

О НАИЛУЧШЕМ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА $\mathcal{B}_2$

М. Р. ЛАНГАРШОВ

Московский гуманитарно-технологический университет "— Московский архитектурно-строительный институт, Москва, Россия

Аннотация. В гильбертовом пространстве Бергмана изучается задача об оценке наилучшего приближения аналитической функции в единичном круге алгебраическими многочленами через усреднение ее модуля гладкости. Найдено общее условие на весовую функцию, при котором удастся получить точную оценку. Это условие аналогично условию Шабозова—Юсупова, но дополнительно учитывает специфику пространства Бергмана. Полученные верхние оценки применены к вычислению в пространстве Бергмана поперечников некоторых классов функций по Колмогорову, Гельфанду и Бернштейну, а также линейных и проекционных поперечников.

Ключевые слова: пространство Бергмана, приближение аналитической функции, усреднение модуля гладкости, условие Шабозова—Юсупова, поперечник функции.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор искренне признателен рецензенту за внимательное чтение рукописи, ценные замечания и советы по улучшению текста. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Лангаршов М. Р. О наилучшем среднеквадратическом приближении аналитических функций в пространстве Бергмана $\mathcal{B}_2$ // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 309–322. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-309-322](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-309-322) EDN: [BNHVFV](https://www.edn.ru/BNHVFV)

1. ВВЕДЕНИЕ

В экстремальных задачах теории приближения функций, как в действительной, так и в комплексной области, одной из наиболее важных задач является задача отыскания точной константы в неравенствах типа Джексона—Стечкина.

Известно [1, 19, 36], что под неравенством типа Джексона—Стечкина понимают неравенство, в котором величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости самой функции или ее некоторой производной. Первые точные константы в неравенстве Джексона в пространстве $C[0, 2\pi]$ были выявлены Н. П. Корнейчуком [10], а в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ Н. И. Черных [23]. Первые точные результаты по наилучшим полиномиальным приближениям аналитических в круге функций в пространстве Харди принадлежат К. И. Бабенко [2] и Л. В. Тайкову [20]. Именно работа К. И. Бабенко [2] явилась отправным пунктом для получения точных значений колмогоровских поперечников в работах В. М. Тихомирова [21] и Л. В. Тайкова [20]. В пространстве Бергмана первоначальные работы, в которых были затронуты вопросы нахождения точных значений поперечников классов аналитических функций, принадлежат С. Б. Вакарчуку [4, 5]. Дальнейшим развитием задач вычисления точных констант в неравенствах типа Джексона—Стечкина, как в

действительной, так и в комплексных областях, занимались и другие математики (см., например, работы [3, 6–9, 11–17, 24–34] и литературу, приведенную в них).

В работе [16] А. А. Лигун получил точную оценку величины наилучшего приближения периодической функции тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 через усреднение ее модуля гладкости и тем самым инициировал новое направление исследований по точным константам в теории приближений. Это направление получило значительное развитие. В работе [33] М. Ш. Шабозов и Г. А. Юсупов нашли общее условие на весовую функцию, при котором справедливы результаты А. А. Лигуна. Позднее в [14] нами была рассмотрена аналогичная в работах [16, 33] задача в весовом пространстве Бергмана $\mathcal{B}_{2,\gamma}$. В недавно опубликованной работе [30] были обобщены результаты, полученные в [33] на случай аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Бергмана $\mathcal{B}_2$.

В настоящей работе мы продолжим исследование в данном направлении и обобщим некоторые ранее, а также недавно полученные результаты для классов аналитических функций, принадлежащих пространству Бергмана.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть далее $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в $\mathbb{C}$, $A(U)$ — множество функций, аналитических в круге U . Известно [35], что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (2.1)$$

принадлежит пространству Бергмана $\mathcal{B}_2$, если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{\mathcal{B}_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty, \quad (2.2)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Через $\mathcal{P}_n$ обозначим подпространство комплексных алгебраических полиномов степени $\leq n$:

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Величину $E_n(f)_2 = \inf\{\|f - p_n\|_2 : p_n \in \mathcal{P}_n\}$ называют *наилучшим полиномиальным сред-неквадратическим приближением* функции $f \in \mathcal{B}_2$ подпространством $\mathcal{P}_n$. Для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_2$ имеет место соотношение [18]

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \quad (2.3)$$

где $T_{n-1}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$ — частная сумма n -го порядка ряда Маклорена (2.1).

Записывая норму (2.2) в более удобном нам виде

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2},$$

СИМВОЛОМ

$$\Delta_h^m f(\rho e^{it}) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f(\rho e^{i(t+kh)})$$

обозначим разность m -го порядка функции $f(\rho e^{it})$ по аргументу t с шагом h .

Величину

$$\omega_m(f, t)_2 = \sup \left\{ \|\Delta_h^m f(\rho e^{it})\|_2 : |h| \leq t \right\} = \sup \left\{ \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\Delta_h^m f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2} : |h| \leq t \right\} \quad (2.4)$$

назовем *интегральным модулем непрерывности m -го порядка функции $f \in \mathcal{B}_2$* .

