt = \pi f(t_0)$, т. е. $\lim_{\rightarrow \infty} F_k(t - t_0) = \pi \delta(t - t_0)$.

Далее, для двух 2π -периодических непрерывно дифференцируемых функций $\omega(\tau)$ и $\eta(\tau)$ верно

$$\int_0^{2\pi} (\omega'(\tau)\eta(\tau) + \omega(\tau)\eta'(\tau)) d\tau = (\omega(2\pi)\eta(2\pi))' - (\omega(0)\eta(0))' = 0,$$

откуда

$$\int_0^{2\pi} \omega'(\tau)\eta(\tau) d\tau = - \int_0^{2\pi} \omega(\tau)\eta'(\tau) d\tau, \quad (5.10)$$

т. е. в рамках описываемого подхода действует та же формула, что и при традиционном подходе к дифференцированию обобщённых функций.

Потребуем также, чтобы $\omega(\tau) \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Оператор дифференцирования непрерывен в $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, поэтому из (5.10) следует $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \omega(\tau) F'_k(\tau - t_0) d\tau = -\pi \omega'(t_0)$. Последняя формула, очевидно, определяет $\delta'(t - t_0)$ как непрерывный линейный функционал на $\mathcal{A}(\mathcal{T})$.

Перейдём теперь непосредственно к пространству $\Pi(\Phi)$ и действию на нём оператора умножения на e^{it} . Индефинитная полуторалинейная форма задана на $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ формулой (ср. с (5.8)) $[u(e^{it}), v(e^{it})]_{\mathcal{A}(\mathcal{T})} = \ll u(e^{it}) \overline{v(e^{it})}, \Phi \gg$, где Φ — линейный функционал (распределение), $\ll \cdot, \cdot \gg$ — «билинейная» форма, связывающая между собой элементы из $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ и соответствующие непрерывные функционалы: $\ll \cdot, \Phi \gg = \ll \cdot, \delta'(t + \pi) \gg + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdot dt$ на $\mathcal{A}(\mathcal{T})$.

Пополнение $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ как пространства Понтрягина порождает не только пространство $L(0, 2\pi)$, но и два дополнительных элемента — «локализатора» распределений $\ll \cdot, \delta(t + \pi) \gg$ и $\ll \cdot, \delta'(t + \pi) \gg$, которые мы обозначим $\mathcal{L}_\pi$ и $\mathcal{L}'_\pi$ соответственно:

$$[u(e^{it}), \mathcal{L}_\pi]_{\Pi(\Phi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \overline{\delta(t + \pi)} dt, \quad [u(e^{it}), \mathcal{L}'_\pi]_{\Pi(\Phi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \overline{\delta'(t + \pi)} dt.$$

Из предыдущего $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \overline{\delta'(t + \pi)} dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(e^{it}))'_t \overline{\delta(t + \pi)} dt = iu'(-1)$. В качестве следующего шага положим $v(\xi) = -\frac{(\xi - 1)^2}{4\xi}$. Тогда $v'(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{4\xi^2}$, $v(e^{it}) = \sin^2(t/2)$. Вычислим $\lim_{l \rightarrow \infty} [u(e^{it}), v_l(e^{it})]_{\Pi(\Phi)}$, где $u(e^{it}) \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$, $v_l(\xi) = (v(\xi))^l$. Тогда в силу (5.8) $\lim_{l \rightarrow \infty} [u(e^{it}), v_l(e^{it})]_{\Pi(\Phi)} = iu(u'(t + 1))$, так что значение $\lim_{l \rightarrow \infty} v_l(e^{it})$ можно трактовать как $-\mathcal{L}'_\pi$.

В качестве очередного шага найдём величину $[\mathcal{L}'_\pi, \mathcal{L}_\pi]_{\Pi(\Phi)} = \lim_{l \rightarrow \infty} [-v(e^{it}), -i\tilde{v}(e^{it})]_{\Pi(\Phi)} = -1$. Аналогично показывается, что $[\mathcal{L}_\pi, \mathcal{L}_\pi]_{\Pi(\Phi)} = 0$ и $[\mathcal{L}'_\pi, \mathcal{L}'_\pi]_{\Pi(\Phi)} = 0$.

Далее,

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot [u(e^{it}), e^{it} \mathcal{L}'_\pi]_{\Pi(\Phi)} &= \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \overline{(e^{it} \delta'(t + \pi))} dt = - \int_0^{2\pi} (u(e^{it}) e^{-it})'_t \overline{\delta(t + \pi)} dt = \\ &= - \int_0^{2\pi} (i \cdot u'(e^{it}) - iu(e^{it}) e^{-it}) \overline{\delta(t + \pi)} dt = -2\pi i(u'(-1) + u(-1)) = -2\pi [u(e^{it}), (\mathcal{L}'_\pi - i\mathcal{L}_\pi)]_{\Pi(\Phi)}. \end{aligned}$$

Для завершения всей конструкции определим на $\Pi(\Phi)$ каноническую норму, соответствующую индефинитному скалярному произведению: $\|u(e^{it})\|^2 = |u'(-1)|^2 + |u(-1)|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(e^{it})|^2 dt$.

Наметим теперь несколько иной, но тоже функциональный подход, построенный непосредственно в терминах пространстве $\mathcal{A}$. Пусть $\phi(\xi)$ — аналитическая на $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{T} \cup \{0\})$ функция, $\mathbb{T}(r)$ — положительно ориентированный контур $\{\xi : |\xi| = r\}$, $r > 0$, $r \neq 1$. Тогда интеграл $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{T}(r)} f(\xi) \phi(\xi) d\xi$ определяет на $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ ($f(e^{it}) \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$) непрерывный линейный функционал, причём он имеет одно и то же значение для любого $r < 1$, а при любом $r > 1$ это, вообще говоря, будет другой не зависящий от r функционал. Введём теперь функционал

$$\Phi(f(e^{it})) = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\mathbb{T}(1/r)} f(\xi) \phi(\xi) d\xi - \oint_{\mathbb{T}(r)} f(\xi) \phi(\xi) d\xi \right), \quad (5.11)$$

где $f(\xi)$ и $\phi(\xi)$ те же, что и выше, $r < 1$. Возьмём $\phi(\xi) = (\xi - \xi_0)^{-1}$, $|\xi_0| = 1$. Тогда $\Phi(f(e^{it})) = f(\xi_0) = f(e^{it_0})$. Если в (5.11) при выбранном $\phi(\xi)$ взять $r \rightarrow 1$, то

$$f(e^{it_0}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(\frac{e^{it}}{r}\right) \frac{1}{(e^{it} - re^{it_0})} - f(re^{it}) \frac{r}{re^{it} - e^{it_0}} \right) e^{it} dt. \quad (5.12)$$

Без ограничения общности можно предположить, что $t_0 \in (0, 2\pi)$, т. к. в противном случае достаточно сменить пределы интегрирования. Пусть $\epsilon > 0$ таково, что $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset (0, 2\pi)$. Тогда подынтегральное выражение в (5.12) равномерно стремится к нулю при $r \rightarrow 1 - 0$, т. е. выражение (5.12) определяет, как обычно, δ -функцию, сосредоточенную в точке t_0 для $\mathcal{A}(\mathcal{T})$.

Разумеется, список подобных реализаций может быть продолжен, в частности, если взять $\phi(\xi) = (\xi - \xi_0)^{-2}$, то $\Phi(f(e^{it})) = f'(\xi_0) = f'(e^{it_0})$. Далее, если $f(\xi), g(\xi) \in \mathcal{A}$, то $f(\xi) \overline{g(1/\bar{\xi})} \in \mathcal{A}$. Пусть $\phi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{it} - \xi}$. Тогда (см. (5.11)) $\Phi(f(\xi) \overline{g(1/\bar{\xi})}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt$. Подводя итог, можно констатировать, что выражения вида (5.8) реализуемы с помощью функций $\phi(\xi)$, аналитических на $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{T} \cup \{0\})$. Такой подход выглядит более громоздким, чем изложенный выше, но зато он не требует прямого привлечения обобщённых функций.

6. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ J -УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРА КЛАССА D_κ^+

В этом разделе пространство с индефинитной метрикой — это сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$, а операторы, если не оговорено противное, ограничены и действуют в $\mathcal{H}$ (см. [2]).

Вначале отметим следующий геометрический факт.

Предложение 6.1. *Если $\mathcal{L}$ — максимальное семидефинитное подпространство из $\mathcal{H}$, P — J -ортотпроектор и $P\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$, то линеал $P\mathcal{L}$ является максимальным семидефинитным подпространством относительно $P\mathcal{H}$.*

Пусть $\mathcal{L}$ — некоторое подпространство пространства Крейна. Обозначим символом $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}$ его изотропную часть. Говорят, что подпространство $\mathcal{L}_+$ ($\mathcal{L}_-$) принадлежит классу $\mathbf{h}^+$ ($\mathbf{h}^-$), если $\mathcal{L}_+^0$ ($\mathcal{L}_-^0$) конечномерно, а фактор-пространство $\widehat{\mathcal{L}}_+ = \mathcal{L}_+ / \mathcal{L}_+^0$ ($\widehat{\mathcal{L}}_- = \mathcal{L}_- / \mathcal{L}_-^0$) является гильбертовым (анти-гильбертовым) относительно индуцированной индефинитной метрики, или, что эквивалентно, $\mathcal{L}_+ \in \mathbf{h}^+$ ($\mathcal{L}_- \in \mathbf{h}^-$), если оно разлагается в сумму конечномерного изотропного и равномерно положительного (равномерно отрицательного) подпространств.

Множество максимальных неотрицательных и максимальных неположительных подпространств будем обозначать через $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$, соответственно. Во избежание недоразумений подчеркнём, что при определении $\mathbf{h}^+$, $\mathbf{h}^-$, $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ речь шла именно о подпространствах, а не о линеалах (см. Замечание 3.1).

Будем говорить, что оператор T принадлежит классу $\mathbf{H}$ и писать $T \in \mathbf{H}$, если у него существуют инвариантные подпространства $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ и все такие подпространства принадлежат классу $\mathbf{h}^\pm$, соответственно.

Определение 6.1. Множество $\mathfrak{A} = \{A\}$ самосопряженных линейных операторов, действующих в пространстве Крейна, принадлежит классу $\mathbf{K}(\mathbf{H})$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$, если существует такой самосопряженный оператор $B \in \mathbf{H}$ в этом пространстве, что $BA = AB$ при всех $A \in \mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ состоит из одного оператора A , то будем говорить, что A принадлежит классу $\mathbf{K}(\mathbf{H})$ и писать $A \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$.

Определение 6.2. Скажем, что семейство $\mathfrak{A} = \{A\}$ самосопряженных линейных операторов, действующих в пространстве Крейна, принадлежит классу $\mathbf{D}_\kappa^+$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{D}_\kappa^+$, если для него найдется пара инвариантных подпространств $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm \cap \mathbf{h}^\pm$, $\mathcal{L}_+[\perp]\mathcal{L}_-$ с размерностью подпространства $\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$, равной κ , $\kappa < \infty$. Если семейство $\mathfrak{A} = \{A\}$ состоит из единственного оператора A , то мы будем также писать $A \in \mathbf{D}_\kappa^+$.

Определение операторов класса $\mathbf{D}_\kappa^+$ можно распространить и на операторы, которые не являются J -с.с.

Определение 6.3. Скажем, что оператор D принадлежит к классу $\mathbf{D}_\kappa^+$, если $\{D, D^c\} \in \mathbf{D}_\kappa^+$.

Именно так в [32] были введены J -нормальные операторы класса $\mathbf{D}_\kappa^+$.

Рассмотрим J -унитарный оператор U , такой что для него найдётся инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathbf{h}^+$. В силу предложения 3.4 подпространство $\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_+^{[1]}$ также будет инвариантным подпространством для U , т. е. $U \in \mathbf{D}_\kappa^+$. Положим

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-, \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_+ \ominus \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_- \ominus \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L}_0 = J\mathcal{L}_1. \quad (6.1)$$

Поскольку по условию подпространства $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_3$ являются равномерно дефинитными, то без ограничения общности можно считать, что относительно разложения

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3, \quad \dim \mathcal{L}_0 = \dim \mathcal{L}_1 = \kappa, \quad (6.2)$$

оператор J имеет матричное представление

$$J = \begin{pmatrix} 0 & V^{-1} & 0 & 0 \\ V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_3 \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где $V: \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_1$ — изометрический оператор, а I_2 и I_3 — тождественные операторы в соответствующих подпространствах.

Поскольку оператор U является J -унитарным, то он обратим и $U^{-1} = U^c$. Рассмотрим подпространство $U\mathcal{L}_1$. Поскольку $\mathcal{L}_1$ нейтрально, то нейтральным будет и $U\mathcal{L}_1$, более того, совпадают (в силу обратимости U) их размерности. Поскольку изотропная часть подпространства $\mathcal{L}_+$ определяется однозначно, то $U\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1$. Итак, подпространство $\mathcal{L}_1$ является инвариантным подпространством оператора U , который имеет относительно разложения (6.3) матричное представление

$$U = \begin{pmatrix} U_{00} & 0 & 0 & 0 \\ U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{20} & 0 & U_{22} & 0 \\ U_{30} & 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Прямой подсчёт даёт

$$U^c = JU^*J = \begin{pmatrix} V^{-1}U_{11}^*V & 0 & 0 & 0 \\ VU_{10}^*V & VU_{00}^*V^{-1} & VU_{20}^* & -VU_{30}^* \\ U_{12}^*V & 0 & U_{22}^* & 0 \\ -U_{13}^*V & 0 & 0 & U_{33}^* \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Поскольку $U^cU = UU^c = I$, то

$$\left. \begin{aligned} \text{а. } & VU_{00}^*V^{-1}U_{11} = I_1, \quad U_{22}^*U_{22} = U_{22}U_{22}^* = I_2, \quad U_{33}^*U_{33} = U_{33}U_{33}^* = I_3, \\ \text{б. } & U_{00}^*V^{-1}U_{12} + U_{20}^*U_{22} = 0, \quad U_{00}^*V^{-1}U_{13} - U_{30}^*U_{33} = 0, \\ \text{с. } & U_{10}^*VU_{00} + U_{00}^*V^{-1}U_{10} + U_{20}^*U_{20} - U_{30}^*U_{30} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

В равенства (6.6) включены не все соотношения, возникающие при вычислении произведения U^cU , а только их минимальное подмножество, из которого прочие соотношения следуют автоматически. Далее, посмотрим на (6.6) как на достаточные условия, при которых оператор, задаваемый матричным представлением (6.4), становится J -унитарным. Действительно, матричные элементы U_{11} , U_{12} и U_{13} однозначно определяются по (6.6), если известны элементы U_{00} , U_{20} , U_{30} , U_{22} и U_{33} , а вот с элементом U_{10} картина оказывается более сложной. Равенство (6.6)с), рассмотренное как уравнение относительно U_{10} , похоже на линейное матричное уравнение, которое иногда называют матричным уравнением Сильвестра (см. [29], и может быть к нему сведено, однако

