

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ-КРЕСТЕ

Р. Ч. КУЛАЕВ^{1,2}, В. А. ЕЛОЕВА^{1,2}

¹Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия

²Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

Аннотация. Исследуются осцилляционные свойства спектра задачи о собственных колебаниях стержневой системы в форме креста. Модель сводится к краевой задаче четвертого порядка на графе с условиями жесткой спайки стержней. Предложен метод редукции исходной задачи к многоточечной краевой задаче на выделенном маршруте, что позволяет интерпретировать систему как упруго подпертый стержень. Дается обоснование данного метода и формулируется условие осцилляционности спектра.

Ключевые слова: уравнение на графе, функция Грина, осцилляционность спектра, уравнение стержня.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2026-1324.

Вклад авторов. Кулаев Р. Ч. — научное руководство, формулирование идеи, гипотезы, цели исследования, разработка методов и процедур, доработка текста, организационное управление. Елоева В. А. — написание первоначального текста статьи, проверка результатов, редактирование, доработка текста.

Для цитирования: Кулаев Р. Ч., Елоева В. А. Осцилляционные свойства спектра оператора четвертого порядка на графе-кресте // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 297–308. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-297-308](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-297-308) EDN: [BWQXD](https://www.edn.ru/BWQXD)

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе устанавливаются осцилляционные свойства спектра краевой задачи о собственных колебаниях плоской стержневой системы, состоящей из четырех стержней, жестко спаянных в форме креста. Такая модель сводится к краевой задаче четвертого порядка на плоском графе-кресте, состоящем из двух пересекающихся под прямым углом интервалов.

Осцилляционным спектральным свойствам дифференциальных операторов (вещественность, положительность и простота точек спектра, перемежаемость нулей собственных функций и др.) посвящена значительная литература (см. [2, 7, 8, 14, 16, 17] и библиографию там же).

Для упругой балки осцилляционные свойства собственных частот были строго обоснованы в 30-х годах XX века (см. [3]). Идеология, развитая в [3], основана на фундаментальном результате Келлога об осцилляционных ядрах (функциях Грина). Эта теория послужила основой для переноса результатов Штурма на более широкие классы задач и привела к теории колебаний математических моделей сложных упругих систем, таких как цепочки балок [5, 14]. Однако попытка непосредственного использования классической теории в случае ветвящихся структур (задачи

на графах) обнаружила ее неприменимость и потребовала поиска принципиально иных методов. Группой воронежских математиков был разработан совершенно иной подход к изучению качественных свойств решений уравнения Штурма—Лиувилля на графе. Этот подход учитывает геометрию графа и приводит к понятию зоны знакопостоянства (S -зоны) функций на графе [6, 7]. Концепция S -зоны позволила обобщить смысл интервала между нулями и установить точный аналог теорем сравнения Штурма, понятия неосцилляции и осцилляционной спектральной теоремы для уравнения второго порядка на графе [6, 17].

Успех качественной теории для операторов второго порядка закономерно поставил вопрос о ее распространении на более сложные объекты — дифференциальные операторы четвертого порядка на графах. Однако, как отмечено в [2, 8, 14, 15], задача исследования их собственных функций значительно сложнее. В силу этих трудностей уравнения четвертого порядка на сетях изучены существенно меньше. Тем не менее, для одного важного класса задач — модели стержневой системы с условиями упруго-шарнирного соединения — в работах [15, 16] был предложен новый подход. Опираясь на понятие кратной зоны знакопостоянства (обобщающее S -зону на случай высших порядков), авторам удалось показать, что в терминах кратных S -зон для оператора четвертого порядка можно определить понятие неосцилляции и сформулировать условия при которых он наследует осцилляционные свойства оператора Штурма—Лиувилля.

Следует подчеркнуть, что условия связи в узловых вершинах графа играют принципиальную роль при изучении вопросов распределения нулей, знакопостоянства и монотонности решений. Подход, использованный в работах [15, 16], опирается на специфические свойства условий согласования и не может быть использован для других условий.

В данной работе исследуется краевая задача четвертого порядка на графе типа «крест» с условиями трансмиссии жесткого типа [4, 10]. Поскольку прямое применение методов, развитых в [15, 16], в данном случае невозможно, то возникает необходимость разработки нового подхода. Предлагаемый метод основан на редукции исходной задачи. Его ключевая идея заключается в том, что краевая задача на графе может быть сведена к задаче со специальными условиями на более узком подмножестве (маршруте) при условии, что правая часть дифференциального уравнения обращается в нуль на дополнительном подграфе. Такая ситуация физически интерпретируется как возможность воздействия на систему и наблюдения за ней лишь на некоторой ее части. Если нагрузка сосредоточена исключительно на выбранном маршруте, задача допускает скаляризацию и сводится к многоточечной задаче на этом маршруте. При этом влияние каждого примыкающего ребра моделируется условием упругой опоры, что в итоге приводит к задаче об изгибе упруго подпертого стержня. Указанная аналогия позволяет применить результаты работы [14] для анализа осцилляционных свойств спектра исходной задачи на графе. Более того, предложенный метод редукции открывает возможность для детального исследования функции Грина: структура редуцированной задачи позволяет изучать ее знакопостоянство и другие качественные характеристики, определяющие осцилляционные свойства системы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной статье мы используем терминологию и обозначения монографии [7] и работ [13, 16].

Рассматривается плоский граф-крест Γ , состоящий из четырех ребер $\gamma_i = (a, a_i)$, $i = \overline{1, 4}$, и одной внутренней вершины a . Здесь a_i — граничные вершины графа. Обратим внимание, что граничные вершины a_i не включены в граф. Объединение точек всех ребер графа будем обозначать $E(\Gamma)$, а множество граничных вершин обозначаем $\partial\Gamma$. Тогда $\Gamma = E(\Gamma) \cup \{a\}$.

Расстояние $d(x_1, x_2)$ между двумя точками $x_1, x_2 \in \Gamma$ определяется как длина кратчайшего пути от x_1 до x_2 вдоль графа Γ . Тогда под ε -окрестностью точки $x_0 \in \Gamma$ понимается множество всех точек $x \in \Gamma$, для которых выполнено неравенство $d(x_0, x) < \varepsilon$.

Любое связное открытое подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ называется подграфом Γ .

