

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ЗАВИСИМОСТИ МЕР ФАВАРА ОТ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В. Э. ПЕТРОВ¹, Ф. В. ПЕТРОВ^{2,3}

¹ООО «ТВЭЛЛ», Санкт-Петербург, Россия

²Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

³Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Обсуждается зависимость меры, относительно которой ортогональна последовательность многочленов, заданная трехчленным рекуррентным соотношением, от начальных данных.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, мера, трехчленное рекуррентное соотношение, теорема Фавара.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы признательны К. Ремлингу, Р. Романову и П. Губкину за ценные консультации. Работа второго автора поддержана грантом РНФ № 25-11-00251.

Вклад авторов. Оба автора участвовали в постановке задачи, переформулировке ее с языка теории ортогональных многочленов на язык теории мер и моментов, трактовке и интерпретации результатов.

Для цитирования: Петров В. Э., Петров Ф. В. Несколько замечаний о зависимости мер Фавара от начальных значений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 360–367. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-360-367](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-360-367) EDN: BUBZBG

В теории ортогональных многочленов известно [3, 4] прямое утверждение: если последовательность многочленов ортогональна по некоторой неотрицательной мере на вещественной оси, то справедливо трехчленное рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют три последовательных многочлена:

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)p_n(x) - C_n p_{n-1}(x). \quad (1)$$

Теорема Фавара [5] говорит об обращении этого факта: если A_n, B_n, C_n — вещественные числа при всех $n = 1, 2, \dots$, причем $A_n > 0$ и $C_n > 0$ (в дальнейшем эти условия предполагаются выполненными), то последовательность многочленов, заданная соотношением (1) и начальными условиями $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = ax + b$, $a > 0$, будет ортогональной относительно некоторой неотрицательной конечной меры на вещественной оси. Один из способов построения меры, по которой ортогональны многочлены p_n , состоит в рассмотрении слабого предела некоторых специальных мер, сосредоточенных в нулях этих многочленов (см., напр., доказательство теоремы 2.1.1 в книге [1]). Поэтому, в частности, если все нули лежат в замкнутом промежутке Δ (конечном или бесконечном), то мера μ может быть выбрана с носителем в Δ .

Отметим, что рекуррента (1) влечет такое алгебраическое свойство системы многочленов (p_n) : *многочлен $p_n x^k$ при всех $n > k \geq 0$ линейно выражается через $p_1, p_2, \dots$* Это можно доказать

индукцией по k : база $k = 0$ очевидна, индукционный переход от $k - 1$ к k следует из тождества $A_n p_n x^k = p_{n+1} x^{k-1} - B_n p_n x^{k-1} + C_n p_{n-1} x^{k-1}$.

Поэтому если для меры μ все многочлены $p_1, p_2, \dots$ ортогональны p_0 , то есть интегралы $\int p_k(x) d\mu$ при $k = 1, 2, \dots$ равны 0, то $\int p_n x^k d\mu = 0$ при всех $n > k$, что означает ортогональность системы многочленов (p_n) по мере μ . Бесконечная система уравнений $\int p_k(x) d\mu = 0$ для вероятностной меры μ является треугольной системой уравнений на моменты этой меры: каждый следующий момент однозначно выражается через предыдущие. С этой точки зрения она сводится к тому, что надо найти вероятностную меру с данными моментами. Поэтому единственность меры μ равносильна детерминированности соответствующей проблемы моментов. В частности, единственность имеет место, если носитель (хотя бы одной) меры, по которой ортогональны наши многочлены, ограничен.

Теорема 1. *Рассмотрим последовательность многочленов (p_n) , ортогональную относительно меры μ , сосредоточенной на замкнутом промежутке Δ , и удовлетворяющую (1) и начальным условиям $p_0(x) = 1, p_1(x) = ax + b$.*

- (i) *Для других начальных условий $p_0 = 1, p_1 = ax + \theta$ решением рекуррентности (1) будет другая последовательность многочленов, обозначим ее q_n^θ . Тогда существует мера μ_θ , по которой многочлены q_n^θ ортогональны, носитель которой содержит не более одной точки вне Δ .*
- (ii) *Пусть $r_n(x)$ — решение рекуррентности (1) с любыми начальными условиями $r_0 = 1, r_1 = \alpha x + \beta, \alpha > 0$. Тогда носитель меры ν , относительно которой ортогональны многочлены (r_n) , содержит не более одной точки справа от Δ и не более одной точки слева от Δ .*

