Современная математика. Фундаментальные направления. Том 72, № 2 (2026). С. 368–387
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2-368-387 УДК 517.984
EDN: BZHLLF *Научная статья*

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ВНУТРЕННИХ ВОЛН В НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Ю. Чжан, А. Н. Темнов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются малые колебания идеальной стратифицированной жидкости в ограниченных областях. Примеры решений таких задач, которые авторы называют классическими, обычно предполагают, что образующая боковой поверхности сосуда совпадает по направлению с вектором ускорения свободного падения $\vec{g}$ (и, следовательно, с направлением стратификации). В данном исследовании изучаются неклассические задачи, в которых образующая формы ёмкости и направление стратификации плотности образуют некоторый угол. Такое геометрическое несоответствие приводит к качественному изменению структуры спектра внутренних волн. На примере задачи для сосуда в форме наклонного прямоугольника показано, что наличие угла наклона между границей области и вектором $\vec{g}$ существенным образом влияет на формирование спектра. В частности, обнаружено, что спектр оператора малых колебаний перестаёт быть точечным и содержит участки непрерывного спектра. Определение границ непрерывного спектра важно для правильного решении неоднородных эволюционных задач. Установлено, что границы этих участков и точки перехода от точечного спектра к непрерывному зависят от величины угла наклона и геометрических параметров сосуда. Полученные результаты демонстрируют, что ориентация полости относительно поля силы тяжести является ключевым фактором, определяющим свойства внутренних волн в стратифицированной жидкости, занимающей ограниченный объём.

Ключевые слова: идеальная стратифицированная жидкость, внутренние волны, неклассические краевые задачи, операторный подход, спектральная теория.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. *Темнов А. Н.* — научное руководство, концептуализация, утверждение окончательной версии статьи; *Чжан Юе* — написание оригинального текста, визуализация, редактирование рукописи.

Для цитирования: *Чжан Ю., Темнов А. Н.* Спектральные свойства оператора внутренних волн в неклассических задачах // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. **72**, № 2. С. 368–387. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2-368-387 EDN: BZHLLF

Введение

Проблемы динамики стратифицированной жидкости, находящейся в поле силы тяжести, привлекают устойчивое внимание исследователей на протяжении многих десятилетий. Это обусловлено как фундаментальным математическим интересом к уравнениям в частных производных смешанного типа, так и широким спектром приложений в океанологии, метеорологии и технической гидродинамике, в том числе и гидродинамике топлива космических аппаратов. Основополагающие физические принципы и методы теоретической океанографии, описывающие внутренние волны, были систематизированы в классической монографии В. Краусса [15]. Дальнейшее

© Ю. Чжан, А. Н. Темнов, 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

развитие теории, в частности, математическое моделирование волновой динамики стратифицированных и вращающихся жидкостей, получило отражение в работах С. Л. Соболева [37] и его учеников [1,2,17], в работах В. В. Булатова и Ю. В. Владимирова [3,4], в монографии С. А. Габова и А. Г. Свешникова [5], а также в работах Н. Д. Копачевского, А. Н. Темнова и Д. О. Цветкова [12,13,24,25].

При исследовании колебаний вращающейся или стратифицированной жидкости сформировалось два фундаментальных аналитических направления. Одно направление связано с редукцией исходных векторных уравнений к одному скалярному уравнению для давления и последующему изучению начально-краевых задач. Второе направление основано на прямом рассмотрении исходных векторных уравнений движения как элементов некоторого гильбертова пространства и последующего проектирования на ортогональные подпространства.

В работах Н. Д. Копачевского и его учеников (второе направление) была построена теория малых движений идеальной и вязкой стратифицированной жидкости в терминах самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. В частности, было доказано, что для широкого класса областей спектр оператора плавучести вещественен, является предельным и лежит на отрезке $[0,\ N_0^2]$. Однако примеры, представленные в упомянутых работах, относились к случаям, которые можно называть классическими, где геометрия границы согласовалась с направлением стратификации (вектором $\vec{g}$).

В то же время вопрос о структуре спектра в областях другой формы, где имеются границы, не совпадающие с вектором силы тяжести, остаётся менее изученным и представляет собой серьёзную математическую проблему. С точки зрения теории дифференциальных уравнений, задача о колебаниях стратифицированной жидкости во многом подобна задаче о колебаниях вращающейся жидкости и сводится к проблемам задач Дирихле и Неймана для уравнений гиперболического типа. В ранних работах прошлого столетия [26,27,29] были затронуты вопросы корректной постановки и разрешимости рассматриваемых задач, а также отсутствия точечного спектра для любой области, а именно: в зависимости от топологических характеристик геометрии границы в спектре могут появляться области непрерывного спектра.

Фундаментальные результаты о структуре спектра в задачах с неклассической геометрией были получены учеником С. Л. Соболева — Р. А. Александряном [1,2]. Использование свойств некоторых автоморфизмов границы области, примененных к исследованию этой задачи, позволило ему получить много новых содержательных результатов об особенностях структуры спектра оператора, возникшего в задаче о колебаниях вращающейся жидкости. Большой вклад в исследование различных спектральных свойств оператора и связанных с ними вопросов поведения решений рассматриваемой проблемы был сделан в работах Т. И. Зеленяка [8], Дж. В. Ральстона [34], М. В. Фокина [22,23], Ю. Н. Григорьева [7], А. А. Ляшенко [17] и др.

Как было отмечено в аннотации, выявление участков непрерывного спектра очень важно при решении задач с неоднородными граничными условиями и при наличии начальных условий. Здесь возникает необходимость представлять движение стратифицированной идеальной жидкости в виде суперпозиции инерционных мод, что оказывается невозможным при наличии участков непрерывного спектра. Как следует из результатов работы С. Д. Троицкой [21], движение жидкости должно быть в этих случаях представлено не только в виде суммы инерционных мод, но и обязательно должно содержать интегральные члены.

1. Математическая постановка задачи и операторный подход

1.1. Исходные уравнения и краевые условия. Рассматриваются малые движения идеальной несжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, полностью заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с жёсткой неподвижной границей $\Sigma = \partial\Omega$. В состоянии покоя плотность жидкости $\rho_0(Z)$ зависит только от вертикальной координаты Z (направленной против вектора ускорения свободного падения $\vec{g} = -g\vec{e}_Z$) и определяется законом:

$$\rho_0(Z) = \rho_{00} e^{-\beta Z}, \tag{1.1}$$

где β — коэффициент распределения плотности по высоте, $N = const > 0$ — частота Брента—Вяйсяля, которая по определению $N^2 = -g\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{d\rho_0}{dZ}$, g — ускорение свободного падения, $\rho_{00} > 0$ —

плотность на некотором уровне. В рамках приближения Буссинеска линеаризованная система уравнений гидродинамики, описывающая малые возмущения состояния равновесия, имеет вид [30, 40]:

$$\begin{cases} \rho_0 \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p - \rho g \vec{e}_Z, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\rho_0 = 0, \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\vec{u}(\vec{X}, t)$ — поле скоростей, $p(\vec{X}, t)$ — динамическое давление, $\rho(\vec{X}, t)$ — динамическое возмущение плотности. На твёрдой неподвижной границе Σ выполняется условие непротекания:

$$\vec{u} \cdot \vec{n}\big|_\Sigma = 0, \tag{1.3}$$

где $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности Σ. Начальные условия задаются в виде: $\vec{u}|_{t=0} = \vec{u}^0, \rho|_{t=0} = \rho^0$.

1.2. Функциональные пространства и операторные уравнения. Для приведения начально-краевой задачи к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве введём необходимые функциональные пространства. В каждой точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ области Ω определим вектор скорости жидкости $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ таким образом, что в Ω возникает поле скоростей $\vec{u}(x)$. Естественно предположить, что соответствующая масса жидкости имеет конечную кинетическую энергию T. Если жидкость имеет плотность $\rho_0 = \rho_0(x)$, то это означает, что $2T = \int\limits_\Omega \rho_0(x)|\vec{u}(x)|^2 d\Omega < \infty$.

Тогда все поля, которым отвечает кинетическая энергия, образуют гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ с нормой $\|\vec{u}\| = \left(\int\limits_\Omega \rho_0 |\vec{u}|^2 d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}$. Пространство $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ допускает ортогональное разложение (см. подробнее в [11, 16]): $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) = \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$, где $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ — подпространство соленоидальных вектор-функций, удовлетворяющих условию непротекания на границе: $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, $u_n|_\Sigma = 0$; а $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ — подпространство квазипотенциальных полей вида $\vec{w} = \rho_0^{-1} \nabla \varphi$. В пространстве $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ свяжем с полем равновесной плотности $\rho_0(z)$ гильбертово пространство вектор-функций $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ со скалярным произведением:

$$(\vec{v}, \vec{w})_{\mathbf{J}_0} \equiv \int\limits_\Omega \rho_0(z)(\vec{v} \cdot \vec{w}) d\Omega.$$

Наряду с пространством вектор-функций, нам понадобится гильбертово пространство скалярных функций $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ для описания поля отклонений плотности ρ. Введём в него специальное скалярное произведение, учитывающее стратификацию:

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2} := g^2 \int\limits_\Omega [\rho_0(z) N^2]^{-1} \varphi(\vec{x}) \psi(\vec{x}) d\Omega.$$

Будем считать, что при каждом t вектор скорости $\vec{u}(\vec{x}, t)$ и градиент давления ∇p являются элементами введённых пространств. Вследствие введённых подпространств получаем:

$$\vec{u} \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \frac{1}{\rho_0(z)} \nabla p \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0).$$

Пусть P_0 — ортопроектор на подпространство $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$. Подействуем оператором P_0 на линеаризованное уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера в приближении Буссинеска). Поскольку $P_0(\rho_0^{-1} \nabla p) = 0$, градиент динамического давления исключается, и мы приходим к равносильной системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -C^* \rho, \quad \frac{d\rho}{dt} = C\vec{u},$$

где введены линейные операторы $C : \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \to \mathfrak{L}_2(\Omega)$ и $C^* : \mathfrak{L}_2(\Omega) \to \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$, действующие по правилу:

$$C\vec{u} := -\rho_0'(z)(\vec{u} \cdot \vec{k}), \quad C^*\rho := P_0 \left[\frac{g\rho}{\rho_0(z)} \vec{k} \right]. \tag{1.4}$$

Важным свойством операторов C и C^* является их взаимная сопряжённость. Действительно, используя определения скалярных произведений в $\mathbf{J}_0$ и $\mathfrak{L}_2$, имеем:

$$(\rho, C\vec{u})_{\mathfrak{L}_2} = g^2 \int\limits_\Omega [\rho_0 N^2]^{-1} \rho(-\rho_0' u_z) d\Omega = g \int\limits_\Omega \rho u_z d\Omega,$$

$$(C^*\rho, \vec{u})_{\mathbf{J}_0} = \int\limits_\Omega \rho_0 \left(P_0 \left[\frac{g\rho}{\rho_0} \vec{k} \right] \cdot \vec{u} \right) d\Omega = \int\limits_\Omega \rho_0 \left(\frac{g\rho}{\rho_0} \vec{k} \cdot \vec{u} \right) d\Omega = \int\limits_\Omega g\rho u_z d\Omega.$$

Из приведённых выражений следует $(\rho, C\vec{u})_{\mathfrak{L}_2} = (C^*\rho, \vec{u})_{\mathbf{J}_0}$.

