

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В УРАВНЕНИИ В СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДИРИХЛЕ—НЕЙМАНА

М. С. Пастухов, В. С. Рыхлов

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

Аннотация. Исследуется начально-граничная задача в полуполосе плоскости для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, содержащего смешанную производную, с нулевым и ненулевым потенциалами. Данное уравнение является уравнением поперечных колебаний движущейся конечной струны. Рассматривается случай краевых условий типа Дирихле—Неймана: левый конец закреплен, а правый — свободен. Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на вещественной оси по разные стороны от начала координат. Ищется классическое решение (или решение почти всюду, иногда говорят — сильное решение) этой задачи. Исследуется спектральная задача, связанная с исходной начально-граничной задачей, порожденная обыкновенной дифференциальной оператор-функцией (пучком) второго порядка: находится асимптотика собственных значений, резольвента, проводится линеаризация оператор-функции в соответствующем пространстве вектор-функций, доказывается теорема о разложении первой компоненты вектор-функции по корневым функциям спектральной задачи. Формулируется и доказывается теорема о единственности классического решения и выводится формула для классического решения в виде ряда из контурных интегралов. Затем, с использованием этих формул в случае нулевого потенциала доказываются теоремы о конечных формулах для классического решения в частных случаях и на основе них дается конечная формула для классического решения в общем случае.

Ключевые слова: неоднородное гиперболическое уравнение, начально-граничная задача, смешанная производная в уравнении, классическое решение, единственность классического решения, конечная формула для классического решения.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Постановка задачи, рассматриваемой в статье, и основные идеи ее решения принадлежат Рыхлову В. С. Практическая реализация, подготовка материала и оформление статьи осуществлены Пастуховым М. С.

Для цитирования: Пастухов М. С., Рыхлов В. С. Решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной в уравнении в случае краевых условий Дирихле—Неймана // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 323–359. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-323-359](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-323-359) EDN: BRBAYC

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ИСТОРИЯ ВОПРОСА, ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим начально-граничную задачу с граничными условиями типа Дирихле—Неймана

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - q(x)u(x, t) = f(x, t), \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u(1, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (1.3)$$

где $(x, t) \in Q := [0, 1] \times [0, +\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ (здесь и далее знак «:=» означает «равно по определению»), все функции, входящие в (1.1)–(1.3), предполагаются комплекснозначными. Считаем, что $q(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t) \in L_1(Q_T)$, где $Q_T := [0, 1] \times [0, T]$ ($T > 0$ любое и фиксированное число), — в этом случае говорим, что функция $f(x, t)$ из класса $\mathcal{Q}$ и пишем $f(x, t) \in \mathcal{Q}$.

Далее нами будут также использоваться следующие обозначения для частных производных:

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xt} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad \dots$$

Рассматривается случай гиперболического (волнового) уравнения (1.1), то есть предполагается выполнение условия $p_1^2 - 4p_2 > 0$. В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0 \quad (1.4)$$

вещественны и различны.

Требуется найти решение начально-граничной задачи (сокращенно НГЗ) (1.1)–(1.3) в области Q с помощью метода Фурье при как можно более слабых условиях на параметры задачи, то есть на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. В зависимости от того, как понимается решение задачи (1.1)–(1.3), накладываются различные требования на эти функции.

Уравнение (1.1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Такие уравнения актуальны для производственных процессов, связанных с продольным движением материалов (например, бумажного полотна). Исследование таких колебаний началось около 60 лет назад [48, 49, 51].

Излагаемые в статье результаты получены с использованием резольвентного метода решения НГЗ для волнового уравнения в полуполосе плоскости, предложенного А. П. Хромовым и наиболее просто описанного в [41, 42]. Такой подход к решению задачи сформировался не сразу. Историю формирования и развития этого подхода, а также полученные с помощью него результаты можно найти в [2, 3, 6–9, 26, 27, 29–32, 35–40, 43–45].

Аналогичный подход решения НГЗ в полуполосе плоскости для телеграфного уравнения при других краевых условиях используется в [10–14].

Другой подход, отличный от используемого в данной и вышеупомянутых статьях и при других постановках начально-граничных задач, в частности, в первой четверти плоскости, получил развитие в [15–20].

Рассматриваются и другие задачи для уравнения (1.1), например, задача гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны [21, 22].

Отличие результатов, представленных в данной статье, от результатов, полученных ранее вторым автором в [29–32], состоит в том, что в данной статье рассматриваются краевые условия типа Дирихле–Неймана, что создает дополнительные, а иногда и принципиальные трудности.

Определение 1.1. Под *классическим решением* (используют также термины *решение почти всюду* или *сильное решение*) НГЗ (1.1)–(1.3) понимается функция $u(x, t)$ переменных $(x, t) \in Q$, которая:

- а) непрерывна вместе с $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, при этом функции $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$ абсолютно непрерывны и по x , и по t , функции $u_{xx}(x, t)$, $u_{xt}(x, t)$ и $u_{tt}(x, t)$ из класса $\mathcal{Q}$ и почти всюду (п.в.) в Q выполняется равенство

$$u_{xt}(x, t) = u_{tx}(x, t); \quad (1.5)$$

- б) удовлетворяет условиям (1.2)–(1.3) всюду на границе множества Q и уравнению (1.1) п.в. в Q .

Отметим, что необходимость в условии (1.5) обусловлена тем, что в случае, когда $u_{xt}(x, t)$ и $u_{tx}(x, t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [34].

Для классического решения задачи (1.1)–(1.3) по необходимости выполняются условия (далее ссылаемся на них, как на условия (N)):

$$(N_1) \quad \varphi(x) \in W_1^2[0, 1], \quad \psi(x) \in W_1^1[0, 1];$$

(N_2) $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$ и $\psi(0) = 0$.

Здесь используется стандартное обозначение для банахова пространства гладких функций $W_p^n[0, 1] := \{f(x) : f(x), \dots, f^{(n-1)} \in AC[0, 1], f^{(n)} \in L_p[0, 1]\}$ с нормой $\|f\|_{W_p^n[0, 1]} := \|f\|_{L_p[0, 1]} + \|f^{(n)}\|_{L_p[0, 1]}$.

Определение 1.2. НГЗ (1.1)–(1.3), в которой $\varphi(x) \in W_1^2[0, 1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$ и $\psi(0) = 0$, будем называть *классической начально-граничной задачей*.

Возможны только две принципиально разные ситуации:

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \quad (1.6)$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \quad (1.7)$$

В случае (1.6) соответствующая спектральная задача является регулярной по Биркгофу [23, 66–67], а в случае (1.7) — нерегулярной. Далее будем рассматривать только случай (1.6). Нерегулярный случай другим методом рассмотрен в [28].

В случае $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$ имеем $p_1 = 0$, $p_2 = -1$ и уравнение (1.1) является классическим уравнением колебания струны

$$u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

В [42] и предыдущих работах А. П. Хромова (ссылки приведены в [42]) рассматривался именно такой случай. Результаты, излагаемые в настоящей статье, относятся к общему случаю $p_1 \in \mathbb{R}$.

2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННАЯ С НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕЙ

С НГЗ (1.1)–(1.3) связана спектральная задача

$$L(\lambda)y = 0, \quad (2.1)$$

порожденная оператор-функцией (о.-ф.) $L(\lambda)$, определяемой дифференциальным выражением с параметром λ

$$\ell(y, \lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y - q(x)y \quad (2.2)$$

и краевыми условиями типа Дирихле–Неймана

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y'(1) = 0. \quad (2.3)$$

Пусть R_λ есть резольвента $L(\lambda)$, а $G(x, \xi, \lambda)$ ее функция Грина.

Далее, соответствующие объекты в случае $q = 0$ обозначаем теми же буквами, что и в случае ненулевого потенциала, но с индексами «0» внизу, например: $L_0(\lambda)$, $\ell_0(y, \lambda)$, $U_{0j}(y)$, $R_{0\lambda}$, $G_0(x, \xi, \lambda)$.

2.1. Асимптотические формулы для собственных значений спектральной задачи.

В случае $q = 0$ в качестве фундаментальной системы решений уравнения $\ell_0(y, \lambda) = 0$ берем решения

$$y_{01}(x, \lambda) := e^{\lambda\omega_1 x}, \quad y_{02}(x, \lambda) := e^{\lambda\omega_2 x}. \quad (2.4)$$

Тогда характеристический определитель $L_0(\lambda)$ (см. [23, с. 26]) имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} U_{01}(y_{01}) & U_{01}(y_{02}) \\ U_{02}(y_{01}) & U_{02}(y_{02}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda\omega_1 e^{\lambda\omega_1} & \lambda\omega_2 e^{\lambda\omega_2} \end{vmatrix} = \lambda(\omega_2 e^{\lambda\omega_2} - \omega_1 e^{\lambda\omega_1}) =: \lambda\hat{\Delta}_0(\lambda) \quad (2.5)$$

и его корни, очевидно, суть числа

$$\lambda_{0k} = \frac{2k\pi i + \sigma}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.6)$$

и число $\lambda_{00} = 0$, где

$$\sigma := \ln_0 \frac{\omega_1}{\omega_2} := \ln \frac{|\omega_1|}{\omega_2} + \pi i, \quad (2.7)$$

то есть $\ln_0$ есть ветвь натурального логарифма такая, что $\ln_0 1 = 0$.

Эти числа, кроме точки λ_{00} , являются простыми собственными значениями (с.з.) $L_0(\lambda)$. Число λ_{00} , как легко проверить, не является с.з.

Очевидно, этим с.з. соответствуют следующие собственные функции: $y_{0k}(x) := e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} - e^{\lambda_{0k}\omega_1 x}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Введем области (полуплоскости) $\Pi_c^\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda + c) \geq 0 (\leq 0)\}$, где $c \in \mathbb{R}$ — произвольное фиксированное число. Ясно, что $\Pi_c^\pm$ суть полуплоскости $\Pi_0^\pm$, сдвинутые на число $-c$.

Если $\lambda \in \Pi_c^+$, то

$$\operatorname{Re}((\lambda + c)\omega_1) \leq 0 \leq \operatorname{Re}((\lambda + c)\omega_2). \quad (2.8)$$

А если $\lambda \in \Pi_c^-$, то

$$\operatorname{Re}((\lambda + c)\omega_2) \leq 0 \leq \operatorname{Re}((\lambda + c)\omega_1).$$

Лемма 2.1. Если $q(x) \in L_1[0, 1]$ и корни ω_1 и ω_2 характеристического уравнения (1.4) попарно различны и отличны от нуля, то в каждой из областей $\Pi_c^\pm$ при $|\lambda| \gg 1$ существуют линейно независимые решения $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$ уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$, аналитические по λ и имеющие асимптотические представления

$$y_k^{(m)}(x, \lambda) = (\lambda \omega_k)^m e^{\lambda \omega_k x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \quad k = 1, 2, \quad m = 0, 1. \quad (2.9)$$

Доказательство. Справедливость доказываемой леммы есть следствие теоремы из [33] об асимптотике системы решений более общего дифференциального уравнения, коэффициенты которого зависят полиномиально от спектрального параметра (аналогичные результаты при более слабых условиях позднее получали и другие математики, библиографию можно найти, например, в [50]).

При $n = 2$ доказательство достаточно простое. Приведем его для полноты изложения.

Рассмотрим для примера случай $\lambda \in \Pi_c^+$. Доказательство для случая $\lambda \in \Pi_c^-$ аналогично. Для случая $\lambda \in \Pi_c^+$ выполняются неравенства (2.8).

Рассмотрим уравнение $\ell(y, \lambda) = 0$, или подробнее

$$y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y - q(x)y = 0. \quad (2.10)$$

Ищем решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ этого уравнения как решения следующих интегральных уравнений в $C[0, 1]$:

$$y(x) = e^{\lambda \omega_1 x} - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^x e^{\lambda \omega_1(x-\xi)} q(\xi) y(\xi) d\xi - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \int_x^1 e^{\lambda \omega_2(x-\xi)} q(\xi) y(\xi) d\xi, \quad (2.11)$$

$$y(x) = e^{\lambda \omega_1 x} - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^x e^{\lambda \omega_1(x-\xi)} q(\xi) y(\xi) d\xi + \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^x e^{\lambda \omega_2(x-\xi)} q(\xi) y(\xi) d\xi. \quad (2.12)$$

Нетрудно проверить непосредственным подсчетом, что решения уравнений (2.11) и (2.12) являются в то же время и решениями уравнения (2.10).

Рассмотрим для примера уравнение (2.11). Уравнение (2.12) рассматривается аналогично.

Так как решение уравнения (2.11) ищется в пространстве $C[0, 1]$, то решение по необходимости абсолютно непрерывно и удовлетворяет равенству

$$y'(x) = (\lambda \omega_1) e^{\lambda \omega_1 x} - \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^x e^{\lambda \omega_1(x-\xi)} q(\xi) y(\xi) d\xi - \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \int_x^1 e^{\lambda \omega_2(x-\xi)} q(\xi) y(\xi) d\xi. \quad (2.13)$$

Для решения уравнения (2.11) проведем нормировку искомой функции

$$y(x) = e^{\lambda \omega_1 x} z(x). \quad (2.14)$$

Тогда для нахождения z из (2.11) получим уравнение

$$z(x) = 1 - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^x q(\xi) z(\xi) d\xi - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \int_x^1 e^{\lambda(\omega_2 - \omega_1)(x-\xi)} q(\xi) z(\xi) d\xi. \quad (2.15)$$

Имеем тождество по λ : $\operatorname{Re} \lambda(\omega_2 - \omega_1) \equiv \operatorname{Re}(\lambda + c)(\omega_2 - \omega_1) - \operatorname{Re} c(\omega_2 - \omega_1)$. Следовательно, на основании (2.8) выполнено $|e^{\lambda(\omega_2 - \omega_1)(x-\xi)}| = |e^{(\lambda+c)(\omega_2 - \omega_1)(x-\xi)}| |e^{-c(\omega_2 - \omega_1)(x-\xi)}| \leq C$ при всех $\lambda \in \Pi_c^+$ и $0 \leq x \leq \xi \leq 1$.

Таким образом, оператор справа в (2.15) является сжимающим из $C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ при $|\lambda| \gg 1$ и, следовательно, уравнение (2.15) имеет единственное решение

$$z_1(x, \lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (2.16)$$

при этом соответствующий ряд справа (который дает оценку $O(1/\lambda)$) равномерно сходится. Этот ряд состоит из аналитических по λ функций при $\lambda \in \Pi_c^+$. Тогда по теореме Вейерштрасса [46, с. 106] он представляет собой аналитическую функцию в области Π_c^+ .

Учитывая асимптотику (2.16) в (2.14), получим решение $y_1(x, \lambda)$ уравнения (2.10) с асимптотикой

$$y_1(x, \lambda) = e^{\lambda\omega_1 x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right), \quad (2.17)$$

аналитическое по λ в Π_c^+ при $|\lambda| \gg 1$.

Учитывая теперь асимптотику (2.17) в формуле (2.13), получим также асимптотику для производной $y_1'(x, \lambda)$

$$y_1'(x, \lambda) = (\lambda\omega_1)e^{\lambda\omega_1 x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right),$$

причем функция $y_1'(x, \lambda)$ также является аналитической по λ в полуплоскости Π_c^+ при $|\lambda| \gg 1$.

Таким образом, получили решение $y_1(x, \lambda)$, удовлетворяющее утверждению леммы 2.1.

Аналогичными рассуждениями, используя уравнение (2.12), можно найти решение $y_2(x, \lambda)$, которое также удовлетворяет утверждению леммы 2.1.

Тем самым лемма 2.1 доказана. $\square$

Далее для краткости будем использовать обозначение Биркгофа

$$[1] := 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Теорема 2.1. *О.-ф. $L(\lambda)$ имеет счетное число с.з. $\Lambda = \tilde{\Lambda} \cup \{\lambda_k\}_{|k| \geq k_0}$, где $\tilde{\Lambda}$ есть конечное множество, а k_0 достаточно большое натуральное число такое, что при $|k| \geq k_0$ с.з. λ_k простые и справедливы асимптотические формулы*

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1} + O\left(\frac{1}{k}\right) \left(= \lambda_{0k} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \quad |k| \geq k_0. \quad (2.18)$$

Доказательство. Как известно, с.з. $L(\lambda)$ являются нулями характеристического определителя [23, с. 27], который с учетом формул (2.9) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [1] & [1] \\ \lambda\omega_1 e^{\lambda\omega_1} [1] & \lambda\omega_2 e^{\lambda\omega_2} [1] \end{vmatrix} = \lambda \left(\omega_2 e^{\lambda\omega_2} [1] - \omega_1 e^{\lambda\omega_1} [1] \right) \quad (2.19)$$

и аналитичен при $\lambda \in \Pi_c^+$, $|\lambda| \gg 1$, где константа c будет выбрана далее.