конкретный вид (6.6с) позволяет найти соответствующие решения непосредственно. Представим оператор $U_{00}^* V^{-1} U_{10}$ в виде $X + iY$, где X и Y — самосопряжённые операторы в (конечномерном) гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_0$. Тогда $U_{10}^* V U_{00} = X - iY$ и уравнение (6.6с) приобретает вид $2X = -U_{20}^* U_{20} + U_{30}^* U_{30}$. Оператор $-U_{20}^* U_{20} + U_{30}^* U_{30}$, очевидно, самосопряжён, поэтому

$$U_{10} = V(U_{00}^*)^{-1} \left(\frac{1}{2} (-U_{20}^* U_{20} + U_{30}^* U_{30}) + iY \right), \quad (6.7)$$

где Y — произвольный самосопряжённый оператор в пространстве $\mathcal{L}_0$. Итак, доказано следующее предложение:

Предложение 6.2. *Если в J -пространстве $\mathcal{H}$, представленном в виде (6.2), фундаментальная симметрия задана операторной матрицей (6.3), то оператор U , заданный матрицей (6.4), будет J -унитарным тогда и только тогда, когда выполняются условия (6.6).*

Замечание 6.1. Если в J -пространстве фундаментальная симметрия J задаётся формулой (6.3), а для J -унитарного оператора U известны только его значения на инвариантных (для него) подпространствах $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ (см. (6.1), то, согласно (6.7), U восстанавливается на всём пространстве $\mathcal{H}$ неоднозначно, а с точностью до играющего роль параметра восстановления оператора Y

Предложение 6.3. *Если J -унитарный оператор U принадлежит к классу D_κ^+ , $\mathcal{L}_+$ — соответствующее инвариантное подпространство из определения 6.2, то его неунитарный спектр либо пуст, либо состоит из конечного числа собственных значений, симметричных относительно единичной окружности. При этом максимальная длина присоединенной цепочки векторов, отвечающих такому собственному значению, не превосходит размерности изотропной части подпространства $\mathcal{L}_+$.*

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что резольвента $R_\xi(U)$ определена для тех значений $\xi \in \mathbb{C}$, для которых одновременно имеют смысл операторы $R_\xi(U_{00})$, $R_\xi(U_{11})$, $R_\xi(U_{22})$, $R_\xi(U_{33})$ и

$$R_\xi(U) = \begin{pmatrix} R_\xi(U_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ R_{10} & R_\xi(U_{11}) & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & 0 & R_\xi(U_{22}) & 0 \\ R_{30} & 0 & 0 & R_\xi(U_{33}) \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

где $R_{30} = -R_\xi(U_{33})U_{30}R_\xi(U_{00})$, $R_{20} = -R_\xi(U_{22})U_{20}R_\xi(U_{00})$, $R_{12} = -R_\xi(U_{11})U_{12}R_\xi(U_{22})$, $R_{13} = -R_\xi(U_{11})U_{13}R_\xi(U_{33})$, $R_{10} = \{R_\xi(U_{11})U_{10} + R_{12}U_{20} + R_{13}U_{30}\}R_\xi(U_{00})$.

Так как операторы U_{22} и U_{33} унитарны, неунитарный спектр оператора U совпадает с объединением неунитарных спектров конечномерных операторов U_{00} и U_{11} и поэтому он конечен. Кроме того, из представления (6.8) следует, что при $\xi \rightarrow \xi_0 \in \sigma(U)$, $\xi \neq \xi_0$, $\xi_0 \neq \frac{1}{\xi_0}$ резольвента $R_\xi(U)$ имеет степенной рост, не превосходящий сумму показателей роста резольвент $R_\xi(U_{00})$ и $R_\xi(U_{11})$. Если одновременно $\xi_0 \in \sigma(U_{00})$, $\xi_0 \in \sigma(U_{11})$, то и $\frac{1}{\xi_0} \in \sigma(U_{00})$, $\frac{1}{\xi_0} \in \sigma(U_{11})$, причем $\dim RS_{\xi_0}(U_{00}) = \dim RS_{1/\bar{\xi}_0}(U_{11})$ и $\dim RS_{1/\bar{\xi}_0}(U_{00}) = \dim RS_{\xi_0}(U_{11})$. Так как $\xi_0 \neq \frac{1}{\bar{\xi}_0}$, то $\dim RS_{1/\bar{\xi}_0}(U_{00}) + \dim RS_{\xi_0}(U_{00})$ не может быть больше, чем $\dim \mathcal{L}_0$. Итак, показатель роста резольвенты $R_\xi(U)$ при $\xi \rightarrow \xi_0$ не превосходит суммы $\dim RS_{\xi_0}(U_{00}) + \dim RS_{\xi_0}(U_{11})$, которая, в свою очередь, не больше $\dim \mathcal{L}_0$. $\square$

Предложение 6.4. *Пусть J -унитарный оператор U принадлежит к классу D_κ^+ , $\mathcal{L}_+$ — соответствующее инвариантное подпространство из определения 6.3, и $\sigma(U) \setminus \mathbb{T} \neq \emptyset$. Тогда пространство $\mathcal{H}$ однозначно представимо в виде $\mathcal{H} = \mathcal{H}'[+] \mathcal{H}''$, где $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H}''$ — инвариантные подпространства оператора U , $\sigma(U|_{\mathcal{H}'}) \subset \mathbb{T}$, $\sigma(U|_{\mathcal{H}''}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$, $\dim \mathcal{H}'' < \infty$ и оператор $U|_{\mathcal{H}'}$ принадлежит к классу $D_{\kappa'}$, $\kappa' < \kappa$ (возможно, $\kappa' = 0$).*

Доказательство. Существование разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}'[+] \mathcal{H}''$ со свойствами $\sigma(U|_{\mathcal{H}'}) \subset \mathbb{T}$, $\sigma(U|_{\mathcal{H}''}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ и его единственность тривиально следуют из предложения 6.3, поскольку в силу этого предложения неунитарная часть $\sigma(U)$ является изолированным подмножеством множества

$\sigma(U)$ и проектор Рисса $P'' = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_{\xi}(U) d\xi$, где Γ — объединение двух простых положительно ориентированных контуров, принадлежащих к области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ и симметричных относительно единичной окружности, один из которых охватывает ту часть $\sigma(U)$, которая находится строго внутри единичного круга, в второй — соответствующую часть вне единичного круга, будет J -ортогональным. Проектор P'' определяет подпространство $\mathcal{H}''$: $\mathcal{H}'' = P''\mathcal{H}$, а двойственный ему проектор $P' = I - P''$ — подпространство $\mathcal{H}'$.

Из вида оператора P' следует, что подпространство $\mathcal{L}_+$ будет для него инвариантным, поэтому из предложения 6.1 вытекает, что подпространство $P'\mathcal{L}_+$ является искомым инвариантным подпространством оператора $U|_{\mathcal{H}'}$ и, таким образом, нам осталось лишь проверить конечномерность подпространства $\mathcal{H}''$. Итак, подпространство $P''\mathcal{L}_+$ является для оператора $U|_{\mathcal{H}''}$ максимальным неотрицательным инвариантным подпространством, которое к тому же псевдорегулярно, а его изотропная часть конечномерна. Покажем, что в действительности $P''\mathcal{L}_+$ нейтрально. В самом деле, если мы допустим противное, т. е. что в $P''\mathcal{L}_+$ есть хоть один положительный вектор, то получим, что $\sigma(U|_{\mathcal{H}''}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, однако это невозможно в силу выбора $\mathcal{H}''$. Итак, подпространство $P''\mathcal{L}_+$ нейтрально и, следовательно (см. 6.1), $P''\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_1$, поэтому $\dim P''\mathcal{L}_+ = \kappa'' \leq \kappa$. Наконец, аналогично показывается, что $P''\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_1$ — максимальное неположительное подпространство относительно $\mathcal{H}''$, поэтому $\dim \mathcal{H}'' = 2\kappa''$. $\square$

Замечание 6.2. В условиях предложения 6.4 справедливо $\mathcal{H}'' \cap \mathcal{L}_1 \neq \emptyset$.