Введем функциональные пространства:

$$C[\Gamma] = \{u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\};$$

$$C[E(\Gamma)] = \{u : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\}.$$

Через u_i будем обозначать сужение функции $u \in C[\Gamma]$ (или $E(\Gamma)$) на ребро γ_i . Под $u(a_i)$ понимается $\lim_{\gamma_i \ni x \rightarrow a_i} u_i(x)$. Аналогично определяются значения $u_i(a) = \lim_{\gamma_i \ni x \rightarrow a} u_i(x)$.

Производная функции на ребре γ_i определяется как производная на параметризованном интервале и обозначается $u'_i(x)$. Аналогично определяются производные высших порядков. Через $C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) мы обозначаем пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$), производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[E(\Gamma)]$. Для функции $u(x) \in C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) во внутренней вершине a определено множество производных $u_i^{(j)}(a)$, $1 \leq j \leq n$, вдоль каждого ребра γ_i . При этом производные нечетных порядков зависят от направления параметризации ребер графа, т. е. определяются с точностью до знака. При записи условий связи с производными в вершинах графа нам будет удобно использовать производные по направлению «от вершины», которые обозначим $u_{i\nu}^{(j)}(a)$ (одномерный аналог производных по внутренней нормали). Отметим, что для четной производной ориентация не важна, и поэтому, для краткости, вместо $u_{i\nu}''(a)$ мы пишем просто $u_i''(a)$.

Для функции $u \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$) интеграл на графе определяем по правилу:

$$\int_{\Gamma} u(x) dx = \sum_{\gamma_i \in E(\Gamma)} \int_{\gamma_i} u_i(x) dx.$$

На графе-кресте Γ рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка. На ребрах графа уравнение задается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u_i')' = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma). \quad (2.1)$$

Во внутренней вершине a накладываются условия трансмиссии:

$$\begin{aligned} u_i(a) &= u(a), \quad u'_{1\nu}(a) = -u'_{3\nu}(a), \quad u'_{2\nu}(a) = -u'_{4\nu}(a), \\ p_1(a)u''_1(a) &= p_3(a)u''_3(a), \quad p_2(a)u''_2(a) = p_4(a)u''_4(a), \\ \sum_{i=1}^4 D^3_{\nu} u_i(a) &= f(a), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $D^3 u = (pu'')' - qu'$ — третья квазипроизводная.

В каждой граничной вершине $a_i \in \partial\Gamma$ соотношения (2.1), (2.2) дополняются краевыми условиями

$$u(a_i) = 0, \quad \vartheta(a_i)u'_{\nu}(a_i) - \beta(a_i)u''(a_i) = 0, \quad (2.3)$$

с заданными коэффициентами $\vartheta(a_i), \beta(a_i)$.

Везде далее мы предполагаем, что выполняются следующие условия:

- $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf_{E(\Gamma)} p(x) > 0$; $q \in C^1[E(\Gamma)]$, $q \geq 0$ на $E(\Gamma)$ и $f \in C[\Gamma]$;
- в граничных условиях (2.3) считаем $\vartheta, \beta \geq 0$ и $\vartheta + \beta > 0$ в каждой вершине из $\partial\Gamma$.

Соотношения (2.1), (2.2) определяют дифференциальное уравнение на графе Γ , которое вместе с граничными условиями (2.3) образует краевую задачу, которую мы будем обозначать

$$Lu = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (\vartheta u'_{\nu} - \beta u'')|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь и всюду далее через L обозначаем дифференциальный оператор, порожденный соотношениями (2.1)–(2.3).

Замечание 2.1. Соотношения (2.1)–(2.3) имеют естественную физическую интерпретацию (см. [4, 10, 13]). Они моделируют малые деформации плоского каркаса в форме прямоугольного креста из четырех прямых тонких стержней. В положении равновесия стержни размещены в плоскости и образуют граф-крест Γ . Узлом системы является общая концевая точка всех четырех стержней, которые жестко спаяны друг с другом.

Замечание 2.2. Задача (2.4), порожденная равенствами (2.1)–(2.3), является частным случаем более общей задачи, изучавшейся в работах [11–13]. При рассматриваемых здесь условиях трансмиссии (2.2) для краевой задачи (2.4) выполнены условия однозначной разрешимости (см. [11, Theorem 4]), что гарантирует существование функции Грина $G(x, s)$ краевой задачи (2.4).

3. РЕДУКЦИЯ

Всюду далее в этом пункте мы будем полагать, что правая часть уравнения $Lu = f(x)$ равна тождественно нулю на $\gamma_2 \cup \gamma_4$.

Обозначим через Γ_1, Γ_2 два подмножества $\Gamma \setminus \{\gamma_2 \cup \gamma_4\}$, $\Gamma \setminus \{\gamma_1 \cup \gamma_3\}$, и рассмотрим сужение дифференциального уравнения $Lu = f$ на Γ_1 . На ребрах $\gamma_1, \gamma_3 \in E(\Gamma_1)$ имеем уравнение

$$(p(x)u'')' - (q(x)u')' = f(x), \quad x \in E(\Gamma_1). \quad (3.1)$$

Во внутренней вершине a имеем условия

$$u_1(a) = u_3(a), \quad u'_{1\nu}(a) = -u'_{3\nu}(a), \quad (p_1u''_1)(a) = (p_3u''_3)(a). \quad (3.2)$$

И, наконец, в граничных вершинах заданы условия

$$u|_{\partial\Gamma_1} = 0, \quad (\vartheta u'_\nu - \beta u'')|_{\partial\Gamma_1} = 0. \quad (3.3)$$

Поэтому исходная краевая задача (2.4) эквивалентна набору из соотношений в точках маршрута Γ_1 (неоднородное уравнение на $E(\Gamma_1)$, условия (3.2) и граничные условия (3.3)), набору соотношений в точках $\gamma_2 \cup \gamma_4$ (однородное уравнение на $E(\Gamma_2)$, условия непрерывности $u_2(a) = u_4(a) = u_1(a)$, гладкого согласования $u'_{2\nu}(a) = -u'_{4\nu}(a)$, условия на вторые производные $(p_2u''_2)(a) = (p_4u''_4)(a)$) и, наконец, одно условие на третьи квазипроизводные, связывающее соотношения на Γ_1 и на $\gamma_2 \cup \gamma_4$:

$$\sum_{i=1}^4 D_\nu^3 u_i(a) = f(a). \quad (3.4)$$

Рассмотрим произвольное ребро $\gamma_i = (a, a_i)$ графа Γ . Обозначим через z_i и y_i решения однородного уравнения $(p_i(x)z'')' - (q_i(x)z')' = 0$ на ребре γ_i , удовлетворяющие соответственно краевым условиям

$$\begin{aligned} z_i(a) = 1, \quad z'_{i\nu}(a) = 0, \quad z_i(a_i) = \vartheta(a_i)z'_{i\nu}(a_i) - \beta(a_i)z''_i(a_i) = 0; \\ y_i(a) = 0, \quad y'_{i\nu}(a) = 1, \quad y_i(a_i) = \vartheta(a_i)y'_{i\nu}(a_i) - \beta(a_i)y''_i(a_i) = 0. \end{aligned}$$

Лемма 3.1. Для любого ребра $\gamma_i = (a, a_i)$ функции z_i и y_i определяются однозначно.