Отсюда получим, что с.з. $L(\lambda)$ при $|\lambda| \gg 1$ являются решениями уравнения $e^{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{\omega_1}{\omega_2} [1]$, откуда

$$\lambda = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\ln_0 \frac{\omega_1}{\omega_2} + 2k\pi i \right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (2.20)$$

При $|\lambda| \gg 1$ имеем оценку для корней уравнения (2.20): $\operatorname{Re} \lambda \geq \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \ln \frac{|\omega_1|}{\omega_2} - 1 := c_0$.

Тогда в качестве константы c можно выбрать, например, константу $1 - c_0$, то есть $c := 1 - c_0$. Проводя теперь рассуждения, аналогичные рассуждениям [23, с. 78-79] с использованием теоремы Руше (см., например, [46, с. 186]), получим, что при достаточно большом натуральном k_0 с.з. λ_k ($|k| \geq k_0$) простые и имеет место асимптотика (2.18).

Если в качестве ф.с.р. уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$ взять аналитические во всей комплексной плоскости решения $\tilde{y}_1(x, \lambda)$ и $\tilde{y}_2(x, \lambda)$, удовлетворяющие начальным условиям $\tilde{y}_k^{(s-1)}(0, \lambda) = \delta_{ks}$, где δ_{ks} есть символ Кронекера, то получим, что соответствующий характеристический определитель $\tilde{\Delta}(\lambda)$ является аналитической функцией по λ во всей комплексной плоскости, нули которой являются с.з. $L(\lambda)$. Следовательно, в любой ограниченной области может быть только конечное число с.з.

Тем самым теорема 2.1 доказана. $\square$

2.2. Линеаризация спектральной задачи. Линеаризуем задачу (2.1), учитывая конкретный вид дифференциального выражения (2.2) и краевых условий (2.3). Для этого введем переменные $z_1 = y$, $z_2 = \lambda y$. В результате получим следующую задачу на с.з. в пространстве в.-ф. $Z(x) := (z_1(x), z_2(x))^T$:

$$AZ = \lambda Z, \quad z_1(0) = 0, \quad z'_1(1) = 0, \quad (2.21)$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 0; & 1 \\ -\frac{1}{p_2}d_x^2 + \frac{1}{p_2}q(x)E; & -\frac{p_1}{p_2}d_x \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

E есть тождественный оператор, а $d_x := \frac{d}{dx}$.

На основе (2.21) введем оператор $\mathcal{L} \in \mathcal{W}_1^2[0, 1] \rightarrow \mathcal{W}_1^1[0, 1]$ в пространстве вектор-функций, где $\mathcal{W}_1^s[0, 1] := W_1^s[0, 1] \dot{+} W_1^{s-1}[0, 1]$ (знак $\dot{+}$ обозначает прямую сумму), определенный соотношениями

$$\mathcal{L}Z := AZ, \quad D_{\mathcal{L}} = \{Z = (z_1, z_2)^T \in \mathcal{W}_1^2[0, 1] : z_1(0) = 0, \quad z'_1(1) = 0\}. \quad (2.23)$$

Тогда спектральную задачу (2.21) можно записать в виде $\mathcal{L}Z = \lambda Z$, а это есть уже линейная спектральная задача, которая является линеаризацией задачи (2.1).

Как показано в [47], с.з. и производные цепочки, построенные по корневым функциям о.-ф. $L(\lambda)$ (см. [23, с. 28]), совпадают с с.з. и корневыми вектор-функциями оператора $\mathcal{L}$, а, следовательно, двукратное разложение по корневым функциям о.-ф. $L(\lambda)$ есть не что иное, как разложение по корневым вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$.

Найдем резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{L} - \lambda \mathcal{E})^{-1}$ оператора $\mathcal{L}$, где $\mathcal{E}$ — единичный оператор в пространстве в.-ф. Для этого решим задачу $\mathcal{L}Z - \lambda Z = H$, где $H = (h_1, h_2)^T \in \mathcal{W}_1^1[0, 1]$, или в подробной записи

$$\begin{cases} z_2 - \lambda z_1 = h_1, \\ -\frac{1}{p_2}z_1'' + \frac{1}{p_2}q(x)z_1 - \frac{p_1}{p_2}z_2' - \lambda z_2 = h_2, \\ z_1(0) = z_1(1) = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Выразим z_2 из первого уравнения системы (2.24):

$$z_2 = \lambda z_1 + h_1 \quad (2.25)$$

и подставим во второе уравнение системы (2.24). Получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p_2}z_1'' - \frac{p_1}{p_2}(\lambda z_1' + h_1') - \lambda(\lambda z_1 + h_1) + \frac{1}{p_2}q(x)z_1 &= h_2; \\ z_1'' + \lambda p_1 z_1' + (\lambda^2 p_2 - q(x))z_1 &= h_\lambda, \end{aligned}$$

где

$$h_\lambda := -p_1 h_1' - \lambda p_2 h_1 - p_2 h_2. \quad (2.26)$$

Таким образом, первая компонента $\mathcal{R}H$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} z_1'' + \lambda p_1 z_1' + (\lambda^2 p_2 - q(x))z_1 &= h_\lambda, \\ z_1(0) &= z_1(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Используя введенные ранее резольвенту и функцию Грина о.-ф. $L(\lambda)$, из (2.27) получим

$$z_1(x, \lambda) = (R_\lambda h_\lambda)(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi, \quad (2.28)$$

а из (2.25) найдем

$$z_2(x, \lambda) = \lambda z_1(x, \lambda) + h_1(x) = \lambda (R_\lambda h_\lambda)(x) + h_1(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi + h_1(x). \quad (2.29)$$

Таким образом, на основании (2.28) и (2.29) получим для резольвенты оператора $\mathcal{L}$ следующую формулу:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda H(x) &= (\mathcal{L} - \lambda \mathcal{E})^{-1} H(x) = \begin{pmatrix} R_\lambda h_\lambda(x, \lambda) \\ R_\lambda(\lambda h_\lambda)(x, \lambda) + h_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi \\ \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (\lambda h_\lambda(\xi)) d\xi + h_1(x) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (-p_1 h'_1(\xi) - \lambda p_2 h_1(\xi) - p_1 h_2(\xi)) d\xi \\ \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (-\lambda p_1 h'_1(\xi) - \lambda^2 p_2 h_1(\xi) - \lambda p_1 h_2(\xi)) d\xi + h_1(x) \end{pmatrix}. \quad (2.30) \end{aligned}$$

2.3. Разложение первой компоненты вектор-функции по корневым функциям спектральной задачи. Обозначим через γ_k при $|k| \geq k_0$ окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному с.з. Через d_k будем обозначать круги, ограниченные окружностями γ_k . Соответственно, γ_{0k} и d_{0k} при $k = 0, \pm 1, \dots$ суть аналогичные окружности и круги радиуса δ с центрами в точках λ_{0k} . Из асимптотических формул (2.18) следует, что, начиная с некоторого достаточно большого номера $k_1 \geq k_0$, будем иметь $\lambda_k \in d_{0k}$ при $|k| \geq k_1$. Пусть $|\lambda| = r$ есть окружность, внутри которой лежит множество $\tilde{\Lambda}$ и с.з. λ_k при $k_0 \leq |k| \leq k_1 - 1$.

Из общей теории линейных операторов следует, что разложение в.-ф. $H(x)$ в ряд по корневым функциям оператора $\mathcal{L}$ или, что то же самое, по производным цепочкам [5, 47] о.-ф. $L(\lambda)$, построенным по ее корневым функциям, имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|k| \geq k_1} \int_{\gamma_{0k}} \right) (\mathcal{R}_\lambda H)(x, \lambda) d\lambda &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ z_2(x, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ \lambda z_1(x, \lambda) + h_1(x) \end{pmatrix} d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \begin{pmatrix} (R_\lambda h_\lambda)(x, \lambda) \\ \lambda (R_\lambda h_\lambda)(x, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda, \end{aligned}$$

где используется обозначение

$$\left(\dots \right) := \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|k| \geq k_1} \int_{\gamma_{0k}} \right). \quad (2.31)$$

Найдем условия на компоненты в.-ф. $H(x)$, при которых имеет место равенство

$$h_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) (R_\lambda h_\lambda)(x) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (p_1 h'_1(\xi) + \lambda p_2 h_1(\xi) + p_2 h_2(\xi)) d\xi d\lambda. \quad (2.32)$$

2.3.1. Разложение первой компоненты вектор-функции по корневым функциям спектральной задачи. Метод контурного интеграла Коши—Пуанкаре. Обозначим

$$\begin{aligned} I_n(x) &:= -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_n^+} + \int_{\Gamma_n^-} \right) \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi d\lambda = : I_n^+(x) + I_n^-(x), \quad (2.33) \end{aligned}$$

где Γ_n , $n \in \mathbb{N}$ и $n \gg 1$, суть кусочно-круговые контуры, охватывающие контуры γ_k при $|k| \geq k_0$ и окружность $|\lambda| = r$, такие, что между соседними контурами лежит ровно одно с.з. λ_k и имеют место оценки

$$c_1 n < \text{дл. } \Gamma_n < c_2 n \quad (0 < c_1 < c_2 < +\infty). \quad (2.34)$$

Γ_n^+ и Γ_n^- , суть части Γ_n , лежащие, соответственно, в правой и левой полуплоскостях. Из асимптотических формул (2.18) для с.з. $L(\lambda)$ видно, что такие контуры Γ_n существуют.

Справедлива следующая теорема о разложении первой компоненты по корневым функциям о.-ф. $L(\lambda)$.

Теорема 2.2. Если $h_1'(x), h_2(x) \in L_r[0, 1]$ ($r > 1$) и $h_1(0) = 0$, то

$$I_n(x) = h_1(x) + o(1), \quad (2.35)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на отрезке $[0, 1]$ (далее в таком случае будем писать $o_u(1)$).

Доказательство. В соответствии с (2.26) будем обозначать

$$h_\lambda(x) = -p_2 h_2(x) - p_1 h_1'(x) - \lambda p_2 h_1(x) = -f_1(x) - \lambda p_2 h_1(x), \quad (2.36)$$

где

$$f_1(x) = p_2 h_2(x) + p_1 h_1'(x) \in L_r[0, 1]. \quad (2.37)$$

Далее потребуются асимптотические формулы для функции Грина о.-ф. $L(\lambda)$. В формулировке соответствующей леммы используются два определителя, связанные с характеристическим определителем (2.19), а именно, $\Delta^+(\lambda)$ и $\Delta^-(\lambda)$, соответственно, для правой полуплоскости комплексной плоскости (используется индекс «+») и левой полуплоскости (используется индекс «-»):

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \lambda(\omega_2 e^{\lambda \omega_2} [1] - \omega_1 e^{\lambda \omega_1} [1]) = \lambda \omega_2 e^{\lambda \omega_2} \left([1] - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 - \omega_2)} [1] \right) = \lambda \omega_2 e^{\lambda \omega_2} \Delta^+(\lambda) = \\ &= -\lambda \omega_1 e^{\lambda \omega_1} \left([1] - \frac{\omega_2}{\omega_1} e^{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} [1] \right) = -\lambda \omega_1 e^{\lambda \omega_1} \Delta^-(\lambda), \end{aligned} \quad (2.38)$$

то есть это определители с асимптотикой при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta^+(\lambda) = [1] - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 - \omega_2)} [1], \quad \Delta^-(\lambda) = [1] - \frac{\omega_2}{\omega_1} e^{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} [1]. \quad (2.39)$$

Если $\lambda \in \mathbb{C}_\delta$, где $\mathbb{C}_\delta$ обозначает комплексную плоскость, из которой удалены кружки достаточного малого радиуса $\delta > 0$ с центрами в с.з., то существует такая константа $C_\delta > 0$, что справедливы неравенства

$$|\Delta^+(\lambda)| \geq C_\delta, \quad |\Delta^-(\lambda)| \geq C_\delta. \quad (2.40)$$

Пусть $\chi(x)$ есть функция Хевисайда ($\chi(x) = 1$, если $x \geq 0$, и $\chi(x) = 0$, если $x < 0$).

Лемма 2.2. Для функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ о.-ф. $L(\lambda)$ справедливы следующие асимптотические формулы при $|\lambda| \gg 1$:

1) при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} G(x, \xi, \lambda) &= \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)\Delta^+(\lambda)} \times \\ &\times \left(e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} [1] - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} [1] + \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} [1] - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 - \omega_2(1-x+\xi))} [1] \right) - \\ &- \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda \omega_1(x-\xi)} [1] \chi(x - \xi) + e^{\lambda \omega_2(x-\xi)} [1] \chi(\xi - x) \right) = :G^+(x, \xi, \lambda) + g^+(x, \xi, \lambda); \end{aligned} \quad (2.41)$$

2) при $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$

$$\begin{aligned} G(x, \xi, \lambda) &= \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)\Delta^-(\lambda)} \times \\ &\times \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} e^{\lambda(\omega_1(x-1-\xi) + \omega_2)} [1] - \frac{\omega_2}{\omega_1} e^{\lambda(\omega_1(x-1) + \omega_2(1-\xi))} [1] + \frac{\omega_2}{\omega_1} e^{\lambda(-\omega_1 + \omega_2(x+1-\xi))} [1] - e^{\lambda(-\omega_1 \xi + \omega_2 x)} [1] \right) + \\ &+ \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda \omega_1(x-\xi)} [1] \chi(\xi - x) + e^{\lambda \omega_2(x-\xi)} [1] \chi(x - \xi) \right) = :G^-(x, \xi, \lambda) + g^-(x, \xi, \lambda), \end{aligned} \quad (2.42)$$

Доказательство. Ищем резольвенту о.-ф. $L(\lambda)$ как решение краевой задачи

$$y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y = g(x), \quad y(0) = y'(1) = 0.$$

Для нахождения решения используем ф.с.р. уравнения с асимптотикой (2.9), а частное решение уравнения выбираем по-разному в случаях $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ и $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ при использовании метода вариации произвольных постоянных. А именно, соответствующее интегрирование проводится или от 0 до x или от x до 1 в зависимости от того, какой знак имеют вещественные части показателей экспонент $\lambda \omega_1(x - \xi)$ и $\lambda \omega_2(x - \xi)$ в подынтегральных выражениях. Эти вещественные части должны быть неположительными.

Решением указанной краевой задачи является функция $y(x, \lambda) = (R_\lambda g)(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) g(\xi) d\xi$, где для $G(x, \xi, \lambda)$ справедливы формулы (2.41) и (2.42), если учесть представления (2.38) характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ в зависимости от рассматриваемого случая $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ или $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Тем самым, лемма 2.2 доказана. $\square$

Рассмотрим случай $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. В соответствии с формулой (2.41) и обозначениями (2.36)-(2.37) справедливо представление

$$\begin{aligned} I_n^+(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 \left(G^+(x, \xi, \lambda) + g^+(x, \xi, \lambda) \right) (f_1(\xi) + \lambda p_2 h_1(\xi)) d\xi d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \left(\int_0^1 G^+(x, \xi, \lambda) f_1(\xi) d\xi + \int_0^1 g^+(x, \xi, \lambda) f_1(\xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \lambda p_2 \int_0^1 G^+(x, \xi, \lambda) h_1(\xi) d\xi + \lambda p_2 \int_0^1 g^+(x, \xi, \lambda) h_1(\xi) d\xi \right) d\lambda = \\ &= I_{n1}^+(x) + I_{n2}^+(x) + I_{n3}^+(x) + I_{n4}^+(x). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Важную роль далее играет следующая лемма.

Лемма 2.3. *Предположим $\gamma(x, \xi) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 \xi$; $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_2 \neq 0$ и $\gamma(x, \xi) \operatorname{Re} z \leq 0$ при $z \in \zeta_R^+$ (или $z \in \zeta_R^-$), где $x \in [0, 1]$, $\xi \in [a(x), b(x)] \subset [0, 1]$, $a(x)$ и $b(x)$ — заданные линейные вещественные функции, ζ_R^+ (или ζ_R^-): $:= \left\{ z \in \mathbb{C} : z = R e^{i\varphi}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ (или $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$), $R > 0$. Тогда при условии $f(x) \in L_r[0, 1]$, $r > 1$, имеет место оценка*

$$\left| \int_{\zeta_R^+ \text{ (или } \zeta_R^-)} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} e^{\gamma(x, \xi) z} f(\xi) d\xi \right) dz \right| \leq C \|f\|_r \vartheta_r(R), \quad (2.44)$$

где $\vartheta_r(R) = R^{1/r}$ при $1 < r < \infty$ и $\vartheta_\infty(R) = \ln R$ при $r = \infty$.