Представление (6.8) даёт возможность локализовать спектр оператора $U \in D_{\kappa}^+$, но непосредственно с его помощью непросто доказать наличие у U спектрального разложения того же типа, что у J -унитарного оператора в пространстве Понтрягина. Наша ближайшая цель — построить аналитическое представление резольвенты оператора U , аналогичное представлению, изложенному в работах [37, 38, 30]. Оно будет похоже на представление (4.18), для чего также, как в разделе 4, будут рассмотрены последовательности вида $\{[N(U)\overline{N(U)}U^k x, x]\}_{-\infty}^{\infty}$, где $x \in \mathcal{H}$, а $N(\xi)$ некоторый фиксированный полином. В разделе 4 оператор $N(U)\overline{N(U)}$ был J -неотрицательным, но в условиях этого раздела полинома с таким свойством, вообще говоря, не существует. Тем не менее оператор U обладает свойством, позволяющим применять технику, аналогичную той, которая применяется к дефинизируемым операторам.

Теорема 6.1. Для оператора U (напомним, что $U \in D_{\kappa}^+$) найдётся такая рациональная функция $f(\xi)$ вида $f(\xi) = N(\xi)\overline{N(1/\bar{\xi})}$, где $N(\xi)$ — некоторый отличный от тождественного нуля полином, что $f(U) = C_+ - C_-$, операторы C_+ и C_- J -неотрицательны и перестановочны с U .

Доказательство. Пусть $N(\xi)$ — какой-либо (не обязательно минимальный) аннулирующий многочлен для U_{11} со старшим коэффициентом, равным нулю, $\overline{N}(\xi)$ — многочлен с коэффициентами, сопряжёнными к $N(\xi)$. С учётом (6.6) имеем

$$N(U) = \begin{pmatrix} N(U_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ N_{10} & 0 & N_{12} & N_{13} \\ N_{20} & 0 & N(U_{22}) & 0 \\ N_{30} & 0 & 0 & N(U_{33}) \end{pmatrix}, \quad \overline{N}(U^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{10} & \overline{N}(U_{11}^{-1}) & \tilde{N}_{12} & \tilde{N}_{13} \\ \tilde{N}_{20} & 0 & \overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ \tilde{N}_{30} & 0 & 0 & \overline{N}(U_{33}^{-1}) \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

откуда

$$\begin{aligned} N(U)\overline{N}(U^{-1}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{12}\tilde{N}_{20} + N_{13}\tilde{N}_{30} & 0 & N_{12}\overline{N}(U_{22}^{-1}) & N_{13}\overline{N}(U_{33}^{-1}) \\ N(U_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & N(U_{22})\overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ N(U_{33})\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N(U_{33})\overline{N}(U_{33}^{-1}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{12}\tilde{N}_{20} & 0 & N_{12}\overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ N(U_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & N(U_{22})\overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{13}\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N_{13}\overline{N}(U_{33}^{-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N(U_{33})\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N(U_{33})\overline{N}(U_{33}^{-1}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проанализируем первое слагаемое:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{12}\tilde{N}_{20} & 0 & N_{12}\overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ N(U_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & N(U_{22})\overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1}), \quad (6.10)$$

где

$$N_+(U) = \begin{pmatrix} N(U_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{12} & 0 \\ N_{20} & 0 & N(U_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{N}_+(U^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{N}(U_{11}^{-1}) & \tilde{N}_{12} & 0 \\ \tilde{N}_{20} & 0 & \overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что операторы $N(U)$ и $\overline{N}(U^{-1})$ J -сопряжены, поэтому J -сопряжены операторы $N_+(U)$ и $\overline{N}_+(U^{-1})$. Далее, оператор $N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1})$ является J -неотрицательным, поскольку $\overline{N}(U^{-1})\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_+$ и

$$[N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1})x, x] = [\overline{N}_+(U^{-1})x, \overline{N}_+(U^{-1})x] \geq 0, \quad x \in \mathcal{H}, \quad (6.11)$$

однако из полученных соотношений прямо не следует, что операторы $N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1})$ и U коммутируют. Поскольку в работе [31] существование полинома $N(\xi)$ с нужными свойствами было доказано для J -с.с. оператора и само доказательство в нашем случае может быть проведено по сходной схеме, то мы его только наметим с указанием на необходимые модификации, связанные с заменой J -с.с. оператора на J -унитарный. Положим $U^+ = U|_{\mathcal{L}_+}$ и рассмотрим матричное представление оператора U^+ и его резольвенты:

$$U^+ = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}, \quad R_\xi(U^+) = \begin{pmatrix} R_\xi(U_{11}) & -R_\xi(U_{11})U_{12}R_\xi(U_{22}) \\ 0 & R_\xi(U_{22}) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим структуру операторов U_{12} и $R_\xi(U_{11})U_{12}R_\xi(U_{22})$. Для упрощения предположим, что оператор U_{11} представляет из себя одну жорданову клетку с собственным числом μ и базисом $\{e_j\}_1^k$, т. е.

$$U_{11}e_j = \mu e_j + e_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \quad U_{11}e_k = \mu e_k, \quad \text{Lin}\{e_j\}_1^k = \mathcal{L}_1. \quad (6.12)$$

Далее, найдётся такая система $\{y_j\}_1^k \subset \mathcal{L}_1$, что $U_{12}x = \sum_{j=1}^k (x, y_j)e_j$. Поскольку образ оператора

U_{12} может быть, вообще говоря, подпространством пространства $\mathcal{L}_1$, система $\{y_j\}_1^k$ может быть линейно зависимой. Более того, благодаря предложению 6.4 гильбертова структура пространства $\mathcal{H}$ может быть выбрана так, что в случае $|\mu| \neq 1$ все $y_j = 0$, поэтому в дальнейшем предполагается, что $|\mu| = 1$. Наконец, пусть $E_\lambda^{(22)}$ непрерывная слева спектральная функция оператора U_{22} , т. е.

$$U_{22} = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE_\lambda^{(22)}. \quad \text{Тогда}$$

$$\begin{aligned} R_\xi(U_{22}) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\lambda} - \xi} dE_\lambda^{(22)}, \quad R_\xi(U_{11})e_l = \sum_{j=l}^k (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu - \xi)^{j-l+1}} e_j, \quad l = 1, 2, \dots, k, \\ R_\xi(U_{11})U_{12}R_\xi(U_{22})x &= \sum_{l=1}^k \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\lambda} - \xi} dE_\lambda^{(22)} x, y_l \right) \sum_{j=l}^k (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu - \xi)^{j-l+1}} e_j = \\ &= \sum_{j=1}^k \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\lambda} - \xi} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu - \xi)^{j-l+1}} \right) d(E_\lambda^{(22)} x, y_l) \right) e_j. \end{aligned}$$

Интегральное представление оператора $R_\xi(U_{11})U_{12}R_\xi(U_{22})$ получено нами в предположении (6.12), но от этого частного случая достаточно легко перейти к общей ситуации: если жордановых клеток несколько, то надо взять сумму по всем этим клеткам. Итак, пусть оператор

U_{11} состоит из p клеток и соответствующий базис пространства $\mathcal{L}_1$ разбит на p групп: $\{e_j^{(m)}\}_{j=1}^{k_m}$, $m = 1, 2, \dots, p$, $k_1 + k_2 + \dots + k_p = \kappa$. Тогда

$$R_\xi(U_{11})U_{12}R_\xi(U_{22})x = \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\lambda} - \xi} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu_m - \xi)^{j-l+1}} \right) d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) e_j^{(m)}.$$

Последнее представление доказывает существование проектора $E^+(\Delta)$, вычисляемого по формуле $E^+(\Delta) = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) s\text{-}\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} R_\xi(U^+) d\xi$, где $\Delta = [\alpha, \beta] \subset (0, 2\pi)$ — замкнутый промежуток,

удовлетворяющий условиям (4.22), а кривая $\Gamma_\delta^{(\Delta)}$ та же, что и в интеграле (4.23), причём неунитарный спектр оператора лежит вне контура $\Gamma^{(\Delta)}$. Непосредственный подсчёт даёт следующий результат: $E^+(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & E^{(12)}(\Delta) \\ 0 & E^{(22)}(\Delta) \end{pmatrix}$, где

$$E^{(12)}(\Delta) = - \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu_m - e^{i\lambda})^{j-l+1}} \right) d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) e_j^{(m)}. \quad (6.13)$$

Представление (6.13) показывает, что условие $\alpha, \beta \notin \sigma_p(A_{22})$ не является существенным и от него можно отказаться, но, вообще говоря, связанный с J -унитарным оператором J -ортогональный проектор $E^+(\Delta)$ является неограниченной функцией от α и β .