Доказательство. (i) Из (1) ясно, что старшие коэффициенты p_n и q_n^θ положительны и равны. Зафиксируем θ и обозначим $g_n(x) = p_n(x) - q_n^\theta(x)$. Тогда $\deg g_n < n$ и для любого вещественного κ имеем, что $p_n + \kappa g_n = q_n^{\theta + \kappa(b-\theta)}$ ортогональны по некоторой мере. Поэтому все корни $p_n + \kappa g_n$ простые и вещественные. В частности, это так для p_n . Пусть h_n — наибольший общий делитель многочленов p_n и g_n , обозначим $p_n = h_n P_n, g_n = h_n G_n$. Разложим рациональную дробь $g_n/p_n = G_n/P_n$ в сумму простейших: $G_n/P_n = \sum c_k/(x - x_k)$, где $x_1 < x_2 < \dots$ — корни P_n и $c_k = G_n(x_k)/P_n'(x_k) \neq 0$ при всех k . Если c_i и c_{i+1} разного знака при некотором i , то функция G_n/P_n на интервале (x_i, x_{i+1}) стремится на обоих концах к $+\infty$ или на обоих концах к $-\infty$. Поэтому она достигает там максимума или минимума в точке, скажем, α , равного, скажем, M . Если $M \neq 0$, то многочлен $G_n - MP_n$, а с ним и $-M^{-1}G_n + P_n$, а с ним и $p_n - M^{-1}g_n$ имеет кратный корень — противоречие. Поэтому $M = 0$, не умаляя общности, это локальный минимум функции G_n/P_n . Тогда при малом $\varepsilon > 0$ уравнение $G_n/P_n - \varepsilon = 0$ имеет не больше чем $\deg G_n < \deg P_n$ корней (в окрестности каждого корня G_n , кроме α — не больше, чем кратность этого корня, и на плюс-минус бесконечности — не более чем по одному). Это противоречит тому, что многочлен $G_n - \varepsilon P_n = -\varepsilon(P_n - \varepsilon^{-1}G_n)$ имеет $\deg P_n$ корней.

Итак, все c_i одного знака, то есть знаки значений G_n в точках x_k чередуются.

Из этого следует, что при любом κ многочлен $P_n + \kappa G_n$ имеет хотя бы $\deg P_n - 1$ корней на Δ (по одному между соседними корнями P_n), так что $p_n + \kappa g_n$ имеет хотя бы $\deg p_n - 1 = n - 1$ корней на Δ . Поэтому μ_θ — слабый предел мер ν_n , имеющих не более одной точки вне Δ (сосредоточенных на корнях p_n). Несложно понять, что такой слабый предел является мерой, носитель которой имеет не более одной точки вне Δ (надо взять точки носителей μ_n вне Δ и выделить среди этих точек подпоследовательность, сходящуюся к вещественной точке τ или к бесконечности. Мера μ_θ любого интервала вне Δ , замыкание которого не содержит τ , равна 0 по определению слабого предела. Поэтому кроме точки τ никакая точка вне Δ не лежит в носителе μ_θ .)

(ii) Предположим, что два наибольших корня x_1, x_2 расположены правее Δ . Тогда рациональная функция p_n/r_n отрицательна между x_1 и x_2 , стремится к минус бесконечности при приближении к концам интервала (x_1, x_2) , поэтому достигает на этом интервале отрицательного максимума $-M$. Таким образом, многочлен $p_n + Mr_n$ имеет кратный корень, но это многочлен их семейства ортогональных многочленов (удовлетворяющих (1)) — противоречие. Дальнейшее аналогично (i). $\square$

Рассмотрим подробно случай рекуррентного соотношения для многочленов Чебышева.

Для положительного a и вещественного b рассмотрим последовательность многочленов $f_n(x) = f_n^{a,b}(x)$, заданную начальными условиями $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = ax + b$ и $f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x)$.