Доказательство. Обозначим $q = r/(r-1)$, то есть $1/r + 1/q = 1$. Оценивая модуль интеграла в (2.44) через интеграл от модуля, применяя неравенство Гельдера к интегралу по ξ и делая вполне понятные оценки и замену переменной, получим в случае контура ζ_R^+

$$\begin{aligned} \left| \int_{\zeta_R^+} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} e^{\gamma(x, \xi) z} f(\xi) d\xi \right) dz \right| &\leq \|f\|_r \left| \int_{\zeta_R^+} \left| \int_{a(x)}^{b(x)} e^{q\gamma(x, \xi) \operatorname{Re} z} \right| dz \right| \leq \\ &\leq C \|f\|_r \left| \int_{\zeta_R^+} \left(\frac{1 - \exp(-\eta \operatorname{Re} z)}{\operatorname{Re} z} \right)^{1/q} |dz| \right| \leq C \|f\|_r \int_0^{\eta R^{\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{1 - \exp(-\xi)}{\xi} \right)^{1/q} d\xi \leq \end{aligned}$$

$$\leq C \|f\|_r \left(C + \int_1^{\eta R \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\xi} \right)^{1/q} d\xi \right) \leq C \|f\|_p \vartheta_p(R),$$

где $\eta > 0$ есть число, выражающееся через параметры леммы. А это и есть оценка (2.44) в случае контура ζ_R^+ . В случае контура ζ_R^- рассуждения аналогичны.

Тем самым, лемма доказана. $\square$

На основании левого неравенства в (2.40) из (2.41) и (2.43) получаем оценки

$$I_{n1}^+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 O \left(\frac{1}{|\lambda|} \left(\left| e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} \right| + \right. \right. \\ \left. \left. + \left| e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \right| \right) \right) f_1(\xi) d\xi d\lambda, \quad (2.45)$$

$$I_{n2}^+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \left(\int_0^x O \left(\frac{1}{|\lambda|} \left| e^{\lambda \omega_1(x-\xi)} \right| \right) f_1(\xi) d\xi + \int_x^1 O \left(\frac{1}{|\lambda|} \left| e^{\lambda \omega_2(x-\xi)} \right| \right) f_1(\xi) d\xi \right) d\lambda. \quad (2.46)$$

Так как $f_1(\xi) \in L_r[0, 1]$ и для интегралов $I_{n1}^+(x)$ и $I_{n2}^+(x)$ выполняются все другие условия леммы 2.3, то на основании этой леммы из (2.45) и (2.46) заключаем, что

$$I_{n1}^+(x) = o_u(1), \quad I_{n2}^+(x) = o_u(1), \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.47)$$

Рассмотрим теперь слагаемое $I_{n3}^+(x)$ в (2.43). Так как $[1] = 1 + O(1/\lambda)$, то в $I_{n3}^+(x)$ в сумме под интегралом каждое слагаемое состоит из двух членов: один член соответствует 1, а другой — $O(1/\lambda)$. В соответствии с этим разобьем $I_{n3}^+(x)$ на две группы слагаемых $J_{n3}^+(x)$ и $K_{n3}^+(x)$ следующим образом

$$I_{n3}^+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1)\Delta_+(\lambda)} \left(e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \right) h_1(\xi) d\xi d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 O \left(\frac{1}{|\lambda|} \left(\left| e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} \right| + \right. \right. \\ \left. \left. + \left| e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \right| \right) \right) h_1(\xi) d\xi d\lambda =: J_{n3}^+(x) + K_{n3}^+(x), \quad (2.48)$$

Так как по предположению теоремы $h_1(x) \in W_r^1[0, 1]$, то и подавно $h_1(x) \in L_\infty[0, 1]$. Следовательно, на основании леммы 2.3 получим при всех $x \in [0, 1]$

$$K_{n3}^+(x) \leq C(h_1) \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.49)$$

В слагаемом $J_{n3}^+(x)$ в знаменателе присутствует член $\Delta^+(\lambda)$, для которого справедливы левая асимптотическая формула в (2.39). Следовательно, с учетом (2.40) при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, $|\lambda| \gg 1$ и $\lambda \in \mathbb{C}_\delta$ справедлива асимптотика

$$\frac{1}{\Delta^+(\lambda)} = \frac{1}{[1] - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 - \omega_2)} [1]} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 - \omega_2)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{\Delta_0^+(\lambda)} + O_\delta\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Учитывая эту асимптотику в $J_{n3}^+(x)$, получим

$$\begin{aligned}
J_{n3}^+(x) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1) \Delta_0^+(\lambda)} \left(e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} + \right. \\
& + \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \Big) h_1(\xi) d\xi d\lambda + \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 O \left(\frac{1}{|\lambda|} \left(\left| e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} \right| + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left| e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \right| \right) \right) h_1(\xi) d\xi d\lambda =: \hat{J}_{n3}^+(x) + \tilde{J}_{n3}^+(x). \quad (2.50)
\end{aligned}$$

На основании леммы 2.3 аналогично (2.49) получим при всех $x \in [0, 1]$

$$\tilde{J}_{n3}^+(x) \leq C(h_1) \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.51)$$

В слагаемом $\hat{J}_{n3}^+(x)$ в интеграле по переменной ξ проведем один раз интегрирование по частям, учитывая, что $h_1(x) \in W_r^1[0, 1]$ и $h_1(0) = 0$. Получим

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{n3}^+(x) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 \frac{p_2}{\lambda(\omega_2 - \omega_1) \Delta_0^+(\lambda)} h_1(\xi) d \left(-\frac{1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} + \frac{1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} - \right. \\
& - \frac{1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} + \frac{\omega_1}{\omega_2^2} e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \Big) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{p_2}{\lambda(\omega_2 - \omega_1) \Delta_0^+(\lambda)} h_1(1) \frac{1}{\omega_2} e^{\lambda\omega_2(x-1)} \times \\
& \times (-\Delta_0^+(\lambda)) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 \frac{p_2}{\lambda(\omega_2 - \omega_1) \Delta_0^+(\lambda)} \left(-\frac{1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} + \frac{1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} - \right. \\
& - \frac{1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} + \frac{\omega_1}{\omega_2^2} e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \Big) h_1'(\xi) d\xi d\lambda = \\
& = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 O \left(\frac{1}{|\lambda|} \left(\left| e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} \right| + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left| e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \right| \right) \right) h_1(\xi) d\xi d\lambda =: L_{n1}^+(x) + L_{n2}^+(x), \quad (2.52)
\end{aligned}$$

где обозначено $L_{n1}^+(x) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1)$.

Так как $h_1'(x) \in L_r[0, 1]$ ($r > 1$), то аналогично предыдущему по лемме 2.3 для всех $x \in [0, 1]$ имеем оценку

$$|L_{n2}^+(x)| \leq C(h_1, \delta) \frac{1}{n} n^{1/r} = C(h_1, \delta) \frac{1}{n^{1/q}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (2.53)$$

где $q = r/(r-1) > 1$.

Из (2.52)-(2.53) получим

$$\hat{J}_{n3}^+(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1) + o_u(1) \quad \text{равномерно по } x \in [0, 1]. \quad (2.54)$$

Следовательно, из (2.48), (2.49), (2.50), (2.51) и (2.54) найдем

$$\hat{I}_{n3}^+(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1) + o_u(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.55)$$

Наконец, рассмотрим слагаемое $I_{n4}^+(x)$ в (2.45). Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям при рассмотрении $I_{n3}^+(x)$, получим представление при $n \rightarrow \infty$:

$$I_{n4}^+(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{p_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\int_0^x e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} h_1(\xi) d\xi + \int_x^1 e^{\lambda(\omega_2(x-\xi))} h_1(\xi) d\xi \right) d\lambda + o_u(1) =: \hat{I}_{n4}^+ + o_u(1). \quad (2.56)$$

Далее, интегрируя один раз по частям в интеграле по переменной ξ в $\hat{I}_{n4}^+(x)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \hat{I}_{n4}^+(x, \lambda) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{1}{\lambda} h_1(x) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1) + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \left(\int_0^x O\left(\frac{1}{|\lambda|} \left| e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} \right| \right) h_1'(\xi) d\xi + \int_x^1 O\left(\frac{1}{|\lambda|} \left| e^{\lambda\omega_2(x-\xi)} \right| \right) h_1'(\xi) d\xi \right) d\lambda. \end{aligned}$$

На основании леммы 2.3 отсюда найдем

$$\hat{I}_{n4}^+(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{1}{\lambda} h_1(x) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1) + o_u(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.57)$$

Таким образом, из (2.56) и (2.57) получим

$$I_{n4}^+(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{1}{\lambda} h_1(x) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1) + o_u(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.58)$$

Следовательно, с учетом (2.45), (2.47), (2.55) и (2.58) будем иметь

$$I_n^+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{1}{\lambda} h_1(x) d\lambda + o_u(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.59)$$

Рассмотрим теперь случай $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Используем теперь для функции Грина представление (2.42). Так как дальнейшие рассуждения в этом случае повторяют соответствующие рассуждения в случае $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, то опускаем подробности.

В результате получим

$$I_n^-(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^-} \frac{1}{\lambda} h_1(x) d\lambda + o_u(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.60)$$

Из (2.33), (2.59) и (2.60) найдем

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{1}{\lambda} h_1(x) d\lambda + o(1) = h_1(x) + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

А это и есть утверждение (2.35) доказываемой теоремы. Тем самым, теорема 2.2 доказана. $\square$

В случае нулевого потенциала теорема о разложении первой компоненты по корневым функциям о.-.ф. $L_0(\lambda)$ вытекает из теоремы 2.2 как частный случай. Но для дальнейшего потребуются доказательства соответствующей теоремы о разложении другим методом, который для краткости назовем вычетным. Поводом для этого служит то, что основные моменты доказательства будут в дальнейшем существенно использоваться при выводе конечной формулы для классического решения в случае нулевого потенциала в разделе 4.

2.3.2. *Разложение первой компоненты вектор-функции по собственным функциям спектральной задачи с нулевым потенциалом. Вычетный метод.* Так как в данном подразделе $q = 0$, то в случае нулевого потенциала формула (2.32) приобретает более простой вид

$$h_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) \left(p_1 h'_1(\xi) + \lambda p_2 h_1(\xi) + p_2 h_2(\xi) \right) d\xi d\lambda. \quad (2.61)$$

Требуется найти условия на компоненты в.-ф. $H(x)$, при которых имеет место равенство (2.61).

Преобразуем в этом равенстве первое слагаемое в круглых скобках под знаком интеграла справа, проведя интегрирование по частям. Для этого введем функцию

$$\tilde{h}_1(x) := h_1(x) - h_1(1). \quad (2.62)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.4. *Для функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ о.-ф. $L(\lambda)$ справедливо равенство*

$$G(x, 0, \lambda) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Известно [23, с. 43], что по переменной ξ функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет сопряженным краевым условиям к краевым условиям (2.3) (см. [23, с. 20-21]).

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что сопряженные условия к условиям (2.3) имеют вид $z(0) = 0$, $z'(1) - \bar{\lambda} p_1 z(1) = 0$.

Следовательно, для функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ справедливо утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

В частности, в случае $q = 0$ из леммы 2.4 получаем следующее утверждение.

Лемма 2.5. *Для функции Грина $G_0(x, \xi, \lambda)$ о.-ф. $L_0(\lambda)$ справедливо равенство*

$$G_0(x, 0, \lambda) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.63)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в круглых скобках в (2.61) и учитывая, что $\tilde{h}_1(1) = 0$ и справедливо равенство (2.63), получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) h'_1(\xi) d\xi &= \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) d\tilde{h}_1(\xi) = \\ &= G_0(x, 1, \lambda) \tilde{h}_1(1) - G_0(x, 0, \lambda) \tilde{h}_1(0) - \int_0^1 G_{0\xi}(x, \xi, \lambda) \tilde{h}_1(\xi) d\xi = - \int_0^1 G_{0\xi}(x, \xi, \lambda) \tilde{h}_1(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.64)$$

С учетом (2.64) правую часть равенства (2.61) можно записать в виде

$$J(x) := \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \int_0^1 \left(-p_1 G_{0\xi}(x, \xi, \lambda) \tilde{h}_1(\xi) + \lambda p_2 G_0(x, \xi, \lambda) h_1(\xi) + p_2 G_0(x, \xi, \lambda) h_2(\xi) \right) d\xi d\lambda. \quad (2.65)$$

Таким образом, требуется найти условия на компоненты в.-ф. $H(x)$, при которых ряд $J(x)$ сходится к первой компоненте $h_1(x)$, то есть имеет место равенство

$$J(x) = h_1(x). \quad (2.66)$$

Справедлива следующая теорема о разложении первой компоненты в.-ф.

Теорема 2.3. *Если $h'_1, h_2 \in L_1[0, 1]$ и $h_1(0) = 0$, то справедливо равенство (2.66), где ряд $J(x)$ сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$.*

Доказательство. Как уже отмечалось, справедливость теоремы установим не методом контурного интеграла Коши—Пуанкаре [23, с. 91–98], который обычно используется при доказательстве теорем о разложении и который использовался в предыдущем подразделе, а другим, вычетным методом.

Доказательство разобьем на ряд лемм.

Лемма 2.6. Для функции Грина $G_0(x, \xi, \lambda)$ о.-ф. $L_0(\lambda)$ справедлива формула

$$\begin{aligned} G_0(x, \xi, \lambda) = & \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)\hat{\Delta}_0(\lambda)} \left(\omega_2 e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - \omega_1 e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} + \omega_1 e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2 x)} - \omega_1 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))} \right) - \\ & - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} \chi(x-\xi) + e^{\lambda\omega_2(x-\xi)} \chi(\xi-x) \right), \end{aligned} \quad (2.67)$$

где $\hat{\Delta}_0(\lambda)$ определяется формулой (2.5).

Доказательство. Ищем резольвенту о.-ф. $L_0(\lambda)$ как решение краевой задачи

$$y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y = g(x), \quad y(0) = y'(1) = 0.$$

Для нахождения решения используем ф.с.р. уравнения с асимптотикой (2.4). Проводя стандартные рассуждения, получаем, что решение дается интегральным оператором и для его ядра справедлива формула (2.67). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.7. Справедливы формулы

$$r_k(x, \xi) := \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} G_0(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\lambda_{0k}(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} - e^{\lambda_{0k}\omega_1 x} \right) \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right), \quad (2.68)$$

$$r_{1k}(x, \xi) := \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} G_{0\xi}(x, \xi, \lambda) = -\frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} - e^{\lambda_{0k}\omega_1 x} \right) \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right), \quad (2.69)$$

где с.з. λ_{0k} определяются формулой (2.6).

Доказательство. Так как функция $G_0(x, \xi, \lambda)$ по λ есть мероморфная функция и λ_{0k} есть ее простой полюс, то из формулы (2.67) получим

$$\begin{aligned} r_k(x, \xi) = & \frac{1}{\lambda_{0k}(\omega_2 - \omega_1)\hat{\Delta}'_0(\lambda_{0k})} \left(\omega_2 e^{\lambda_{0k}(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - \omega_1 e^{\lambda_{0k}\omega_1(x+1-\xi)} + \right. \\ & \left. + \omega_1 e^{\lambda_{0k}(\omega_1(1-\xi) + \omega_2 x)} - \omega_1 e^{\lambda_{0k}(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))} \right). \end{aligned} \quad (2.70)$$

На основании формул (2.6) справедливо представление

$$\hat{\Delta}'_0(\lambda_{0k}) = \omega_2^2 e^{\lambda_{0k}\omega_2} - \omega_1^2 e^{\lambda_{0k}\omega_1} = e^{\lambda_{0k}\omega_2} (\omega_2^2 - \omega_1^2 e^{\lambda_{0k}(\omega_1 - \omega_2)}). \quad (2.71)$$

Но так как

$$e^{\lambda_{0k}(\omega_1 - \omega_2)} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (2.72)$$

то из (2.71) следует

$$\hat{\Delta}'_0(\lambda_{0k}) = e^{\lambda_{0k}\omega_2} (\omega_2^2 - \omega_1\omega_2) = e^{\lambda_{0k}\omega_2} \omega_2 (\omega_2 - \omega_1). \quad (2.73)$$

Подставим (2.73) в (2.70). Получим с учетом (2.72)

$$\begin{aligned} r_k(x, \xi) = & \frac{1}{\lambda_{0k}\omega_2(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\omega_2 e^{\lambda_{0k}(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} - \omega_1 e^{\lambda_{0k}(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} + \omega_1 e^{\lambda_{0k}(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} - \right. \\ & \left. - \omega_1 e^{\lambda_{0k}(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \right) = \frac{1}{\lambda_{0k}\omega_2(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\omega_1 e^{\lambda_{0k}\omega_1 x} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} e^{\lambda_{0k}(\omega_1 - \omega_2)} \right) + \right. \\ & \left. + \omega_1 e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} e^{\lambda_{0k}(\omega_1 - \omega_2)} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} e^{\lambda_{0k}(\omega_1 - \omega_2)} \right) \right) = \\ = & \frac{1}{\lambda_{0k}\omega_2(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\omega_1 e^{\lambda_{0k}\omega_1 x} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) + \omega_1 e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \frac{\omega_2}{\omega_1} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \right) = \\ = & \frac{1}{\lambda_{0k}(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} - e^{\lambda_{0k}\omega_1 x} \right) \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right). \end{aligned}$$

Тем самым формула (2.68) установлена.