Доказательство. Чтобы установить, что функции z_i и y_i определяются однозначно, достаточно показать, что соответствующая однородная краевая задача

$$\begin{aligned} (p_i(x)z'')' - (q_i(x)z')' = 0, \quad x \in \gamma_i, \\ z(a) = z'_\nu(a) = 0, \quad z(a_i) = \vartheta(a_i)z'_\nu(a_i) + \beta(a_i)z''(a_i) = 0 \end{aligned}$$

имеет только нулевое решение.

Умножая уравнение $(p_i(x)z'')' - (q_i(x)z')' = 0$ на z и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^{a_i} [p_i(z'')^2 + q_i(z')^2] dx - z(a)D_\nu^3 z(a) + z'_\nu(a)(pz'')(a) - z(a_i)D_\nu^3 z(a_i) + z'_\nu(a_i)(pz'')(a_i) = \\ = \int_a^{a_i} [p_i(z'')^2 + q_i(z')^2] dx + z'_\nu(a_i)(pz'')(a_i). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из свойств коэффициентов уравнения и краевых условий следует, что правая часть последнего равенства есть сумма неотрицательных чисел. А поскольку $p_i(x) > 0$, то $z'' \equiv 0$, т. е. z — линейная функция. Теперь из граничных условий в точке a следует, $z \equiv 0$ на $[a, a_i]$. $\square$

Следствие 3.1. Пусть u — решение краевой задачи (2.4) на графе-кресте Γ . Если $f(x) \equiv 0$ на ребре $\gamma_i \subset E(\Gamma)$, то сужение u_i функции u на ребро γ_i может быть представлено формулой

$$u_i(x) = u(a)z_i(x) + u'_{i\nu}(a)y_i(x), \quad x \in \gamma_i. \quad (3.6)$$

Далее нам понадобятся следующие свойства функций z_i, y_i .

Лемма 3.2. Справедливы следующие свойства:

- (i) $y''_i(a) < 0$;
- (ii) $D_\nu^3 z_i(a) > 0$;

- (iii) $D_\nu^3 y_i(a) = -(p z_i'')(a)$;
 (iv) $[(p z_i'')(a)]^2 \leq -D_\nu^3 z_i(a)(p y_i'')(a)$.

Доказательство. Умножим тождество $(p_i y_i'')'' - (q_i y_i')' = 0$ на y_i и проинтегрируем по частям на ребре $\gamma_i = (a, a_i)$. Привлекая граничные условия в точке a , определяющие y_i , имеем:

$$\int_a^{a_i} [p_i (y_i'')^2 + q_i (y_i')^2] dx + y_{i\nu}'(a_i)(p y_i'')(a_i) = -(p y_i'')(a). \quad (3.7)$$

Очевидно, что левая часть последнего равенства есть сумма неотрицательных чисел. Если интеграл слева не равен нулю, то неравенство $y_i''(a) < 0$ очевидно. Покажем, что другой вариант невозможен. Действительно, если интеграл равен нулю, то $y_i'' \equiv 0$ на $[a, a_i]$ и y_i есть линейная функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$y_i(a) = 0, \quad y_{i\nu}'(a) = 1, \quad y_i(a_i) = 0,$$

что невозможно. Свойство (i) доказано.

Для доказательства (ii) подставим в (3.5) функцию z_i и воспользуемся граничными условиями в вершине a :

$$\int_a^{a_i} (p_i (z_i'')^2 + q_i (z_i')^2) dx - D_\nu^3 z_i(a) = -z_{i\nu}'(a_i)(p_i z_i'')(a_i). \quad (3.8)$$

Из граничных условий

$$z_i(a) = 1, \quad z_{i\nu}'(a) = 0, \quad z_i(a_i) = 0,$$

следует, что z_i не может быть линейной функцией, т. е. $z_i'' \neq 0$. Поскольку $\inf_{x \in \gamma_i} p_i(x) > 0$ и $q_i \geq 0$, интеграл больше нуля. А поскольку правая часть в (3.8) в силу граничного условия в точке a_i есть величина неположительная, то получаем утверждение (ii).

Умножим теперь тождество $(p_i z_i'')'' - (q_i z_i')' = 0$ на y_i и проинтегрируем по частям вдоль ребра $\gamma_i = (a, a_i)$. После двукратного интегрирования по частям и учета краевых условий в точке a получаем:

$$\int_a^{a_i} (p_i z_i'' y_i'' + q_i z_i' y_i') dx + (p_i z_i'')(a) = -y_{i\nu}'(a_i)(p_i z_i'')(a_i). \quad (3.9)$$

Аналогично, умножая тождество $(p_i y_i'')'' - (q_i y_i')' = 0$ на z_i и интегрируя, получаем

$$\int_a^{a_i} (p_i z_i'' y_i'' + q_i z_i' y_i') dx - D_\nu^3 y_i(a) = -z_{i\nu}'(a_i)(p_i y_i'')(a_i).$$

Вычитая одно равенство из другого, имеем

$$(p_i z_i'')(a) + D_\nu^3 y_i(a) = p_i(a_i) \begin{vmatrix} z_{i\nu}'(a_i) & y_{i\nu}'(a_i) \\ z_i''(a_i) & y_i''(a_i) \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Функции z_i и y_i удовлетворяют одним и тем же граничным условиям в точке a_i . Поэтому векторы $(z_{i\nu}'(a_i); z_i''(a_i))$ и $(y_{i\nu}'(a_i); y_i''(a_i))$ ортогональны ненулевому вектору $(\vartheta(a_i); -\beta(a_i))$. Следовательно, определитель в (3.10) равен нулю, и свойство (iii) доказано.