Заметим, что при $a = 1$, $b = 0$ получаются многочлены Чебышева первого рода T_n ($T_n(\cos t) = \cos nt$), ортогональные относительно веса $(1 - x^2)^{-1/2}$ на $[-1, 1]$; при $a = 2$, $b = 0$ — многочлены Чебышева второго рода U_n : $U_n(\cos t) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$, ортогональные относительно веса $(1 - x^2)^{1/2}$, при $a = 1$ и $b = \mp 1/2$ — многочлены Якоби с параметрами $(\pm 1/2, \mp 1/2)$ (точнее, пропорциональные им), ортогональные относительно веса $(1+x)^{\pm 1/2}(1-x)^{\mp 1/2}$.

Теорема Фавара утверждает, что многочлены $f_n^{a,b}(x)$ ортогональны относительно некоторой меры для любых $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$. Найдем эту меру.

Теорема 2. При $t \in [0, \pi]$ положим

$$w(\cos t) = \frac{(1 - \rho_1 \rho_2) \sin t}{(1 - 2\rho_1 \cos t + \rho_1^2)(1 - 2\rho_2 \cos t + \rho_2^2)},$$

где ρ_1, ρ_2 — корни квадратного трехчлена $a\rho^2 + 2b\rho + (a - 2)$.

Если $a \geq 1 + |b|$, то многочлены $(f_n(x))$ ортогональны на $[-1, 1]$ с весом $w_0(x)$.

Если $a < 1 + |b|$, рассмотрим для каждого из корней ρ_j , для которых $|\rho_j| > 1$, точечную нагрузку величиной $\frac{\pi(\rho_j - 1/\rho_j)}{\rho_j - \rho_{3-j}}$ (несложно проверить, что это число положительно) в точке $\tau_j := (\rho_j + 1/\rho_j)/2$, соответствующую меру обозначим λ_j .

Многочлены (f_n) ортогональны относительно меры $w(x)dx + \sum_j d\lambda_j$, где сумма содержит одно или два слагаемых в зависимости от количества корней ρ_j , больших по модулю 1.

Доказательство. Прежде всего заметим, что рекуррента Чебышева при общих начальных условиях имеет явное решение:

$$2f_n(\cos t) = \frac{a \sin(n+1)t + 2b \sin nt + (a-2) \sin(n-1)t}{\sin t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Сначала попробуем найти вес $w(x)$ на $[-1, 1]$, для которого $\int_{-1}^1 w(x) f_n(x) dx = 0$, $n = 1, 2, \dots$

(это получится сделать для некоторых значений параметров a, b , но не для всех: не всегда мера сосредоточена на $[-1, 1]$). Делая замену $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$, получаем равносильное условие

$$\int_0^\pi w(\cos t) (a \sin(n+1)t + 2b \sin nt + (a-2) \sin(n-1)t) dt = 0, \quad n \geq 1.$$

Раскладывая функцию $w(\cos t) = \sum w_n \sin nt$ по ортогональному нормированному (на константу $\sqrt{\pi/2}$) базису $(\sin nt)_{n>0}$ на $[0, \pi]$, получаем условие $aw_{n+1} + 2bw_n + (a-2)w_{n-1} = 0$ при $n \geq 1$, где надо считать $w_0 = 0$. Единственным с точностью до пропорциональности решением этой рекурренты является последовательность $w_n = (\rho_1^n - \rho_2^n)/(\rho_1 - \rho_2)$, где ρ_1, ρ_2 — корни характеристического уравнения $q^{a,b}(\rho) := a\rho^2 + 2b\rho + (a-2) = 0$ (при $\rho_1 = \rho_2$ это надо понимать как $w_n = n\rho_1^{n-1}$). Если оба корня по модулю меньше 1, то ряд равномерно сходится. Пользуясь известной формулой $\sum \rho^n \sin nt = \frac{\rho \sin t}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2}$, получаем решение

$$w(\cos t) = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \sum (\rho_1^n - \rho_2^n) \sin nt = \frac{(1 - \rho_1 \rho_2) \sin t}{(1 - 2\rho_1 \cos t + \rho_1^2)(1 - 2\rho_2 \cos t + \rho_2^2)}. \quad (2)$$

Обсудим, когда корни квадратного трехчлена $q^{a,b}$ по модулю меньше 1. Необходимым условием этого являются неравенства $q^{a,b}(1) > 0$, $q^{a,b}(-1) > 0$, то есть $a - 1 - |b| > 0$. Поймем, что этого и достаточно.