Дифференцируя первое уравнение системы (1.2) по времени и подставляя во второе, мы исключаем поле плотности ρ и приходим к эволюционному уравнению второго порядка относительно скорости:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} + B_0\vec{u} = 0, \quad B_0 := C^*C.$$

Здесь B_0 — оператор плавучести, введённый в работе [20], который в явном виде записывается как

$$B_0\vec{u} = C^*(C\vec{u}) = P_0 \left[N^2 u_z \vec{k} \right].$$

Теорема 1.1. *Спектр оператора B_0 вещественный, предельный и расположен на отрезке $[0, N^2_{\max}]$ (см. [11, с. 21]). Если собственные функции $\vec{\eta}_k$ и $\vec{\eta}_l$ отвечают собственным значениям $\lambda_k \neq \lambda_l$, то $\vec{\eta}_k$ и $\vec{\eta}_l$ ортогональны как в скалярном произведении в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$, так и в энергетическом пространстве H_{B_0} оператора плавучести:*

$$(\vec{\eta}_k, \vec{\eta}_l) = (B_0^{\frac{1}{2}}\vec{\eta}_k, B_0^{\frac{1}{2}}\vec{\eta}_l) = 0 \quad (\lambda_k \neq \lambda_l).$$

Каждой собственной функции $\vec{\eta}_k(x)$ отвечает пара частот колебаний $\omega_k^{\pm} = \pm\sqrt{\lambda_k}$, причём все частоты ω расположены на отрезке $[-N_{\max}, N_{\max}]$.

Результат носит универсальный характер: он не зависит от формы и ориентации сосуда. Каким бы ни был угол наклона стенки, любые допустимые частоты нормальных колебаний обязаны принадлежать этому интервалу. Спектр оператора B_0 — предельный, а это означает, что помимо точечного спектра, система может обладать непрерывным спектром и собственными числами бесконечной кратности. Геометрия области полностью определяет структуру этого спектра внутри отрезка: наличие или отсутствие точечных мод и зон сгущения. Для понимания физической и математической природы спектра (появления непрерывного спектра при наклоне сосуда), целесообразно перейти к двумерной постановке задачи.

2. Аналитическое решение и структура спектра в наклонной прямоугольной области

2.1. Двумерная постановка и введение функции тока. Рассмотрим двумерную задачу о малых колебаниях идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости, полностью заполняющей прямоугольный контейнер. Для получения дифференциального уравнения введём неподвижную декартову систему координат (Y, Z). Направим ось Z вертикально вверх (антипараллельно вектору ускорения свободного падения $\vec{g}$), а ось Y — горизонтально. Для решения системы уравнений идеальной жидкости перейдём к функции тока $\Psi(Y, Z, t) = \psi(y, z)e^{i\omega t}$, которая тождественно удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$u_Y = \frac{\partial\Psi}{\partial Z}, \quad u_Z = -\frac{\partial\Psi}{\partial Y}.$$

Исключая давление путём перекрестного дифференцирования уравнений движения, получаем скалярное уравнение для амплитуды функции тока $\Psi(Y,Z,t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2}\right)+N^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}=0.$$

Полная постановка задачи включает ещё и граничное условие $\Psi|_\Sigma=0$ и начальные условия $\Psi(\vec{X},0)=\Psi_0(\vec{X})$, $\dot{\Psi}(\vec{X},0)=\dot{\Psi}_0(\vec{X})$. Будем далее рассматривать нормальные колебания, положив $\Psi(Y,Z,t)=\psi(y,z)e^{i\omega t}$, и перепишем уравнение для функции тока в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2}-\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\partial^2\psi}{\partial Z^2}=0, \tag{2.1}$$

где $\lambda=\dfrac{\omega^2}{N^2}$ — безразмерный параметр квадрата частоты.

Для внутренних гравитационных волн выполняется условие $\omega<N$ $(0<\lambda<1)$. В этом диапазоне частот уравнение (2.1) относится к гиперболическому типу. Характеристическое уравнение для него имеет вид:

$$dZ^2-\frac{\lambda}{1-\lambda}dY^2=0 \implies \frac{dZ}{dY}=\pm\sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}.$$

Интегрируя, находим уравнения характеристик в переменных Y,Z: $Z=\pm\sqrt{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}}Y+C$.

Для удобства дальнейшего анализа введём угловой параметр $\mu=\sqrt{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}}$, соответствующий наклону характеристик в координатах OYZ. Тогда два семейства характеристик можно выразить через характеристические координаты ξ и η:

$$\xi=\mu Y+Z, \quad \eta=\mu Y-Z.$$

Переход к координатам (ξ,η) преобразует дифференциальное уравнение (2.1) к каноническому виду уравнения Даламбера $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta}=0$. В соответствии с формулой Даламбера, общее решение данного уравнения представляет собой суперпозицию двух функций описывающих характеристики гиперболического уравнения:

$$\psi(Y,Z)=F(\xi)+G(\eta)=F(\mu Y+Z)+G(\mu Y-Z),$$

где F и G — произвольные функции, которые должны быть однозначно определены из граничных условий.

Рассмотрим замкнутую область течения, представляющую собой плоский прямоугольный сосуд размерами $L\times H$ (рис. 1), наклонённый на угол θ относительно вектора силы тяжести. На твёрдых непроницаемых границах сосуда Σ должно выполняться классическое условие Дирихле, что эквивалентно постоянству функции тока на контуре:

$$\psi\big|_\Sigma=0 \implies [F(\mu Y+Z)+G(\mu Y-Z)]\,\big|_\Sigma=0.$$

То есть на границах Σ всегда выполняется условие $F(\xi)=-G(\eta)$.

Это уравнение означает, что характеристика, несущая значение функции F, попадает на границу области и должна преобразоваться в характеристику, несущую значение функции $-G$, и отразиться. Отметим здесь, что рассматриваемые характеристики являются функциями пространственных координат в отличие от принимаемых обычно в математической физике характеристик гиперболического уравнения, зависящих от координат пространства и времени. В терминах геометрической оптики характеристики гиперболического уравнения часто называют лучами, выходящими из точек границы области. Однако для рассматриваемого случая имеется существенное отличие, т. к. в уравнение характеристик рассматриваемой задачи входит не скорость распространения фронта волны, а угловой параметр μ, зависящий от частоты свободных колебаний. Поэтому для каждой собственной частоты должна отвечать своя характеристика и свой угловой

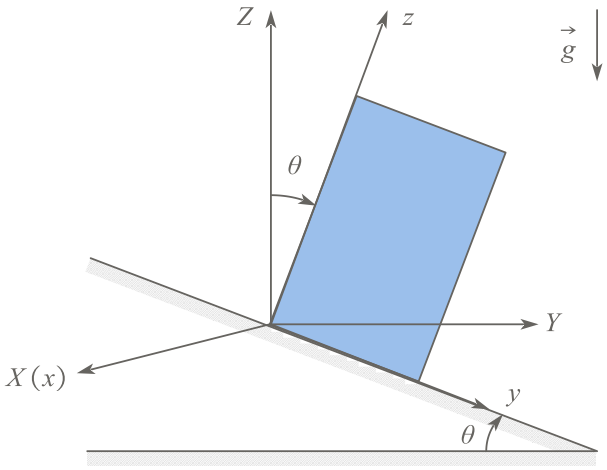


Рис. 1. Системы координат
Fig. 1. Systems of coordinates

параметр. В случае отсутствия наклона контейнера квадрат безразмерной частоты колебаний определяется известной формулой:

$$\lambda_{mn} = \frac{n^2H^2}{n^2H^2 + m^2L^2} = \frac{\frac{n^2}{L^2}}{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{H^2}},$$

где n — число полуволн вдоль горизонтальной оси, m — число полуволн вдоль вертикальной оси.

Легко убедиться, что множество собственных чисел всюду плотно на отрезке $[0, 1]$ и образуют предельный спектр свободных колебаний идеальной стратифицированной жидкости при постоянной частоте плавучести. При равенстве чисел (m, n) собственные числа становятся бесконечно кратными. Характеристики гиперболического уравнения в этом классическом случае ($\theta = 0$) отвечают законам геометрической оптики, так как вертикальная граница сосуда параллельна направлению стратификации. В работах [18, 31, 32, 38] отмечено, что в случае твёрдой границы, образующей некоторый угол с вектором $\vec{g}$ (с направлением стратификации) законы геометрической оптики не выполняются, а отражённая от твёрдой границы характеристика оказывается инвариантна по отношению к вектору $\vec{g}$, а не к вектору нормали к твёрдой границе. Отсюда следует, что угловой параметр должен включать в себя угол наклона характеристик по отношению к наклонному контейнеру. Спрашивается, как изменится структура спектра и расположение характеристик?

Чтобы ответить на поставленные вопросы и избежать определения угла наклона характеристик перейдём к локальной системе координат Oyz, связанной с сосудом.