Формула (2.69) получается из формулы (2.68) путем дифференцирования $r_k(x, \xi)$ по ξ . Лемма доказана. $\square$

Будем далее обозначать

$$a := \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \in (0, 1) \implies 1 - a = -\frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{|\omega_1|}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Лемма 2.8. Если $f(x) \in L_1[0, 1]$, то справедливы формулы

$$\int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1\xi} f(\xi) d\xi = -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \varkappa^*(\xi) f^*(\xi) d\xi = \frac{1}{1-a} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \varkappa^*(\xi) f^*(\xi) d\xi, \quad (2.74)$$

$$\int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_2\xi} f(\xi) d\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \theta_*(\xi) f_*(\xi) d\xi = \frac{1}{a} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \theta_*(\xi) f_*(\xi) d\xi, \quad (2.75)$$

где

$$\varkappa(\xi) := e^{(1-a)\sigma\xi}, \quad \theta(\xi) := e^{-a\sigma\xi} \quad (2.76)$$

и используется обозначение для данной функции $g(x)$

$$g^*(\xi) := \begin{cases} 0, & \xi \in [0, a), \\ g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]; \end{cases} \quad g_*(\xi) := \begin{cases} g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ 0, & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (2.77)$$

Доказательство. С учетом формул (2.6) для с.з. λ_{0k} справедливо представление

$$\int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1\xi} f(\xi) d\xi = \int_0^1 e^{-2k\pi i\frac{\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}} e^{(1-a)\sigma\xi} f(\xi) d\xi = \int_0^1 e^{-2k\pi i\frac{\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}} \varkappa(\xi) f(\xi) d\xi. \quad (2.78)$$

Очевидно $\frac{\omega_1\xi}{\omega_2 - \omega_1} \in (-1; 0]$. Так как функция $e^{-2k\pi i x}$ является 1-периодичной, то из (2.78) следует

$$\int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1\xi} f(\xi) d\xi = \int_0^1 e^{-2k\pi i\left(\frac{\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}+1\right)} \varkappa(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Сделаем в интеграле справа замену переменной интегрирования

$$\frac{\omega_1\xi}{\omega_2 - \omega_1} + 1 = \xi_1 \quad \longleftrightarrow \quad \xi = \frac{(\omega_2 - \omega_1)(\xi_1 - 1)}{\omega_1}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1\xi} f(\xi) d\xi &= -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_{\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}^1 e^{-2k\pi i\xi_1} \varkappa\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)(\xi_1 - 1)}{\omega_1}\right) f\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)(\xi_1 - 1)}{\omega_1}\right) d\xi_1 = \\ &= \frac{1}{1-a} \int_a^1 e^{-2k\pi i\xi_1} \varkappa\left(\frac{1-\xi_1}{1-a}\right) f\left(\frac{1-\xi_1}{1-a}\right) d\xi_1 = \frac{1}{1-a} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \varkappa^*(\xi) f^*(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

то есть установлена справедливость равенства (2.74), где функции $\varkappa^*(\xi)$ и $f^*(\xi)$ определяются левой формулой в (2.76), а $\varkappa(\xi)$ — левой формулой в (2.77).

Далее, аналогично предыдущему, можно получить формулу

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_2\xi} f(\xi) d\xi &= \int_0^1 e^{-2k\pi i\frac{\omega_2\xi}{\omega_2-\omega_1}} e^{-a\hat{x}\xi} f(\xi) d\xi = \int_0^1 e^{-2k\pi i\frac{\omega_2\xi}{\omega_2-\omega_1}} \theta(\xi) f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^{\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}} e^{-2k\pi i\xi_1} \theta\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2}\xi_1\right) f\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2}\xi_1\right) d\xi_1 = \frac{1}{a} \int_0^a e^{-2k\pi i\xi_1} \theta\left(\frac{\xi_1}{a}\right) f\left(\frac{\xi_1}{a}\right) d\xi_1 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi \theta_*(\xi)} f_*(\xi) d\xi,$$

то есть формулу (2.75), где функции $\varkappa_*(\xi)$ и $f_*(\xi)$ определяются правой формулой в (2.76), а $\theta(\xi)$ — правой формулой в (2.77).

Тем самым лемма 2.8 доказана. $\square$

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы 2.3.

Рассмотрим ряд $J(x)$, введенный в (2.65). Справедливо представление

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_k \int_0^1 \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} (-p_1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \tilde{h}_1(\xi) + \lambda p_2 G(x, \xi, \lambda) h_1(\xi) + p_2 G(x, \xi, \lambda) h_2(\xi)) d\xi = \\ &= \sum_k \int_0^1 (-p_1 r_{1k}(x, \xi) \tilde{h}_1(\xi) + \lambda_{0k} p_2 r_k(x, \xi) h_1(\xi) + p_2 r_k(x, \xi) h_2(\xi)) d\xi := J_1(x) + J_2(x) + J_3(x). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Рассмотрим отдельно $J_1(x)$, $J_2(x)$ и $J_3(x)$. Для $J_1(x)$ имеем в силу формул (2.69), (2.74) и (2.75)

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{p_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k (e^{\lambda_{0k} \omega_2 x} - e^{\lambda_{0k} \omega_1 x}) \int_0^1 (\omega_1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi}) \tilde{h}_1(\xi) d\xi = \frac{p_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \times \\ &\quad \times \sum_k \left(e^{a\sigma x} e^{2k\pi i(ax)} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} \left(\frac{\omega_1}{1-a} \varkappa^*(\xi) \tilde{h}_1^*(\xi) - \frac{\omega_2}{a} \theta_*(\xi) \tilde{h}_{1*}(\xi) \right) dx - \right. \\ &\quad \left. - e^{(a-1)\sigma x} e^{2k\pi i((a-1)x+1)} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} \left(\frac{\omega_1}{1-a} \varkappa^*(\xi) \tilde{h}_1^*(\xi) - \frac{\omega_2}{a} \theta_*(\xi) \tilde{h}_{1*}(\xi) \right) dx \right) = \\ &= \frac{p_1}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(-\frac{1}{\theta(x)} e^{2k\pi i(ax)} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} (\varkappa^*(\xi) \tilde{h}_1^*(\xi) + \theta_*(\xi) \tilde{h}_{1*}(\xi)) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varkappa(x)} e^{2k\pi i((a-1)x+1)} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} (\varkappa^*(\xi) \tilde{h}_1^*(\xi) + \theta_*(\xi) \tilde{h}_{1*}(\xi)) d\xi \right). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Далее используется обозначение для данной функции $g(x)$

$$\hat{g}(\xi) := \varkappa^*(\xi) g^*(\xi) + \theta_*(\xi) g_*(\xi). \quad (2.81)$$

На основании формул (2.76), (2.77) и (2.7) справедливо представление

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \begin{cases} \theta\left(\frac{\xi}{a}\right) g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \varkappa\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right) g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} = \\ &= \begin{cases} e^{-\sigma \xi} g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ e^{\sigma(1-\xi)} g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} = e^{-\sigma \xi} \begin{cases} g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Таким образом, $\varkappa^*(\xi)\tilde{h}_1^*(\xi) + \theta_*(\xi)\tilde{h}_{1*}(\xi) = \hat{h}_1(\xi)$, и на основании (2.80) будем иметь

$$J_1(x) = \frac{p_1}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(-\frac{1}{\theta(x)} e^{2k\pi i(ax)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \hat{h}_1(\xi) d\xi + \frac{1}{\varkappa(x)} e^{2k\pi i((a-1)x+1)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \hat{h}_1(\xi) d\xi \right). \quad (2.83)$$

Далее потребуется следующая лемма.

Лемма 2.9. Пусть $g(x) \in W_1^1[0, 1]$ и $g(1) = 0$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $\hat{g}(x)$ ($\hat{g}(x)$ определяется формулой (2.81) и имеет представление (2.82), а функции $\varkappa(\xi)$ и $\theta(\xi)$ определяются формулами (2.77)) равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$ к функции $\hat{g}(x)$.

Доказательство. В силу того, что $g(x) \in W_1^1[0, 1]$, то и $\hat{g}(x) \in W_1^1([0, a) \cup (a, 1])$. Покажем, что $\hat{g}(x)$ непрерывна в точке a . Тогда $\hat{g}(x)$ будет абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и $\hat{g}'(x) \in L_1[0, 1]$. В самом деле, так как $g(1) = 0$, то на основании (2.82) получим $\hat{g}(a-0) = \theta(1)g(1) = 0$, $\hat{g}(a+0) = \varkappa(1)g(1) = 0$, то есть $\hat{g}(x)$ непрерывна при $x = a$. Далее, $\hat{g}(0) = \theta(0)g(0) = g(0)$, $\hat{g}(1) = \varkappa(0)g(0) = g(0)$, то есть $\hat{g}(0) = \hat{g}(1)$.

По следствию [1, с. 122] из теоремы Жордана [1, с. 121], если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и $f(0) = f(1)$, то ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Так как $\hat{g}(x) \in W_1^1[0, 1]$ и $\hat{g}(0) = \hat{g}(1)$, то имеем $\hat{g}(x) = \sum_k e^{2k\pi ix} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \hat{g}(\xi) d\xi$ на основании вышесказанного, при этом тригонометрический ряд Фурье справа сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Тем самым лемма доказана. $\square$

Так как функция $\tilde{h}_1(x)$ удовлетворяет условия леммы 2.9, то из (2.83) получим

$$J_1(x) = \frac{p_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(-\frac{1}{\theta(x)} \hat{h}_1(ax) + \frac{1}{\varkappa(x)} \hat{h}_1((a-1)x+1) \right). \quad (2.84)$$

Так как $ax \in [0, a]$ и $(a-1)x+1 \in [a, 1]$ при $x \in [0, 1]$, то из (2.84) с учетом представления (2.82) получим

$$J_1(x) = \frac{p_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(-\frac{1}{\theta(x)} \theta(x) \tilde{h}_1(x) + \frac{1}{\varkappa(x)} \tilde{h}_1(x) \right) = \frac{p_1}{\omega_2 - \omega_1} (-\tilde{h}_1(x) + \tilde{h}_1(x)) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.85)$$

Рассмотрим теперь $J_2(x)$ из (2.79). В силу формул (2.69), (2.74) и (2.75) для $J_2(x)$ имеем

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k (e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} - e^{\lambda_{0k}\omega_1 x}) \int_0^1 (e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi}) h_1(\xi) d\xi = \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \times \\ &\quad \times \sum_k \left(e^{a\sigma x} e^{2k\pi i(ax)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \left(\frac{1}{1-a} \varkappa^*(\xi) h_1^*(\xi) - \frac{1}{a} \theta_*(\xi) h_{1*}(\xi) \right) dx - \right. \\ &\quad \left. - e^{(a-1)\sigma x} e^{2k\pi i((a-1)x+1)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \left(\frac{1}{1-a} \varkappa^*(\xi) h_1^*(\xi) - \frac{1}{a} \theta_*(\xi) h_{1*}(\xi) \right) dx \right) = \\ &= \frac{p_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(-\frac{1}{\theta(x)} e^{2k\pi i(ax)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \left(\frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) h_1^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) h_{1*}(\xi) \right) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varkappa(x)} e^{2k\pi i((a-1)x+1)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \left(\frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) h_1^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) h_{1*}(\xi) \right) d\xi \right). \quad (2.86) \end{aligned}$$

Введем следующее обозначение для данной функции $g(x)$:

$$\check{g}(\xi) := \frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) g^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) g_*(\xi). \quad (2.87)$$

На основании формул (2.76), (2.77) и (2.7) справедливо представление

$$\begin{aligned} \check{g}(\xi) &= \begin{cases} \frac{1}{\omega_2} \theta\left(\frac{\xi}{a}\right) g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{1}{\omega_1} \varkappa\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right) g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\omega_2} e^{-\sigma\xi} g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{1}{\omega_1} e^{\sigma(1-\xi)} g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} = \frac{1}{\omega_2} e^{-\xi} \begin{cases} g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.88)$$

Таким образом, $\frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) h_1^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) h_{1*}(\xi) = \check{h}_1(\xi)$, и на основании (2.86) будем иметь

$$J_2(x) = \frac{p_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(-\frac{1}{\theta(x)} e^{2k\pi i(ax)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \check{h}_1(\xi) dx + \frac{1}{\varkappa(x)} e^{2k\pi i((a-1)x+1)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \check{h}_1(\xi) dx \right). \quad (2.89)$$

Далее воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.10. Пусть $g(x) \in W_1^1[0, 1]$ и $g(0) = 0$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $\check{g}(x)$ равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$ к функции $\check{g}(x)$ ($\check{g}(x)$ определяется формулой (2.87) и имеет представление (2.88), а функции $\varkappa(\xi)$ и $\theta(\xi)$ определяются формулами (2.77)).

Доказательство. Так как $g(x) \in W_1^1[0, 1]$, то и $\check{g}(x) \in W_1^1([0, a) \cup (a, 1])$. Покажем, что $\check{g}(x)$ непрерывна в точке a , тогда $\check{g}(x)$ будет абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и $\check{g}'(x) \in L_1[0, 1]$. В самом деле, на основании (2.88) получим

$$\check{g}(a-0) = \frac{1}{\omega_2} \theta(1) g(1), \quad \check{g}(a+0) = \frac{1}{\omega_1} \varkappa(1) g(1). \quad (2.90)$$

Покажем, что

$$\frac{1}{\omega_2} \theta(1) = \frac{1}{\omega_1} \varkappa(1), \quad (2.91)$$

или, что эквивалентно, $\frac{1}{\omega_2} e^{-a\sigma} = \frac{1}{\omega_1} e^{(1-a)\sigma}$, или $\frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{\omega_1} e^{\sigma}$. Но по определению σ (см. (2.7)) последнее равенство верно, то есть (2.91) имеет место.

Тогда из (2.90) получим $\check{g}(a-0) = \check{g}(a+0)$, а это означает, что $\check{g}(x)$ непрерывна при $x = a$. Далее, $\check{g}(0) = \frac{1}{\omega_2} \theta(0) g(0) = 0$ и $\check{g}(1) = \frac{1}{\omega_1} \varkappa(0) g(0) = 0$, то есть $\check{g}(0) = \check{g}(1) = 0$.

По следствию [1, с. 122] из теоремы Жордана [1, с. 121], если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и $f(0) = f(1)$, то ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Так как $\check{g}(x) \in W_1^1[0, 1]$ и $\check{g}(0) = \check{g}(1)$, то имеем $\check{g}(x) = \sum_k e^{2k\pi ix} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \check{g}(\xi) dx$ на основании вышесказанного, при этом тригонометрический ряд Фурье справа сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Тем самым лемма доказана. $\square$

Так как функция $h_1(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.10, то из (2.89) получим

$$J_2(x) = \frac{p_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(-\frac{1}{\theta(x)} \check{h}_1(ax) + \frac{1}{\varkappa(x)} \check{h}_1((a-1)x+1) \right). \quad (2.92)$$

Так как $ax \in [0, a]$ и $(a-1)x+1 \in [a, 1]$ при $x \in [0, 1]$, то из (2.92) с учетом представления (2.88) получим $\forall x \in [0, 1]$

$$J_2(x) = \frac{p_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(-\frac{1}{\theta(x)} \frac{1}{\omega_2} \theta(x) h_1(x) + \frac{1}{\varkappa(x)} \frac{1}{\omega_1} \varkappa(x) h_1(x) \right) = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(-\frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_1} \right) h_1(x) = h_1(x). \quad (2.93)$$

Наконец, рассмотрим слагаемое $J_3(x)$ из (2.79) и выполним в интеграле один раз интегрирование по частям, обозначив

$$H_2(x) := \int_x^1 h_2(\xi) d\xi. \quad (2.94)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} J_3(x) &= \sum_k \int_0^1 p_2 r_k(x, \xi) h_2(\xi) d\xi = -p_2 \sum_k \int_0^1 r_k(x, \xi) dH_2(\xi) = \\ &= -p_2 \sum_k \left(r_k(x, 1)H_2(1) - r_k(x, 0)H_2(0) - \int_0^1 r_{1k}(x, \xi)H_2(\xi) d\xi \right) = p_2 \sum_k \int_0^1 r_{1k}(x, \xi)H_2(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.95)$$

так как $H_2(1) = 0$ по определению (2.94), а $r_k(x, 0) = 0$ в силу формулы (2.68).