Рассмотрим сначала случай, когда корни вещественные. Точки ± 1 лежат вне промежутка между корнями, значит, либо оба корня по модулю меньше 1, либо оба больше 1, либо оба меньше -1 . Но произведение корней по теореме Виета равно $1 - 2/a < 1$, поэтому имеет место первый случай: оба корня по модулю меньше 1. Если же корни не вещественные, то они комплексно

сопряжены, их модули равны, и квадрат модуля каждого из них равен произведению корней $1 - 2/a < 1$.

Таким образом, случай, когда оба корня по модулю строго меньше 1, то есть $a > 1 + |b|$, рассмотрен. Случай, когда они не больше 1, то есть $a \geq 1 + |b|$, получается предельным переходом из рассмотренного (условия ортогональности допускают предельный переход, поскольку особенность предельной функции w интегрируема).

Теперь найдем меру, по которой ортогональны $f_n(x) = f_n^{a,b}(x)$ в случае, когда хотя бы один из корней ρ_1, ρ_2 по модулю больше 1. Вычислим интеграл $\int_0^\pi w(\cos t) f_n(\cos t) \sin t dt$ в этом случае.

Если $|\rho_j| < 1$ при $j \in \{1, 2\}$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i(\rho_1 - \rho_2)} \int_0^\pi f_n(\cos t) \sin t \left(\frac{1}{1 - \rho_j e^{it}} - \frac{1}{1 - \rho_j e^{-it}} \right) dt = \\ = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \int_0^\pi (a \sin(n+1)t + 2b \sin nt + (a-2) \sin(n-1)t) \left(\sum_{m=1}^\infty \rho_j^m \sin mt \right) dt = \\ = \frac{\pi}{2(\rho_1 - \rho_2)} (a\rho_j^2 + 2b\rho_j) \delta_{n,1} = \frac{\pi(2-a)}{2(\rho_1 - \rho_2)} \delta_{n,1}. \end{aligned}$$

Если же $|\rho_j| > 1$, то раскладывать геометрические прогрессии надо иначе:

$$\frac{1}{1 - \rho_j e^{it}} - \frac{1}{1 - \rho_j e^{-it}} = \sum_{m=1}^\infty \rho_j^{-m} (e^{imt} - e^{-imt}) = 2i \sum_{m=1}^\infty \rho_j^{-m} \sin mt,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i(\rho_1 - \rho_2)} \int_{-1}^1 f_n(\cos t) \sin t \left(\frac{1}{1 - \rho_j e^{it}} - \frac{1}{1 - \rho_j e^{-it}} \right) dt = \\ = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \int_0^\pi (a \sin(n+1)t + 2b \sin nt + (a-2) \sin(n-1)t) \left(\sum_{m=1}^\infty \rho_j^{-m} \sin mt \right) dt = \\ = \frac{\pi}{2(\rho_1 - \rho_2)} (\rho_j^{-n-1} (a + 2b\rho_j + (a-2)\rho_j^2) - (a-2)\delta_{n,1}) =: \theta_n. \end{aligned}$$

Положим $2\tau = \rho_j + 1/\rho_j$. Полагая $\rho_j = e^{is}$ (для какого-то комплексного s), получаем $\tau = \cos s$, $\rho_j - 1/\rho_j = i \sin s$, поэтому

$$\begin{aligned} 2f_n(\tau)(\rho_j - 1/\rho_j) = a(\rho_j^{n+1} - \rho_j^{-n-1}) + 2b(\rho_j^n - \rho_j^{-n}) + (a-2)(\rho_j^{n-1} - \rho_j^{-(n-1)}) = \\ = -\rho_j^{-n-1} (a + 2b\rho_j + (a-2)\rho_j^2), \end{aligned}$$

откуда

$$\theta_n = \frac{\pi}{2(\rho_1 - \rho_2)} (\rho_j^{-n-1} (a + 2b\rho_j + (a-2)\rho_j^2) + (a-2)\delta_{n,1}).$$

Это позволяет компенсировать интеграл θ_n мерой $d\lambda_j$. Осталось убедиться, что члены с $\delta_{n,1}$ сокращаются как в случае, когда ровно один корень по модулю больше 1 по модулю, так и в случае, когда оба. $\square$

Классические многочлены Якоби [3] $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ могут быть заданы рекуррентным соотношением типа (1) (см. [3, 10.8(11)]) и начальными условиями $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$, $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = x + \alpha + \beta + 1$.