Перейдём к представлению оператора $U^+E^+(\Delta)$. Равенство $U^+R_\xi(U^+) = I + \xi R_\xi(U^+)$ позволяет представить этот оператор в виде $U^+E^+(\Delta) = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) s\text{-}\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \xi R_\xi(U^+) d\xi$, от-

куда рассуждениями, подобными приведённым выше, получаем представление $U^+E^+(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & U_{12}(\Delta) \\ 0 & U_{22}(\Delta) \end{pmatrix}$, где

$$U_{12}(\Delta) = - \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{e^{i\lambda}}{(\mu_m - e^{i\lambda})^{j-l+1}} \right) d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) e_j^{(m)}.$$

Аналогичным образом выглядит оператор $(U^+)^n E^+(\Delta)$ для любого целого n . Для упрощения записи можно учесть что операторы A^+ и $E^+(\Delta)$ коммутируют, а к тому же $E^+(\Delta)$ идемпотентен, поэтому $N(U^+)E^+(\Delta) = N(U^+E^+(\Delta)) = \begin{pmatrix} 0 & E_{12}(\Delta)N(U_{22}(\Delta)) \\ 0 & N(U_{22}(\Delta)) \end{pmatrix}$, где

$$E_{12}(\Delta)N(U_{22}(\Delta)) = - \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{N(e^{i\lambda})}{(\mu_m - e^{i\lambda})^{j-l+1}} \right) d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) e_j^{(m)}.$$

Замечание 6.3. Выражение $E_{12}(\Delta)N(U_{22}(\Delta))$ как функция параметров α и β ограничена и имеет односторонние пределы.

Доопределим теперь оператор $E^+(\Delta)$ на всём пространстве $\mathcal{H}$ как J -ортогональный проектор с помощью матричного представления (сопоставьте с (6.5)):

$$E_+(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E^{(12)}(\Delta)(E^{(12)}(\Delta))^*V & 0 & E^{(12)}(\Delta) & 0 \\ (E^{(12)}(\Delta))^*V & 0 & E^{(22)}(\Delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подпространство $E_+(\Delta)\mathcal{H}$ инвариантно относительно U и $U^{-1} = U^c$, поэтому $UE_+(\Delta) = E_+(\Delta)UE_+(\Delta)$, $U^cE_+(\Delta) = E_+(\Delta)U^cE_+(\Delta)$. Применив к последнему равенству операцию сопряжения получим $E_+(\Delta)U = E_+(\Delta)UE_+(\Delta)$, поэтому $UE_+(\Delta) = U_+(\Delta)U$ и $U^{-1}E_+(\Delta) = U_+(\Delta)U^{-1}$.

Определим Λ как и выше (см. (4.21)), при этом для простоты предположим, что $0, 2\pi \neq \Lambda$. Пусть $\{\mu_j\}_{j=1}^k = \Lambda$. Временно допустим, что $N(\xi)$ — это минимальный аннулирующий многочлен

для оператора U_{11} . Напомним, что, вообще говоря, множество $\{e^{i\mu_j}\}_1^k$ — это только часть спектра оператора U_{11} , а именно та его часть, которая лежит на $\mathbb{T}$. Рассмотрим $|N(e^{it})|^2$. Это — неотрицательная функция на $[0, 2\pi]$, а Λ множество её нулей. Найдётся такое $\epsilon > 0$, что множество $X_1 = \{t : t \in [0, 2\pi], |N(e^{it})|^2 < \epsilon\}$ распадается на k непересекающихся отрезков $[\alpha_j, \beta_j]$, причём $\mu_j \in [\alpha_j, \beta_j]$. Положим $X_l = \{t : t \in [0, 2\pi], |N(e^{it})|^2 < \frac{\epsilon}{l}\}$, $Y_l = [0, 2\pi] \setminus X_l$, $l = 1, 2, \dots$. Тогда $\bigcap_{l=1}^{\infty} X_l = \Lambda$, $\bigcup_{l=1}^{\infty} Y_l = [0, 2\pi] \setminus \Lambda$.

Поскольку Y_ϵ — это объединение непересекающихся отрезков, то операторы $E_+(Y_\epsilon)$ и $E^+(Y_\epsilon)$ корректно определяются по принципу аддитивности.

Вернёмся теперь к рассмотрению оператора $\hat{C}_+ = N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1})$. В силу (6.11) он не только J -неотрицателен, но и имеет неотрицательный спектр (для произвольного J -неотрицательного оператора в пространстве Крейна это, вообще говоря неверно), так что его квадрат тоже J -неотрицателен. Тогда (см. [3, гл. IV, теорема 1.5] или [18]) оператор $\hat{E}_\lambda$ допускает представление

$$\hat{C}_+ = \hat{S} + \int_0^{\|\hat{C}_+\|+0} \lambda d\hat{E}_\lambda, \text{ где } \hat{S} \text{ — } J\text{-неотрицательный нильпотентный оператор, } \hat{E}_\lambda \text{ — спектральная}$$

функция оператора $\hat{E}_\lambda$, $\hat{S}^2 = 0$, $(I - \hat{E}_\lambda)\hat{S} = 0$ для любого $\lambda > 0$. Спектральная функция $\hat{E}_\lambda$ может оказаться неограниченной в окрестности нуля, в этом случае интеграл трактуется как несобственный со сходимостью в сильной операторной топологии. С другой стороны

$$\begin{aligned} E_+(Y_l)N(U)\overline{N}(U^{-1}) &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E^{(12)}(Y_l)N(U_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & E^{(12)}(Y_l)N(U_{22})\overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ E^{(22)}(Y_l)N(U_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & E^{(22)}(Y_l)N(U_{22})\overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_+(Y_l)N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1}). \end{aligned}$$

Т.к. проектор $E_+(Y_l)$ коммутирует с $N(U)\overline{N}(U^{-1})$, то он коммутирует и с $N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1})$, поэтому подпространства $E_+(Y_l)\mathcal{H}$ и $(I - E_+(Y_l))\mathcal{H}$ инвариантны относительно оператора $\hat{C}_+$. Т.к. проектор $E_+(Y_l)$ коммутирует с оператором U , то $E_+(Y_l)N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1}) = N_+(E_+(Y_l)U)\overline{N}_+(E_+(Y_l)U^{-1})$, поэтому оператор $\hat{C}_+|_{E_+(Y_l)\mathcal{H}}$ — функция оператора $U|_{E_+(Y_l)\mathcal{H}}$. В силу выбора множества и теоремы об отображении спектра (см., напр., [10, гл. X, §4, теорема 4.2], [26, гл. XI, п. 151, формула (28)]) $\sigma(\hat{C}_+|_{E_+(Y_l)\mathcal{H}}) \subset \{t : t \geq \frac{\epsilon}{l}\}$. Этот же результат следует непосредственно из представления (6.10) и условия коммутирования проектора $E_+(Y_l)$ и оператора $\hat{C}_+$.