2.2. Переход к локальной системе координат сосуда. Введём локальную систему координат (y, z), связанную с наклонным сосудом:

$$\begin{cases} Y = y\cos\theta + z\sin\theta, \\ Z = -y\sin\theta + z\cos\theta, \end{cases} \tag{2.2}$$

В терминах функции тока при гармонической зависимости от времени $\Psi(y, z, t) = \psi(y, z)e^{i\omega t}$ исключение давления приводит систему уравнений (1.2) к дифференциальному уравнению второго порядка гиперболического типа для амплитуды $\psi(y, z)$:

$$A\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2B\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} + C\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0,$$

где $A = N^2\cos^2\theta - \omega^2$, $B = N^2\sin\theta\cos\theta$, $C = N^2\sin^2\theta - \omega^2$.

На твёрдых непроницаемых стенках сосуда должно выполняться условие Дирихле, что эквивалентно постоянству функции тока на границе: $\psi|_\Sigma = const \to \psi|_\Sigma = 0$ если $y = 0, L$, $z = 0, H$.

Уравнение для функции тока ψ содержит смешанные производные. Для приведения уравнения к каноническому виду (к волновому уравнению) составим обыкновенное дифференциальное уравнение, которое называется характеристическим:

$$C\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 2B\frac{dy}{dz} + A = 0.$$

Интегралы этого уравнения являются характеристиками исходного уравнения и имеют следующий вид:

$$\begin{cases}\xi = Cy + (D+B)z,\\ \eta = Cy + (B-D)z,\end{cases}$$

где $D = \sqrt{B^2 - AC} = \omega\sqrt{N^2 - \omega^2}$.

Данное преобразование приводит исходное уравнение к каноническому виду: $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial\xi\partial\eta} = 0$.

Общее решение данного уравнения представляет собой решение Даламбера, т. е. суперпозицию двух функций, описывающих характеристики гиперболического уравнения в локальной системе:

$$\psi(\xi,\eta) = \phi_1(\xi) + \phi_2(\eta), \quad \psi(y,z) = \phi_1(Cy + (B+D)z) + \phi_2(Cy + (B-D)z).$$

Для получения конкретного результата сделаем ещё одну замену: $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$.

Тогда исходная задача запишется в виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} = 0,$$

где $\alpha = Cy + Bz$, $\beta = Dz$.

Разделяя переменные, получим:

$$\psi(\alpha,\beta) = A(\alpha)B(\beta), \quad \textit{где} \quad \begin{cases}A(\alpha) = C_1\cos k\alpha + C_2\sin k\alpha,\\ B(\beta) = C_3\cos k\beta + C_4\sin k\beta.\end{cases}$$

Возвращаясь к переменным y, z, имеем:

$$\psi(y,z) = [C_1\cos k(Cy + Bz) + C_2\sin k(Cy + Bz)](C_3\cos kDz + C_4\sin kDz).$$

Используя граничные условия и уравнение характеристики на границе области, получим:

$$\psi(0,0) = 0 \to C_1 = C_3 = 0,$$
$$z = H \to k_n = \frac{n\pi}{H}, \quad k = \frac{k_n}{D}, \quad n = \mathbb{Z}^+,$$
$$y = L \to k_m = \frac{m\pi}{L} = k_n\frac{C}{B+D}, \quad m = \mathbb{Z}^+.$$

Из граничных условий получаем частотное уравнение $k_m(B+D) = k_nC$, или

$$k_m(N^2\sin\theta\cos\theta + \omega\sqrt{N^2-\omega^2}) = k_n(N^2\sin^2\theta - \omega^2).$$

Выражение для функции $\psi(z,y)$ принимает вид

$$\psi(z,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\psi_{nm}(z,y), \qquad \psi_{nm}(z,y) = \sin\left(k_m y\frac{B+D}{D} + k_n z\frac{B}{D}\right)\sin k_n z.$$

2.3. Условия возникновения непрерывного спектра. В зависимости от соотношения между характеристическим углом ϑ и углом наклона сосуда θ классифицируем спектральную структуру оператора в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Если угол наклона характеристик удовлетворяет условиям $\vartheta < \theta$ или $\vartheta > 90^\circ - \theta$, спектр оператора является чисто непрерывным.*

Доказательство.

1. Доказательство отсутствия точечного спектра в зонах $\vartheta < \theta$ и $\vartheta > 90^\circ - \theta$.

Рассмотрим случай пологих характеристик ($\vartheta < \theta$). В этом диапазоне луч не способен пересечь сосуд от левой стенки до правой.

$$\Lambda_{pair} = \frac{\sin(\theta - \vartheta)}{\sin(\theta + \vartheta)} \cdot \frac{\cos(\theta + \vartheta)}{\cos(\theta - \vartheta)} = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \vartheta)}{\operatorname{tg}(\theta + \vartheta)}.$$

Поскольку $0 < \vartheta < \theta < 90^\circ$, углы удовлетворяют неравенству $0 < \theta - \vartheta < \theta + \vartheta < 90^\circ$. В силу монотонного возрастания функции тангенса в первой четверти, числитель меньше знаменателя, то есть $\Lambda_{pair} < 1$.

2. Доказательство существования непрерывного спектра по критерию Вейля (см. [11, с. 21] и [35]).

Для доказательства принадлежности данных диапазонов существенному (и, как следствие в данной задаче, непрерывному) спектру самосопряжённого ограниченного оператора плавучести B_0 используем классический критерий предельных точек Вейля для самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве:

Критерий. *Число $\lambda \in \mathbb{R}$ принадлежит непрерывному спектру самосопряжённого оператора B_0 тогда и только тогда, когда существует последовательность векторных полей $\{\vec{u}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(B_0)$ (область определения оператора), удовлетворяющая трём фундаментальным условиям:*

1. *Нормировка: $\|\vec{u}_n\|_{\mathbf{J}_0} = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$;*
2. *Сходимость операторной невязки к нулю: $\|(B_0 - \lambda N^2 I)\vec{u}_n\|_{\mathbf{J}_0} \to 0$ при $n \to \infty$;*
3. *Отсутствие сильно сходящихся подпоследовательностей: последовательность $\{\vec{u}_n\}$ слабо сходится к нулю в пространстве $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$.*

Построим такую последовательность для любого $\lambda \in [0, \sin^2\theta] \cup [\cos^2\theta, 1]$, где критические границы определены из условия скольжения характеристик вдоль границ сосуда (определение границ в пункте 3.1).

Замечание. В качестве основы для построения последовательности Вейля используется одно из семейств характеристических координат $\xi = \mu Y + Z$; для второго семейства $\eta = \mu Y - Z$ построение полностью аналогично и приводит к тем же выводам.

2.1. Построение локализованной последовательности функций тока.

В рамках двумерной постановки задачи соленоидальное поле скорости $\vec{u} = (u_Y, u_Z)$ однозначно определяется функцией тока $\psi(Y, Z)$ соотношениями $u_Y = \dfrac{\partial \psi}{\partial Z}$, $u_Z = -\dfrac{\partial \psi}{\partial Y}$, при этом условие несжимаемости $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ выполняется тождественно. Норма поля скорости в пространстве $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ записывается в виде

$$\|\vec{u}\|^2_{\mathbf{J}_0} = \int\limits_{\Omega} \rho_0(z) \left(u_Y^2 + u_Z^2\right) d\Omega = \int\limits_{\Omega} \rho_0(z) |\nabla \psi|^2 d\Omega.$$

Для исключения сингулярностей на границе Σ построим волновой пакет, локализованный внутри области течения. Выберем гладкую отсекающую функцию $\phi(Y, Z) \in C_0^\infty(\Omega)$, носитель которой $supp(\phi)$ целиком лежит внутри Ω и не пересекается с границей.

Введём последовательность функций тока $\psi_n(Y, Z) = C_n \cdot \phi(Y, Z) \sin(n\xi)$, где $\xi = \mu Y + Z$ — характеристическая координата, $\mu = \sqrt{\dfrac{\lambda}{1 - \lambda}}$; C_n — нормировочная константа. Функция тока ψ_n тождественно равна нулю на границе. Следовательно, условие непротекания $\vec{u}_n \cdot \vec{n}|_\Sigma = 0$ выполняется, и $\vec{u}_n \in D(B_0) \subset \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ для любого n.

2.2. Выполнение условия нормировки.

Вычислим норму поля скорости $\|\vec{u}_n\|^2_{\mathbf{J}_0}$. Градиент функции тока равен

$$\nabla \psi_n = C_n \left[\nabla \phi \cdot \sin(n\xi) + n\phi \cos(n\xi) \nabla \xi\right].$$

Квадрат нормы принимает вид

$$\|\vec{u}_n\|^2_{\mathbf{J}_0} = C_n^2 \int\limits_\Omega \rho_0(z)\,|\nabla\phi\sin(n\xi) + n\phi\cos(n\xi)\nabla\xi|^2\,d\Omega.$$

Для выполнения первого условия Вейля мы определяем константу C_n так, чтобы это выражение было в точности равно единице для каждого n:

$$C_n = \left(\int\limits_\Omega \rho_0(z)\,|\nabla\phi\sin(n\xi) + n\phi\cos(n\xi)\nabla\xi|^2\,d\Omega\right)^{-1/2}.$$

Таким образом, $\|\vec{u}_n\|_{\mathbf{J}_0} = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Оценим асимптотику C_n при $n \to \infty$. Главный член интеграла пропорционален n^2:

$$\int\limits_\Omega \rho_0 n^2\phi^2\cos^2(n\xi)|\nabla\xi|^2 d\Omega.$$

Используя тригонометрическое тождество $\cos^2(n\xi) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos(2n\xi)$, представим подынтегральное выражение в виде суммы постоянной составляющей и высокочастотной осциллирующей части. Согласно классической лемме Римана—Лебега [9], интеграл от произведения любой интегрируемой функции на $\cos(2n\xi)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. В терминах функционального анализа это означает слабую сходимость последовательности: $\cos^2(n\xi) \rightharpoonup 1/2$ в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (см. [10]). Отсюда следует важнейший вывод для дальнейших оценок: нормировочная константа убывает как $C_n = O(1/n)$.

2.3. Оценка сходимости операторной невязки к нулю.