Они стандартизируются значением в точке $x = 1$. Если мы рассмотрим специальный случай $\alpha + \beta = 0$, то получим, что для многочленов Якоби

$$P_n^{(\alpha)}(x) := P_n^{(\alpha,-\alpha)}(x), \quad -1 < \alpha < 1, \quad P_n^{(\alpha)}(1) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!}, \quad (3)$$

$$P_n^{(\alpha)}(z) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} F\left(-n, n+1; 1+\alpha; \frac{1-z}{2}\right), \quad (4)$$

рекуррентное соотношение типа (1) имеет вид

$$n(n+1)P_{n+1}^{(\alpha)}(x) = n(2n+1)xP_n^{(\alpha)}(x) - (n^2 - \alpha^2)P_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Начальные условия имеют вид $P_0^{(\alpha)}(x) = 1$, $P_1^{(\alpha)}(x) = x + \alpha$.

Из общей теории многочленов Якоби [3] следуют следующие свойства:

$$k_n = \frac{(2n-1)!!}{n!}, \quad P_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n P_n^{(-\alpha)}(-x), \quad (6)$$

где k_n — коэффициент при старшем члене. Как видим, при замене α на $-\alpha$ меняется только многочлен $P_1^{(\alpha)}(x) \rightarrow P_1^{(-\alpha)}(x) = x - \alpha$, а рекуррентное соотношение (5) остается тем же. Решения рекурренты (5) $P_n^{(\pm\alpha)}(x)$ при $\alpha \neq 0$ линейно независимы, поскольку вронскиан¹

$$P_{n+1}^{(\alpha)}(x)P_n^{(-\alpha)}(x) - P_n^{(\alpha)}(x)P_{n+1}^{(-\alpha)}(x) = 2\alpha \frac{(1-\alpha^2)(2-\alpha^2)\dots(n^2-\alpha^2)}{n!(n+1)!} \quad (7)$$

не обращается в нуль.

Это позволяет построить однопараметрическое семейство ортогональных (относительно некоторой меры) многочленов $W_n^\theta(x)$, заданное условиями (5) и начальными условиями $W_0^\theta(x) = 1$, $W_1^\theta(x) = x + \theta$. При этом для значений $\theta = \pm\alpha$ получаются многочлены Якоби $P_n^{(\pm\alpha)}(x)$, ортогональные на $[-1, 1]$ по весу $(1-x)^{\pm\alpha}(1+x)^{\mp\alpha}$, а меры, относительно которых ортогональны семейства $W_n^\theta(x)$ при других вещественных θ , остаются в значительной степени загадочными. В силу линейной независимости многочленов $P_n^{(\pm\alpha)}(x)$, общее решение для параметра $\kappa = (\theta + \alpha)/(2\alpha)$ можно представить в виде $W_n^\theta(x) = \kappa P_n^{(\alpha)}(x) + (1-\kappa)P_n^{(-\alpha)}(x)$.

Следующая теорема дает ответ на естественный вопрос: при каких значениях параметра θ многочлены $W_n^\theta(x)$ ортогональны по мере, сосредоточенной на $[-1, 1]$.

Теорема 3. Если $|\theta| \leq |\alpha|$, то существует единственная мера, по которой ортогональна последовательность многочленов (W_n^θ) , и она сосредоточена на отрезке $[-1, 1]$.