Поясним эту аргументацию анализируя спектр сужения $\hat{C}_+|_{(I-E_+(Y_l))\mathcal{H}}$. Ненулевой спектр этого сужения определяется диагональным элементом $(I_2 - E^{22}(Y_l))N(U_{22})\overline{N}(U^{-1})$. U_{22} — это унитарный оператор, поэтому $\sigma(\hat{C}_+|_{(I-E_+(Y_l))\mathcal{H}}) \subset [0, \frac{\epsilon}{l}]$, причём, если оператор $\hat{C}_+$ обладает собственным числом, то соответствующее собственное подпространство включено в $E_+(Y_l)\mathcal{H}$. Суммируя

$$\text{сказанное получаем } E_+(Y_l)\hat{C}_+ = \int_{\frac{\epsilon}{l}}^{\|\hat{C}_+\|^2+0} \lambda d\hat{E}_\lambda. \text{ Отсюда}$$

$$\begin{aligned} UE_+(Y_l)N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1}) &= \\ &= UE_+(Y_l)N(U)\overline{N}(U^{-1}) = E_+(Y_l)N(U)\overline{N}(U^{-1})U = E_+(Y_l)N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1})U, \end{aligned}$$

$$\text{т. е. } U \int_{\frac{\epsilon}{l}}^{\|\hat{C}_+\|^2+0} \lambda d\hat{E}_\lambda = \int_{\frac{\epsilon}{l}}^{\|\hat{C}_+\|^2+0} \lambda d\hat{E}_\lambda U, \text{ откуда } U \int_0^{\|\hat{C}_+\|^2+0} \lambda d\hat{E}_\lambda = \int_0^{\|\hat{C}_+\|^2+0} \lambda d\hat{E}_\lambda U. \text{ Осталось заметить,}$$

$$\text{что } (N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1}))^2 = \int_0^{\|\hat{C}_+\|^2+0} \lambda^2 d\hat{E}_\lambda. \quad \square$$

Замечание 6.4. Как показывает доказательство теоремы 6.1, в качестве искомого многочлена можно взять $N(\xi) = (N_{\min}(\xi))^2$, где $N_{\min}(\xi)$ — минимальный аннулирующий многочлен для U_{11} .

Ниже символом $\text{Alg}\{U, U^{-1}\}$ обозначается замкнутая в слабой операторной топологии алгебра, порождённая операторами U и U^{-1} .

Теорема 6.2. Пусть спектр J -унитарного оператора $U \in D_{\kappa}^{+}$ унитарен, $\mathcal{L}_{+}$ — отвечающее определению 6.2 подпространство, инвариантное относительно U . Тогда оператор U обладает заданной на отрезке $[\gamma, 2\pi + \gamma]$ ($\gamma \in [0, 2\pi)$ — некоторая константа) собственной спектральной функцией E_{λ} с конечным множеством спектральных особенностей $\Lambda \subset (\gamma, 2\pi + \gamma)$ ($\mathfrak{R}_{\Lambda}$ — множество промежутков $\Delta = [a, b] \subset [\gamma, 2\pi + \gamma]$ $a, b \notin \Lambda$), причем

- $$\left. \begin{array}{l} \text{а) для любого } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda \text{ верно } E_{\lambda} \in \text{Alg}\{U, U^{-1}\} \text{ и } s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow \lambda-0} E_{\mu} = E_{\lambda}; \\ \text{б) если } \Delta \in \mathfrak{R}_{\Lambda} \text{ и } \Delta \cap \Lambda = \emptyset, \text{ то } E(\Delta)\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\Delta}^{+}[+]\mathcal{H}_{\Delta}^{-}, U\mathcal{H}_{\Delta}^{+} \subset \mathcal{H}_{\Delta}^{+}, \\ U\mathcal{H}_{\Delta}^{-} \subset \mathcal{H}_{\Delta}^{-}, \mathcal{H}_{\Delta}^{+} \text{ — равномерно положительное, а } \mathcal{H}_{\Delta}^{-} \text{ — равномерно отрицательное подпространство (каждое из подпространств } \mathcal{H}_{\Delta}^{+} \text{ и } \mathcal{H}_{\Delta}^{-} \\ \text{может вырождаться в } \{0\}), U E(\Delta) = \int_{\Delta} e^{i\lambda} dE_{\lambda}; \\ \text{в) если } \Delta \in \mathfrak{R}_{\Lambda} \text{ и } \Delta \cap \Lambda \neq \emptyset, \text{ то } E(\Delta)\mathcal{L}_{+} \cap \mathcal{L}_1 \neq \{0\} \text{ и оператор } U|_{E(\Delta)\mathcal{H}} \\ \text{не является скалярным спектральным оператором.} \end{array} \right\}$$

Доказательство. Демонстрация справедливости этого предложения может быть реализована по той же схеме, что и доказательство теоремы 4.1, которая посвящена аналогичному результату для пространства Понтрягина, поэтому мы покажем только путь, приводящий к этой схеме. Итак, пусть $N(\xi)$ — тот же многочлен, что и в (6.9), но с учётом замечания 6.4, операторы C_{+} и C_{-} определены соответственно. Для произвольного $x \in \mathcal{H}$ рассмотрим три последовательности: $d_l = [N(U)\overline{N}(U^{-1})U^l x, x]$, $d_l^{+} = [C_{+}U^l x, x]$, $d_l^{-} = [C_{-}U^l x, x]$ $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В силу теоремы 6.1 последовательность $\{d_l^{+}\}_{-\infty}^{\infty}$ позитивна. По аналогичной причине последовательность $\{d_l^{-}\}_{-\infty}^{\infty}$ негативна. Как хорошо известно (см., напр, [7]) найдутся такие неубывающие непрерывные слева функции $\sigma_{+}^{(x)}(t)$ и $\sigma_{-}^{(x)}(t)$, что

$$d_l^{+} = \int_0^{2\pi} e^{il} d\sigma_{+}^{(x)}(t), \quad d_l^{-} = - \int_0^{2\pi} e^{il} d\sigma_{-}^{(x)}(t), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6.14)$$

причём эти функции определяются с точностью до константы. Из приведённых формул следует, что

$$d_l = \int_0^{2\pi} e^{il} d\eta^{(x)}(t), \quad \eta^{(x)}(t) = \sigma_{+}^{(x)}(t) - \sigma_{-}^{(x)}(t), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.15)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые привели к представлению (4.16). Актуализируя их, из формул (6.14) и (6.15) получаем, что найдутся J -неотрицательные функции G_t^{+} и G_t^{-} , порождающие представления

$$C_{+}R_{\xi}(U) = \int_{\gamma}^{2\pi+\gamma} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t^{+}, \quad C_{-}R_{\xi}(U) = \int_{\gamma}^{2\pi+\gamma} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t^{-},$$

$$N(U)\overline{N}(U^{-1})R_{\xi}(U) = \int_{\gamma}^{2\pi+\gamma} \frac{1}{e^{it} - \xi} d(G_t^{+} - G_t^{-}).$$

Дальнейшие шаги просто повторяют соответствующие этапы доказательства теоремы 4.1. $\square$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Унитарные операторы в пространствах Крейна — это, в целом, слишком широкий класс операторов для того, чтобы его представители обладали таким набором свойств, которые были бы полезны при их использовании в смежных разделах теории операторов. Операторы, которые, наряду с унитарностью, обладают инвариантным подпространством специального вида, имеют