Поскольку B_0 — ограниченный оператор в $\mathbf{J}_0$, норма невязки оценивается через её действие на произвольное пробное векторное поле $\vec{v} \in \mathbf{J}_0$. Это поле однозначно определяется своей пробной функцией тока $\tilde{\psi} \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ (где пространство Соболева $\mathring{W}_2^1$ обеспечивает равенство функции нулю на границе, что эквивалентно условию непротекания). Невязка стремится к нулю, если

$$\sup_{\|\vec{v}\|_{\mathbf{J}_0}=1} \left|((B_0 - \lambda N^2 I)\vec{u}_n, \vec{v})_{\mathbf{J}_0}\right| \to 0.$$

Соответствующая билинейная форма (слабая форма дифференциального уравнения) имеет вид

$$((B_0 - \lambda N^2 I)\vec{u}_n, \vec{v})_{\mathbf{J}_0} = \int\limits_\Omega \rho_0(z)\left[(N^2-\omega^2)\frac{\partial\psi_n}{\partial Y}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial Y} - \omega^2\frac{\partial\psi_n}{\partial Z}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial Z}\right]d\Omega,$$

где $\omega^2 = \lambda N^2$.

Вычислим производные ψ_n:

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial Y} = C_n\left(\frac{\partial\phi}{\partial Y}\sin(n\xi) + n\mu\phi\cos(n\xi)\right), \quad \frac{\partial\psi_n}{\partial Z} = C_n\left(\frac{\partial\phi}{\partial Z}\sin(n\xi) + n\phi\cos(n\xi)\right).$$

Подставим их в билинейную форму. Сгруппируем слагаемые, содержащие старший порядок n (то есть члены с $\cos(n\xi)$). Вклад этих слагаемых равен

$$nC_n\int\limits_\Omega \phi\cos(n\xi)\left[(N^2-\omega^2)\mu\frac{\partial\eta}{\partial Y} - \omega^2\frac{\partial\eta}{\partial Z}\right]d\Omega.$$

Однако, по определению характеристического направления $\mu^2 = \omega^2/(N^2-\omega^2)$, слагаемые с n^2 (если бы мы брали вторую производную в сильной форме) взаимно уничтожаются. В слабой форме произведение $nC_n = O(1)$. Оставшийся интеграл содержит быстроосциллирующий множитель $\cos(n\xi)$, умноженный на фиксированные L_2-интегрируемые функции. По лемме Римана—Лебега этот интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$.

Все остальные слагаемые билинейной формы пропорциональны $\sin(n\xi)$ и содержат коэффициент $C_n = O(1/n)$. Они тривиально стремятся к нулю как $O(1/n)$. Следовательно, супремум слабой невязки по всем нормированным $\vec{v}$ стремится к нулю. Второе условие Вейля выполнено.

2.4. Проверка отсутствия сильно сходящихся подпоследовательностей.

Построенная последовательность функций тока ψ_n и соответствующее поле скоростей $\vec{u}_n$ осциллируют с частотой n, стремящейся к бесконечности. В силу всё той же леммы Римана—Лебега, интеграл от скалярного произведения $\vec{u}_n$ с любой фиксированной функцией из $\mathbf{J}_0$ стремится к нулю, что означает слабую сходимость: $\vec{u}_n \rightharpoonup 0$.

Если бы существовала сильно сходящаяся подпоследовательность $\{\vec{u}_{n_k}\}$, то её предел должен был бы совпадать со слабым пределом, то есть равняться нулю. Однако $\|\vec{u}_{n_k}\|_{\mathbf{J}_0} = 1$ для всех k, что противоречит сильной сходимости к нулю. Следовательно, последовательность $\{\vec{u}_n\}$ не содержит сильно сходящихся подпоследовательностей, и третье условие критерия Вейля выполнено.

Все три условия критерия Вейля доказаны, любое значение $\lambda \in [0, \sin^2\theta] \cup [\cos^2\theta, 1]$ принадлежит существенному спектру оператора плавучести B_0. Теорема доказана. □

Теорема 2.2. *Точечный спектр может существовать тогда и только тогда, когда* $\theta < \vartheta < 90^\circ - \theta$.

Доказательство. В данном диапазоне характеристика достаточно крутая, чтобы преодолеть наклон дна, но достаточно пологая, чтобы отразиться от боковых стенок. Луч последовательно обходит все четыре границы сосуда. Поскольку верхняя стенка параллельна нижней, а левая — правой, геометрические преобразования характеристики взаимно компенсируются. В этом случае характеристика либо свободно проходит через всю область жидкости, либо образует замкнутый контур за счёт конечного числа отражений. Если дальнейшая судьба характеристики за один цикл отражений иррационально связана с геометрическим соотношением сторон $L \times H$, траектория характеристик луча является *эргодической*. В этом «неэффективном» режиме луч никогда не замыкается на себя, а его траектория всюду плотно заполняет прямоугольную область. Для того чтобы макроскопическое поле скоростей оставалось непрерывным и гладким, амплитуда волны, отвечающая такой характеристике неизбежно должна стремиться к нулю ($\psi \equiv 0$). Таким образом, эргодические траектории формируют лишь непрерывный спектр оператора. □

Рациональный резонанс — это топологическое и геометрическое условие в теории динамических систем, при котором наклон характеристик относительно границ области соизмерим с её геометрическим соотношением через рациональный множитель. В задаче о колебаниях стратифицированной (или вращающейся) жидкости в ограниченных ёмкостях условие рационального резонанса означает, что характеристика гиперболического уравнения, многократно отражаясь от границ сосуда, за конечное число шагов формирует замкнутую периодическую орбиту, а не блуждает (эргодически) по всему объёму сосуда.

Теорема 2.3. *Точечный спектр (стоячие волны) существует тогда и только тогда, когда выполняется геометрическое условие рационального резонанса*: $\operatorname{tg}(\vartheta \pm \theta) = \dfrac{mH}{nL}$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

В случае иррационального отношения траектории лучей эргодичны, и спектр оператора является чисто непрерывным.

Доказательство.

1. Доказательство необходимости условия рационального резонанса.

Рассмотрим движение волнового луча непосредственно внутри прямоугольного контейнера $L \times H$. В локальной системе координат (y, z), связанной с границами сосуда, движение луча при отражении обладает свойством независимости: отражение от боковых стенок ($y = 0, L$) меняет только y-компоненту направления луча, а отражение от дна и крышки ($z = 0, H$) — только z-компоненту.

Обозначим локальный угол наклона луча относительно дна сосуда как α_{local}. Из геометрии задачи следует, что этот угол связан с абсолютным углом наклона характеристики ϑ и углом наклона сосуда θ как $\alpha_{local} = \vartheta \pm \theta$ (знак зависит от того, какое из двух семейств характеристик мы рассматриваем). Локальный угловой коэффициент луча внутри сосуда равен $k = |dz/dy| = \operatorname{tg}(\vartheta \pm \theta)$. Для того чтобы луч сформировал замкнутую периодическую орбиту (что является необходимым условием существования гладкой стоячей волны точечного спектра), он должен вернуться в исходную точку с тем же самым направлением распространения. Это означает, что за определённый

интервал времени луч должен совершить ровно n полных циклов отражений вдоль оси y (пройдя общее расстояние $2nL$) и одновременно ровно m полных циклов вдоль оси z (пройдя общее расстояние $2mH$). Следовательно, наклон траектории луча $|dz/dy|$ обязан равняться отношению пройденных расстояний:

$$|k| = \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{2mH}{2nL} = \frac{mH}{nL}.$$

2. Доказательство достаточности условия рационального резонанса.

Покажем, что при выполнении условия рационального резонанса существует нетривиальное решение $\psi(Y, Z) \in W_2^1(\Omega)$ (пространство Соболева, соответствующее конечной энергии), удовлетворяющее уравнению (2.1) и граничному условию Дирихле $\psi|_\Sigma = 0$.

2.1. Переход к локальной системе координат сосуда.

В введённой в формуле (2.2) системе границы сосуда задаются условиями $y = 0$, $y = L$, $z = 0$, $z = H$, а граничное условие Дирихле записывается как $\psi|_{y=0} = \psi|_{y=L} = \psi|_{z=0} = \psi|_{z=H} = 0$. Условие рационального резонанса в локальных координатах принимает вид $\operatorname{tg}(\alpha_{local_{nm}}) = \dfrac{mH}{nL}$, где $\alpha_{local_{nm}} = (\vartheta \pm \theta)_{nm}$ — локальный угол наклона луча относительно стенки сосуда.

2.2. Конструкция явного решения.

Общее решение уравнения (2.1) в характеристических координатах имеет вид $\psi = F(\xi) + G(\eta)$, где $\xi = \mu Y + Z$, $\eta = \mu Y - Z$. Подставляя преобразование координат, получаем:

$$\xi = y(\mu\cos\theta - \sin\theta) + z(\mu\sin\theta + \cos\theta),$$
$$\eta = y(\mu\cos\theta + \sin\theta) + z(\mu\sin\theta - \cos\theta).$$

Из условия рационального резонанса $\operatorname{tg}(\alpha_{local}) = mH/(nL)$ следует, что:

$$\mu\cos\theta - \sin\theta = \frac{mH}{nL}(\mu\sin\theta + \cos\theta) = k_\xi \cdot \frac{m}{L},$$
$$\mu\cos\theta + \sin\theta = \frac{nH}{mL}(-\mu\sin\theta + \cos\theta) = k_\eta \cdot \frac{n}{L}.$$

для некоторых констант $k_\xi, k_\eta > 0$. Следовательно, характеристические координаты можно записать как $\xi_{nm} = k_\xi \left(\dfrac{my}{L} + \dfrac{nz}{H}\right)$, $\eta_{nm} = k_\eta \left(\dfrac{ny}{L} - \dfrac{mz}{H}\right)$.

Выбираем функции F и G в виде синусоидальных функций, удовлетворяющих граничным условиям $F(\xi_{nm}) = A_{nm}\sin\left(\dfrac{\pi\xi_{nm}}{k_\xi}\right)$, $G(\eta_{nm}) = -A_{nm}\sin\left(\dfrac{\pi\eta_{nm}}{k_\eta}\right)$, где $A \neq 0$ — амплитуда волны. Тогда полное решение для функции тока имеет вид:

$$\psi(y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm}\left[\sin\left(\pi\left(\frac{my}{L} + \frac{nz}{H}\right)\right) - \sin\left(\pi\left(\frac{ny}{L} - \frac{mz}{H}\right)\right)\right]. \tag{2.3}$$

3. Проверка выполнения всех условий.

3.1. Уравнение движения.

Подставляя (2.3) в уравнение (2.1), убеждаемся, что оно удовлетворяется тождественно, поскольку построено на основе характеристических координат.