Если $|\theta| > |\alpha|$, то существует единственная мера, по которой ортогональны многочлены W_n^θ , и ее носитель содержит ровно одну точку ξ вне $[-1, 1]$. При $\alpha > 0$, $\theta < -\alpha$ эта точка ξ расположена справа от 1 и равна $\xi = \frac{b+1/b}{2}$, где $b > 1$ — корень уравнения $\left(\frac{b+1}{b-1}\right)^{2\alpha} = \frac{\kappa-1}{\kappa} = \frac{\theta-\alpha}{\theta+\alpha}$. Случаи знаков α и θ аналогичны: при смене знака одного из чисел α , θ число ξ тоже меняет знак.

Доказательство. В терминах κ условие $|\theta| \leq |\alpha|$ звучит как $\kappa \in [0, 1]$. Если оно выполнено, то для любого $x > 1$ и любого целого неотрицательного n имеем $W_n^\theta(x) > 0$. Действительно, старшие коэффициенты многочленов $P_n^{(\pm\alpha)}(x)$ (см. (6)) положительны, их корни лежат на отрезке $[-1, 1]$ (из ортогональности), а значит, оба они положительны в точке x . Аналогично, $(-1)^n W_n^\theta(x) > 0$ при $x < -1$. Таким образом, корни многочленов W_n^θ сосредоточены на $[-1, 1]$. Как известно, одна из мер Фавара, по которой они ортогональны, может быть получена как слабый предел мер, сосредоточенных на корнях этих многочленов, поэтому она тоже имеет носитель в $[-1, 1]$. Для таких мер детерминирована проблема моментов, поэтому других мер, по которым ортогональны W_n^θ , нет.

Предположим теперь, что $|\theta| > |\alpha|$, тогда одно из чисел κ или $1-\kappa$ отрицательно. В силу (6) достаточно рассмотреть случай $\alpha > 0$, $\kappa < 0$. Так как (см. (3))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha)}(1)}{P_n^{(-\alpha)}(1)} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1-\alpha+n)} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2\alpha} = \infty,$$

¹Обозначим левую часть (7) через μ_n . Умножим рекурренту (5) на $P_n^{(-\alpha)}(x)$, затем рекурренту (5) для значка $-\alpha$ умножим на $P_n^{(\alpha)}(x)$ и вычтем. Получим $n(n+1)\mu_n = (n^2 - \alpha^2)\mu_{n-1}$.

при больших n значение многочлена W_n^θ в точке 1 отрицательно. Поэтому этот многочлен (его старший коэффициент положителен) имеет корень, больший 1. Такое невозможно для многочленов, ортогональных по мере, сосредоточенной на $[-1, 1]$. Итак, носитель меры, по которой ортогональны W_n^θ , не содержится в $[-1, 1]$, а значит, он содержит единственную точку вне $[-1, 1]$. В рассматриваемом случае $\alpha > 0$, $\kappa < 0$ эта точка ξ расположена правее 1.

Пользуясь записью многочленов в виде (4) и асимптотической формулой [2, 2.4(17)] при больших n , имеем

$$\frac{P_n^{(\alpha)}(z)}{P_n^{(-\alpha)}(z)} \rightarrow \left(\frac{b+1}{b-1} \right)^{2\alpha}, \quad z = \frac{b+b^{-1}}{2}, \quad b > 1.$$

Таким образом, если определить ξ как в формулировке теоремы, для всякой точки $\xi_1 \in (1, \xi)$ значение многочлена $W_n^\theta(x)$ в точке ξ отрицательно, а потому этот многочлен имеет корень $> \xi_1$. Но все корни многочленов W_n^θ расположены в выпуклой оболочке носителя меры, по которой они ортогональны. Таким образом, атом расположен в точке ξ или правее. Но и правее он быть не может, потому что для любого $\xi_2 > \xi$ при больших n из нашей асимптотики имеем $W_n^\theta(x) > 0$, а потому все корни $W_n^\theta(x)$ расположены до точки ξ_2 . Следовательно, носитель слабого предела мер, сосредоточенных на нулях $W_n^\theta(x)$, содержится в $(-1, \xi]$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М.: Физматгиз, 1961.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1965.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. — М.: Наука, 1966.
4. Сегё Г. Ортогональные многочлены. — М.: Физматлит, 1962.
5. Favard J. Sur les polynomes de Tchebicheff // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1935. — 200. — С. 2052–2053.
6. Marcellán F., Álvarez-Nodarse R. On the “Favard theorem” and its extensions // J. Comput. Appl. Math. — 2001. — 127, № 1–2. — С. 231–254. — DOI: [10.1016/S0377-0427\(00\)00497-0](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00497-0).
7. Yafaev D. R. Self-adjoint Jacobi operators in the limit circle case // J. Operator Theory. — 2022. — 89, № 1. — С. 101–117. — DOI: [10.7900/jot.2021apr28.2325](https://doi.org/10.7900/jot.2021apr28.2325).