Для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ обычную производную r -го порядка функции $f \in A(U)$ обозначим через $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$ ($f^{(0)}(z) \equiv f(z)$):

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)(k-2) \cdots (k-r+1) c_k(f) z^{k-r}. \quad (2.5)$$

Умножим обе части равенства (2.5) на z^s , $s \in \mathbb{Z}_+$, $s \leq r$ и получим

$$z^s f^{(r)} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r+s}, \quad (2.6)$$

где $\alpha_{k,r} = k(k-1)(k-2) \cdots (k-r+1) = \frac{k!}{(k-r)!}$, $k \geq r$.

Всюду далее через $\mathcal{B}_2^{s,(r)}(s, r \in \mathbb{Z}_+)$ обозначим множество функций $f \in A(U)$, принадлежащих пространству $\mathcal{B}_2$, у которых производные $z^s f^{(r)} \neq 0$ также принадлежат пространству $\mathcal{B}_2$, т. е. $\mathcal{B}_2^{s,(r)} = \{f(z) \in \mathcal{B}_2 : \|z^s f^{(r)}\|_2 < \infty\}$.

Под весовой функцией на отрезке $[0, u]$ будем понимать вещественную неотрицательную измеримую и суммируемую на этом же отрезке функцию $\varphi(t)$, не эквивалентную нулю, такую, для которой $\int_0^u \varphi(t) dt > 0$.

Введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику:

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi, u) = \sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)} \\ z^s f^{(r)} \neq 0}} \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}}, \quad (2.7)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $s \leq r$, $0 < q \leq 2$, $0 < t \leq u$, $0 < u \leq \pi/(n-r+s)$, φ — весовая функция на отрезке $[0, u]$.

3. ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА—СТЕЧКИНА

Теорема 3.1. Если $m, n \in \mathbb{N}$, $s, r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < q \leq 2$, $0 < u \leq \pi/(n-r+s)$ и φ — весовая на отрезке $[0, u]$ функция, то справедливы неравенства

$$\{G_{m,n,r,s,q}(\varphi; u)\}^{-1} \leq \mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi, u) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) \right\}^{-1}, \quad (3.1)$$

где

$$G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) = \left[\alpha_{k,r}^q \left(\frac{k+1}{k-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(k-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right]^{1/q}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Применяя формулу (2.4) к функции (2.6), будем иметь:

$$\omega_m^2(z^s f^{(r)}, t)_2 = 2^m \sup_{|u| \leq t} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\alpha_{k,r}^2}{k-r+s+1} |c_k(f)|^2 (1 - \cos(k-r+s)u)^m. \quad (3.3)$$

Для установления двойного неравенства (3.1) воспользуемся следующим так называемым «упрощенным» вариантом неравенства Минковского [37, с. 104]:

$$\left(\int_0^u \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{q/2} dt \right)^{1/q} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^u |f_k(t)|^q dt \right)^{2/q} \right)^{1/2},$$

справедливого при $0 < q \leq 2$ и любом $u \in \mathbb{R}_+$. С учетом соотношения (3.3) и равенства (2.3) запишем

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_{2, \varphi(t)} dt \right)^{1/q} \geq \\ & \geq \left\{ \int_0^u 2^{mq/2} \left[\sum_{k=r}^{\infty} \frac{\alpha_{k,r}^2}{k-r+s+1} |c_k(f)|^2 (1 - \cos(k-r+s)t)^m \right]^{q/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/q} \geq \\ & \geq 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{k,r}^q}{(\sqrt{k-r+s+1})^q} |c_k(f)|^q \int_0^u (1 - \cos(k-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right]^{2/q} \right\}^{1/2} = \\ & = 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \left[\left(\alpha_{k,r}^q \left(\frac{k+1}{k-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(k-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right) \right]^{2/q} \right\}^{1/2} = \\ & = 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} [(G_{k,m,r,s,q}(\varphi; u))^q]^{2/q} \right\}^{1/2} \geq 2^{m/2} \inf_{n \leq k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2} = \\ & = 2^{m/2} \inf_{n \leq k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) E_{n-1}(f)_2. \end{aligned}$$

Таким образом, получили следующее неравенство:

$$\frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_{2, \varphi(t)} dt \right)^{1/q}} \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) \right\}^{-1},$$

откуда следует оценка сверху для величины (2.7):

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi, u) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) \right\}^{-1}. \quad (3.4)$$

С целью получения оценки снизу указанной величины введем в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in \mathcal{B}_2^{s,(r)}$. Для этой функции непосредственными вычислениями получим

$$E_{n-1}(f_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \omega_m(z^s f_0^{(r)}, t)_2 = 2^{m/2} \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+s+1}} (1 - \cos(n-r+s)t)^{m/2}.$$

Используя два последних равенства, получим оценку снизу для величины $\mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi, u)$:

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi, u) \geq \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f_0)_2}{\left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f_0^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\alpha_{n,r}^q \left(\frac{n+1}{n-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{1/q}} = \{G_{m,n,r,s,q}(\varphi; u)\}^{-1}. \quad (3.5)$$

Сравнивая оценку сверху (3.4) и оценку снизу (3.5), получим утверждение теоремы 3.1. $\square$

Из теоремы 3.1, в частности, при $s = r$ следует результат автора [12, 13], а при $s = 0$ вытекает результат М. Ш. Шабозова и Х. М. Хуромонова из работы [30].