свойства, близкие к свойствам унитарных операторов в пространстве Понтрягина. Хотя рассматриваемые операторы не являются дефинизируемыми, они, условно говоря, допускают представление в виде разности дефинизируемых операторов (теорема 6.1) Для последних операторов при дополнительном условии их цикличности в работе построено модельное представление функционального типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в гильбертовых с G -метрикой // Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 4. — С. 43–92.
2. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1979. — 17. — С. 113–205.
3. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
4. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Введение в теорию пространств Понтрягина: Спец. курс лекций. — Симферополь: ТНУ, 2008.
5. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Введение в теорию пространств Крейна: Спец. курс лекций. — Симферополь: ФОРМА, 2010.
6. Ароншайн Н. Квадратичные формы на векторных пространствах // Математика. — 1964. — 8, № 5. — С. 102–155.
7. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М.: Физматгиз, 1961.
8. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
9. Бегуни А. В., Лыткин С. М. О скорости сходимости последовательностей и рядов // Мат. в выс. обр. — 2020. — № 18. — С. 7–26.
10. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. Курс лекций. — Киев: Выща школа, 1990. — DOI: [10.1134/S0012266114010042](https://doi.org/10.1134/S0012266114010042).
11. Богачёв В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ. Унив. курс. — М.—Ижевск: Регуляр. и хаот. динам., 2020.
12. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974.
14. Иохвидов И. С., Крейн М. Г. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1956. — 5. — С. 367–432.
15. Иохвидов И. С., Крейн М. Г. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. II // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1959. — 8. — С. 413–496.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
17. Крейн М. Г., Лангер Г. К. О спектральной функции самосопряжённого оператора в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. — 1963. — 152, № 1. — С. 39–42.
18. Крейн М. Г., Шмудьян Ю. Л. J -полярное представление плюс-операторов // В сб.: «Математические исследования. I, вып. 2». — Кишинёв: Инст. мат. МССР, 1966. — С. 131–161.
19. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. II. — М.: Высшая школа, 1970.
20. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. — М.: ФМЛ, 1960.
21. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Учеб. пособие для вузов. — М.: ГИТТЛ, 1951.
22. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — СПб.: Лань, 2009.
23. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1978.
24. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Начала теории. Т. I. — СПб.: Лань, 2009.
25. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977.
26. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
27. Севастьянов В. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1982.
28. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970.
29. Чуйко С. М. О решении обобщённого матричного уравнения Сильвестра // Чебышев. сб. — 2015. — 16, № 1. — С. 52–66. — DOI: [10.22405/2226-8383-2015-16-1-52-66](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2015-16-1-52-66).
30. Штраус В. А. Модели унитарных и самосопряжённых операторов в пространствах Понтрягина // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2022. — 68, № 3. — С. 522–552. — DOI: [10.22363/2413-3639-2022-68-3-522-552](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-3-522-552).

31. Штраус В. А. Спектральное разложение самосопряжённых операторов в пространствах Понтрягина и Крейна // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2025. — 71, № 3. — С. 524–546. — DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546).
32. Azizov T. Ya., Strauss V. A. Spectral decompositions for special classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces. Spectral Theory and its Applications // В сб.: «Proceedings dedicated to the 70-th birthday of Prof. I. Colojoară». — Bucharest: Theta, 2003. — С. 45–67.
33. Azizov T. Ya., Strauss V. A. On a spectral decomposition of a commutative operator family in spaces with indefinite metric // Methods Funct. Anal. Topol. — 2005. — 11, № 1. — С. 10–20.
34. Boas R. P. The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation // Bull. Am. Math. Soc. — 1939. — 45. — С. 399–404. — DOI: [10.1090/S0002-9904-1939-06992-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1939-06992-9).
35. Colojoară I., Foiaş C. Theory of generalized spectral operators. — N.Y.: Gordon and Breach, 1968.
36. Jonas P., Langer H., Textorius B. Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontrjagin spaces // В сб.: «Operator theory and complex analysis». — Basel: Birkhauser, 1992. — С. 252–284. — DOI: [10.1007/978-3-0348-8606-2_13](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8606-2_13).
37. Langer H. Spectraltheorie linearer Operatoren in J -räumen und einige Anwendungen auf die Shar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$ // Дисс. д.ф.-м.н. — Dresden: Tech. Univ. Dresden, 1965.
38. Langer H. Spectral functions of definitizable operators in Krein space // В сб.: «Functional Analysis». — Berlin–Heidelberg: Springer, 1982. — С. 1–46. — DOI: [10.1007/BFb0069840](https://doi.org/10.1007/BFb0069840).
39. Navarro L. J., Strauss V. On a definitizable analog of the trigonometric moment problem generating an indefinite Toeplitz form // Monatsh. Math. — 2004. — 143, № 4. — С. 333–347. — DOI: [10.1007/s00605-004-0272-1](https://doi.org/10.1007/s00605-004-0272-1).
40. Navarro L. J., Strauss V. Some class of real sequences having indefinite Hankel forms // Methods Funct. Anal. Topol. — 2011. — 17, № 1. — С. 65–74.

В. А. Штраус

Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия

E-mail: vstrauss@mail.ru, ПИИЦ SPIN-код: 4224-4149, ПИИЦ AuthorID: [3047](https://orcid.org/0000-0002-2083-2563), ResearcherID: [AAS-3748-2020](https://orcid.org/0000-0002-2083-2563), Scopus: [6701847905](https://orcid.org/0000-0002-2083-2563), ORCID: [0000-0002-2083-2563](https://orcid.org/0000-0002-2083-2563)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-388-418](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-388-418)
EDN: [CBFCHM](https://edn.ru/CBFCHM)

UDC 517.982:517.984.48
Research article

Spectral decomposition and model representation of unitary operators in spaces with indefinite metric

V. A. Straus

South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia

Abstract. A unitary operator acting in the Krein space and possessing an invariant subspace that is maximal nonnegative and decomposes into a direct sum of a uniformly positive (i.e., equivalent to a Hilbert space with respect to the inner pseudoscalar product) and a finite-dimensional neutral subspace is considered. The existence of a spectral function with a finite number of spectral singularities and a difference expression for this operator transforming the infinite-in-both-sides sequence of momenta generated by this operator into a sequence representable as the difference of positive sequences of momenta is proven. In the special case of a cyclic unitary operator in a Pontryagin space, a function space is constructed in which the operator under study is modelled as the operator of multiplication by an exponential with an imaginary argument.



Keywords: unitary operator, Krein space, Pontryagin space, invariant subspace, spectral decomposition.

Conflict-of-interest. The author declares no conflict of interest.

Acknowledgments and funding. The author is deeply grateful to Prof. D. A. Zakora, on whose initiative this work was written. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2025-1543.

For citation: V. A. Straus, “Spectral decomposition and model representation of unitary operators in spaces with indefinite metric,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 2, 388–418. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-388-418](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-388-418) EDN: CBFCHM