При рассмотрении $J_1(x)$ (см. (2.85)) было установлено, что если $\tilde{h}_1(1) = 0$ и $\tilde{h}_1(\xi) \in W_1^1[0, 1]$, то $\sum_k \int_0^1 r_{1k}(x, \xi)\tilde{h}_1(\xi) d\xi = 0$, причем ряд слева сходится равномерно на $[0, 1]$.

Но $H_2(1) = 0$ и $H_2(\xi) \in W_1^1[0, 1]$. Следовательно, также будем иметь $\sum_k \int_0^1 r_{1k}(x, \xi)H_2(\xi) d\xi = 0$, где ряд слева сходится равномерно на $[0, 1]$. С учетом (2.95) отсюда следует, что ряд $J_3(x)$ равномерно сходится к нулю, то есть

$$J_3(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.96)$$

Из (2.79), (2.85), (2.93) и (2.96) следует утверждение доказываемой теоремы. Таким образом, теорема 2.3 полностью доказана. $\square$

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ И ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ РЯДА

Пусть R_λ^1 есть интегральный оператор с ядром $G_\xi(x, \xi, \lambda)$. Тогда, используя введенное ранее обозначение (2.31), можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.1. *Если $u(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3), то это решение единственно и находится по формуле*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \left(-p_1 e^{\lambda t} R_\lambda^1 \tilde{\varphi} + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau \right) d\lambda, \quad (3.1)$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$. Здесь обозначено $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - \varphi(1)$.

Отметим, что формулы, аналогичные формуле (3.1), уже встречались ранее (например, в работах [2, 4, 25] и многих других).

Доказательство. Запишем задачу (1.1)–(1.3) в другом виде. Обозначим

$$v_1 = u, \quad v_2 = \frac{d}{dt} v_1 \left(= \frac{d}{dt} u \right), \quad (3.2)$$

тогда уравнение (1.1) запишется в виде системы

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v_1 = v_2, \\ \frac{d}{dt} v_2 = -\frac{1}{p_2} d_x^2 v_1 + \frac{1}{p_2} q(x) v_1 - \frac{p_1}{p_2} d_x v_2 + \frac{1}{p_2} f(x, t), \end{cases} \quad (3.3)$$

где, как и раньше, $d_x := d/dx$.

Если обозначить $V := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $F := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{p_2} f(x, t) \end{pmatrix}$ и использовать введенный ранее оператор A (см. (2.22)), то система (3.3) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} V(\cdot, t) = AV(\cdot, t) + F(\cdot, t), \quad (3.4)$$

где по предположению теоремы $V_t(x, t)$ и $F(x, t)$ суть функции класса $\mathcal{Q}$. А с использованием введенного формулой (2.23) оператора $\mathcal{L}$ и с учетом формулы (3.4) задача (1.1)–(1.3) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} V(\cdot, t) = \mathcal{L}V(\cdot, t) + F(\cdot, t), \quad (3.5)$$

$$V(x, 0) = \Xi(x), \quad (3.6)$$

где $\Xi(x) = (\varphi(x), \psi(x))^T$. При этом вектор-функция $V(x, t)$ удовлетворяет уравнению (3.5) п.в. в области Q и равенству (3.6) всюду на $[0, 1]$. Так как $u(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3), то $V(x, t)$ удовлетворяет по x условиям теоремы 2.2 о разложении первой компоненты по собственным вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$, то есть имеет место представление

$$v_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) (\mathcal{R}_\lambda V(\cdot, t))_1 d\lambda, \quad (3.7)$$

где ряд справа сходится равномерно по переменной $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$. По построению для вектор-функции $V(x, t)$ при п.в. $(x, t) \in Q$ выполняется соотношение (3.5). Подействуем оператором $\mathcal{R}_\lambda$ на обе части этого соотношения. Получим равенство

$$\mathcal{R}_\lambda V_t(\cdot, t) = \mathcal{R}_\lambda (\mathcal{L}V)(\cdot, t) + \mathcal{R}_\lambda F(\cdot, t). \quad (3.8)$$

Обозначим

$$Y(x, t, \lambda) := \mathcal{R}_\lambda V(\cdot, t). \quad (3.9)$$

Используя формулу (2.30) для резольвенты $\mathcal{R}_\lambda$, из (3.9) получим представление

$$Y(x, t, \lambda) := \begin{pmatrix} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) v_\lambda(\xi, t) d\xi \\ \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (\lambda v_\lambda(\xi, t)) d\xi + v_1(x, t) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

где аналогично (2.26) обозначено $v_\lambda(\xi, t) = -p_1 v'_{1\xi}(\xi, t) - \lambda p_2 v_1(\xi, t) - p_1 v_2(\xi, t)$.

Покажем, что для п.в. $t \geq 0$ при любых фиксированных $x \in [0, 1]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\frac{d}{dt} Y(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) v'_{\lambda t}(\xi, t) d\xi \\ \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (\lambda v'_{\lambda t}(\xi, t)) d\xi + v'_{1t}(x, t) \end{pmatrix} \left(= \mathcal{R}_\lambda V_t(\cdot, t) \right). \quad (3.11)$$

Для этого воспользуемся рассуждениями, аналогичными рассуждениям из статьи [43, с. 287–288]. Так как по построению компоненты $V(\xi, t)$ являются абсолютно непрерывными функциями по переменной t , то $v_\lambda(\xi, t) = v_\lambda(\xi, 0) + \int_0^t v'_{\lambda t}(\xi, \tau) d\tau$.

Отсюда на основании (3.10) будем иметь

$$Y(x, t, \lambda) := \begin{pmatrix} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) v_\lambda(\xi, 0) d\xi + \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \int_0^t v'_{\lambda t}(\xi, \tau) d\tau d\xi \\ \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \lambda v_\lambda(\xi, 0) d\xi + \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \int_0^t \lambda v'_{\lambda t}(\xi, \tau) d\tau d\xi + v_1(x, t) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Но, как уже отмечалось выше, на основании предположения теоремы и формул (3.2) имеем $v_{\lambda t}(\xi, \tau) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$ (или, по-другому, из класса $\mathcal{Q}$). Следовательно и $G(x, \xi, \lambda) V_t(\xi, \tau)$ есть функция класса $\mathcal{Q}$ по переменным ξ и τ . Поэтому по теореме

Фубини [24, с. 333] имеем $\int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) v_{\lambda t}(\xi, \tau) d\xi \in L_1[0, T]$ по τ при любом $T > 0$ и любых фиксированных $x \in [0, 1]$. А значит, (3.12) можно представить в виде

$$Y(x, t, \lambda) := \left(\begin{array}{c} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) v_{\lambda}(\xi, 0) d\xi + \int_0^t \left(\int_0^1 G(x, \xi, \lambda) v'_{\lambda t}(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau \\ \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \lambda v_{\lambda}(\xi, 0) d\xi + \int_0^t \left(\int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \lambda v'_{\lambda t}(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau + v_1(x, t) \end{array} \right).$$

Отсюда следует, что $Y(x, t, \lambda)$ абсолютно непрерывна по t и для п.в. $t > 0$ выполняется равенство (3.11). Далее, преобразуем первое слагаемое справа в (3.8) следующим образом:

$$\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{L}V) = \mathcal{R}_{\lambda}((\mathcal{L} - \lambda\mathcal{E} + \lambda\mathcal{E})V) = V + \lambda\mathcal{R}_{\lambda}V = V + \lambda Y. \quad (3.13)$$

Тогда из (3.8), (3.11) и (3.13) получим, что при фиксированных x и λ в.-ф. $Y(x, t, \lambda)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}Y(x, t, \lambda) - \lambda Y(x, t, \lambda) = V(x, t) + \mathcal{R}_{\lambda}F(\cdot, t). \quad (3.14)$$

Кроме того, на основании (3.6)

$$Y(x, 0, \lambda) = \mathcal{R}_{\lambda}V(\cdot, 0) = \mathcal{R}_{\lambda}\Xi. \quad (3.15)$$

Таким образом, $Y(x, t, \lambda)$ при любых фиксированных $x \in [0, 1]$, и $\lambda \in \mathbb{C}$ является решением задачи Коши (3.14)-(3.15). Общее решение уравнения (3.14) есть

$$Y_{\text{о.н.}}(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} C + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \left(V(x, \tau) + \mathcal{R}_{\lambda}F(\cdot, \tau) \right) d\tau, \quad (3.16)$$

где $C = (c_1, c_2)^T$ есть вектор, не зависящий от переменной t , то есть $c_j = c_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2$. Удовлетворим решение (3.16) начальному условию (3.15). Получим $Y_{\text{о.н.}}(x, 0, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{\lambda}\Xi$.

Отсюда следует, что

$$c_1(x, \lambda) = (\mathcal{R}_{\lambda}\Xi)_1, \quad c_2(x, \lambda) = (\mathcal{R}_{\lambda}\Xi)_2. \quad (3.17)$$

Используя формулы (3.16)-(3.17), получим следующее представление для решения задачи Коши (3.14)-(3.15):

$$Y(x, t, \lambda) = e^{\lambda t} \mathcal{R}_{\lambda}\Xi(x) + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \left(V(x, \tau) + \mathcal{R}_{\lambda}F(\cdot, \tau) \right) d\tau, \quad (3.18)$$

причем это решение единственное.

Нас интересует только первая компонента равенства (3.18) (см. формулу (3.7)), то есть если $Y(x, t, \lambda) = (y_1(x, t, \lambda), y_2(x, t, \lambda))^T$, то из (3.18) получим с учетом (3.9)

$$y_1(x, t, \lambda) = (\mathcal{R}_{\lambda}V(\cdot, t))_1 = e^{\lambda t} (\mathcal{R}_{\lambda}\Xi)_1 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \left(v_1(x, \tau) + (\mathcal{R}_{\lambda}F(\cdot, \tau))_1 \right) d\tau. \quad (3.19)$$

Учитывая, что $u(x, t) = v_1(x, t)$, из формул (3.7) и (3.19) получим

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) e^{\lambda t} (\mathcal{R}_{\lambda}\Xi)_1 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \left(u(x, \tau) + (\mathcal{R}_{\lambda}F(\cdot, \tau))_1 \right) d\tau \right) d\lambda.$$

А так как $\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau$ есть целая аналитическая функция по λ , то все интегралы по круговым контурам от нее равны нулю. В результате получим

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) e^{\lambda t} (\mathcal{R}_{\lambda}\Xi)_1 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (\mathcal{R}_{\lambda}F(\cdot, \tau))_1 d\tau \right) d\lambda. \quad (3.20)$$

Запишем эту формулу в другом виде, используя представление (2.30) для резольвенты $\mathcal{R}_\lambda$,

$$\mathcal{R}_\lambda H = \mathcal{R}_\lambda \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\lambda h_\lambda \\ R_\lambda(\lambda h_\lambda) + h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\lambda(-p_1 h'_1 - \lambda p_2 h_1 - p_2 h_2) \\ R_\lambda(-\lambda p_1 h'_1 - \lambda^2 p_2 h_1 - \lambda p_2 h_2) + h_1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

С учетом того, что $\Xi = (\varphi, \psi)^T$, из (3.21) найдем

$$(\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 = R_\lambda(-p_1 \varphi' - \lambda p_2 \varphi - p_2 \psi). \quad (3.22)$$

А с учетом того, что $F = \left(0, \frac{1}{p_2} f\right)^T$, из (3.21) найдем

$$(\mathcal{R}_\lambda F)_1 = R_\lambda(-f(\cdot, \tau)). \quad (3.23)$$

Тогда из (3.20), (3.22) и (3.23) получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) e^{\lambda t} R_\lambda(p_1 \varphi' + \lambda p_2 \varphi + p_2 \psi) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau d\lambda. \quad (3.24)$$

Имеет место равенство

$$\begin{aligned} R_\lambda \varphi' &= \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi'(\xi) d\xi = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) d\tilde{\varphi}(\xi) = G(x, 1, \lambda) \tilde{\varphi}(1) - G(x, 0, \lambda) \tilde{\varphi}(0) - \\ &\quad - \int_0^1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = - \int_0^1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = -R_\lambda^1 \varphi, \end{aligned} \quad (3.25)$$

так как по определению функции $\tilde{\varphi}(x)$ (см. (2.62)) имеем $\tilde{\varphi}(1) = 0$, а $G(x, 0, \lambda) = 0$ на основании леммы 2.4. Учитывая (3.25) в (3.24), получим в результате формулу (3.1) в формулировке доказываемой теоремы, причем ряд справа в этой формуле сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$. Тем самым, теорема 3.1 полностью доказана. $\square$

Для получения конечных формул для классического решения задачи (1.1)–(1.3) в случае отсутствия потенциала ($q = 0$) потребуются теорема, аналогичная теореме 3.1.

Теорема 3.2. Если $u_0(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) с нулевым потенциалом, то это решение единственно и находится по формуле

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \left(-p_1 e^{\lambda t} R_{0\lambda}^1 \tilde{\varphi} + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_{0\lambda} \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_{0\lambda} \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_{0\lambda} f(\cdot, \tau) d\tau \right) d\lambda, \quad (3.26)$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится по той же самой схеме, что и доказательство теоремы 3.1, но только при получении формулы (3.7) вместо теоремы 2.2 о разложении первой компоненты нужно использовать теорему 2.3. $\square$

Обозначим

$$u_{011}(x, t) := \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \left(-p_1 e^{\lambda t} R_{0\lambda}^1 \tilde{\varphi} \right) d\lambda, \quad u_{012}(x, t) := \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} p_2 e^{\lambda t} \lambda R_{0\lambda} \varphi d\lambda, \quad (3.27)$$

$$u_{01}(x, t) := u_{011}(x, t) + u_{012}(x, t); \quad (3.28)$$

$$u_{02}(x, t) := \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} p_2 e^{\lambda t} R_{0\lambda} \psi d\lambda; \quad (3.29)$$

$$u_{03}(x, t) := \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_{0\lambda} f(\cdot, \tau) d\tau d\lambda. \quad (3.30)$$

Если ряды (3.27), (3.29), (3.30) сходятся, то классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае $q = 0$ в соответствии с формулами (3.26)–(3.30) можно представить в виде

$$u_0(x, t) = u_{01}(x, t) + u_{02}(x, t) + u_{03}(x, t). \quad (3.31)$$

4. КОНЕЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ НУЛЕВОГО ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим далее НГЗ (1.1)–(1.3) в случае $q = 0$.

Для краткости будем использовать следующие обозначения:

$$\alpha = \alpha(x, t) := \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \beta = \beta(x, t) := \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (4.1)$$

Кроме того, положим

$$\Psi(x) = \int_x^1 \psi(\xi) d\xi, \quad F(x, t) = \int_x^1 f(\xi, t) d\xi, \quad (4.2)$$

а $[x]$ и $\{x\}$ пусть обозначают, соответственно, целую и дробную части числа $x \in \mathbb{R}$.

4.1. Формула для классического решения в случае $\psi = 0$ и $f = 0$. В данном подразделе речь идет о получении конечной формулы для классического решения в случае отсутствия потенциала для

$$u_{01}(x, t) = u_{011}(x, t) + u_{012}(x, t), \quad (4.3)$$

в соответствии с формулой (3.28), где $u_{011}(x, t)$ и $u_{012}(x, t)$ определены формулами (3.27), при условии, что эти ряды сходятся.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть выполняется условие (1.6), $q = 0$, $\psi = 0$, $f = 0$. Если $u_{01}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3), то $\varphi(x) \in W_1^2[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, решение $u_{01}(x, t)$ единственно и для него справедлива формула

$$u_{01}(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma[\alpha(x, t)]} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma[\beta(x, t)]} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right), \quad (4.4)$$

где

$$\check{\varphi}(x) = \begin{cases} \omega_2 \varphi\left(\frac{x}{a}\right) - (\omega_1 + \omega_2) \varphi(1), & \xi \in [0, a]; \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\omega_1 \varphi\left(\frac{1-x}{1-a}\right) - (\omega_1 + \omega_2) \varphi(1) \right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (4.5)$$

Доказательство. Так как по предположению теоремы $u_{01}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае $q = 0$, $\psi = 0$ и $f = 0$, то в силу теоремы 3.2 оно единственно и определяется формулой (4.3). Кроме того, выполняются условия (N), которые в случае $\psi = 0$ имеют вид: $\varphi(x) \in W_1^2[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$.

Осталось получить формулу (4.4).

Используя обозначения леммы 2.7, для $u_{011}(x, t)$ и $u_{012}(x, t)$ получим

$$u_{011}(x, t) = \sum_k \int_0^1 \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} \left(e^{\lambda t} \left(-p_1 G_{0\xi}(x, \xi, \lambda) \tilde{\varphi}(\xi) \right) \right) d\xi = \sum_k \int_0^1 e^{\lambda_{0k} t} \left(-p_1 r_{1k}(x, \xi) \tilde{\varphi}(\xi) \right) d\xi, \quad (4.6)$$

$$u_{012}(x, t) = \sum_k \int_0^1 \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} \left(e^{\lambda t} \left(\lambda p_2 G_0(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) \right) \right) d\xi = \sum_k \int_0^1 e^{\lambda_{0k} t} \left(\lambda_{0k} p_2 r_k(x, \xi) \varphi(\xi) \right) d\xi. \quad (4.7)$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе формулы (2.83).