Далее определим, какими дифференциальными свойствами должна обладать весовая функция $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq u$, чтобы имело место равенство

$$\inf \{G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) : n \leq k < \infty\} = \{G_{m,n,r,s,q}(\varphi; u)\}. \quad (3.6)$$

Теорема 3.2. Пусть весовая функция $\varphi(t) > 0$ дифференцируема на отрезке $[0, u]$, и пусть для всех $m, k, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq n > r \geq s$, $0 \leq t \leq u$, $0 < u \leq \pi/(n-r+s)$, $0 < q \leq 2$ выполняется неравенство

$$\left[\frac{q}{2} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{k-r+2s+1}{(k-r+1)(k-r+s+1)} \right) + q \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \dots + \frac{1}{k-r+2} \right) \right] \varphi(t) - \\ - \frac{1}{k-r+s} [\varphi(t) + t\varphi'(t)] \geq 0.$$

Тогда имеет место соотношение (3.6), и следовательно

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}} = \\ = \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left\{ \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right\}^{-1/q}. \quad (3.7)$$

Доказательство. Используя величину (3.2), введем в рассмотрение функцию натурального аргумента

$$y(k) = \alpha_{k,r}^q \left(\frac{k+1}{k-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(k-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt$$

и покажем, что эта функция при $k \geq n > r \geq s$ является монотонно возрастающей. С этой целью исследуем поведение соответствующей непрерывной функции

$$\varphi(x) = \alpha_{x,r}^q \left(\frac{x+1}{x-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(x-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt, \quad (3.8)$$

где $x \geq n > r \geq s$. Из равенства (3.8) имеем

$$\left[\alpha_{x,r}^q \left(\frac{x+1}{x-r+s+1} \right)^{q/2} \right]' = (\alpha_{x,r}^q)' \left(\frac{x+1}{x-r+s+1} \right)^{q/2} + \alpha_{x,r}^q \left[\left(\frac{x+1}{x-r+s+1} \right)^{q/2} \right]' = \\ = \alpha_{x,r}^q \left(\frac{x+1}{x-r+s+1} \right)^{q/2} \left[\frac{q}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x-r+2s+1}{(x-r+s+1)(x-r+1)} \right) + \right. \\ \left. + q \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-r+2} \right) \right]; \\ \left[\int_0^u (1 - \cos(x-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right]'_x = \int_0^u \frac{d}{dx} (1 - \cos(x-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt.$$

Далее, пользуясь очевидным тождеством

$$\frac{d}{dx}(1 - \cos(x - r + s)t)^{mq/2} = \frac{t}{x - r + s} \cdot \frac{d}{dt}(1 - \cos(x - r + s)t)^{mq/2}$$

и применением метода интегрирования по частям, получим:

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^u (1 - \cos(x - r + s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right]'_x = \\ & = \frac{1}{x - r + s} \left[u \varphi(u) (1 - \cos(x - r + s)u)^{mq/2} - \int_0^u (1 - \cos(x - r + s)t)^{mq/2} (\varphi(t) + t \varphi'(t)) dt \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = \alpha_{x,r}^q & \left(\frac{x+1}{x-r+s+1} \right)^{q/2} \left\{ \frac{1}{x-r+s} u \varphi(u) (1 - \cos(x-r+s)u)^{mq/2} + \right. \\ & + \int_0^u (1 - \cos(x-r+s)t)^{mq/2} \left\{ \left[\frac{q}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x-r+2s+1}{(x-r+1)(x-r+s+1)} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + q \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-r+2} \right) \right] \varphi(t) - \frac{1}{x-r+s} [\varphi(t) + t \varphi'(t)] \right\} dt \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Соответственно, отсюда вытекает, что $\inf \{y(k) : k \geq n\} = y(n)$.

Таким образом, $\inf_{n \leq k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) = G_{m,n,r,s,q}(\varphi; u)$, откуда в силу двойного неравенства (3.1) получаем (3.7). Теорема 3.2 доказана. $\square$

Из равенства (3.7) при различных значениях параметров s и q , а также различном виде весовой функции $\varphi(t)$ вытекают некоторые ранее полученные результаты. Например, величины $\mathcal{K}_{m,n,r,2}(1, u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,2}(\sin(\pi t/u), u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,2/m}(\sin nt, u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,q}(\varphi, u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,0,2/m}(1, u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,0,q}(\varphi, u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,0,2}(\sin(\pi t/u), u)$ были рассмотрены в работах [11, 13, 15, 17, 24, 25, 27, 28].

Из доказанной теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 3.1. В условиях теоремы 3.2 при $\varphi(t) \equiv 1$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)} \\ z^s f^{(r)} \neq 0}} \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/q}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1}. \quad (3.9)$$

Следствие 3.2. В условиях теоремы 3.2 при $\varphi(t) = t$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)} \\ z^s f^{(r)} \neq 0}} \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u t \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/q}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \int_0^u t (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt.$$

4. ВЕРХНИЕ ГРАНИ КЛАССОВ $W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)$ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{B}_2$

Пусть $\Phi(u)$ — произвольная непрерывная возрастающая при $u \geq 0$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Символом $W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)$, $m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < q \leq 2$, $0 < u \leq \pi/(n-r+s)$ обозначим класс функций $f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)}$, для которых имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{u} \int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/q} \leq \Phi(u).$$