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, “Lineynye operatory v gil’bertovykh s G -metrikoy” [Linear operators in Hilbert spaces with G -metric], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1971, **26**, No. 4, 43–92 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, “Lineynye operatory v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy i ikh prilozheniya” [Linear operators in spaces with indefinite metric and their applications], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1979, **17**, 113–205 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy Teorii Lineynykh Operatorov v Prostranstvakh s Indefinitnoy Metrikoy* [Fundamentals of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevskiy, *Vvedenie v teoriyu Prostranstv Pontryagina: Spets. Kurs Lektsiy* [Introduction to the Theory of Pontryagin Spaces: A Special Lecture Course], TNU, Simferopol’, 2008 (in Russian).
5. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevskiy, *Vvedenie v Teoriyu Prostranstv Kreyna: Spets. Kurs Lektsiy* [Introduction to the Theory of Kreyn Spaces: A Special Lecture Course], FORMA, Simferopol’, 2010 (in Russian).
6. N. Aronshayn, “Kvadratichnye formy na vektornykh prostranstvakh” [Quadratic forms on vector spaces], *Matematika* [Mathematics], 1964, **8**, No. 5, 102–155 (in Russian).
7. N. I. Akhiezer, *Klassicheskaya Problema Momentov i Nekotorye Voprosy Analiza, Svyazannye s Neyu* [The Classical Problem of Moments and Some Related Analytical Questions], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
8. N. K. Bari, *Trigonometricheskie Ryady* [Trigonometric Series], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
9. A. V. Begunts and S. M. Lytkin, “O skorosti skhodimosti posledovatel’nostey i ryadov” [On the rate of convergence of sequences and series], *Mat. v Vys. Obr.* [Math. Higher Edu.], 2020, No. 18, 7–26 (in Russian).
10. Yu. M. Berezanskiy, G. F. Us, and Z. G. Sheftel’, *Funktsional’nyy Analiz. Kurs Lektsiy* [Functional Analysis. Lecture Course], Vyshcha Shkola, Kiev, 1990 (in Russian), DOI: [10.1134/S0012266114010042](https://doi.org/10.1134/S0012266114010042).
11. Bogachev V. I and O. G. Smolyanov, *Deystvitel’nyy i Funktsional’nyy Analiz. Univ. Kurs* [Real and Functional Analysis. University Course], Regul’yar. i Khaot. Dinam., Moscow–Izhevsk, 2020 (in Russian).
12. I. Ts. Gokhberg and M. G. Kreyn, *Vvedenie v Teoriyu Lineynykh Nesamosopryazhennykh Operatorov v Gil’bertovom Prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
13. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye Operatory. T. 3. Spektral’nye Operatory* [Linear Operators, Pt. 3: Spectral Operators], Mir, Moscow, 1974 (Russian translation).
14. I. S. Iokhvidov and M. G. Kreyn, “Spektral’naya teoriya operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy. I” [Spectral theory of operators in spaces with indefinite metric. I], *Tr. Mosk. Mat. Ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1956, **5**, 367–432 (in Russian).
15. I. S. Iokhvidov and M. G. Kreyn, “Spektral’naya teoriya operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy. II” [Spectral theory of operators in spaces with indefinite metric. II], *Tr. Mosk. Mat. Ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1959, **8**, 413–496 (in Russian).
16. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy Teorii Funktsiy i Funktsional’nogo Analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Fizmatlit, Moscow, 2009 (in Russian).
17. M. G. Kreyn and G. K. Langer, “O spektral’noy funktsii samosopryazhennogo operatora v prostranstve s indefinitnoy metrikoy” [On the spectral function of a self-adjoint operator in a space with an indefinite metric], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1963, **152**, No. 1, 39–42 (in Russian).
18. M. G. Kreyn and Yu. L. Shmul’yan, “ J -polarnoye predstavlenie plus-operatorov” [J -polar representation of plus-operators], In: *Matematicheskie Issledovaniya. I, vyp. 2* [Mathematical Research. I, Iss. 2], Inst. Mat. MSSR, Kishinev, 1966, pp. 131–161 (in Russian).

19. L. D. Kudryavtsev, *Matematicheskiiy Analiz. T. II* [Mathematical Analysis. Vol. II], Vysshaya Shkola, Moscow, 1970 (in Russian).
20. R. Cooke, *Beskonechnye Matritsy i Prostranstva Posledovatel'nostey* [Infinite Matrices and Sequence Spaces], FML, Moscow, 1960 (Russian translation).
21. M. A. Lavrent'ev and B. V. Shabat, *Metody Teorii Funktsiy Kompleksnogo Peremennogo. Ucheb. Posobie dlya Vuzov* [Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable. A Textbook for Universities], GITTL, Moscow, 1951 (in Russian).
22. A. I. Mal'tsev, *Osnovy Lineynoy Algebry* [Fundamentals of Linear Algebra], Lan', SPb., 2009 (in Russian).
23. A. I. Markushevich, *Kratkiy Kurs Teorii Analiticheskikh Funktsiy* [A Brief Course in the Theory of Analytic Functions], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
24. A. I. Markushevich, *Teoriya Analiticheskikh Funktsiy. Nachala Teorii. T. I* [Theory of Analytic Functions. Principles of the Theory. Vol. I], Lan', SPb., 2009 (in Russian).
25. M. Reed and B. Simon, *Metody Sovremennoy Matematicheskoy Fiziki. T. 1. Funktsional'nyy Analiz* [Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional analysis], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
26. F. Riesz and B. Szőkefalvi-Nagy, *Leksii po Funktsional'nomu Analizu* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
27. V. A. Sevast'yanov, *Kurs Teorii Veroyatnostey i Matematicheskoy Statistiki* [Course in Probability Theory and Mathematical Statistics], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
28. P. R. Halmos, *Gil'bertovo Prostranstvo v Zadachakh* [A Hilbert Space Problem Book], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
29. S. M. Chuyko, "O reshenii obobshchennogo matrichnogo uravneniya Sil'vestra" [On the solution of the generalized matrix Sylvester equation], *Chebyshev. sb.* [Chebyshev Coll.], 2015, **16**, No. 1, 52–66 (in Russian), DOI: [10.22405/2226-8383-2015-16-1-52-66](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2015-16-1-52-66).
30. V. A. Shtraus, "Modeli unitarnykh i samosopryazhennykh operatorov v prostranstvakh Pontryagina" [Models of self-adjoint and unitary operators in Pontryagin spaces], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 3, 522–552 (in Russian), DOI: [10.22363/2413-3639-2022-68-3-522-552](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-3-522-552).
31. V. A. Shtraus, "Spektral'noe razlozhenie samosopryazhennykh operatorov v prostranstvakh Pontryagina i Kreyna" [Spectral decomposition of self-adjoint operators in Pontryagin and Krein spaces], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2025, **71**, No. 3, 524–546 (in Russian), DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546).
32. T. Ya. Azizov and V. A. Strauss, "Spectral decompositions for special classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces. Spectral Theory and its Applications," In: *Proceedings dedicated to the 70-th birthday of Prof. I. Colojoară*, Theta, Bucharest, 2003, pp. 45–67.
33. T. Ya. Azizov and V. A. Strauss, "On a spectral decomposition of a commutative operator family in spaces with indefinite metric," *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2005, **11**, No. 1, 10–20.
34. R. P. Boas, "The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1939, **45**, 399–404, DOI: [10.1090/S0002-9904-1939-06992-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1939-06992-9).
35. I. Colojoară, C. Foiaş, *Theory of generalized spectral operators*, Gordon and Breach, N.Y., 1968.
36. P. Jonas, H. Langer, and B. Textorius, "Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontryagin spaces," In: *Operator theory and complex analysis*, Birkhauser, Basel, 1992, pp. 252–284, DOI: [10.1007/978-3-0348-8606-2_13](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8606-2_13).
37. H. Langer "Spectraltheorie linearer Operatoren in J -räumen und einige Anwendungen auf die Shar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$," *Habilitationsschrift*, Tech. Univ. Dresden, Dresden, 1965.
38. H. Langer, "Spectral functions of definitizable operators in Krein space," In: *Functional Analysis*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1982, pp. 1–46, DOI: [10.1007/BFb0069840](https://doi.org/10.1007/BFb0069840).
39. L. J. Navarro and V. Strauss, "On a definitizable analog of the trigonometric moment problem generating an indefinite Toeplitz form," *Monatsh. Math.*, 2004, **143**, No. 4, 333–347, DOI: [10.1007/s00605-004-0272-1](https://doi.org/10.1007/s00605-004-0272-1).
40. L. J. Navarro and V. Strauss, "Some class of real sequences having indefinite Hankel forms," *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2011, **17**, No. 1, 65–74.

V. A. Straus

South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia

E-mail: vstrauss@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4224-4149, eLIBRARY AuthorID: [3047](#), ResearcherID: [AAS-3748-2020](#), Scopus: [6701847905](#), ORCID: [0000-0002-2083-2563](#)