В. Э. Петров

ООО «ТВЭЛЛ», Санкт-Петербург, Россия

E-mail: petrov_twell@list.ru

Ф. В. Петров

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: f.v.petrov@spbu.ru, ПИНЦ SPIN-код: 1620-9564, ПИНЦ AuthorID: [166548](https://orcid.org/166548), ResearcherID: [M-7506-2013](https://orcid.org/M-7506-2013), Scopus: [15840366400](https://orcid.org/15840366400), ORCID: [0000-0003-1693-2745](https://orcid.org/0000-0003-1693-2745)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-360-367](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-360-367)
 EDN: BUBZBG

UDC 517.538.3:517.987.1
Research article

Some remarks on the dependence of Favard measures on initial values

V. E. Petrov¹ and F. V. Petrov^{2,3}

¹*TWELL LLC, St. Petersburg, Russia*

²*Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*

³*Saint Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia*

Abstract. We discuss the dependence of the measure with respect to which a sequence of polynomials defined by a three-term recurrence relation is orthogonal on the initial data.

Keywords: orthogonal polynomials, measure, three-term recurrence relation, Favard's theorem.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors are grateful to K. Remling, R. Romanov, and P. Gubkin for valuable consultations. The author was supported by grant No. 25-11-00251 from the Russian Science Foundation.

Authors' contribution. Both authors participated in the setting of the problem, its reformulation from the language of the theory of orthogonal polynomials to the language of the theory of measures and moments, and the interpretation of the results.

For citation: V. E. Petrov, F. V. Petrov, "Some remarks on the dependence of Favard measures on initial values," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 360–367. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-360-367](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-360-367) EDN: BUBZBG

REFERENCES

1. N. I. Akhiezer, *Klassicheskaya Problema Momentov i Nekotorye Voprosy Analiza, Svyazannye s Neyu* [The Classical Problem of Moments and Some Related Analytical Questions], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
2. H. Bateman and A. Erdélyi, *Vyshhie Transtsendentnye Funktsii, T. 1* [Higher Transcendental Functions. Vol. 1], Nauka, Moscow, 1973 (Russian translation).
3. H. Bateman and A. Erdélyi, *Vyshhie Transtsendentnye Funktsii, T. 2* [Higher Transcendental Functions. Vol. 2], Nauka, Moscow, 1973 (Russian translation).
4. G. Szegő, *Ortogonal'nye Mnogochleny* [Orthogonal polynomials], Fizmatlit, Moscow, 1962 (Russian translation).
5. J. Favard, "Sur les polynomes de Tchebicheff," *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 1935, **200**, 2052–2053.
6. F. Marcellán, R. Álvarez-Nodarse, "On the «Favard theorem» and its extensions," *J. Comput. Appl. Math.*, 2001, **127**, No. 1-2, 231–254, DOI: [10.1016/S0377-0427\(00\)00497-0](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00497-0).
7. D. R. Yafaev, "Self-adjoint Jacobi operators in the limit circle case," *J. Operator Theory*, 2022, **89**, No. 1, 101–117, DOI: [10.7900/jot.2021apr28.2325](https://doi.org/10.7900/jot.2021apr28.2325).

V. E. Petrov
 TWELL LLC, St. Petersburg, Russia
 E-mail: petrov_twell@list.ru



F. V. Petrov

Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

Saint Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russia

E-mail: f.v.petrov@spbu.ru, eLIBRARY SPIN-code: 1620-9564, eLIBRARY AuthorID: [166548](#),
ResearcherID: [M-7506-2013](#), Scopus: [15840366400](#), ORCID: [0000-0003-1693-2745](#)