На основании леммы 2.7 для $u_{011}(x, t)$ имеем представление

$$u_{011}(x, t) = \frac{p_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi} \right) \tilde{\varphi}(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{\omega_1 + \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} \left(\int_0^1 \omega_1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi - \int_0^1 \omega_2 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi \right) - \right. \\ \left. - e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \left(\int_0^1 \omega_1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi - \int_0^1 \omega_2 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi \right) \right). \quad (4.8)$$

Далее, применяя лемму 2.8 и используя формулы (2.6) для с.з., из (4.8) получим

$$u_{011}(x, t) = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{(2k\pi i + \sigma)\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \omega_1 \int_0^1 \varkappa^*(\xi) \tilde{\varphi}^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \right. \\ \left. - \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \omega_2 \int_0^1 \theta_*(\xi) \tilde{\varphi}_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) - e^{(2k\pi i + \sigma)\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \omega_1 \int_0^1 \varkappa^*(\xi) \tilde{\varphi}^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ \left. - \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \omega_2 \int_0^1 \theta_*(\xi) \tilde{\varphi}_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \Bigg) = \\ = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(e^{\sigma\alpha(x, t)} e^{2k\pi i \alpha(x, t)} \int_0^1 \left(\varkappa^*(\xi) \tilde{\varphi}^*(\xi) + \theta_*(\xi) \tilde{\varphi}_*(\xi) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ \left. - e^{\sigma\beta(x, t)} e^{2k\pi i \beta(x, t)} \int_0^1 \left(\varkappa^*(\xi) \tilde{\varphi}^*(\xi) + \theta_*(\xi) \tilde{\varphi}_*(\xi) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right). \quad (4.9)$$

Используя обозначение (2.81) и представление (2.82), выражение в круглых скобках в последних двух интегралах можно записать в виде

$$\varkappa^*(\xi) \tilde{\varphi}^*(\xi) + \theta_*(\xi) \tilde{\varphi}_*(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \\ = \begin{cases} \theta\left(\frac{\xi}{a}\right) \tilde{\varphi}\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \varkappa\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right) \tilde{\varphi}\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} = e^{-\sigma\xi} \begin{cases} \tilde{\varphi}\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} \tilde{\varphi}\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (4.10)$$

Тогда на основании (4.9) получим представление

$$u_{011}(x, t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(e^{\sigma\alpha(x, t)} e^{2k\pi i \alpha(x, t)} \int_0^1 \hat{\varphi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - e^{\sigma\beta(x, t)} e^{2k\pi i \beta(x, t)} \int_0^1 \hat{\varphi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right). \quad (4.11)$$

Очевидно, функция $\tilde{\varphi}(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.9. На основании этой леммы справедливо равенство $\sum_k e^{2k\pi i x} \int_0^1 \hat{\varphi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi = \hat{\varphi}(x)$, причем ряд слева сходится равномерно на $[0, 1]$. В результате из (4.11) будем иметь

$$u_{011}(x, t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma\alpha(x, t)} \hat{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma\beta(x, t)} \hat{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right). \quad (4.12)$$

Из представления (4.7) для функции $u_{012}(x, t)$ и леммы 2.7 получим

$$u_{012}(x, t) = \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \varphi(\xi) d\xi = \\ = \frac{\omega_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} \left(\int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \varphi(\xi) d\xi - \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \varphi(\xi) d\xi \right) - \right.$$

$$- e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \left(\int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \varphi(\xi) d\xi - \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \varphi(\xi) d\xi \right) \Bigg) \Bigg). \quad (4.13)$$

Далее, применяя лемму 2.8 и используя формулы (2.6) для с.з., из (4.13) найдем

$$\begin{aligned} u_{012}(x, t) &= \frac{\omega_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{(2k\pi i + \sigma) \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \varkappa^*(\xi) \varphi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \theta_*(\xi) \varphi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) - e^{(2k\pi i + \sigma) \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \varkappa^*(\xi) \varphi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \theta_*(\xi) \varphi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \right) = \\ &= -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} e^{2k\pi i \alpha(x, t)} \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) \varphi^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) \varphi_*(\xi) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - e^{\sigma \beta(x, t)} e^{2k\pi i \beta(x, t)} \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) \varphi^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) \varphi_*(\xi) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right). \quad (4.14) \end{aligned}$$

Используя обозначение (2.87), а также представление (2.88), выражение в круглых скобках в последних двух интегралах можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) \varphi^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) \varphi_*(\xi) &= \check{\varphi}(\xi) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\omega_2} \theta\left(\frac{\xi}{a}\right) \varphi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{1}{\omega_1} \varkappa\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right) \varphi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} = \frac{1}{\omega_2} e^{-\xi} \begin{cases} \varphi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \varphi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (4.15) \end{aligned}$$

Тогда на основании (4.14) получим представление

$$u_{011}(x, t) = -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} e^{2k\pi i \alpha(x, t)} \int_0^1 \check{\varphi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - e^{\sigma \beta(x, t)} e^{2k\pi i \beta(x, t)} \int_0^1 \check{\varphi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right). \quad (4.16)$$

Ясно, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.10. Тогда на основании этой леммы справедливо равенство $\sum_k e^{2k\pi i x} \int_0^1 \check{\varphi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi = \check{\varphi}(x)$, причем ряд слева сходится равномерно на $[0, 1]$. В результате из (4.16) получим

$$u_{012}(x, t) = -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma \beta(x, t)} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right). \quad (4.17)$$

Так как ряды $u_{011}(x, t)$ и $u_{012}(x, t)$ равномерно сходятся, то и ряд $u_{01}(x, t)$ (см. (4.3)) также равномерно сходится. С учетом (4.12) и (4.17) будем иметь

$$\begin{aligned} u_{01}(x, t) &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} \hat{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma \beta(x, t)} \hat{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right) - \\ &\quad - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma \beta(x, t)} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right) = \\ &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} \left((\omega_1 + \omega_2) \hat{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - \omega_1 \omega_2 \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{\sigma \beta(x, t)} \left((\omega_1 + \omega_2) \hat{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) - \omega_1 \omega_2 \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right) \right). \quad (4.18) \end{aligned}$$

Обозначим

$$e^{-\sigma x} \check{\varphi}(x) := (\omega_1 + \omega_2) \hat{\check{\varphi}}(x) - \omega_1 \omega_2 \check{\varphi}(x). \quad (4.19)$$

Тогда (4.18) запишется в виде

$$\begin{aligned} u_{01}(x, t) &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} e^{-\sigma \{\alpha(x, t)\}} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma \beta(x, t)} e^{-\sigma \{\beta(x, t)\}} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right) = \\ &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma [\alpha(x, t)]} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma [\beta(x, t)]} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right), \end{aligned}$$

а это и есть формула (4.4).

Покажем, что функция $\check{\varphi}(x)$ имеет вид (4.5).

Из формул (4.19), (4.10), (4.15) с учетом определения функций $\varkappa(x)$ и $\theta(x)$ (см. (2.77)) следует — при $x \in [0, a]$:

$$\check{\varphi}(x) = (\omega_1 + \omega_2) \tilde{\varphi}\left(\frac{x}{a}\right) - \omega_1 \varphi\left(\frac{x}{a}\right) = (\omega_1 + \omega_2) \left(\varphi\left(\frac{x}{a}\right) - \varphi(1) \right) - \omega_1 \varphi\left(\frac{x}{a}\right) = \omega_2 \varphi\left(\frac{x}{a}\right) - (\omega_1 + \omega_2) \varphi(1) \quad (4.20)$$

— при $x \in [a, 1]$:

$$\begin{aligned} \check{\varphi}(\xi) &= \frac{\omega_1}{\omega_2} \left((\omega_1 + \omega_2) \tilde{\varphi}\left(\frac{1-x}{1-a}\right) - \omega_2 \varphi\left(\frac{1-x}{1-a}\right) \right) = \\ &= \frac{\omega_1}{\omega_2} \left((\omega_1 + \omega_2) \left(\varphi\left(\frac{1-x}{1-a}\right) - \varphi(1) \right) - \omega_2 \varphi\left(\frac{1-x}{1-a}\right) \right) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\omega_1 \varphi\left(\frac{1-x}{1-a}\right) - (\omega_1 + \omega_2) \varphi(1) \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Из формул (4.20) и (4.21) получаем представление (4.5). Тем самым, теорема 4.1 полностью доказана. $\square$

4.2. Формула для классического решения в случае $\varphi = 0$ и $f = 0$. В данном подразделе речь идет о получении конечной формулы для классического решения в случае отсутствия потенциала для слагаемого

$$u_{02}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} p_2 e^{\lambda t} R_{0\lambda} \psi d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} p_2 e^{\lambda t} \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) \psi(\xi) d\xi d\lambda \quad (4.22)$$

в соответствии с формулой (3.29).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть выполняется условие (1.6) и $q = 0$, $\varphi = 0$, $f = 0$. Если $u_{02}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3), то $\psi(x) \in W_1^1[0, 1]$, $\psi(0) = 0$, решение $u_{02}(x, t)$ единственно и для него справедлива формула

$$u_{02}(x, t) = -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma [\alpha(x, t)]} \hat{\Psi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma [\beta(x, t)]} \hat{\Psi}(\{\beta(x, t)\}) \right), \quad (4.23)$$

где

$$\hat{\Psi}(x) = \begin{cases} \Psi\left(\frac{x}{a}\right), & \xi \in [0, a]; \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} \Psi\left(\frac{1-x}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (4.24)$$

Доказательство. Так как по предположению теоремы $u_{02}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае $q = 0$, $\varphi = 0$ и $f = 0$, то в силу теоремы 3.2 оно единственно и определяется формулой (4.22). Кроме того, выполняются условия (N), которые в случае $\varphi = 0$ имеют вид: $\psi(x) \in W_1^1[0, 1]$, $\psi(0) = 0$.

Таким образом, осталось получить формулу (4.23).

Используя обозначения леммы 2.7, из (4.22) получим

$$u_{02}(x, t) = \sum_k \int_0^1 \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} \left(e^{\lambda t} p_2 G_0(x, \xi, \lambda) \right) \psi(\xi) d\xi = \sum_k \int_0^1 e^{\lambda_{0k} t} p_2 r_k(x, \xi) \psi(\xi) d\xi. \quad (4.25)$$

На основании леммы 2.7 и формулы (4.25) для $u_{02}(x, t)$ имеем представление

$$u_{02}(x, t) = \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \frac{1}{\lambda_{0k}} \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \psi(\xi) d\xi. \quad (4.26)$$

Проведем в интеграле один раз интегрирование по частям и воспользуемся тем, что $\Psi(1) = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \psi(\xi) d\xi &= - \left(\left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \Psi(\xi) \right) \Big|_0^1 + \\ &+ \lambda_{0k} \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \Psi(\xi) d\xi = \lambda_{0k} \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \Psi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Подставляя (4.27) в (4.26), получим

$$\begin{aligned} u_{02}(x, t) &= \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \Psi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{\omega_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} \left(\omega_1 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \Psi(\xi) d\xi - \omega_2 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \Psi(\xi) d\xi \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \left(\omega_1 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \Psi(\xi) d\xi - \omega_2 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \Psi(\xi) d\xi \right) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Далее, применяя лемму 2.8, используя формулы (2.6) для с.з. и обозначение (2.81), из (4.28) получим

$$\begin{aligned} u_{02}(x, t) &= \frac{\omega_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{(2k\pi i + \sigma) \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\omega_1 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \varkappa^*(\xi) \Psi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. - \omega_2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \theta_*(\xi) \Psi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) - e^{(2k\pi i + \sigma) \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\omega_1 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \varkappa^*(\xi) \Psi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \omega_2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \theta_*(\xi) \Psi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \Bigg) = \\ &= -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} e^{2k\pi i \alpha(x, t)} \int_0^1 \left(\varkappa^*(\xi) \Psi^*(\xi) + \theta_*(\xi) \Psi_*(\xi) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - e^{\sigma \beta(x, t)} e^{2k\pi i \beta(x, t)} \int_0^1 \left(\varkappa^*(\xi) \Psi^*(\xi) + \theta_*(\xi) \Psi_*(\xi) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) = \\ &= -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} e^{2k\pi i \alpha(x, t)} \int_0^1 \hat{\Psi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - e^{\sigma \beta(x, t)} e^{2k\pi i \beta(x, t)} \int_0^1 \hat{\Psi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

где в соответствии с ранее введенным обозначением (2.81) и представлением (2.81)

$$\hat{\Psi}(\xi) = \varkappa^*(\xi) \Psi^*(\xi) + \theta_*(\xi) \Psi_*(\xi) = e^{-\sigma \xi} \begin{cases} \Psi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} \Psi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} =: e^{-\sigma \xi} \hat{\hat{\Psi}}(\xi). \quad (4.30)$$

Теперь воспользуемся леммой 2.9. Условия этой леммы выполняются, так как по построению $\Psi(x) \in W_1^2[0, 1] \subset W_1^1[0, 1]$ и $\Psi(1) = 0$. На основании этой леммы $\sum_k e^{2k\pi i x} \int_0^1 \check{\Psi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi = \hat{\Psi}(x)$, причем ряд слева сходится равномерно на $[0, 1]$, поэтому из (4.29) с учетом обозначения (4.30) получим

$$\begin{aligned} u_{02}(x, t) &= -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} e^{-\sigma \{\alpha(x, t)\}} \hat{\Psi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma \beta(x, t)} e^{-\sigma \{\beta(x, t)\}} \hat{\Psi}(\{\beta(x, t)\}) \right) = \\ &= -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma [\alpha(x, t)]} \hat{\Psi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma [\beta(x, t)]} \hat{\Psi}(\{\beta(x, t)\}) \right), \end{aligned}$$

а это и есть формула (4.23), где функция $\hat{\Psi}(x)$ определяется формулой (4.24). Тем самым, теорема 4.2 полностью доказана. $\square$

4.3. Формула для классического решения в случае $\varphi = 0$ и $\psi = 0$. В данном подразделе речь идет о получении конечной формулы для классического решения в случае отсутствия потенциала для слагаемого

$$u_{03}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_{0\lambda} f(\cdot, \tau) d\tau \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) d\lambda \quad (4.31)$$

в соответствии с формулой (3.30) для $u_{03}(x, t)$ и формулой (3.31).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. Пусть выполняется условие (1.6) и $q = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Если $u_{03}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3), то решение $u_{03}(x, t)$ единственно и для него справедлива формула

$$u_{03}(x, t) = -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \left(e^{\sigma [\alpha(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\alpha(x, t-\tau)\}, \tau) - e^{\sigma [\beta(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\beta(x, t-\tau)\}, \tau) \right) d\tau, \quad (4.32)$$

где

$$\hat{F}(x, t) = \begin{cases} F\left(\frac{x}{a}, t\right), & \xi \in [0, a); \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} F\left(\frac{1-x}{1-a}, t\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (4.33)$$

Доказательство. Так как по предположению теоремы $u_{03}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае $q = 0$, $\varphi = 0$ и $\psi = 0$, то в силу теоремы 3.2 оно единственно и определяется формулой (4.31). Таким образом, осталось получить формулу (4.32). Используя обозначения леммы 2.7, из (4.31) получим

$$u_{03}(x, t) = \sum_k \int_0^t \int_0^1 \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} \left(e^{\lambda(t-\tau)} G_0(x, \xi, \lambda) \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \sum_k \int_0^t \int_0^1 e^{\lambda_{0k}(t-\tau)} r_k(x, \xi) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

На основании леммы 2.7 для $u_{02}(x, t)$ имеем представление

$$u_{03}(x, t) = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \int_0^t \frac{1}{\lambda_{0k}} \left(e^{\lambda_{0k}(t-\tau+\omega_2 x)} - e^{\lambda_{0k}(t-\tau+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (4.34)$$

Проведем во внутреннем интеграле один раз интегрирование по частям и воспользуемся тем, что $F(1, t) = 0$:

$$\int_0^1 \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) f(\xi, \tau) d\xi = - \left(\left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) F(\xi, t) \right) \Big|_0^1 +$$

$$+ \lambda_{0k} \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi} \right) F(\xi, \tau) d\xi = \lambda_{0k} \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi} \right) F(\xi, \tau) d\xi. \quad (4.35)$$