Требуется при любых $n \in \mathbb{N}$ и $r, s \in \mathbb{Z}_+$ найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi))_2 := \sup \{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)\}. \quad (4.1)$$

Теорема 4.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $0 < q \leq 2$ и $0 < u \leq \pi/(n - r + s)$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)) = \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u). \quad (4.2)$$

Доказательство. Из соотношения (3.9) для любого $f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)}$ имеем неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\left(\frac{1}{u} \int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/q}}{2^{m/2}\alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+s+1}} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{1/q}}. \quad (4.3)$$

Используя определение класса $W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)$, из формул (4.1) и (4.3) получим оценку сверху

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi))_2 &= \sup \{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u). \end{aligned} \quad (4.4)$$

С целью получения оценки снизу будем рассматривать функцию

$$g(z) = \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \sqrt{n-r+s+1} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u) z^n.$$

Докажем, что $g(z) \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)$. Так как

$$z^s g^{(r)}(z) = \frac{1}{2^{m/2}} \sqrt{n-r+s+1} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u) z^{n-r+s},$$

то простыми вычислениями из (2.4) получаем

$$\omega_m(z^s g^{(r)}, t) = (1 - \cos(n-r+s)t)^{m/2} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u). \quad (4.5)$$

Используя равенство (4.5) и определение класса $W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)$, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \int_0^u \omega_m^q(z^s g^{(r)}, t)_2 dt &= \\ &= \frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1} \Phi^q(u) = \Phi^q(u). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Равенство (4.6) означает, что $g(z) \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)$. Поэтому мы имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi))_2 := \sup \{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)\} \geq E_{n-1}(g)_2 =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \sqrt{n-r+s+1} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u) E_{n-1}(z^n)_2. \quad (4.7)$$

Так как $E_{n-1}(z^n)_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, то из (4.7) получим

$$\mathcal{E}_{n-1} \left(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi) \right)_2 \geq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u). \quad (4.8)$$

Сопоставляя неравенства (4.4) и (4.8), получаем требуемое равенство (4.2). Теорема 3.2 доказана. $\square$

5. ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ $W_{m,q}^{s,(r)}(u)$ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{B}_2$

Пусть S — единичный шар в пространстве $\mathcal{B}_2$, $\mathfrak{N}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $\mathcal{B}_2$, $\Lambda_n \subset \mathcal{B}_2$ — n -мерное подпространство, $\Lambda^n \subset \mathcal{B}_2$ — подпространство коразмерности n , $\mathcal{L}: \mathcal{B}_2 \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства $\mathcal{B}_2$ в Λ_n ; $\mathcal{L}^\perp: \mathcal{B}_2 \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования $\mathcal{B}_2$ на подпространство Λ_n .

Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) &= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{N} \} : \Lambda_{n+1} \subset \mathcal{B}_2 \}, \\ d_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - \varphi\|_{\mathcal{B}_2} : \varphi \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{N} \} : \Lambda_n \subset \mathcal{B}_2 \}, \\ \lambda_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\|_{\mathcal{B}_2} : f \in \mathfrak{N} \} : \mathcal{L}\mathcal{B}_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset \mathcal{B}_2 \}, \\ d^n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) &= \inf \{ \sup \{ \|f\|_{\mathcal{B}_2} : f \in \mathfrak{N} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset \mathcal{B}_2 \}, \\ \Pi_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) &= \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\|_{\mathcal{B}_2} : f \in \mathfrak{N} \right\} : \mathcal{L}^\perp \mathcal{B}_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset \mathcal{B}_2 \right\}, \end{aligned}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гильбертовским и проекционным n -поперечниками. Так как $\mathcal{B}_2$ является гильбертовым пространством, то между перечисленными n -поперечниками выполняются следующие соотношения [22, с. 239]:

$$b_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) \leq d^n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) \leq d_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) = \lambda_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) = \Pi_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2). \quad (5.1)$$

Через $W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \leq 2$, $0 < u \leq \pi/(n-r+s)$, обозначим класс функций $f \in \mathfrak{B}_2^{s,(r)}$, удовлетворяющих условию $\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \leq 1$.

Положим также

$$(1 - \cos(n-r+s)t)_*^m = \begin{cases} (1 - \cos(n-r+s)t)^m, & \text{если } (n-r+s)t < \pi, \\ 2^m, & \text{если } (n-r+s)t \geq \pi. \end{cases} \quad (5.2)$$

Теорема 5.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $0 < q \leq 2$, $0 < u \leq \pi/(n-r+s)$, φ — весовая на $[0, u]$ функция. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \sigma_n \left(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi), \mathcal{B}_2 \right) &= \mathcal{E}_{n-1} \left(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi) \right)_2 = \\ &= \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\sigma_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n -поперечников.