3.2. Граничное условие Дирихле.

- При $y = 0$: $\psi_{nm}(0, z) = A_{nm}\left[\sin\left(\dfrac{\pi nz}{H}\right) - \sin\left(-\dfrac{\pi mz}{H}\right)\right] = 0$ при $z = 0$ и $z = H$;
- при $y = L$: $\psi_{nm}(L, z) = A_{nm}\left[\sin\left(\pi m + \dfrac{\pi nz}{H}\right) - \sin\left(\pi n - \dfrac{\pi mz}{H}\right)\right] = 0$ для целых m, n;
- при $z = 0$ и $z = H$: аналогично проверяется, что $\psi = 0$ на всей границе.

3.3. Квадратичная интегрируемость.

Функция $\psi(y, z)$ является непрерывной и гладкой на замкнутой области Ω, следовательно, её градиент принадлежит $\mathbf{L}_2(\Omega)$, а энергия конечна. Таким образом, при выполнении условия рационального резонанса существует нетривиальное решение задачи, соответствующее точечному спектру оператора B_0. Условие является не только необходимым, но и достаточным. Из определения параметра $\mu = \sqrt{\lambda/(1-\lambda)}$ и условия рационального резонанса получаем формулу для

собственных частот точечного спектра:

$$\lambda_{nm} = \sin^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{mH}{nL}\right) \mp \theta\right], \quad m, n \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.4}$$

Если соотношение $\operatorname{tg}(\vartheta \pm \theta)_{nm} = \dfrac{mH}{nL}$ является иррациональным числом, фазы колебаний по осям y и z никогда не совпадут повторно. Траектория луча никогда не замкнётся и будет всюду плотно (эргодически) заполнять пространство прямоугольника. Для такой эргодической орбиты гладкое макроскопическое поле скоростей невозможно ($\psi \equiv 0$), что соответствует непрерывному спектру. □

3. Уравнение в повёрнутой системе координат с граничным условием

3.1. Предельный случай скольжения и критические точки фазового перехода. Чтобы аналитически уловить эти критические состояния фазового перехода, вернёмся к характеристическим координатам ξ и η в системе координат, жёстко связанной с наклонным контейнером. Предположим существование вырожденного физического режима, при котором одна из характеристик идеально параллельна физической границе сосуда Σ. Физически это соответствует «режиму скольжения», когда волновая энергия распространяется касательно к твёрдой стенке, не испытывая регулярного отражения.

Математически данное условие скольжения можно искусственно наложить в виде вырождения краевой задачи:

$$\eta\big|_{\Sigma} = 0 \quad \text{или} \quad \xi\big|_{\Sigma} = 0. \tag{3.1}$$

Рассмотрим два возможных случая параллельности характеристик границам сосуда:

1. *Скольжение вдоль дна или крышки.*

В абсолютной системе координат это означает, что абсолютный угол наклона характеристики ϑ в точности равен углу наклона сосуда θ. Тогда $\vartheta = \theta$, откуда следует $\mu = \operatorname{tg}\theta$. Используя определение характеристического параметра $\mu = \sqrt{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}}$, немедленно получаем первую критическую частоту:

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \operatorname{tg}^2\theta \implies \lambda_1 = \sin^2\theta. \tag{3.2}$$

2. *Скольжение вдоль боковых стенок.*

В данном случае характеристика параллельна боковым стенкам сосуда, которые наклонены под углом $90^\circ - \theta$ к горизонтали. Следовательно, $\vartheta = 90^\circ - \theta$, откуда $\mu = \operatorname{tg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{ctg}\theta$. Подставляя это значение, получаем вторую критическую частоту:

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \operatorname{ctg}^2\theta \implies \lambda_2 = \cos^2\theta. \tag{3.3}$$

Физическая интерпретация. Получены через локальное условие скольжения (3.1) критические частоты $\lambda_1 = \sin^2\theta$ и $\lambda_2 = \cos^2\theta$. Как только частота колебаний переходит через эти пределы скольжения (лучи становятся либо слишком пологими $\lambda < \sin^2\theta$, либо слишком крутыми $\lambda > \cos^2\theta$). Внутри же интервала $(\sin^2\theta, \cos^2\theta)$ лучи «отрываются» от стенок, делая возможным резонансное формирование стоячих волн.

Наличие двух знаков ($\mp$) в формуле (2.4) указывает на существование двух математических ветвей дисперсионного соотношения. Однако не каждое из этих значений порождает физически реализуемую стоячую волну. Условия существования точечных мод регламентируются следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Пусть* $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{mH}{nL}\right) \in (0, 90^\circ)$ *— локальный угол.*

1. *Если* $2\theta < \alpha_0 < 90^\circ - 2\theta$ (*что возможно при* $\theta < 22{,}5^\circ$), *обе математические ветви формируют регулярные стоячие волны.*
2. *Если* $\alpha_0 < \min(2\theta,\ 90^\circ - 2\theta)$ *или* $\alpha_0 > \max(2\theta,\ 90^\circ - 2\theta)$, *ровно одна из ветвей является физически реализуемой, а вторая вырождается в непрерывный спектр.*

3. *Если* $90^\circ - 2\theta < \alpha_0 < 2\theta$ (*что возможно только при* $\theta > 22{,}5^\circ$), *обе ветви выпадают из зоны точечного спектра и неизбежно коллапсируют в точечные аттракторы.*

Доказательство. В абсолютной системе координат углы наклона характеристик для двух ветвей равны $\vartheta_1 = \alpha_0 + \theta$ и $\vartheta_2 = |\alpha_0 - \theta|$. Согласно теореме 2.2, точечный спектр существует тогда и только тогда, когда абсолютный угол попадает в интервал $\theta < \vartheta < 90^\circ - \theta$.

Рассмотрим первую ветвь $\vartheta_1 = \alpha_0 + \theta$. Поскольку по определению $\alpha_0 > 0$, левое неравенство $\vartheta_1 > \theta$ выполняется тривиально. Правое неравенство требует $\alpha_0 + \theta < 90^\circ - \theta$, откуда следует условие реализуемости первой ветви: $\alpha_0 < 90^\circ - 2\theta$. Рассмотрим вторую ветвь $\vartheta_2 = |\alpha_0 - \theta|$. Если

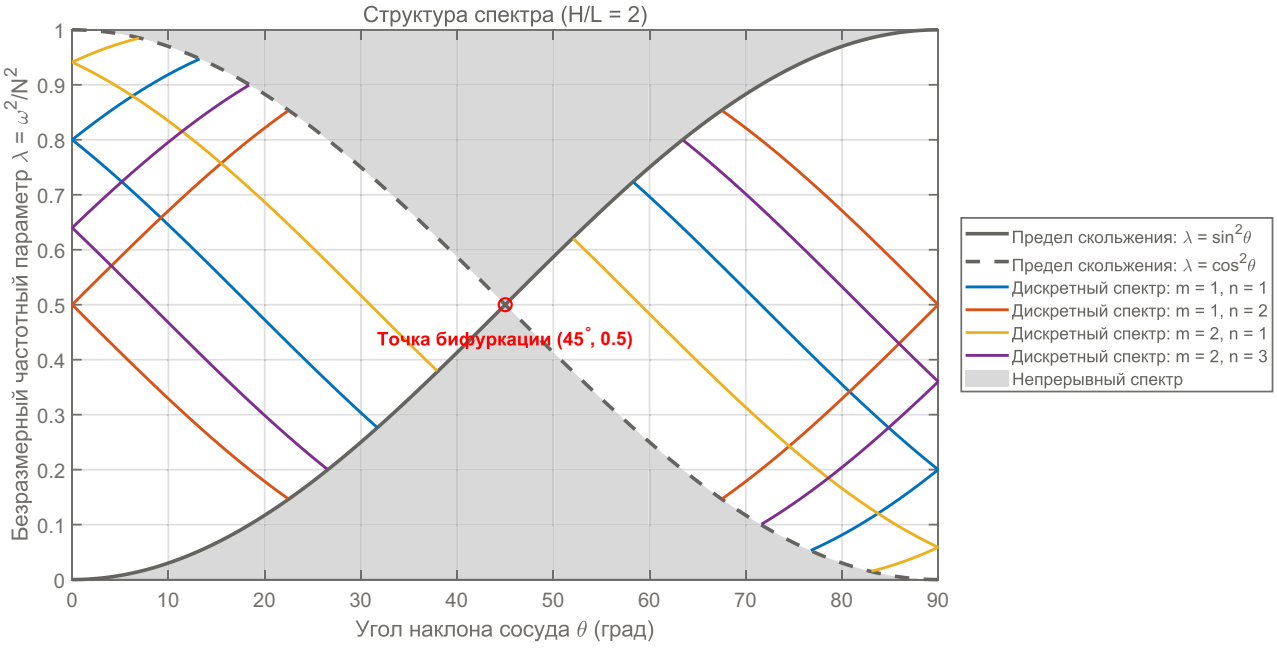


Рис. 2. Диаграмма бифуркации структуры спектра при рациональном соотношении $\dfrac{mH}{nL}$