Остается доказать неравенство (iv).

Определим неотрицательную симметричную билинейную форму

$$B[z, y] = \int_a^{a_i} (p_i z'' y'' + q_i z' y') dx.$$

Перепишем формулы (3.9), (3.8) и (3.7) в виде

$$\begin{aligned} B[z_i, y_i] + y_{i\nu}'(a_i)(p_i z_i'')(a_i) &= -(p_i z_i'')(a), \\ B[z_i, z_i] + z_{i\nu}'(a_i)(p_i z_i'')(a_i) &= D_\nu^3 z_i(a), \\ B[y_i, y_i] + y_{i\nu}'(a_i)(p y_i'')(a_i) &= |(p y_i'')(a)|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В последнем равенстве мы воспользовались уже доказанным свойством (i).

Привлекая неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} |(py_i'')(a)| \cdot D_\nu^3 z_i(a) &= (B[y_i, y_i] + y_{i\nu}'(a_i)(py_i'')(a_i)) (B[z_i, z_i] + z_{i\nu}'(a_i)(pz_i'')(a_i)) \geq \\ &\geq \left(\sqrt{B[y_i, y_i]B[z_i, z_i]} + \sqrt{|z_{i\nu}'(a_i)(py_i'')(a_i)| \cdot |y_{i\nu}'(a_i)(pz_i'')(a_i)|} \right)^2. \end{aligned}$$

Поскольку правая часть (3.10) равна нулю, то $z_{i\nu}'(a_i)(py_i'')(a_i) = y_{i\nu}'(a_i)(pz_i'')(a_i)$. Данное равенство вместе с неравенством Коши—Буняковского для $B[\cdot, \cdot]$ и первым соотношением в (3.11) дают

$$\begin{aligned} |(py_i'')(a)| \cdot D_\nu^3 z_i(a) &\geq (|B[z_i, y_i]| + |y_{i\nu}'(a_i)(pz_i'')(a_i)|)^2 \geq \\ &\geq |B[z_i, y_i] + y_{i\nu}'(a_i)(pz_i'')(a_i)|^2 = |(pz_i'')(a)|^2. \end{aligned}$$

Лемма полностью доказана. $\square$

Возвращаясь к редукции краевой задачи на графе-кресте, рассмотрим условие (3.4). Подставляя выражения (3.6) для u_2 и u_4 в условие (3.4), получим

$$\sum_{i=1}^4 D_\nu^3 u_i(a) = D_\nu^3 u_1(a) + D_\nu^3 u_3(a) + u_1(a) (D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a)) + u_{2\nu}'(a) (D_\nu^3 y_2(a) - D_\nu^3 y_4(a)). \quad (3.12)$$

Теперь рассмотрим условие на вторые производные для u_2 и u_4 в (2.2). Используя представление (3.6), условие непрерывности $u_2(a) = u_4(a) = u_1(a)$ и условие гладкости $u_{2\nu}'(a) = -u_{4\nu}'(a)$, получим

$$(p_2 u_2'')(a) - (p_4 u_4'')(a) = u_1(a) [(p_2 z_2'')(a) - (p_4 z_4'')(a)] + u_{2\nu}'(a) [(p_2 y_2'')(a) + (p_4 y_4'')(a)] = 0. \quad (3.13)$$

Из леммы 3.2 следует, что $(p_2 y_2'')(a) + (p_4 y_4'')(a) < 0$. Поэтому последнее равенство в (3.13) дает соотношение

$$u_{2\nu}'(a) = -\rho(a) u_1(a), \quad (3.14)$$

где

$$\rho(a) = \frac{(p_2 z_2'')(a) - (p_4 z_4'')(a)}{(p_2 y_2'')(a) + (p_4 y_4'')(a)}. \quad (3.15)$$

Теперь вернемся к рассмотрению равенства (3.12). Используя (3.6) и (3.14), мы приходим к формуле

$$\sum_{i=1}^4 D_\nu^3 u_i(a) = D_\nu^3 u_1(a) + D_\nu^3 u_3(a) + u_1(a) (D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a) - \rho(a) (D_\nu^3 y_2(a) - D_\nu^3 y_4(a))).$$

Положим

$$\delta(a) = D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a) - \rho(a) (D_\nu^3 y_2(a) - D_\nu^3 y_4(a)). \quad (3.16)$$

Тогда условие трансмиссии (2.3) с третьими квазипроизводными во внутренней вершине a принимает форму

$$D_\nu^3 u_1(a) + D_\nu^3 u_3(a) + \delta(a) u(a) = f(a). \quad (3.17)$$

Суммируя изложенное выше, приходим к следующей теореме.

Теорема 3.1. *Если $f(x)$ равна тождественно нулю на $\gamma_2 \cup \gamma_4$, то краевая задача (2.4) на графе-кресте Γ эквивалентна следующему набору задач:*

1. *Краевая задача на графе-цепочке Γ_1 :*

$$\begin{aligned} (p(x)u'')'' - (q(x)u')' &= f(x), \quad x \in E(\Gamma_1), \\ u_1(a) &= u_3(a), \quad u_{1\nu}'(a) = -u_{3\nu}'(a), \quad (p_1 u_1'')(a) = (p_3 u_3'')(a), \\ D_\nu^3 u_1(a) + D_\nu^3 u_3(a) + \delta(a) u(a) &= f(a); \\ u|_{\partial\Gamma_1} &= (\vartheta u_\nu' - \beta u'')|_{\partial\Gamma_1} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

2. Две краевые задачи на ребрах γ_2 и γ_4 :

$$\begin{aligned} (p_2(x)u_2'')'' - (q_2(x)u_2')' &= 0, \quad x \in \gamma_2, \\ u_2(a) &= u_1(a), \quad u_{2\nu}'(a) = -\rho(a)u_1(a), \quad u_2(a_2) = \vartheta(a_2)u_{2\nu}'(a_2) - \beta(a_2)u_2''(a_2) = 0; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (p_4(x)u_4'')'' - (q_4(x)u_4')' &= 0, \quad x \in \gamma_4, \\ u_4(a) &= u_1(a), \quad u_{4\nu}'(a) = \rho(a)u_1(a), \quad u_4(a_4) = \vartheta(a_4)u_{4\nu}'(a_4) - \beta(a_4)u_4''(a_4) = 0. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $\rho(a)$ и $\delta(a)$ определяются по формулам (3.15), (3.16).