Доказательство. Из (3.7) для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)}$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}}{2^{m/2} \alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+s+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{1/q}}.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi)$, имеем

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}.$$

Из последнего неравенства получим оценку сверху для проекционного n -поперечника

$$\begin{aligned} \Pi_n \left(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi); \mathcal{B}_2 \right) &\leq \mathcal{E}_{n-1} \left(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi) \right)_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Для получения оценки снизу рассматриваемых n -поперечников введем в рассмотрение шар

$$S_{n+1} = \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_2 \leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q} \right\}$$

и покажем, что $S_{n+1} \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi)$. Для любого $p_n \in \mathcal{P}_n$ имеет место неравенство

$$\omega_m^2(z^s p_n^{(r)}, t)_2 \leq 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+s+1} (1 - \cos(n-r+s)t)_*^m \|p_n\|_2^2. \quad (5.5)$$

Возведем обе части неравенства (5.5) в степень $q/2$, результат умножим на $\varphi(t)$, и полученное неравенство проинтегрируем по переменной t от 0 до u , после чего согласно условию (5.2) получим

$$\begin{aligned} \int_0^u \omega_m^q(z^s p_n^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt &\leq 2^{mq/2} \alpha_{n,r}^q \left(\frac{n+1}{n-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)_*^{mq/2} \varphi(t) dt \|p_n\|_2^q = \\ &= 2^{mq/2} \alpha_{n,r}^q \left(\frac{n+1}{n-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \times \\ &\times \left(\frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q} \right)^q = 1. \end{aligned}$$

Это означает, что $S_{n+1} \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi)$. Используя определение бернштейновского поперечника, запишем оценку снизу всех n -поперечников

$$\begin{aligned} b_n \left(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi), \mathcal{B}_2 \right) &\geq b_n(S_{n+1}, \mathcal{B}_2) = \\ &= \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из сопоставления неравенств (5.4) и (5.6) с учетом соотношения (5.1) получим равенство (5.3). Теорема 5.1 доказана. $\square$

Из теоремы 5.1, в частности, при $s = r$, $q = 2$ и $\varphi(t) = \sin \frac{\pi}{h}t$ вытекает результат, полученный в работе [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Гостехиздат, 1947.
2. Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1958. — 22, № 5. — С. 631–640.
3. Бабенко А. Г. Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Мат. заметки. — 1996. — 60, № 3. — С. 333–355. — DOI: [10.4213/mzm1834](https://doi.org/10.4213/mzm1834).
4. Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Укр. мат. ж. — 1990. — 42, № 7. — С. 873–881.
5. Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Мат. заметки. — 1995. — 57, № 1. — С. 30–39.
6. Вакарчук С. Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Мат. заметки. — 2006. — 80, № 1. — С. 11–19. — DOI: [10.4213/mzm2774](https://doi.org/10.4213/mzm2774).
7. Вакарчук С. Б. О приближении классическими ортогональными полиномами с весом в пространствах $L_{2,\gamma}(a, b)$ и о поперечниках функциональных классов // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2019. — № 12. — С. 37–51. — DOI: [10.26907/0021-3446-2019-12-37-51](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-12-37-51).
8. Есмаганбетов М. Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. — 1999. — 65, № 6. — С. 816–820. — DOI: [10.4213/mzm1117](https://doi.org/10.4213/mzm1117).
9. Иванов В. И. О точности неравенства Джексона в пространствах L_p на полупрямой со степенным весом // Мат. заметки. — 2015. — 98, № 5. — С. 684–694. — DOI: [10.4213/mzm10894](https://doi.org/10.4213/mzm10894).
10. Корнейчук Н. П. Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. — 1962. — 145, № 3. — С. 514–516.
11. Лангаршоев М. Р. Значение поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана B_2 // Вестн. ХГУ. — 2000. — 1, № 3. — С. 63–69.
12. Лангаршоев М. Р. Наилучшее приближение аналитических функций в пространстве Бергмана // Дисс. к.ф.-м.н. — Душанбе, 2008.
13. Лангаршоев М. Р. О значении поперечников классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Межд. конф. «Соврем. пробл. мат. анализа и теории функций». — Душанбе, 2012. — С. 80–83.
14. Лангаршоев М. Р. Неравенства типа Джексона–Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана // Чебышевский сб. — 2021. — 22, № 2. — С. 135–144. — DOI: [10.22405/2226-8383-2021-22-2-135-144](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-135-144).
15. Лангаршоев М. Р. О наилучшем среднеквадратическом приближении аналитических функций в пространстве Бергмана // Межд. конф. «Соврем. пробл. теории функций и их прилож.». — Саратов, 2024. — С. 146–148.
16. Лигун А. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. — 1978. — 24, № 6. — С. 785–792.
17. Пиров Х. Х., Лангаршоев М. Р. Значение поперечников некоторых классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков, в пространстве Бергмана // Докл. АН. Респ. Тадж. — 2011. — 54, № 7. — С. 519–525.
18. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. — М.—Л.: Наука, 1964.
19. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1951. — 15. — С. 219–242.
20. Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. — 1967. — 1, № 2. — С. 155–162.
21. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Усп. мат. наук. — 1960. — 15, № 3. — С. 81–120.
22. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: МГУ, 1976.
23. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. — 1967. — 88. — С. 71–74.
24. Шабозов М. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 2. — С. 171–174.
25. Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р. Приближение некоторых классов аналитических функций в пространстве B_p // Вестн. ХГУ. — 1999. — 1, № 1. — С. 45–50.

26. Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавказ. мат. ж. — 2018. — 20, № 1. — С. 86–97. — DOI: [10.23671/VNC.2018.1.11400](https://doi.org/10.23671/VNC.2018.1.11400).
27. Шабозов М. Ш., Тухлиев Д. К. О среднеквадратическом приближении функций в пространстве Бергмана B_2 и значение поперечников некоторых классов функций // Уфимск. мат. ж. — 2024. — 16, № 2. — С. 67–76. — DOI: [10.13108/2024-16-2-66](https://doi.org/10.13108/2024-16-2-66).
28. Шабозов М. Ш., Тухлиев Д. К. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Чебышевский сб. — 2025. — 26, № 1. — С. 116–130. — DOI: [10.22405/2226-8383-2025-26-1-116-130](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2025-26-1-116-130).
29. Шабозов М. Ш., Хуромонов Х. М. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2020. — № 2. — С. 74–92. — DOI: [10.26907/0021-3446-2020-2-74-92](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-2-74-92).
30. Шабозов М. Ш., Хуромонов Х. М. О наилучшем полиномиальном приближении аналитических функций в пространстве Бергмана B_2 // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2025. — № 4. — С. 90–103. — DOI: [10.26907/0021-3446-2025-4-91-103](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2025-4-91-103).
31. Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана // Докл. РАН. — 2007. — 412, № 4. — С. 466–469.
32. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // Докл. РАН. — 2002. — 382, № 6. — С. 747–749.
33. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. — 2011. — 90, № 5. — С. 764–775. — DOI: [10.4213/mzm8821](https://doi.org/10.4213/mzm8821).
34. Шалаев В. В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. ж. — 1991. — 43, № 1. — С. 125–129.
35. Bergman S. The kernel function and conformal mapping. — Providence: Am. Math. Soc., 1950. — DOI: [10.1090/surv/005](https://doi.org/10.1090/surv/005).
36. Jackson D. On approximation by trigonometric sums and polynomials // Trans. Am. Math. Soc. — 1912. — 13. — С. 491–515. — DOI: [10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2).
37. Pinkus A. n-Widths in approximation theory. — Berlin: Springer, 1985. — DOI: [10.1007/978-3-642-69894-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-69894-1).

М. Р. Лангаршоев

Московский гуманитарно-технологический университет "— Московский архитектурно-строительный институт, Москва, Россия

E-mail: mukhtor77@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 6739-7777, РИНЦ AuthorID: [828107](https://elibrary.ru/authors/828107), Scopus: [55790260900](https://orcid.org/0000-0002-3278-4781), ORCID: [0000-0002-3278-4781](https://orcid.org/0000-0002-3278-4781)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-309-322](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-309-322)EDN: [BHHVFFV](https://www.edn.ru/BHHVFFV)

UDC 517.5

Research article

On the best mean-square approximation of analytic functions in the Bergman space $\mathcal{B}_2$

M. R. Langarshoev

*Moscow University of Humanities and Technology — Moscow Institute of Architecture and Construction,
Moscow, Russia*

Abstract. In a Bergman Hilbert space, we study the problem of estimating the best approximation of an analytic function in the unit disk by algebraic polynomials via averaging its modulus of smoothness. A general condition on the weight function is found that allows us to obtain an exact estimate. This condition is analogous to the Shabozov–Yusupov condition but additionally takes into account the specific features of the Bergman space. The resulting upper bounds are applied to calculating the diameters of certain classes of functions in the Kolmogorov, Gelfand, and Bernstein classes, as well as linear and projection diameters, in the Bergman space.

Keywords: Bergman space, approximation of an analytic function, averaging of the modulus of smoothness, Shabozov–Yusupov condition, diameter of a function.

Conflict-of-interest. The author declares no conflict of interest.

Acknowledgments and funding. The author sincerely thanks the reviewer for their careful reading of the manuscript, valuable comments, and suggestions for improving the text. The author declares no financial support.

For citation: M. R. Langarshoev, “On the best mean-square approximation of analytic functions in the Bergman space $\mathcal{B}_2$,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 309–322. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-309-322](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-309-322) EDN: [BHHVFFV](https://www.edn.ru/BHHVFFV)

REFERENCES

1. N. I. Akhiezer, *Lektsii po Teorii Approksimatsii* [Lectures on Approximation Theory], Gostekhizdat, Moscow, 1947 (in Russian).
2. K. I. Babenko, “O nailuchshikh priblizheniyakh odnogo klassa analiticheskikh funktsiy” [On the best approximations of one class of analytic functions], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1958, **22**, No. 5, 631–640 (in Russian).
3. A. G. Babenko, “Tochnoe neravenstvo Dzheksona–Stechkina v prostranstve L^2 funktsiy na mnogomernoy sfere” [The exact Jackson–Stechkin inequality in the space of L^2 functions on a multidimensional sphere], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1996, **60**, No. 3, 333–355 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm1834](https://doi.org/10.4213/mzm1834).
4. S. B. Vakarchuk, “O poperechnikakh nekotorykh klassov analiticheskikh v edinichnom krughe funktsiy” [On the diameters of some classes of functions analytic in the unit circle], *Ukr. Mat. Zh.* [Ukr. Math. J.], 1990, **42**, No. 7, 873–881 (in Russian).
5. S. B. Vakarchuk, “Nailuchshie lineynye metody priblizheniya i poperechniki klassov analiticheskikh v krughe funktsiy” [Best linear approximation methods and diameters of classes of functions analytic in a circle], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1995, **57**, No. 1, 30–39 (in Russian).
6. S. B. Vakarchuk, “Neravenstva tipa Dzheksona i poperechniki klassov funktsiy v L_2 ” [Jackson-type inequalities and widths of classes of functions in L_2], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2006, **80**, No. 1, 11–19 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm2774](https://doi.org/10.4213/mzm2774).