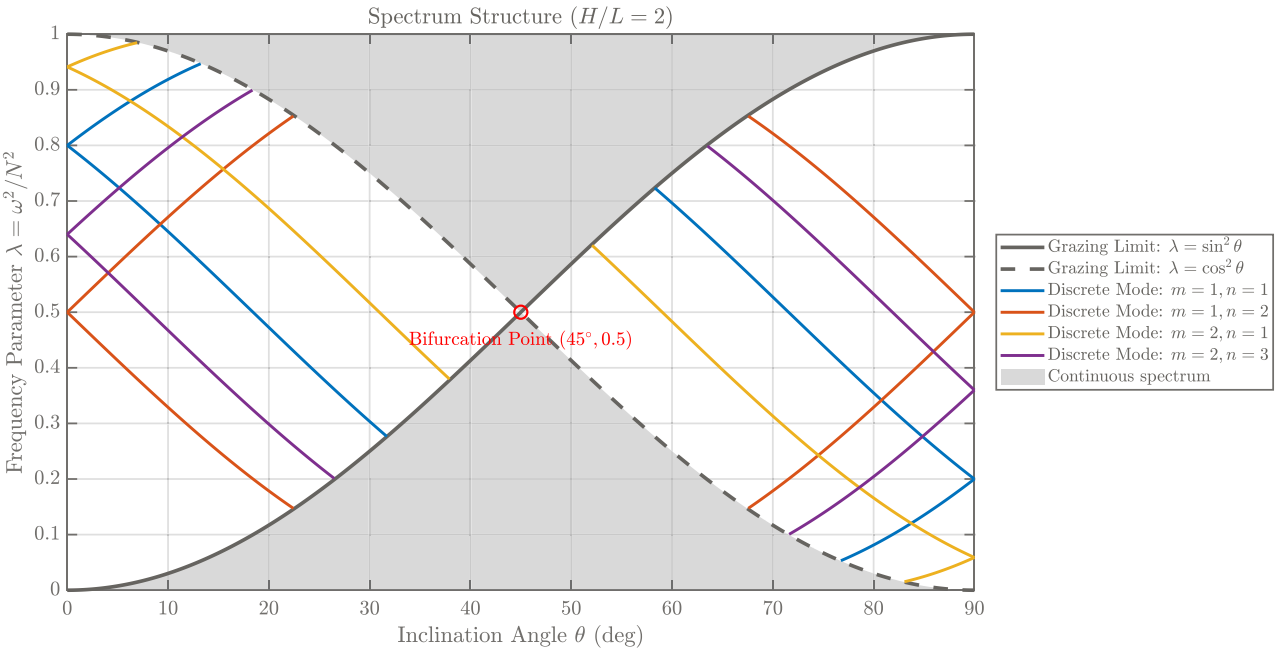


Fig. 2. Bifurcation diagram of the spectrum structure for a rational ratio $\dfrac{mH}{nL}$

$\alpha_0 \leqslant \theta$, то $\vartheta_2 = \theta - \alpha_0 < \theta$, что сразу исключает этот корень. Если $\alpha_0 > \theta$, то левое неравенство теоремы 2.1 принимает вид $\alpha_0 - \theta > \theta$, откуда следует $\alpha_0 > 2\theta$. Правое неравенство $\alpha_0 - \theta < 90^\circ - \theta$ сводится к $\alpha_0 < 90^\circ$, что выполняется всегда. Следовательно, вторая ветвь реализуема тогда и только тогда, когда $\alpha_0 > 2\theta$.

Объединяем полученные условия:

1. Область совместной реализуемости (обе ветви — стоячие волны) определяется системой неравенств $2\theta < \alpha_0 < 90^\circ - 2\theta$. Это множество непусто только при $4\theta < 90^\circ$, то есть $\theta < 22{,}5^\circ$.
2. Область полного вырождения (обе ветви — аттракторы) возникает, когда $\alpha_0 \geqslant 90^\circ - 2\theta$ и одновременно $\alpha_0 \leqslant 2\theta$. Эта система имеет решения только при $\theta \geqslant 22{,}5^\circ$.
3. В остальных случаях непересекающихся диапазонов реализуется ровно одна физическая ветвь.

Таким образом, алгебраическая формула (2.4) даёт лишь потенциальные решения, которые выступают кандидатами на роль собственных частот и должны быть дополнительно отфильтрованы геометрией сосуда. □

Дополнение к теореме 3.1. *Условия реализуемости мод при углах наклона* $\theta > 45^\circ$. При $\theta > 45^\circ$ углы наклона перпендикулярных пар стенок меняются местами по величине: угол наклона боковых стенок $90^\circ - \theta$ становится меньше угла наклона дна и крышки θ. При этом интервал возможного существования точечного спектра меняется на $90^\circ - \theta < \vartheta < \theta$, а все сформулированные в теореме 2.3 условия физической реализуемости ветвей спектра сохраняют силу при замене θ на минимальный из углов наклона стенок $\alpha_{\min} = \min(\theta, 90^\circ - \theta)$. Дополнительно, при $\theta > 67{,}5^\circ$, обе математические ветви тоже формируют регулярные стоячие волны.

3.2. Проверка предельных случаев и асимптотическое поведение точечного спектра. Для подтверждения корректности полученной формулы для собственных частот точечного спектра (2.4) проведём анализ классических предельных случаев при $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 90^\circ$, а также исследуем асимптотическое поведение решений при высоких модовых числах $m, n \to \infty$. Все выводы основаны на тригонометрических тождествах и физических интерпретациях, соответствующих постановке задачи.

3.2.1. Проверка классического предела при $\theta = 0^\circ$ *(вертикально расположенный сосуд).* При нулевом угле наклона сосуд расположен вертикально, что соответствует классической постановке задачи о колебаниях стратифицированной жидкости в прямоугольной полости.

$$\lambda_{m,n}\big|_{\theta=0^\circ} = \sin^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{mH}{nL}\right) \mp 0^\circ\right] = \sin^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{mH}{nL}\right)\right] = \frac{m^2H^2}{n^2L^2 + m^2H^2} = \frac{\frac{m^2}{L^2}}{\frac{n^2}{H^2} + \frac{m^2}{L^2}}. \quad (3.4)$$

Физическое обоснование соответствия модовых чисел. Полученное выражение необходимо сопоставить с классическим точным решением задачи, полученным методом разделения переменных для горизонтального сосуда шириной L и высотой H:

$$\lambda_{\text{analytic}} = \frac{n^2H^2}{n^2H^2 + m^2L^2} = \frac{\frac{n^2}{L^2}}{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{H^2}}, \quad (3.5)$$

где n — число полуволн вдоль горизонтальной оси, m — число полуволн вдоль вертикальной оси.

Легко заметить, что формула (3.4) полностью совпадает с классическим решением (3.5) при условии переобозначения индексов: $m \leftrightarrow n$. Различие в форме выражений обусловлено фундаментальным свойством внутренних гравитационных волн — *ортогональностью групповой и фазовой скоростей*. Однако классическое аналитическое решение строится на основе волнового вектора $\vec{k}$ (*фазовой скорости*), который перпендикулярен лучу. Из-за такой ортогональности проекции волнового вектора на координатные оси обратно пропорциональны проекциям групповой скорости. Следовательно, классическое волновое число по горизонтали физически определяется числом вертикальных отражений луча, и наоборот. Именно этот эффект «перекрестной» связи между геометрией луча и волновым фронтом математически выражается во взаимной замене индексов m и n при $\theta = 0^\circ$.

3.2.2. Анализ предельного случая при $\theta = 90^\circ$ (горизонтальный сосуд). При угле наклона $\theta = 90^\circ$ прямоугольный сосуд поворачивается на бок: его первоначальная высота H становится горизонтальной шириной, а длина L — вертикальной высотой.

Классическое аналитическое решение для такого повернутого сосуда (шириной H и высотой L) принимает вид:

$$\lambda_{\text{analytic}}\big|_{\theta=90^\circ} = \frac{\frac{n^2}{H^2}}{\frac{n^2}{H^2}+\frac{m^2}{L^2}} = \frac{n^2L^2}{n^2L^2+m^2H^2} = \frac{\frac{n^2}{H^2}}{\frac{n^2}{H^2}+\frac{m^2}{L^2}}, \tag{3.6}$$

где n — число полуволн вдоль новой горизонтали (вдоль H), а m — число полуволн вдоль новой вертикали (вдоль L).

Проверим, какой результат даёт наша обобщённая формула (2.4) при подстановке $\theta = 90^\circ$. Используя формулу приведения $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos(\alpha)$, получаем:

$$\lambda_{m,n}\big|_{\theta=90^\circ} = \sin^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{mH}{nL}\right) - 90^\circ\right] = \cos^2\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{mH}{nL}\right)\right] = \frac{n^2L^2}{n^2L^2+m^2H^2} = \frac{\frac{n^2}{H^2}}{\frac{n^2}{H^2}+\frac{m^2}{L^2}}. \tag{3.7}$$

Формулы (3.6) и (3.7) совпадают абсолютно тождественно, без необходимости менять индексы m и n местами. Это поразительное свойство имеет изящное физико-математическое объяснение, состоящее из двух одновременных преобразований:

1. Геометрический поворот. В нашей лучевой модели индекс m жёстко привязан к стенке H, а n — к стенке L. При повороте сосуда на 90° стенка H ложится горизонтально. Значит, теперь m описывает число отражений луча по горизонтали, а n — по вертикали. Учитывая ортогональность фазовой и групповой скоростей (описанную выше), классическое горизонтальное волновое число должно соответствовать числу вертикальных отражений луча (то есть n), а вертикальное волновое число — числу горизонтальных отражений (то есть m). Таким образом, физический поворот сосуда приводит индексы в естественное соответствие с их классическими аналогами.
2. Математический триггер. Математически этот физический поворот безупречно обрабатывается самой формулой. Подстановка $\theta = 90^\circ$ вызывает смену тригонометрической функции с $\sin^2$ на $\cos^2$, что алгебраически «переворачивает» дробь.

3.2.3. Асимптотическое поведение спектра: сгущение мод к пределам скольжения. Представляет интерес исследование асимптотического поведения полученной формулы (2.4) при стремлении модовых чисел m или n к бесконечности. Этот анализ позволяет связать свойства точечного спектра с границами непрерывного спектра, полученными ранее кинематическим методом.

Рассмотрим локальный резонансный угол луча внутри сосуда $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{mH}{nL}\right)$.

Случай 1: $n \to \infty$ *при фиксированном* m *(короткие волны вдоль длины* L*).* В этом пределе локальный угол стремится к нулю: $\alpha_0 \to 0^\circ$. Геометрически это означает, что характеристические лучи становятся практически параллельными дну и крышке сосуда. Вычислим предел собственной частоты: $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{m,n} = \sin^2(0^\circ \mp \theta) = \sin^2(-\theta) = \sin^2\theta$.

Полученный предел *в точности совпадает со второй критической частотой* $\lambda_1 = \sin^2\theta$ (см. формулу (3.2)), которая соответствует режиму скольжения вдоль продольных стенок. Макроскопически это означает, что волна совершает бесконечное число отражений между боковыми стенками, её траектория вырождается в прямую линию, «прилипающую» к дну или крышке, а само волновое поле становится одномерным.