Лемма 3.3. Справедливо следующее неравенство:

$$\delta(a) \geq 0. \quad (3.19)$$

Доказательство. Используя свойства (i), (iii) леммы 3.2, преобразуем выражение (3.16):

$$\begin{aligned} \delta(a) &= D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a) - \frac{(p_2 z_2'')(a) - (p_4 z_4'')(a)}{(p_2 y_2'')(a) + (p_4 y_4'')(a)} (D^3 y_2(a) - D^3 y_4(a)) = \\ &= D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a) - \frac{((p_2 z_2'')(a) - (p_4 z_4'')(a))^2}{-(p_2 y_2'')(a) - (p_4 y_4'')(a)}. \end{aligned}$$

Поскольку $(p_2 y_2'')(a) < 0$ и $(p_4 y_4'')(a) < 0$, то

$$\delta(a) = D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a) - \frac{((p_2 z_2'')(a) - (p_4 z_4'')(a))^2}{|(p_2 y_2'')(a)| + |(p_4 y_4'')(a)|} \geq D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a) - \frac{(|(p_2 z_2'')(a)| + |(p_4 z_4'')(a)|)^2}{|(p_2 y_2'')(a)| + |(p_4 y_4'')(a)|}.$$

Теперь из той же леммы 3.2, (iii) следует

$$\begin{aligned} \delta(a) &\geq \frac{D_\nu^3 z_2(a)|(p_4 y_4'')(a)| + D_\nu^3 z_4(a)|(p_2 y_2'')(a)| - 2|(p_2 z_2'')(a)| \cdot |(p_4 z_4'')(a)|}{|(p_2 y_2'')(a)| + |(p_4 y_4'')(a)|} \geq \\ &\geq \frac{D_\nu^3 z_2(a) \cdot |(p_4 y_4'')(a)| + D_\nu^3 z_4(a) \cdot |(p_2 y_2'')(a)| - 2\sqrt{D_\nu^3 z_2(a) \cdot |(p_2 y_2'')(a)|} \cdot \sqrt{D_\nu^3 z_4(a) \cdot |(p_4 y_4'')(a)|}}{|(p_2 y_2'')(a)| + |(p_4 y_4'')(a)|} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{D_\nu^3 z_2(a) \cdot |(p_4 y_4'')(a)|} - \sqrt{D_\nu^3 z_4(a) \cdot |(p_2 y_2'')(a)|}\right)^2}{|(p_2 y_2'')(a)| + |(p_4 y_4'')(a)|} \geq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

В работе [14] было доказано, что если $\delta(a) \geq 0$, то краевая задача (3.18) однозначно разрешима. Следовательно, функция Грина $G_1(x, s)$ краевой задачи (3.18) существует.

Следующая теорема указывает на связь функций Грина краевых задач (2.4) и (3.18).

Теорема 3.2. Для функции Грина $G(x, s)$ краевой задачи (2.4) при $s \in \Gamma_1$ имеет место представление

$$G(x, s) = \begin{cases} G_1(x, s), & x, s \in \Gamma_1, \\ G_1(a, s)(z_2(x) - \rho(a)y_2(x)), & x \in \gamma_2, s \in \Gamma_1, \\ G_1(a, s)(z_4(x) + \rho(a)y_4(x)), & x \in \gamma_4, s \in \Gamma_1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы следует из свойств функции Грина $G(x, s)$ краевой задачи (2.4) (см., например, [13] или [7, гл. 6]) и теоремы 3.1.

Замечание 3.1. Краевая задача (3.18) с коэффициентом $\delta(a) \geq 0$ моделирует задачу об изгибе упруго подпертого стержня. При этом величина $\delta(a)$ задает жесткость упругой опоры (см. [14]).

Таким образом, можно заключить, что если внешняя нагрузка на стержневой крест сосредоточена только вдоль одной пары взаимно дополнительных стержней, то другая пара стержней выступает в роли упругой опоры.

Для дальнейшего изучения свойств решений уравнения на графе-кресте нам понадобится следующий результат.

Теорема 3.3 (см. [9]). *Всякое решение однородного уравнения*

$$(p(x)u'')'' - (q(x)u')' = 0, \quad x \in [b_1, b_2] \subset \mathbb{R},$$

удовлетворяющее условиям

$$u''(b_1)u'_{2\nu}(b_1) \geq 0, \quad u''(b_2)u'_{2\nu}(b_2) \geq 0,$$

либо постоянно, либо строго монотонно. При этом решение строго возрастает (убывает или постоянно) тогда и только тогда, когда $D^3u(x) < 0$ (> 0 или $= 0$).

Теорема 3.4. *Пусть u — решение задачи (2.4). Если $f \equiv 0$ на $\gamma_2 \cup \gamma_4$, то либо $u \equiv 0$ на Γ_2 , либо u не обращается в нуль на Γ_2 .*

Доказательство.

СЛУЧАЙ 1. Предположим сначала, что $u''_2(a)u'_{2\nu}(a) \geq 0$. Тогда, учитывая равенство $u(a_2) = 0$ и теорему 3.3, получаем, что либо $u \equiv 0$ на γ_2 , либо $u_2(a) \neq 0$.

В первом случае, ввиду (2.2) получаем $u'_{4\nu}(a) = 0$ и, как следует из $u_4(a) = u_2(a) = 0$ и теоремы 3.3, $u \equiv 0$ на Γ_2 .

Если же $u_2(a) \neq 0$, то для определенности можно положить $u(a) > 0$. Ввиду $u''_2(a)u'_{2\nu}(a) \geq 0$, граничных условий (2.3) и теоремы 3.3 сужение u_2 строго убывает на ребре γ_2 от a к a_2 . Поэтому $u'_{2\nu}(a) \leq 0$, а значит, $u''_2(a) \leq 0$. Привлекая условия (2.2), имеем $u''_4(a)u'_{4\nu}(a) \leq 0$ и $u'_{4\nu}(a) \geq 0$.

Если $u''_4(a)u'_{4\nu}(a) = 0$, то опять ввиду (2.3) и теоремы 3.3 сужение u_4 строго убывает на ребре γ_4 от a к a_4 . В этом случае получаем $u > 0$ на Γ_2 .