7. S. B. Vakarchuk, “O priblizhenii klassicheskimi ortogonal’nymi polinomami s vesom v prostranstvakh $L_{2,\gamma}(a, b)$ i o poperechnikakh funktsional’nykh klassov” [On approximation by classical orthogonal polynomials with weight in the spaces $L_{2,\gamma}(a, b)$ and on the diameters of function classes], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2019, No. 12, 37–51 (in Russian), DOI: [10.26907/0021-3446-2019-12-37-51](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-12-37-51).
8. M. G. Esmaganbetov, “Poperechniki klassov iz $L_2[0, 2\pi]$ i minimizatsiya tochnykh konstant v neravenstvakh tipa Dzheksona” [Diameters of classes from $L_2[0, 2\pi]$ and minimization of exact constants in Jackson-type inequalities], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1999, **65**, No. 6, 816–820 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm1117](https://doi.org/10.4213/mzm1117).
9. V. I. Ivanov, “O tochnosti neravenstva Dzheksona v prostranstvakh L_p na polupryamoy so stepennym vesom” [On the exactness of Jackson’s inequality in L_p spaces on the half-line with power weight], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2015, **98**, No. 5, 684–694 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm10894](https://doi.org/10.4213/mzm10894).
10. N. P. Korneychuk, “Tochnaya konstanta v teoreme D. Dzheksona o nailuchshem ravnomernom priblizhenii nepreryvnykh periodicheskikh funktsiy” [The exact constant in D. Jackson’s theorem on the best uniform approximation of continuous periodic functions], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1962, **145**, No. 3, 514–516 (in Russian).
11. M. R. Langarshoev, “Znachenie poperechnikov nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana B_2 ” [The value of the diameters of some classes of analytic functions in the Bergman space B_2], *Vestn. KhoGU* [Bull. Khorog Univ.], 2000, **1**, No. 3, 63–69 (in Russian).
12. M. R. Langarshoev “Nailuchshee priblizhenie analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana” [Best approximation of analytic functions in Bergman space], *PhD Thesis*, Dushanbe, 2008.
13. M. R. Langarshoev, “O znachenie poperechnikov klassov analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana” [On the significance of the diameters of classes of analytic functions in Bergman space], *Mezhd. Konf. Sovrem. Probl. Mat. Analiza i Teorii Funktsiy* [Int. Conf. Contemp. Probl. of Math. Anal. and Theory of Functions], Dushanbe, 2012, pp. 80–83 (in Russian).
14. M. R. Langarshoev, “Neravenstva tipa Dzheksona–Stechkina i poperechniki klassov funktsiy v vesovom prostranstve Bergmana” [Jackson–Stechkin type inequalities and diameters of function classes in the weighted Bergman space], *Chebyshevskiy sb.* [Chebyshev Collect.], 2021, **22**, No. 2, 135–144 (in Russian), DOI: [10.22405/2226-8383-2021-22-2-135-144](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-135-144).
15. M. R. Langarshoev, “O nailuchshem srednekvadratcheskim priblizheniem analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana” [On the best mean square approximation of analytic functions in Bergman space], *Mezhd. Konf. Sovrem. Probl. Teorii Funktsiy i ikh Prilozh.* [Int. Conf. Contemp. Problems of Function Theory and Their Appl.], Saratov, 2024, pp. 146–148 (in Russian).
16. A. A. Ligun, “Nekotorye neravenstva mezhd u nailuchshimi priblizheniyami i modulyami nepreryvnosti v prostranstve L_2 ” [Some inequalities between best approximations and moduli of continuity in the space L_2], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1978, **24**, No. 6, 785–792 (in Russian).
17. Kh. Kh. Pirov and M. R. Langarshoev, “Znachenie poperechnikov nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy, opredelyaemykh modulyami nepreryvnosti vysshikh poryadkov, v prostranstve Bergmana” [The value of the diameters of some classes of analytic functions defined by moduli of continuity of higher orders in the Bergman space], *Dokl. AN. Resp. Tadzh.* [Rep. Acad. Sci. Tajikistan], 2011, **54**, No. 7, 519–525 (in Russian).
18. V. I. Smirnov and N. A. Lebedev, *Konstruktivnaya Teoriya Funktsiy Kompleksnogo Peremennogo* [Constructive Theory of Functions of a Complex Variable], Nauka, Moscow–Leningrad, 1964 (in Russian).
19. S. B. Stechkin, “O poryadke nailuchshikh priblizheniy nepreryvnykh funktsiy” [On the order of best approximations of continuous functions], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1951, **15**, 219–242 (in Russian).
20. L. V. Taykov, “O nailuchshem priblizhenii v srednem nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy” [On the best approximation in the mean of some classes of analytic functions], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1967, **1**, No. 2, 155–162 (in Russian).
21. V. M. Tikhomirov, “Poperechniki mnozhestv v funktsional’nykh prostranstvakh i teoriya nailuchshikh priblizheniy” [Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1960, **15**, No. 3, 81–120 (in Russian).
22. V. M. Tikhomirov, *Nekotorye Voprosy Teorii Priblizheniy* [Some Issues of Approximation Theory], MGU, Moscow, 1976 (in Russian).
23. N. I. Chernykh, “O neravenstve Dzheksona v L_2 ” [On Jackson’s inequality in L_2], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **88**, 71–74 (in Russian).
24. M. Sh. Shabozov, “Poperechniki nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana” [Diameters of some classes of analytic functions in Bergman space], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2002, **383**, No. 2, 171–174 (in Russian).