Случай 2: $m \to \infty$ *при фиксированном* n *(короткие волны вдоль высоты* H*).* В данном пределе аргумент арктангенса стремится к бесконечности, следовательно, $\alpha_0 \to 90^\circ$. Характеристики начинают переотражаться между дном и крышкой, вытягиваясь параллельно боковым стенкам сосуда. Асимптотика частоты даёт: $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_{m,n} = \sin^2(90^\circ \mp \theta) = \cos^2\theta$.

Этот результат *идеально совпадает с первой критической частотой* $\lambda_2 = \cos^2\theta$ (формула (3.3)), соответствующей режиму скольжения лучей вдоль боковых стенок.

Спектральный смысл полученных асимптотик. Выявленное совпадение асимптотических пределов точечных частот с границами непрерывного спектра имеет фундаментальное значение.

Согласно теореме Вейля о существенном спектре, точки сгущения собственных значений всегда принадлежат непрерывному спектру. Наш анализ доказывает этот факт для внутренних волн: при бесконечном дроблении пространственного масштаба волны вдоль одной из осей геометрический резонанс разрушается, вырождаясь в скольжение. Таким образом, точечные моды бесконечно плотно сгущаются к границам интервала $(\sin^2\theta, \cos^2\theta)$, тем самым очерчивая «берега» непрерывного спектра, за которыми стоячие волны существовать не могут.

Заключение

В настоящей работе проведено всестороннее исследование спектральных свойств оператора внутренних волн в неклассической постановке — для идеальной стратифицированной жидкости, находящейся в наклонном прямоугольном сосуде. Переход от классических постановок (где граница параллельна градиенту плотности) к геометриям с нарушенной симметрией потребовал привлечения не только функционально-операторных методов, но и глубокого анализа характеристических многообразий уравнений гиперболического типа.

Основным итогом работы является доказательство того факта, что угол наклона сосуда θ выступает в роли управляющего бифуркационного параметра, качественно меняющего топологию спектра. Выявлены границы фазовых переходов (пределы скольжения $\lambda = \sin^2\theta$ и $\lambda = \cos^2\theta$), которые делят спектральный интервал $[0, 1]$ на зоны сплошного и точечного спектра. За этими границами происходит сингулярный рост градиентов скорости и неизбежное разрушение гладких стоячих волн, что математически соответствует возникновению непрерывного спектра.

Показано, что регулярные стоячие волны формируются исключительно при выполнении условий рационального резонанса, когда характеристики образуют инвариантные торы (семейства замкнутых периодических орбит).

Полученные результаты имеют прямое прикладное значение. В частности, они могут быть использованы при проектировании криогенных топливных баков космических аппаратов и анализе волновой динамики в океанологических впадинах со сложным рельефом дна [3, 31, 40], где эффекты несовпадения осей симметрии с вектором силы тяжести играют определяющую роль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александрян Р. А.* К вопросу о зависимости качественных свойств решений некоторых смешанных задач от вида области // Дисс. к.ф.-м.н. — М.: МГУ, 1949.
2. *Александрян Р. А.* Спектральные свойства операторов, порождаемых системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1960. — *9*. — С. 455–505.
3. *Булатов В. В., Владимиров Ю. В.* Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах. — М.: Наука, 2005.
4. *Булатов В. В., Владимиров Ю. В.* Волновая динамика стратифицированных сред переменной глубины // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. — 2015. — № 3. — С. 58–76. — DOI: 10.18698/1812-3368-2015-3-58-76.
5. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. — М.: Наука, 1986.
6. *Гончаров В. П.* Гамильтонов формализм в теории волн в нелинейных диспергирующих и стратифицированных средах // Дисс. д.ф.-м.н. — М.: ИФА РАН, 1993.
7. *Григорьев Ю. Н.* Аналитические и численные методы решения краевых задач для некоторых классов уравнений математической физики // Дисс. д.ф.-м.н. — Новосибирск, 1990.
8. *Зеленяк Т. И.* Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. — Новосибирск: НГУ, 1970.
9. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. II. — М.: Наука, 1984.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
11. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
12. *Копачевский Н. Д., Темнов А. Н.* Свободные колебания идеальной стратифицированной жидкости в сосуде // Ж. выч. мат. и мат. физ. — 1984. — *24*, № 1. — С. 109–123.
13. *Копачевский Н. Д., Темнов А. Н., Царьков М. Ю.* Спектральные проблемы теории колебаний идеальной неоднородной несжимаемой жидкости // В сб.: «Тезисы докл. XII школы по теории операторов в функциональных пространствах. Ч. I». — Тамбов, 1987. — С. 103.

14. *Копачевский Н. Д., Царьков М. Ю.* К вопросу о спектре оператора плавучести // Ж. выч. мат. и мат. физ. — 1987. — *27*, № 3. — С. 463–466.
15. *Краусс В.* Внутренние волны: методы и результаты теоретической океанографии. — Л.: Гидрометеоиздат, 1968.
16. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
17. *Ляшенко А. А.* О не почти периодичности решений уравнения С. Л. Соболева // Докл. АН СССР. — 1984. — *278*, № 4. — С. 803–806.
18. *Сибгатуллин И. Н., Ерманюк Е. В.* Аттракторы внутренних и инерционных волн (обзор) // Прикл. мех. и техн. физ. — 2019. — *60*, № 2. — С. 113–136. — DOI: 10.15372/PMTF20190210.
19. *Темнов А. Н.* О спектре малых колебаний непрерывно стратифицированной жидкости // В сб.: «Нелинейные проблемы аэрогидроупругости: Труды семинара. Вып. 11». — Казань, 1979. — С. 183–193.
20. *Темнов А. Н.* Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объёме // Дисс. к.ф.-м.н. — Москва, 1984.
21. *Троицкая С. Д.* О краевых задачах для уравнений, описывающих колебания вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1956. — *20*, № 1. — С. 27–60.
22. *Фокин М. В.* О характере спектра одного оператора // Динам. сплош. среды. — 1973. — № 15. — С. 170–174.
23. *Фокин М. В.* Существование сингулярного спектра и асимптотика решений задачи Соболева // Тр. Ин-та мат. СО РАН. — 1994. — *26*. — С. 107–195.
24. *Цветков Д. О.* Колебания идеальной стратифицированной жидкости с упругой мембраной // Динам. сист. — 2019. — *9*. — С. 26–45.
25. *Цветков Д. О.* Начально-краевая задача для уравнений динамики вращающейся вязкой стратифицированной жидкости // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2023. — *33*, № 4. — С. 625–641. — DOI: 10.35634/vm230406.
26. *Bourgin D. G.* The Dirichlet problem for the damped wave equation // Bull. Am. Math. Soc. — 1940. — *46*. — С. 1018–1025. — DOI: 10.1215/S0012-7094-40-00706-2.
27. *Bourgin D. G., Duffin R.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Am. Math. Soc. — 1939. — *45*. — С. 851–858. — DOI: 10.1090/S0002-9904-1939-07103-6.
28. *Greenspan H. P.* The theory of rotating fluids. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1968.
29. *John F.* The Dirichlet problem for a hyperbolic equation // Am. J. Math. — 1941. — *63*, № 1. — С. 141–154. — DOI: 10.2307/2371285.
30. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. — Berlin—Heidelberg: Springer, 1995. — DOI: 10.1007/978-3-642-66282-9.
31. *Maas L. R. M., Lam F.-P. A.* Geometric focusing of internal waves // J. Fluid Mech. — 1995. — *300*. — С. 1–41. — DOI: 10.1017/S0022112095003582.
32. *Maas L. R. M. и др.* Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // Nature. — 1997. — *388*. — С. 557–561. — DOI: 10.1038/41509.
33. *Moser J.* Stable and random motions in dynamical systems: with special emphasis on celestial mechanics. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1973.
34. *Ralston J. V.* On stationary modes in inviscid rotating fluids // J. Math. Anal. Appl. — 1973. — *44*, № 2. — С. 366–383. — DOI: 10.1016/0022-247X(73)90065-6.
35. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. Vol. I: Functional analysis. — San Diego: Academic Press, 1980.
36. *Rieutord M., Georgeot B., Valdettaro L.* Inertial waves in a rotating spherical shell: attractors and asymptotic spectrum // J. Fluid Mech. — 2001. — *435*. — С. 103–144. — DOI: 10.1017/S0022112001003718.
37. *Sobolev S. L.* On motion of a symmetric top with a cavity filled with fluid // В сб.: «Selected Works of S. L. Sobolev». — Boston: Springer, 2006. — С. 333–382. — DOI: 10.1007/978-0-387-34149-1_10.
38. *Sutherland B. R.* Internal gravity waves. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. — DOI: 10.1017/CBO9780511780318.
39. *Tabachnikov S.* Geometry and billiards. — Providence: Am. Math. Soc., 2005. — DOI: 10.1090/stml/030.
40. *Yih C. S.* Stratified flows. — New York: Academic Press, 1980. — DOI: 10.1115/1.3153837.

Ю. Чжан
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: zhangyue_hit-bmstu@qq.com, ResearcherID: GMW-8995-2022, Scopus: 57562234300, ORCID: 0000-0003-3021-0060

А. Н. Темнов
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: antt45@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 4623-8867, РИНЦ AuthorID: 161087, Scopus: 6701486430

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2-368-387
EDN: BZHLLF
UDC 517.984
Research article

Spectral properties of the internal wave operator in nonclassical problems

Y. Zhang and A. N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Abstract. This study examines the small oscillations of an ideal stratified fluid within bounded domains. In classical formulations of these problems, the lateral boundaries of the container are typically assumed to align with the gravity vector $\vec{g}$ and the direction of density stratification. This research investigates non-classical cases where the container walls and the stratification direction form a specific angle. This geometric discrepancy results in a qualitative transformation of the internal wave spectrum. Analysis of a tilted rectangular vessel demonstrates that the angle between the domain boundary and the vector $\vec{g}$ significantly affects the spectral formation. Specifically, the spectrum of the small-oscillation operator is no longer purely discrete but includes regions of a continuous spectrum. Identifying the boundaries of the continuous spectrum is essential for the accurate resolution of non-homogeneous evolution problems. The tilt angle and the geometric parameters of the vessel determine both these boundaries and the transition points between the discrete and continuous spectra. The results indicate that the orientation of the cavity relative to the gravitational field is a primary factor determining the properties of internal waves in a bounded volume of stratified fluid.