Если же $u''_4(a)u'_{4\nu}(a) < 0$, то имеем $u'_{4\nu}(a) > 0$. Поскольку $u_4(a) > 0$ и $u_4(a_4) = 0$, то существует точка $x^* \in (a, a_4)$ такая, что u_4 строго возрастает от a к x^* и $u_4(x^*) > 0$, $u'_{4\nu}(x^*) = 0$. Тогда привлекая теорему 3.3 к функции u_4 на промежутке $(x^*, a_4) \subset \gamma_4$, заключаем, что u_4 строго убывает на (x^*, a_4) от x^* к a_4 , т. е. $u > 0$ на Γ_2 .

СЛУЧАЙ 2. Рассмотрим теперь случай $u''_2(a)u'_{2\nu}(a) < 0$. Здесь из условия (2.2) следует $u''_4(a)u'_{4\nu}(a) > 0$. Поэтому можно повторить предыдущие рассуждения, поменяв ребра γ_2 и γ_4 местами. Теорема доказана. $\square$

4. ОСЦИЛЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

В настоящем пункте рассмотрим на графе-кресте $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ задачу на собственные значения

$$Lu = \lambda \rho(x)u, \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (4.1)$$

Дифференциальное уравнение в (4.1) на ребрах графа определяется обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$(p(x)u'')'' - (q(x)u')' = \lambda \rho(x)u, \quad x \in E(\Gamma), \quad (4.2)$$

а в узловой точке a — условиями трансмиссии:

$$\begin{aligned} u_i(a) &= u(a), \quad u'_{1\nu}(a) = -u'_{3\nu}(a), \quad u'_{2\nu}(a) = -u'_{4\nu}(a), \\ p_1(a)u''_1(a) &= p_3(a)u''_3(a), \quad p_2(a)u''_2(a) = p_4(a)u''_4(a), \\ \sum_{i=1}^4 D^3_{\nu} u_i(a) &= \lambda \rho(a)u(a), \end{aligned}$$

где $\rho \in C[\Gamma]$ и $\rho \geq 0 (\neq 0)$ на Γ .

Прежде чем сформулировать спектральные свойства оператора L , дадим два определения.

Определение 4.1. S -зоной непрерывной на графе Γ функции u будем называть подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$ такой, что $u(x) \neq 0$ в Γ_0 и $u(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0$.

Определение 4.2. Точка $x_0 \in \Gamma$ называется нуль-узлом непрерывной на графе Γ функции u , если $u(x_0) = 0$ и в любой окрестности точки x_0 функция u принимает значения любого знака.

Теорема 4.1 (осцилляционные свойства). *Пусть $\rho \equiv 0$ на $\gamma_2 \cup \gamma_4$. Если функция Грина краевой задачи (2.4) положительна на $\Gamma \times \Gamma$, то спектр оператора L состоит из неограниченной последовательности вещественных простых положительных собственных значений*

$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots$, а соответствующие собственные функции $\varphi^{[k]}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) обладают следующими свойствами:

- (i) функция $\varphi^{[k]}$ имеет в Γ точно $k + 1$ S -зону;
- (ii) если $\varphi^{[k]}(a) \neq 0$, то $\varphi^{[k]}$ имеет в Γ точно k нулей-узлов;
- (iii) если $\varphi^{[k]}(a) = 0$, то $\varphi^{[k]}$ имеет в Γ_1 точно k нулей-узлов и равна тождественно нулю на Γ_2 ;
- (iv) все изолированные нули $\varphi^{[k]}$ являются простыми;
- (v) в любой S -зоне функции $\varphi^{[k]}$ функция $\varphi^{[k+1]}$ меняет знак.

Доказательство. В силу теоремы 3.1 решение задачи (4.1) на подграфе Γ_1 совпадает с решением задачи:

$$\begin{aligned} (p(x)u'')'' - (q(x)u')' &= \lambda\rho(x)u, \quad x \in E(\Gamma_1), \\ u_1(a) &= u_3(a), \quad u'_{1\nu}(a) = -u'_{3\nu}(a), \quad (p_1u'_1)(a) = (p_3u'_3)(a), \\ D_\nu^3u_1(a) + D_\nu^3u_3(a) + \delta(a)u(a) &= \lambda\rho(a)u(a); \\ u|_{\partial\Gamma_1} &= (\vartheta u'_\nu - \beta u'')|_{\partial\Gamma_1} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Это означает, что спектр краевой задачи (4.1) на графе Γ и спектр задачи (4.3) на подграфе Γ_1 совпадают.

Пусть $\{\phi^{[k]}\}$ — собственные функции краевой задачи (4.3). Тогда в силу теоремы 3.1 собственные функции $\{\varphi^{[k]}\}$ задачи (4.1) могут быть представлены в виде

$$\varphi^{[k]}(x) = \begin{cases} \phi^{[k]}(x), & x \in \Gamma_1, \\ \psi_2^{[k]}(x), & x \in \gamma_2, \\ \psi_4^{[k]}(x), & x \in \gamma_4; \end{cases}$$

где $\psi_2^{[k]}$ и $\psi_4^{[k]}$ решения краевых задач

$$\begin{aligned} (p_2(x)\psi_2'')'' - (q_2(x)\psi_2')' &= 0, \quad x \in \gamma_2, \\ \psi_2(a) &= \phi^{[k]}(a), \quad \psi'_{2\nu}(a) = -\rho(a)\phi^{[k]}(a), \quad \psi_2(a_2) = \vartheta(a_2)\psi'_{2\nu}(a_2) - \beta(a_2)\psi_2''(a_2) = 0; \end{aligned} \quad (4.4)$$

и

$$\begin{aligned} (p_4(x)\psi_4'')'' - (q_4(x)\psi_4')' &= 0, \quad x \in \gamma_4, \\ \psi_4(a) &= \phi^{[k]}(a), \quad \psi'_{4\nu}(a) = \rho(a)\phi^{[k]}(a), \quad \psi_4(a_4) = \vartheta(a_4)\psi'_{4\nu}(a_4) - \beta(a_4)\psi_4''(a_4) = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Так как $\rho \equiv 0$ на $\gamma_2 \cup \gamma_4$, то в силу теоремы 3.4 всякая собственная функция задачи (4.1) либо равна тождественно нулю на Γ_2 , либо не имеет нулей в Γ_2 . Поэтому все утверждения теоремы следуют из теоремы 3.2 и следующего результата работы [14, теорема 3]:

Если функция Грина $G_1(x, s)$ краевой задачи (3.18) положительна на $\Gamma_1 \times \Gamma_1$, то спектр соответствующего дифференциального оператора L_1 состоит из неограниченной последовательности вещественных простых положительных собственных значений $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots$, а соответствующие собственные функции обладают свойствами:

1. собственная функция $\phi^{[k]}$, соответствующая λ_k , имеет в Γ_1 точно k нулей, причем все эти нули простые, а в граничных точках a_1 и a_3 любая собственная функция имеет нули точно той кратности, которая задана краевыми условиями;
2. между любыми двумя последовательными нулями собственной функции $\phi^{[k]}$ находится точно один нуль функции $\phi^{[k+1]}$.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 4.1. Как показывает доказанная теорема, наличие осцилляционных спектральных свойств оператора L задачи (4.1) обеспечивается положительностью соответствующей функции Грина. В работе [13, теорема 8] показано, что для положительности функции Грина необходимо и достаточно положительности решений краевых задач

$$\begin{aligned} Lu &= 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(a_i) &= 0, \quad u'(a_i) = 1, \quad u|_{\partial\Gamma \setminus a_i} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma \setminus a_i} = 0. \end{aligned}$$

Замечание 4.2. Другой способ проверки положительности функции Грина связан с теоремой 3.2 и результатом работы [14, следствие 4], который определяет промежуток $[0, \delta^*]$ значений коэффициента $\delta(a)$ задачи (3.18), при которых соответствующая этой задаче функция Грина $G_1(x, s)$ положительна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлуцкая М. Ш., Зверева М. Б., Каменский М. И. Краевая задача на геометрическом графе-звезде с нелинейным условием в узле // Мат. заметки. — 2023. — 114, № 2. — С. 316–320. — DOI: [10.4213/mzm13936](https://doi.org/10.4213/mzm13936).
2. Владимиров А. А., Шкалик А. А. Осцилляционные свойства самосопряженных граничных задач четвертого порядка // Алгебра и анализ. — 2023. — 35, № 1. — С. 109–133.
3. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
4. Завгородний М. Г. Вариационные принципы построения моделей стержневых стержней // Воронеж. гос. технол. академия. — 2000. — № 4. — С. 59–62.
5. Покорный Ю. В., Лазарев К. П. Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач // Дифф. уравн. — 1987. — 23, № 4. — С. 658–670.
6. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. О теоремах сравнения для уравнений на графах // Дифф. уравн. — 1989. — 25, № 7. — С. 1141–1150.
7. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004.
8. Ben Amara J., Shkalikov A. A., Vladimirov A. A. Spectral and oscillatory properties of a linear pencil of fourth-order differential operators // Math. Notes. — 2013. — 94, № 1. — С. 49–59. — DOI: [10.1134/S0001434613070055](https://doi.org/10.1134/S0001434613070055).
9. Borovskikh A. V., Lazarev K. P. Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2004. — 119, № 6. — С. 719–738. — DOI: [10.1023/B:JOTH.0000012753.65477.23](https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000012753.65477.23).
10. Kik J.-C., Kurasov P., Usman M. On vertex conditions for elastic systems // Phys. Lett. A. — 2015. — 379, № 34–35. — С. 1871–1876. — DOI: [10.1016/j.physleta.2015.05.017](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.05.017).
11. Kulaev R. Ch. On the solvability of a boundary value problem for a fourth-order equation on a graph // Diff. Equ. — 2014. — 50, № 1. — С. 27–34. — DOI: [10.1134/S0012266114010042](https://doi.org/10.1134/S0012266114010042).
12. Kulaev R. Ch. On the nonoscillation of an equation on a graph // Differ. Equ. — 2015. — 50, № 12. — С. 1565–1566. — DOI: [10.1134/S0012266114110196](https://doi.org/10.1134/S0012266114110196).
13. Kulaev R. Ch. Necessary and sufficient condition for the positivity of the Green function of a boundary value problem for a fourth-order equation on a graph // Differ. Equ. — 2015. — 51, № 3. — С. 303–317. — DOI: [10.1134/S0012266115030039](https://doi.org/10.1134/S0012266115030039).
14. Kulaev R. Ch. Oscillation of the Green function of a multipoint boundary value problem for a fourth-order equation // Differ. Equ. — 2015. — 51, № 4. — С. 1–15. — DOI: [10.1134/S0012266115040035](https://doi.org/10.1134/S0012266115040035).
15. Kulaev R. Ch. The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph // Mediterr. J. Math. — 2022. — 19, № 73. — С. 1–16. — DOI: [10.1007/s00009-022-02005-6](https://doi.org/10.1007/s00009-022-02005-6).
16. Kulaev R. Ch., Urtaeva A. A. Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network // Math. Meth. Appl. Sci. — 2023. — 46, № 1. — С. 15743–15763. — DOI: [10.1002/mma.9424](https://doi.org/10.1002/mma.9424).
17. Pokornyi Yu. V., Pryadiev V. L. Some problems of the qualitative Sturm–Liouville theory on a spatial network // Russ. Math. Surv. — 2004. — 59, № 3. — С. 515–552. — DOI: [10.1070/RM2004v059n03ABEH000738](https://doi.org/10.1070/RM2004v059n03ABEH000738).

Р. Ч. Кулаев

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия
Южный математический институт ВНИЦ РАН, Владикавказ, Россия

E-mail: r.ch.kulaev@yandex.ru, РИНЦ SPIN-код: 4941-1764, РИНЦ AuthorID: [360127](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=360127), ResearcherID: [AAO-6785-2021](https://orcid.org/0000-0002-1501-5024), Scopus: [26532903900](https://orcid.org/0000-0002-1501-5024), ORCID: [0000-0002-1501-5024](https://orcid.org/0000-0002-1501-5024)

В. А. Елоева

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия
Южный математический институт ВНИЦ РАН, Владикавказ, Россия

E-mail: v.a.eloeva@yandex.ru, Scopus: [60090703300](https://orcid.org/0000-0002-1501-5024)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-297-308](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-297-308)
 EDN: [BBWQXD](#)

UDC 517.927
Research article

Oscillatory properties of the spectrum of a fourth-order operator on a cross graph

R. Ch. Kulaev^{1,2} and V. A. Eloeva^{1,2}

¹*North Ossetian State University after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia*

²*Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia*

Abstract. The oscillatory properties of the spectrum of a problem on the natural vibrations of a cross-shaped rod system are investigated. The model is reduced to a fourth-order boundary value problem on a graph with rigid joint conditions for the rods. A method is proposed for reducing the original problem to a multipoint boundary value problem on a selected route, allowing the system to be interpreted as an elastically supported rod. A justification for this method is provided, and a condition for the oscillatory nature of the spectrum is formulated.