25. M. Sh. Shabozov and M. R. Langarshoev, “Priblizhenie nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy v prostranstve B_p ” [Approximation of some classes of analytic functions in the space B_p], *Vestn. KhoGU* [Bull. Khorog Univ.], 1999, **1**, No. 1, 45–50 (in Russian).
26. M. Sh. Shabozov and M. S. Saidusaynov, “Srednekvadratichnoe priblizhenie funktsiy kompleksnoy peremennoy ryadami Fur’e v vesovom prostranstve Bergmana” [Mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier series in the weighted Bergman space], *Vladikavkaz. Mat. Zh.* [Vladikavkaz Math. J.], 2018, **20**, No. 1, 86–97 (in Russian), DOI: [10.23671/VNC.2018.1.11400](https://doi.org/10.23671/VNC.2018.1.11400).
27. M. Sh. Shabozov and D. K. Tukhliev, “O srednekvadraticheskom priblizhenii funktsiy v prostranstve Bergmana B_2 i znachenie poperechnikov nekotorykh klassov funktsiy” [On the mean-square approximation of functions in the Bergman space B_2 and the value of the diameters of some classes of functions], *Ufmsk. Mat. Zh.* [Ufa Math. J.], 2024, **16**, No. 2, 67–76 (in Russian), DOI: [10.13108/2024-16-2-66](https://doi.org/10.13108/2024-16-2-66).
28. M. Sh. Shabozov and D. K. Tukhliev, “O poperechnikakh nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana” [On the diameters of some classes of analytic functions in Bergman space], *Chebyshevskiy sb.* [Chebyshev Coll.], 2025, **26**, No. 1, 116–130 (in Russian), DOI: [10.22405/2226-8383-2025-26-1-116-130](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2025-26-1-116-130).
29. M. Sh. Shabozov and Kh. M. Khuromonov, “O nailuchshem priblizhenii v srednem funktsiy kompleksnogo peremennogo ryadami Fur’e v prostranstve Bergmana” [On the best approximation in the mean of functions of a complex variable by Fourier series in Bergman space], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2020, No. 2, 74–92 (in Russian), DOI: [10.26907/0021-3446-2020-2-74-92](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-2-74-92).
30. M. Sh. Shabozov and Kh. M. Khuromonov, “O nailuchshem polinomial’nom priblizhenii analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana B_2 ” [On the best polynomial approximation of analytic functions in the Bergman space B_2], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2025, No. 4, 90–103 (in Russian), DOI: [10.26907/0021-3446-2025-4-91-103](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2025-4-91-103).
31. M. Sh. Shabozov and O. Sh. Shabozov, “O nailuchshem priblizhenii nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy v vesovykh prostranstvakh Bergmana” [On the best approximation of some classes of analytic functions in weighted Bergman spaces], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **412**, No. 4, 466–469 (in Russian).
32. M. Sh. Shabozov and G. A. Yusupov, “Nailuchshee priblizhenie i znacheniya poperechnikov nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy” [Best approximation and diameter values of some classes of analytic functions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2002, **382**, No. 6, 747–749 (in Russian).
33. M. Sh. Shabozov and G. A. Yusupov, “Nailuchshie polinomial’nye priblizheniya v L_2 nekotorykh klassov 2π -periodicheskikh funktsiy i tochnye znacheniya ikh poperechnikov” [Best polynomial approximations in L_2 of some classes of 2π -periodic functions and exact values of their widths], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2011, **90**, No. 5, 764–775 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm8821](https://doi.org/10.4213/mzm8821).
34. V. V. Shalaev, “O poperechnikakh v L_2 klassov differentsiruemykh funktsiy, opredelyaemykh modulyami nepreryvnosti vysshikh poryadkov” [On the diameters in L_2 of classes of differentiable functions defined by moduli of continuity of higher orders], *Ukr. Mat. Zh.* [Ukr. Math. J.], 1991, **43**, No. 1, 125–129 (in Russian).
35. S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Am. Math. Soc., Providence, 1950, DOI: [10.1090/surv/005](https://doi.org/10.1090/surv/005).
36. D. Jackson, “On approximation by trigonometric sums and polynomials,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1912, **13**, 491–515, DOI: [10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2).
37. A. Pinkus, *n-Widths in Approximation Theory*, Springer, Berlin, 1985, DOI: [10.1007/978-3-642-69894-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-69894-1).

M. R. Langarshoev

Moscow University of Humanities and Technology — Moscow Institute of Architecture and Construction, Moscow, Russia

E-mail: mukhtor77@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 6739-7777, eLIBRARY AuthorID: [828107](https://elibrary.ru/828107), Scopus: [55790260900](https://orcid.org/55790260900), ORCID: [0000-0002-3278-4781](https://orcid.org/0000-0002-3278-4781)