Keywords: ideal stratified fluid, internal waves, non-classical boundary value problems, operator approach, spectral theory.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors' contribution. *Temnov A. N.* — scientific supervision, conceptualization, approval of the final version of the article; *Zhang Yue* — writing the original text, visualization, editing the manuscript.

For citation: Y. Zhang, A. N. Temnov, "Spectral properties of the internal wave operator in nonclassical problems," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 368–387. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2-368-387 EDN: BZHLLF

REFERENCES

1. R. A. Aleksandryan "K voprosu o zavisimosti kachestvennykh svoystv resheniy nekotorykh smeshannykh zadach ot vida oblasti" [On the dependence of the qualitative properties of solutions of some mixed problems on the type of domain], *PhD Thesis*, MSU, Moscow, 1949.
2. R. A. Aleksandryan, "Spektral'nye svoystva operatorov, porozhdaemykh sistemami differentsial'nykh uravneniy tipa S. L. Soboleva" [Spectral properties of operators generated by systems of differential equations of the S. L. Sobolev type], *Tr. Mosk. Mat. Ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1960, **9**, 455–505 (in Russian).

© Y. Zhang, A. N. Temnov, 2026

This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

3. V. V. Bulatov and Yu. V. Vladimirov, *Vnutrennie Gravitatsionnye Volny v Neodnorodnykh Sredakh* [Internal Gravity Waves in Nonhomogeneous Media], Nauka, Moscow, 2005 (in Russian).
4. V. V. Bulatov and Yu. V. Vladimirov, "Volnovaya dinamika stratifitsirovannykh sred peremennoy glubiny" [Wave dynamics of stratified media of variable depth], *Vestn. MGTU Im. N. E. Baumana. Ser. Estestv. Nauki* [Bull. Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Nat. Sci.], 2015, No. 3, 58–76 (in Russian), DOI: 10.18698/1812-3368-2015-3-58-76.
5. S. A. Gabov and A. G. Sveshnikov, *Zadachi Dinamiki Stratifitsirovannykh Zhidkostey* [Problems of Stratified Fluid Dynamics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
6. V. P. Goncharov "Gamil'tonov formalizm v teorii voln v nelineynykh dispergiruyushchikh i stratifitsirovannykh sredakh" [Hamiltonian formalism in the theory of waves in nonlinear dispersive and stratified media], *Doctoral Thesis*, IFA RAN, Moscow, 1993.
7. Yu. N. Grigor'ev "Analiticheskie i chislennye metody resheniya kraevykh zadach dlya nekotorykh klassov uravneniy matematicheskoy fiziki" [Analytical and numerical methods for solving boundary-value problems for some classes of equations of mathematical physics], *Doctoral Thesis*, Novosibirsk, 1990.
8. T. I. Zelenyak, *Izbrannye Voprosy Kachestvennoy Teorii Uravneniy s Chastnymi Proizvodnymi* [Selected Topics in the Qualitative Theory of Partial Differential Equations], NGU, Novosibirsk, 1970 (in Russian).
9. V. A. Zorich, *Matematicheskiy Analiz. Ch. II* [Mathematical Analysis. Vol. II], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
10. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy Teorii Funktsiy i Funktsional'nogo Analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
11. N. D. Kopachevskii, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye Metody v Lineynoy Gidrodinamike: Evolyutsionnye i Spektral'nye Zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
12. N. D. Kopachevskii and A. N. Temnov, "Svobodnye kolebaniya ideal'noy stratifitsirovannoy zhidkosti v sosude" [Free oscillations of an ideal stratified fluid in a vessel], *Zh. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1984, **24**, No. 1, 109–123 (in Russian).
13. N. D. Kopachevskii, A. N. Temnov, and M. Yu. Tsar'kov, "Spektral'nye problemy teorii kolebaniy ideal'noy neodnorodnoy neszhimaemoy zhidkosti" [Spectral problems of the theory of oscillations of an ideal nonhomogeneous incompressible fluid], In: *Tezisy Dokl. XII Shkoly po Teorii Operatorov v Funktsional'nykh Prostranstvakh. Ch. I* [Abstracts of XII-th School on Operator Theory in Functional Spaces. Vol. I], Tambov, 1987, p. 103 (in Russian).
14. N. D. Kopachevskii and M. Yu. Tsar'kov, "K voprosu o spektre operatora plavuchesti" [On the spectrum of the buoyancy operator], *Zh. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1987, **27**, No. 3, 463–466 (in Russian).
15. V. Krauss, *Vnutrennie Volny: Metody i Rezul'taty Teoreticheskoy Okeanografii* [Internal Waves: Methods and Results of Theoretical Oceanography], Gidrometeoizdat, Leningrad, 1968 (in Russian).
16. O. A. Ladyzhenskaya, *Matematicheskie Voprosy Dinamiki Vyazkoy Neszhimaemoy Zhidkosti* [Mathematical Issues of the Dynamics of Viscous Incompressible Fluid], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
17. A. A. Lyashenko, "O ne pochti periodichnosti resheniy uravneniya S. L. Soboleva" [On the non-almost periodicity of solutions of the S. L. Sobolev equation], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1984, **278**, No. 4, 803–806 (in Russian).
18. I. N. Sibgatullin and E. V. Ermanyuk, "Attraktory vnutrennikh i inertsionnykh voln (obzor)" [Attractors of internal and inertial waves: A review], *Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz.* [Appl. Mech. Tech. Phys.], 2019, **60**, No. 2, 113–136 (in Russian), DOI: 10.15372/PMTF20190210.
19. A. N. Temnov, "O spektre malykh kolebaniy nepreryvno stratifitsirovannoy zhidkosti" [On the spectrum of small oscillations of a continuously stratified fluid], In: *Nelineynye Problemy Aerogidrouprugosti: Tr. sem. Vyp. 11* [Nonlinear Problems of Aerohydroelasticity: Seminar Proc. Iss. 11], Kazan', 1979, pp. 183–193 (in Russian).
20. A. N. Temnov "Kolebaniya stratifitsirovannoy zhidkosti v ogranichennom ob"eme" [Oscillations of a stratified fluid in a limited volume], *PhD Thesis*, Moskva, 1984.
21. S. D. Troitskaya, "O kraevykh zadachakh dlya uravneniy, opisyvayushchikh kolebaniya vrashchayushcheysya zhidkosti" [O kraevykh zadachakh dlya uravneniy, opisyvayushchikh kolebaniya vrashchayushcheysya zhidkosti], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1956, **20**, No. 1, 27–60 (in Russian).
22. M. V. Fokin, "O kharaktere spektra odnogo operatora" [On the nature of the spectrum of one operator], *Dinam. Splosh. Sredy* [Dynam. Contin. Medium], 1973, No. 15, 170–174 (in Russian).

23. M. V. Fokin, "Sushchestvovanie singulyarnogo spektra i asimptotika resheniy zadachi Soboleva" [Existence of a singular spectrum and asymptotic behavior of solutions of the Sobolev problem], *Tr. In-ta Mat. SO RAN* [Proc. Math. Inst. Siberian Branch Russ. Acad. Sci.], 1994, **26**, 107–195 (in Russian).
24. D. O. Tsvetkov, "Kolebaniya ideal'noy stratifitsirovannoy zhidkosti s uprugoy membranoy" [Oscillations of an ideal stratified fluid with an elastic membrane], *Dinam. Sist.* [Dynam. Syst.], 2019, **9**, 26–45 (in Russian).
25. D. O. Tsvetkov, "Nachal'no-kraevaya zadacha dlya uravneniy dinamiki vrashchayushcheysya vyazkoy stratifitsirovannoy zhidkosti" [Initial-boundary value problem for the equations of dynamics of a rotating viscous stratified fluid], *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki* [Bull. Udmurt. Univ. Math. Mech. Comp. Sci.], 2023, **33**, No. 4, 625–641 (in Russian), DOI: 10.35634/vm230406.
26. D. G. Bourgin, "The Dirichlet problem for the damped wave equation," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1940, **46**, 1018–1025, DOI: 10.1215/S0012-7094-40-00706-2.
27. D. G. Bourgin and R. Duffin, "The Dirichlet problem for the vibrating string equation," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1939, **45**, 851–858, DOI: 10.1090/S0002-9904-1939-07103-6.
28. H. P. Greenspan, *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1968.
29. F. John, "The Dirichlet problem for a hyperbolic equation," *Am. J. Math.*, 1941, **63**, No. 1, 141–154, DOI: 10.2307/2371285.
30. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin—Heidelberg, 1995, DOI: 10.1007/978-3-642-66282-9.
31. L. R. M. Maas and F.-P. A. Lam, "Geometric focusing of internal waves," *J. Fluid Mech.*, 1995, **300**, 1–41, DOI: 10.1017/S0022112095003582.
32. L. R. M. Maas et al., "Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid," *Nature*, 1997, **388**, 557–561, DOI: 10.1038/41509.
33. J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems: with Special Emphasis on Celestial Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.
34. J. V. Ralston, "On stationary modes in inviscid rotating fluids," *J. Math. Anal. Appl.*, 1973, **44**, No. 2, 366–383, DOI: 10.1016/0022-247X(73)90065-6.
35. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. I: Functional Analysis*, Academic Press, San Diego, 1980.
36. M. Rieutord, B. Georgeot, and L. Valdettaro, "Inertial waves in a rotating spherical shell: attractors and asymptotic spectrum," *J. Fluid Mech.*, 2001, **435**, 103–144, DOI: 10.1017/S0022112001003718.
37. S. L. Sobolev, "On motion of a symmetric top with a cavity filled with fluid," In: *Selected Works of S. L. Sobolev*, Springer, Boston, 2006, pp. 333–382, DOI: 10.1007/978-0-387-34149-1_10.
38. B. R. Sutherland, *Internal gravity waves*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, DOI: 10.1017/CBO9780511780318.
39. S. Tabachnikov, *Geometry and billiards*, Am. Math. Soc., Providence, 2005, DOI: 10.1090/stml/030.
40. C. S. Yih, *Stratified flows*, Academic Press, New York, 1980, DOI: 10.1115/1.3153837.

Y. Zhang
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: zhangyue_hit-bmstu@qq.com, ResearcherID: GMW-8995-2022, Scopus: 57562234300, ORCID: 0000-0003-3021-0060

A. N. Temnov
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: antt45@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4623-8867, eLIBRARY AuthorID: 161087, Scopus: 6701486430