Подставляя (4.35) в (4.34), получим

$$\begin{aligned} u_{03}(x, t) &= \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \int_0^t \left(e^{\lambda_{0k}(t-\tau+\omega_2 x)} - e^{\lambda_{0k}(t-\tau+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi} \right) F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \int_0^t \left(e^{\lambda_{0k}(t-\tau+\omega_2 x)} \left(\omega_1 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} F(\xi, \tau) d\xi - \omega_2 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi} F(\xi, \tau) d\xi \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{\lambda_{0k}(t-\tau+\omega_1 x)} \left(\omega_1 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} F(\xi, \tau) d\xi - \omega_2 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi} F(\xi, \tau) d\xi \right) \right) d\tau. \quad (4.36) \end{aligned}$$

Далее, применяя лемму 2.8, используя формулы (2.6) для с.з. и обозначения (2.81), из (4.36) найдем

$$\begin{aligned} u_{03}(x, t) &= \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \int_0^t \left(e^{(2k\pi i + \sigma) \frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\omega_1 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \varkappa^*(\xi) F^*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \omega_2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \theta_*(\xi) F_*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) - e^{(2k\pi i + \sigma) \frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\omega_1 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \varkappa^*(\xi) F^*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \omega_2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \theta_*(\xi) F_*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \right) d\tau = \\ &= -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \int_0^t \left(e^{\sigma \alpha(x, t-\tau)} e^{2k\pi i \alpha(x, t-\tau)} \int_0^1 \left(\varkappa^*(\xi) F^*(\xi, \tau) + \theta_*(\xi) F_*(\xi, \tau) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - e^{\sigma \beta(x, t-\tau)} e^{2k\pi i \beta(x, t-\tau)} \int_0^1 \left(\varkappa^*(\xi) F^*(\xi, \tau) + \theta_*(\xi) F_*(\xi, \tau) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) d\tau = \\ &= -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \int_0^t \left(e^{\sigma \alpha(x, t-\tau)} e^{2k\pi i \alpha(x, t-\tau)} \int_0^1 \hat{F}(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - e^{\sigma \beta(x, t-\tau)} e^{2k\pi i \beta(x, t-\tau)} \int_0^1 \hat{F}(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) d\tau, \quad (4.37) \end{aligned}$$

где в соответствии с ранее введенным обозначением (2.81) и представлением (2.81)

$$\hat{F}(\xi, \tau) = \varkappa^*(\xi) F^*(\xi, \tau) + \theta_*(\xi) F_*(\xi, \tau) = e^{-\sigma \xi} \begin{cases} F\left(\frac{\xi}{a}, \tau\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\frac{1-\xi}{1-a}, \tau \right), & \xi \in [a, 1), \end{cases} =: e^{-\sigma \xi} \hat{\hat{F}}(\xi, \tau). \quad (4.38)$$

Теперь воспользуемся леммой 2.9. Ясно, что условия этой леммы выполняются, так как по построению $F(\cdot, t) \in W_1^2[0, 1] \subset W_1^1[0, 1]$ и $F(1, t) = 0$ при каждом фиксированном $t \geq 0$. Так как на основании этой леммы справедливо равенство $\sum_k e^{2k\pi i x} \int_0^1 \hat{F}(\xi, t) e^{-2k\pi i \xi} d\xi = \hat{F}(x, t)$, причем ряд слева сходится по x равномерно на $[0, 1]$ при любом фиксированном $t \geq 0$, то из (4.37) с учетом обозначения (4.38) получим

$$\begin{aligned}
u_{03}(x, t) &= -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \left(e^{\sigma\alpha(x, t-\tau)} e^{-\sigma\{\alpha(x, t-\tau)\}} \hat{F}(\{\alpha(x, t-\tau)\}, \tau) - \right. \\
&\quad \left. - e^{\sigma\beta(x, t-\tau)} e^{-\sigma\{\beta(x, t-\tau)\}} \hat{F}(\{\beta(x, t-\tau)\}, \tau) \right) d\tau = \\
&= -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \left(e^{\sigma[\alpha(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\alpha(x, t-\tau)\}, \tau) - e^{\sigma[\beta(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\beta(x, t-\tau)\}, \tau) \right) d\tau,
\end{aligned}$$

а это и есть формула (4.32), где функция $\hat{F}(x, t)$ определяется формулой (4.33).

Тем самым теорема 4.3 полностью доказана. $\square$

4.4. Формула для классического решения в общем случае. На основании теорем 3.2, 4.1–4.3, формул (3.31), (4.4), (4.22) и (4.32) получим утверждение следующей теоремы о конечной формуле для классического решения задачи (1.1)–(1.3) при отсутствии потенциала.

Теорема 4.4. Пусть выполняется условие (1.6) и $q = 0$. Если $u_0(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3), то $\varphi(x) \in W_1^2[0, 1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, $\psi(0) = 0$, решение $u_0(x, t)$ единственно и для него справедлива формула

$$\begin{aligned}
u_{01}(x, t) &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma[\alpha(x, t)]} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma[\beta(x, t)]} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) - \right. \\
&\quad \left. - \left(e^{\sigma[\alpha(x, t)]} \hat{\Psi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma[\beta(x, t)]} \hat{\Psi}(\{\beta(x, t)\}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^t \left(e^{\sigma[\alpha(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\alpha(x, t-\tau)\}, \tau) - e^{\sigma[\beta(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\beta(x, t-\tau)\}, \tau) \right) d\tau \right) \right),
\end{aligned}$$

где функции $\check{\varphi}(x)$, $\hat{\Psi}(x)$ и $\hat{F}(x, t)$ определяются, соответственно, формулами (4.5), (4.24) и (4.33), а функции $\alpha(x, t)$, $\beta(x, t)$, $\Psi(x)$ и $F(x, t)$ определяются формулами (4.1) и (4.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
2. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. РАН. — 2014. — 458, № 2. — С. 138–140. — DOI: [10.7868/S0869565214260041](https://doi.org/10.7868/S0869565214260041).
3. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2015. — 55, № 2. — С. 229–241. — DOI: [10.7868/S0044466915020052](https://doi.org/10.7868/S0044466915020052).
4. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Ростов. ун-в., 1994.
5. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. — 1951. — 77, № 1. — С. 11–14.
6. Корнев В. В. О применении расходящихся рядов в смешанных задачах, не имеющих классического решения // В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конференции: Воронеж. весенняя матем. школа “Понтрягинские чтения-XXXIII”». — Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 132–137.
7. Корнев В. В., Хромов А. П. Классическое решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2019. — 172. — С. 119–133. — DOI: [10.36535/0233-6723-2019-172-119-133](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-172-119-133).
8. Корнев В. В., Хромов А. П. Использование резольвентного подхода и расходящихся рядов при решении смешанных задач // В сб.: «Мат. Мех. Вып. 23». — Саратов: Сарат. ун-в., 2021. — С. 18–24.
9. Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А. Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2020. — 20, № 4. — С. 444–456. — DOI: [10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456).
10. Ломов И. С. Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Выч. мат. и киберн. — 2021. — № 4. — С. 37–42.

11. Ломов И. С. Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2021. — 172. — С. 66–79. — DOI: [10.36535/0233-6723-2021-199-66-79](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-199-66-79).
12. Ломов И. С. Эффективное применение метода Фурье к решению смешанной задачи для телеграфного уравнения // В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы». — Саратов: Саратов. ун-т., 2022. — С. 178–180.
13. Ломов И. С. Новый метод построения обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Выч. мат. и киберн. — 2022. — № 3. — С. 33–40.
14. Ломов И. С. Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы // Дифф. уравн. — 2022. — 58, № 11. — С. 1471–1483. — DOI: [10.31857/S0374064122110048](https://doi.org/10.31857/S0374064122110048).
15. Ломовцев Ф. Е. Метод корректировки пробных решений волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости для минимальной гладкости правой части // Журн. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2017. — 3. — С. 38–52.
16. Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. Н. Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения в полуполосе плоскости при нестационарных нехарактеристических вторых производных // Весн. МДУ ім. А. А. Куляшова. Сер. В. Природозн. навукі: мат., фіз., біял. — 2021. — № 2. — С. 28–55.
17. Ломовцев Ф. Е. Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости // Весн. ГрДУ ім. Янкі Купалы. Сер. 2. Мат. Фіз. Інф, выліч. техн. і кір. — 2021. — 11, № 1. — С. 68–82.
18. Ломовцев Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой // Журн. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2021. — 1. — С. 18–38. — DOI: [10.33581/2520-6508-2021-1-18-38](https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-18-38).
19. Ломовцев Ф. Е. Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке // Пробл. физ., мат. и техн. — 2022. — № 1. — С. 62–73. — DOI: [10.54341/20778708_2022_1_50_62](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_62).
20. Моисеев Е. И., Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной факторизованной второй косой производной в граничном условии // Докл. РАН. — 2014. — 459, № 5. — С. 544–549. — DOI: [10.7868/S0869565214350072](https://doi.org/10.7868/S0869565214350072).
21. Муравей Л. А., Петров В. М., Романенков А. М. О задаче гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны // Вестн. Мордов. ун-та. — 2018. — 28, № 4. — С. 472–485. — DOI: [10.15507/0236-2910.028.201804.472-485](https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201804.472-485).
22. Муравей Л. А., Романенков А. М. Численные методы гашения колебаний движущегося бумажного полотна // В сб.: «Дифф. уравн., мат. модел. и выч. алгоритмы: сб. матер. межд. конф. Белгород, 25–29 октября 2021 г.». — Белгород: БелГУ, 2021. — С. 194–196.
23. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
24. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
25. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964.
26. Рыжлов В. С. Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной // В сб.: «Соврем. пробл. теории функций и их прилож.: материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы». — Саратов: Саратов. ун-т., 2022. — С. 252–255.
27. Рыжлов В. С. О решении начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной // В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конференции: Воронеж. весенняя матем. школа “Понтрягинские чтения-XXXIII”». — Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 237–240.
28. Рыжлов В. С. Разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения с распадающимися краевыми условиями при отсутствии полноты собственных функций // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2022. — 204. — С. 124–134. — DOI: [10.36535/0233-6723-2022-204-124-134](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-124-134).
29. Рыжлов В. С. Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2023. — 23, № 2. — С. 183–194. — DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194).
30. Рыжлов В. С. О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2023. — 226. — С. 89–107. — DOI: [10.36535/0233-6723-2023-226-89-107](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-226-89-107).

31. Рыхлов В. С. Обобщенная начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — 69, № 2. — С. 342–363. — DOI: [10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363).
32. Рыхлов В. С. Классическое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2024. — 70, № 3. — С. 451–486. — DOI: [10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486).
33. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложение произвольных функций в ряды. — Петроград: тип. М. П. Фроловой, 1917.
34. Толстов Г. П. О второй смешанной производной // Мат. сб. — 1949. — 24, № 1. — С. 27–51.
35. Хромов А. П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2016. — 56, № 2. — С. 239–251. — DOI: [10.7868/S0044466916020149](https://doi.org/10.7868/S0044466916020149).
36. Хромов А. П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2019. — 19, № 3. — С. 280–288. — DOI: [10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288).
37. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конференции: Воронеж. весенняя матем. школа “Понтрягинские чтения-XXX”». — Воронеж: ВГУ, 2019. — С. 291–300.
38. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения // В сб.: «Мат. Мех. Вып. 21.». — Саратов: Сарат. ун-т., 2019. — С. 62–67.
39. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // В сб.: «Соврем. пробл. теории функций и их прилож.: материалы 20-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Научная книга, 2020. — С. 433–439.
40. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача // В сб.: «Мат. Мех. Вып. 23.». — Саратов: Сарат. ун-т., 2021. — С. 63–67.
41. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения // В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междун. Саратовской зимней школы». — Саратов: Сарат. ун-т., 2022. — С. 319–324.
42. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2022. — 22, № 3. — С. 322–331. — DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331).
43. Хромов А. П., Корнев В. В. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2019. — 59, № 2. — С. 286–300. — DOI: [10.1134/S0044466919020091](https://doi.org/10.1134/S0044466919020091).
44. Хромов А. П., Корнев В. В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Тр. Инст. мат. и мех. УрО РАН. — 2021. — 27, № 4. — С. 215–238. — DOI: [10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238](https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238).
45. Хромов А. П., Корнев В. В. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача, не допускающая разделения переменных // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2021. — 60. — С. 325–328.
46. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969.
47. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1983. — 9. — С. 190–229.
48. Archibald F. R., Emslie A. G. The vibration of a string having a uniform motion along its length // J. Appl. Mech. — 1958. — 25, № 1. — С. 347–348. — DOI: [10.1115/1.4011824](https://doi.org/10.1115/1.4011824).
49. Mahalingam S. Transverse vibrations of power transmission chains // British J. Appl. Phys. — 1957. — 8, № 4. — С. 145–148. — DOI: [10.1088/0508-3443/8/4/303](https://doi.org/10.1088/0508-3443/8/4/303).
50. Rykhlov V. S. Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order // Res. Math. — 1999. — 36. — С. 342–353. — DOI: [10.1007/BF03322121](https://doi.org/10.1007/BF03322121).
51. Sack R. A. Transverse oscillations in traveling strings // British J. Appl. Phys. — 1954. — 5, № 6. — С. 224–226. — DOI: [10.1088/0508-3443/5/6/307](https://doi.org/10.1088/0508-3443/5/6/307).

М. С. Пастухов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

E-mail: ritson67@outlook.com

В. С. Рыхлов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

E-mail: RykhlovVS@yandex.ru, ПИИЦ SPIN-код: 5650-4265, ПИИЦ AuthorID: 2936, ResearcherID: D-8118-2013, Scopus: 35103360100, ORCID: 0000-0003-1556-7707

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2-323-359
EDN: BRBAYC

UDC 517.958:517.956.32
Research article

Solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with a mixed derivative in the equation in the case of Dirichlet–Neumann boundary conditions

M. S. Pastukhov and V. S. Rykhlov

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. We study the initial-boundary value problem for a second-order nonhomogeneous hyperbolic equation in a plane half-strip with constant coefficients, containing a mixed derivative, and with zero and nonzero potentials. This equation is the equation for the transverse oscillations of a moving finite string. We consider the case of Dirichlet–Neumann boundary conditions: the left end is fixed, and the right end is free. It is assumed that the roots of the characteristic equation are simple and lie on the real axis on opposite sides of the origin. We seek a classical solution (or a solution almost everywhere, sometimes called a “strong solution”) to this problem. A spectral problem associated with the original initial-boundary value problem, generated by an ordinary differential operator-valued function (pencil) of second order, is investigated. The asymptotic behavior of the eigenvalues and resolvent is determined, the operator-valued function is linearized in the corresponding space of vector functions, and a theorem on the expansion of the first component of the vector function in root functions of the spectral problem is proved. A theorem on the uniqueness of the classical solution is formulated and proved, and a formula for the classical solution is derived in the form of a series of contour integrals. Then, using these formulas in the case of zero potential, theorems on finite formulas for the classical solution in special cases are proved, and based on these, a finite formula for the classical solution in the general case is obtained.

Keywords: nonhomogeneous hyperbolic equation, initial-boundary value problem, mixed derivative in the equation, classical solution, uniqueness of the classical solution, finite formula for the classical solution.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors’ contribution. The formulation of the problem considered in the article and the main ideas for its solution belong to *Rykhlov V. S.* Practical implementation, preparation of material and design of the article were carried out by *Pastukhov M. S.*

For citation: M. S. Pastukhov, V. S. Rykhlov, “Solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with a mixed derivative in the equation in the case of Dirichlet–Neumann boundary conditions,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 2, 323–359. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2-323-359 EDN: BRBAYC

REFERENCES

1. N. K. Bari, *Trigonometricheskie Ryady* [Trigonometric Series], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).