Keywords: graph equation, Green's function, spectrum oscillation, rod equation.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2026-1324.

Authors' contribution. *Kulaev R. Ch.* — scientific supervision, formulation of the idea, hypothesis, research objectives, development of methods and procedures, text revision, organizational management. *Eloeva V. A.* — writing the initial text of the article, checking the results, editing, text revision.

For citation: R. Ch. Kulaev, V. A. Eloeva, “Oscillatory properties of the spectrum of a fourth-order operator on a cross graph,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 297–308. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-297-308](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-297-308) EDN: [BBWQXD](#)

REFERENCES

1. M. Sh. Burlutskaya, M. B. Zvereva, and M. I. Kamenskii, “Kraevaya zadacha na geometricheskom grafe-zvezde s nelineynym uslovиеm v uzle” [Boundary-value problem on a geometric star graph with a nonlinear condition at a node], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2023, **114**, No. 2, 316–320 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm13936](https://doi.org/10.4213/mzm13936).
2. A. A. Vladimirov and A. A. Shkalikov, “Ostsillyatsionnye svoystva samosopryazhennykh granichnykh zadach chetvertogo poryadka” [Oscillatory properties of fourth-order self-adjoint boundary-value problems], *Algebra i Analiz* [Algebra Anal.], 2023, **35**, No. 1, 109–133 (in Russian).
3. F. R. Gantmakher and M. G. Kreyn, *Ostsillyatsionnye Matritsy i Yadra i Malye Kolebaniya Mekhanicheskikh Sistem* [Oscillatory Matrices and Kernels and Small Oscillations of Mechanical Systems], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1950 (in Russian).
4. M. G. Zavgorodnii, “Variatsionnye printsipy postroeniya modeley sterzhnevyykh sterzhney” [Variational principles for constructing rod models], *Voronezh. Gos. Tekhnol. Akademiya* [Voronezh State Tech. Acad.], 2000, No 4, 59–62 (in Russian).
5. Yu. V. Pokorniy and K. P. Lazarev, “Nekotorye ostsillyatsionnye teoremy dlya mnogotochechnyykh zadach” [Some oscillation theorems for multipoint problems], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1987, **23**, No. 4, 658–670 (in Russian).
6. Yu. V. Pokorniy and O. M. Penkin, “O teoremax sravneniya dlya uravneniy na grafakh” [On comparison theorems for equations on graphs], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 7, 1141–1150 (in Russian).



7. Yu. V. Pokornyi, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, S. A. Shabrov, *Differentsial'nye Uravneniya na Geometricheskikh Grafakh* [Differential Equations on Geometric Graphs], Fizmatlit, Moscow, 2004 (in Russian).
8. Ben J. Amara, A. A. Shkalikov, and A. A. Vladimirov, “Spectral and oscillatory properties of a linear pencil of fourth-order differential operators,” *Math. Notes*, 2013, **94**, No. 1, 49–59, DOI: [10.1134/S0001434613070055](https://doi.org/10.1134/S0001434613070055).
9. A. V. Borovskikh and K. P. Lazarev, “Fourth-order differential equations on geometric graphs,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2004, **119**, No. 6, 719–738, DOI: [10.1023/B:JOTH.0000012753.65477.23](https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000012753.65477.23).
10. J.-C. Kiik, P. Kurasov, and M. Usman, “On vertex conditions for elastic systems,” *Phys. Lett. A*, 2015, **379**, No. 34–35, 1871–1876, DOI: [10.1016/j.physleta.2015.05.017](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.05.017).
11. R. Ch. Kulaev, “On the solvability of a boundary value problem for a fourth-order equation on a graph,” *Diff. Equ.*, 2014, **50**, No. 1, 27–34, DOI: [10.1134/S0012266114010042](https://doi.org/10.1134/S0012266114010042).
12. R. Ch. Kulaev, “On the nonoscillation of an equation on a graph,” *Differ. Equ.*, 2015, **50**, No. 12, 1565–1566, DOI: [10.1134/S0012266114110196](https://doi.org/10.1134/S0012266114110196).
13. R. Ch. Kulaev, “Necessary and sufficient condition for the positivity of the Green function of a boundary value problem for a fourth-order equation on a graph,” *Differ. Equ.*, 2015, **51**, No. 3, 303–317, DOI: [10.1134/S0012266115030039](https://doi.org/10.1134/S0012266115030039).
14. R. Ch. Kulaev, “Oscillation of the Green function of a multipoint boundary value problem for a fourth-order equation,” *Differ. Equ.*, 2015, **51**, No. 4, 1–15, DOI: [10.1134/S0012266115040035](https://doi.org/10.1134/S0012266115040035).
15. R. Ch. Kulaev, “The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph,” *Mediterr. J. Math.*, 2022, **19**, No. 73, 1–16, DOI: [10.1007/s00009-022-02005-6](https://doi.org/10.1007/s00009-022-02005-6).
16. R. Ch. Kulaev and A. A. Urtaeva, “Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network,” *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2023, **46**, No. 1, 15743–15763, DOI: [10.1002/mma.9424](https://doi.org/10.1002/mma.9424).
17. Yu. V. Pokornyi and V. L. Pryadiev, “Some problems of the qualitative Sturm–Liouville theory on a spatial network,” *Russ. Math. Surv.*, 2004, **59**, No. 3, 515–552, DOI: [10.1070/RM2004v059n03ABEH000738](https://doi.org/10.1070/RM2004v059n03ABEH000738).

R. Ch. Kulaev

North Ossetian State University after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia

Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia

E-mail: r.ch.kulaev@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4941-1764, eLIBRARY AuthorID: 360127, ResearcherID: [AAO-6785-2021](https://orcid.org/0000-0002-1501-5024), Scopus: 26532903900, ORCID: 0000-0002-1501-5024

V. A. Eloeva

North Ossetian State University after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia

Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia

E-mail: v.a.eloeva@yandex.ru, Scopus: 60090703300