2. M. Burlutskaya Sh and A. P. Khromov, “Rezol’ventnyy podkhod v metode Fur’e” [Resolvent approach in the Fourier method], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **458**, No. 2, 138–140 (in Russian), DOI: [10.7868/S0869565214260041](https://doi.org/10.7868/S0869565214260041).
3. M. Sh. Burlutskaya and A. P. Khromov, “Rezol’ventnyy podkhod dlya volnovogo uravneniya” [Resolvent approach for the wave equation], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2015, **55**, No. 2, 229–241 (in Russian), DOI: [10.7868/S0044466915020052](https://doi.org/10.7868/S0044466915020052).
4. A. I. Vagabov, *Vvedenie v Spektral’nyu Teoriyu Differentsial’nykh Operatorov* [Introduction to the Spectral Theory of Differential Operators], Rostov. Univ., Rostov-on-Don, 1994 (in Russian).
5. M. V. Keldysh, “O sobstvennykh znacheniyakh i sobstvennykh funktsiyakh nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh uravneniy” [On the eigenvalues and eigenfunctions of some classes of non-self-adjoint equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1951, **77**, No. 1, 11–14 (in Russian).
6. V. V. Kornev, “O primeneni raskhodyashchikhsya ryadov v smeshannykh zadachakh, ne imeyushchikh klassicheskogo resheniya” [On the application of divergent series in mixed problems that have no classical solution], In: *Sovremennye Metody Teorii Kraevykh Zadach: Mater. Mezhd. Konf. Voronezh. Vesennyyaya Matem. Shkola “Pontryaginskije chteniya-XXXIII”* [Modern Methods of Boundary-Value Problem Theory: Proc. Int. Conf. Voronezh Spring Math. School “Pontryagin Readings-XXXIII”], VGU, Voronezh, 2022, pp. 132–137 (in Russian).
7. V. V. Kornev and A. P. Khromov, “Klassicheskoe reshenie smeshannoy zadachi dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s zakreplennymi kontsami” [Classical solution of the mixed problem for the homogeneous wave equation with fixed ends], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2019, **172**, 119–133 (in Russian), DOI: [10.36535/0233-6723-2019-172-119-133](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-172-119-133).
8. V. V. Kornev and A. P. Khromov, “Ispol’zovanie rezol’ventnogo podkhoda i raskhodyashchikhsya ryadov pri reshenii smeshannykh zadach” [Using the resolvent approach and divergent series in solving mixed problems], In: *Mat. Mekh. Vyp. 23* [Math. Mech. Iss. 23], Sarat. Univ., Saratov, 2021, pp. 18–24 (in Russian).
9. V. P. Kurdyumov, A. P. Khromov, and V. A. Khalova, “Smeshannaya zadacha dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s nenulevoy nachal’noy skorost’yu s summiruemyim potentsialom” [Mixed problem for a homogeneous wave equation with nonzero initial velocity and summable potential], *Izv. Sarat. Univ. Nov. Ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2020, **20**, No. 4, 444–456 (in Russian), DOI: [10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456).
10. I. S. Lomov, “Effektivnoe primeneniye metoda Fur’e dlya postroeniya resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya” [An effective application of the Fourier method for constructing a solution to a mixed problem for the telegraph equation], *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 15. Vych. Mat. i Kibern.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 15. Comput. Math. Cybern.], 2021, No. 4, 37–42 (in Russian).
11. I. S. Lomov, “Obobshchennaya formula D’Alemberta dlya telegrafnogo uravneniya” [Generalized d’Alembert formula for the telegraph equation], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2021, **172**, 66–79 (in Russian), DOI: [10.36535/0233-6723-2021-199-66-79](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-199-66-79).
12. I. S. Lomov, “Effektivnoe primeneniye metoda Fur’e k resheniyu smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya” [Efficient application of the Fourier method to solving a mixed problem for the telegraph equation], In: *Sovrem. Probl. Teorii Funktsiy i Ikh Prilozh.: Mater. 21-y Mezhd. Saratov. Zimney Shkoly* [Contemp. Probl. of Function Theory and Their Appl.: Proc. of the 21st Int. Saratov Winter School], Sarat. Univ., Saratov, 2022, pp. 178–180 (in Russian).
13. I. S. Lomov, “Novyy metod postroeniya obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya” [Novyy metod postroeniya obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya], *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 15. Vych. Mat. i Kibern.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 15. Comput. Math. Cybern.], 2022, No. 3, 33–40 (in Russian).
14. I. S. Lomov, “Postroenie obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya: sekventsial’nyy i aksiomaticheskyy podkhody” [Construction of a generalized solution to a mixed problem for the telegraph equation: sequential and axiomatic approaches], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **58**, No. 11, 1471–1483 (in Russian), DOI: [10.31857/S0374064122110048](https://doi.org/10.31857/S0374064122110048).
15. F. E. Lomovtsev, “Metod korrekcirovki probnykh resheniy volnovogo uravneniya v krivolineynoy pervoy chetverti ploskosti dlya minimal’noy gladkosti pravoy chasti” [Method of correction of test solutions of the wave equation in the curvilinear first quadrant of the plane for minimal smoothness of the right-hand side], *Zhurn. Belorus. Gos. Univ. Mat. Inf.* [J. Belarus. State Univ. Math. Inf.], 2017, **3**, 38–52 (in Russian).
16. F. E. Lomovtsev and V. N. Lysenko, “Smeshannaya zadacha dlya obshchego odnomernogo volnovogo uravneniya v polupolose ploskosti pri nestatsionarnykh nekharakteristicheskikh vtorykh proizvodnykh” [Mixed problem for the general one-dimensional wave equation in a half-strip of the plane with nonstationary noncharacteristic second derivatives], *Vesn. MDU Im. A. A. Kulyashova. Ser. B. Pryrodazn. Navuki: Mat., Fiz., Biyal.* [Bull. Mogilev State Univ. Ser. V. Nat. Sci. Math. Phys. Biol.], 2021, No. 2, 28–55 (in Russian).

17. F. E. Lomovtsev, “Global’naya teorema korrektnosti po Adamaru pervoy smeshannoy zadachi dlya volnovogo uravneniya v polupolose ploskosti” [Global Hadamard well-posedness theorem for the first mixed problem for the wave equation in a half-strip of the plane], *Vesn. GrDU Im. Yanki Kupaly. Ser. 2. Mat. Fiz. Inf, Vylich. Tekhn. i Kir.* [Bull. Grodno State Univ. Ser. 2. Math. Phys. Inf. Comp. Tech.], 2021, **11**, No. 1, 68–82 (in Russian).
18. F. E. Lomovtsev, “Pervaya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na polupryamoy” [The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line], *Zhurn. Belorus. Gos. Univ. Mat. Inf.* [J. Belorus. State Univ. Math. Inf.], 2021, **1**, 18–38 (in Russian), DOI: [10.33581/2520-6508-2021-1-18-38](https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-18-38).
19. F. E. Lomovtsev, “Global’naya teorema korrektnosti pervoy smeshannoy zadachi dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na otrezke” [Global well-posedness theorem for the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on an interval], *Probl. Fiz., Mat. i Tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2022, No. 1, 62–73 (in Russian), DOI: [10.54341/20778708_2022_1_50_62](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_62).
20. E. Moiseev I, F. E. Lomovtsev, and E. N. Novikov, “Neodnorodnoe faktorizovannoe giperbolicheskoe uravnenie vtorogo poryadka v chetverti ploskosti pri polunestatsionarnoy faktorizovannoy vtoroy kosoy proizvodnoy v granichnom uslovii” [Nonhomogeneous factorized second-order hyperbolic equation in a quarter plane with a semi-nonstationary factorized second oblique derivative in the boundary condition], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **459**, No. 5, 544–549 (in Russian), DOI: [10.7868/S0869565214350072](https://doi.org/10.7868/S0869565214350072).
21. L. A. Muravey, V. M. Petrov, and A. M. Romanenkov, “O zadache gasheniya poperechnykh kolebaniy prodol’no dvizhushchegosya struny” [On the problem of damping transverse vibrations of a longitudinally moving string], *Vestn. Mordov. Univ.* [Bull. Mordov. Univ.], 2018, **28**, No. 4, 472–485 (in Russian), DOI: [10.15507/0236-2910.028.201804.472-485](https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201804.472-485).
22. L. A. Muravey and A. M. Romanenkov, “Chislennyye metody gasheniya kolebaniy dvizhushchegosya bumazhnogo polotna” [Numerical methods for damping oscillations of a moving paper web], In: *Diff. Uravn., Mat. Model. i Vych. Algoritmy: Sb. Mater. Mezhd. Konf. Belgorod, 25–29 okt. 2021 g.* [Differ. Equ. Math. Model. Comp. Algorithms: Proc. Int. Conf. Belgorod, Oct. 25–29, 2021], BelGU, Belgorod, 2021, pp. 194–196 (in Russian).
23. M. A. Naimark, *Lineynye Differentsial’nye Operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
24. I. P. Natanson, *Teoriya Funktsiy Veshchestvennoy Peremennoy* [Theory of Functions of a Real Variable], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
25. M. L. Rasulov, *Metod Konturnogo Integrala i ego Primenenie k Issledovaniyu Zadach dlya Differentsial’nykh Uravneniy* [The Contour Integral Method and Its Application to the Study of Problems for Differential Equations], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
26. V. S. Rykhlov, “Reshenie nachal’no-granichnoy zadachi dlya uravneniya giperbolicheskogo tipa so smeshannoy proizvodnoy” [Solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative], In: *Sovrem. Probl. Teorii Funktsiy i Ikh Prilozh.: Mater. 21-y Mezhd. Saratov. Zimney Shkoly* [Contemp. Probl. of Function Theory and Their Appl.: Proc. of the 21st Int. Saratov Winter School], Sarat. univ., Saratov, 2022, pp. 252–255 (in Russian).
27. V. S. Rykhlov, “O reshenii nachal’no-granichnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [On the solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative], In: *Sovremennyye Metody Teorii Kraevykh Zadach: Mater. Mezhd. Konf. Voronezh. Vesennyaya Matem. Shkola “Pontryaginskije chteniya-XXXIII”* [Modern Methods of Boundary-Value Problem Theory: Proc. Int. Conf. Voronezh Spring Math. School “Pontryagin Readings-XXXIII”], VGU, Voronezh, 2022, pp. 237–240 (in Russian).
28. V. S. Rykhlov, “Razreshimost’ smeshannoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s raspadayushchimisya kraevymi usloviyami pri otsutstvii polnoty sobstvennykh funktsiy” [Solvability of a mixed problem for a hyperbolic equation with decaying boundary conditions in the absence of completeness of eigenfunctions], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee Pril. Temat. Obz.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2022, **204**, 124–134 (in Russian), DOI: [10.36535/0233-6723-2022-204-124-134](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-124-134).
29. V. S. Rykhlov, “Edinstvennost’ resheniya nachal’no-granichnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy i formula dlya resheniya” [Uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative and a formula for the solution], *Izv. Sarat. Univ. Nov. Ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2023, **23**, No. 2, 183–194 (in Russian), DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194).

30. V. S. Rykhlov, “O reshenii nachal’no-granichnoy zadachi v polupolose dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [On the solution of the initial-boundary value problem in a half-strip for a hyperbolic equation with a mixed derivative], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2023, **226**, 89–107 (in Russian), DOI: [10.36535/0233-6723-2023-226-89-107](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-226-89-107).
31. V. S. Rykhlov, “Obobshchennaya nachal’no-granichnaya zadacha dlya volnovogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [Generalized initial-boundary problem for the wave equation with mixed derivative], *Sovrem. mat. Fundam. naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 2, 342–363 (in Russian), DOI: [10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363).
32. V. S. Rykhlov, “Klassicheskoe reshenie nachal’no-granichnoy zadachi dlya vol novogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [Classical solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with mixed derivative], *Sovrem. mat. Fundam. naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2024, **70**, No. 3, 451–486 (in Russian), DOI: [10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486).
33. Ya. D. Tamarkin, *O Nekotorykh Obshchikh Zadachakh Teorii Obyknovennykh Differentsial’nykh Uravneniy i Razlozhenie Proizvol’nykh Funktsiy v Ryady* [On Some General Problems of the Theory of Ordinary Differential Equations and Expansion of Arbitrary Functions into Series], Typ. M. P. Frolova, Petrograd, 1917 (in Russian).
34. G. P. Tolstov, “O vtoroy smeshannoy proizvodnoy” [About the second mixed derivative], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1949, **24**, No. 1, 27–51 (in Russian).
35. A. P. Khromov, “Povedenie formal’nogo resheniya smeshannoy zadachi dlya volnovogo uravneniya” [Behavior of the formal solution of the mixed problem for the wave equation], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2016, **56**, No. 2, 239–251 (in Russian), DOI: [10.7868/S0044466916020149](https://doi.org/10.7868/S0044466916020149).
36. A. P. Khromov, “O klassicheskom reshenii smeshannoy zadachi dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s zakreplennymi kontsami i nulevoy nachal’noy skorost’yu” [On the classical solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation with fixed endpoints and zero initial velocity], *Izv. Sarat. Univ. Nov. Ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2019, **19**, No. 3, 280–288 (in Russian), DOI: [10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288).
37. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i funktsional’nye uravneniya, svyazannye s analogami geometricheskoy progressii” [Divergent series and functional equations related to analogues of geometric progression], In: *Sovremennye Metody Teorii Kraevykh Zadach: Mater. Mezhd. Konf. Voronezh. Vesennyyaya Matem. Shkola “Pontryaginskije chteniya-XXX”* [Modern Methods of Boundary-Value Problem Theory: Proc. Int. Conf. Voronezh Spring Math. School “Pontryagin Readings-XXX”], VGU, Voronezh, 2019, pp. 291–300 (in Russian).
38. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and a mixed problem for the wave equation], In: *Mat. Mekh. Vyp. 21* [Math. Mech. Iss. 21], Sarat. Univ., Saratov, 2019, pp. 62–67 (in Russian).
39. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i metod Fur’e dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and the Fourier method for the wave equation], In: *Sovrem. Probl. Teorii Funktsiy i Ikh Prilozh.: Mater. 20-y Mezhd. Saratov. Zimney Shkoly* [Contemp. Probl. of Function Theory and Their Appl.: Proc. of the 20th Int. Saratov Winter School], Nauchnaya kniga, Saratov, 2020, pp. 433–439 (in Russian).
40. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha” [Divergent series and the generalized mixed problem], In: *Mat. Mekh. Vyp. 23* [Math. Mech. Iss. 23], Sarat. Univ., Saratov, 2021, pp. 63–67 (in Russian).
41. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and a generalized mixed problem for the wave equation], In: *Sovrem. Probl. Teorii Funktsiy i Ikh Prilozh.: Mater. 21-y Mezhd. Saratov. Zimney Shkoly* [Contemp. Probl. of Function Theory and Their Appl.: Proc. of the 21st Int. Saratov Winter School], Sarat. Univ., Saratov, 2022, pp. 319–324 (in Russian).
42. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya prosteyshogo vida” [Divergent series and a generalized mixed problem for the wave equation of the simplest form], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2022, **22**, No. 3, 322–331 (in Russian), DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331).
43. A. P. Khromov and V. V. Kornev, “Klassicheskoe i obobshchennoe resheniya smeshannoy zadachi dlya neodnorodnogo volnovogo uravneniya” [Classical and generalized solutions of a mixed problem for an inhomogeneous wave equation], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2019, **59**, No. 2, 286–300 (in Russian), DOI: [10.1134/S0044466919020091](https://doi.org/10.1134/S0044466919020091).
44. A. P. Khromov and V. V. Kornev, “Raskhodyashchiesya ryady v metode Fur’e dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series in the Fourier method for the wave equation], *Tr. Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN* [Proc. Inst.

- Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2021, **27**, No. 4, 215–238 (in Russian), DOI: [10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238](https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238).
45. A. P. Khromov and V. V. Kornev, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha, ne dopuskayushchaya razdeleniya peremennykh” [Divergent series and a generalized mixed problem that does not admit separation of variables], *Tr. Mat. Tsentra Im. N. I. Lobachevskogo* [Proc. Lobachevskii Math. Center], 2021, **60**, 325–328 (in Russian).
 46. B. V. Shabat, *Vvedenie v Kompleksnyy Analiz* [Introduction to Complex Analysis], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
 47. A. A. Shkalikov, “Kraevye zadachi dlya obyknovennykh differentsial’nykh uravneniy s parametrom v granichnykh usloviyakh” [Boundary-value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions], *Tr. Sem. Im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1983, **9**, 190–229 (in Russian).
 48. F. R. Archibald and A. G. Emslie, “The vibration of a string having a uniform motion along its length,” *J. Appl. Mech.*, 1958, **25**, No. 1, 347–348, DOI: [10.1115/1.4011824](https://doi.org/10.1115/1.4011824).
 49. S. Mahalingam, “Transverse vibrations of power transmission chains,” *British J. Appl. Phys.*, 1957, **8**, No. 4, 145–148, DOI: [10.1088/0508-3443/8/4/303](https://doi.org/10.1088/0508-3443/8/4/303).
 50. V. S. Rykhlov, “Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order,” *Res. Math.*, 1999, **36**, 342–353, DOI: [10.1007/BF03322121](https://doi.org/10.1007/BF03322121).
 51. R. A. Sack, “Transverse oscillations in traveling strings,” *British J. Appl. Phys.*, 1954, **5**, No. 6, 224–226, DOI: [10.1088/0508-3443/5/6/307](https://doi.org/10.1088/0508-3443/5/6/307).

M. S. Pastukhov

Saratov State University, Saratov, Russia

E-mail: ritson67@outlook.com

V. S. Rykhlov

Saratov State University, Saratov, Russia

E-mail: RykhlovVS@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 5650-4265, eLIBRARY AuthorID: [2936](https://elibrary.ru/2936),
ResearcherID: [D-8118-2013](https://orcid.org/0000-0003-1556-7707), Scopus: [35103360100](https://orcid.org/0000-0003-1556-7707), ORCID: [0000-0003-1556-7707](https://orcid.org/0000-0003-1556-7707)