Современная математика. Фундаментальные направления. Том 72, № 2 (2026). С. 258–281
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2-258-281 УДК 517.968.72
EDN: AZYDIE *Научная статья*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕПОЛНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Д. А. Закора

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

Аннотация. В работе изучается неполное интегро-дифференциальное операторное уравнение второго порядка в гильбертовом пространстве. Ядро разностного типа интегрального возмущения представляет собой голоморфную полугруппу, окаймленную неограниченными операторами. Исследуется асимптотическое поведение решений этого уравнения. Доказаны асимптотические формулы для решений в случае, когда правая часть близка к почти периодической функции. Полученные формулы применены к одному уравнению, описывающему ряд приложений из механики вязкоупругих систем.

Ключевые слова: операторное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, задача Коши, асимптотика решения.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2026-1313.

Для цитирования: *Закора Д. А.* Асимптотическое поведение решений неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. **72**, № 2. С. 258–281. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2-258-281 EDN: AZYDIE

1. Постановка задачи и основные утверждения

1.1. Введение. Функционально-дифференциальные и, в частности, интегро-дифференциальные уравнения возникают в задачах динамики различных вязкоупругих систем, в задачах управления системами с распределёнными параметрами, задачах наследственной механики, задачах теории распространения тепла в средах с памятью, и т. д. Различные вопросы по указанной теме обсуждаются в монографиях [7, 14, 20, 24, 30] (см. также указанную в них литературу). В монографии [1] к изучению функционально-дифференциальных уравнений систематически применяются методы спектральной теории операторов, а также приведён обширный список литературы по обсуждаемым вопросам.

В работах [16, 17] доказано, что решение однородного неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с операторным ядром достаточно общего вида стремится к нулю с ростом времени, но без оценки скорости убывания. Это утверждение применено к исследованию движения вязкоупругого тела. Динамика вязкоупругих систем, а также подобные вопросы в других задачах, изучалась далее многими авторами. Например, в работах [13, 18, 21, 25, 26, 29]

© Д. А. Закора, 2026

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

исследуются вопросы устойчивости одномерных систем, описывающих модели Тимошенко вязкоупругих стержней. Работы [2,11,12,27] (см. также указанную в них литературу) посвящены исследованию устойчивости абстрактных интегро-дифференциальных уравнений. В работах [4–6, 33] исследуются вопросы, аналогичные изучаемым в настоящей статье. А именно, исследуется вопрос асимптотического поведения решений интегро-дифференциальных уравнений в случае «правой части» вида

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1,n}),$$

где $\|g(t)\| \longrightarrow 0$, $\|f_k'(t)\| \longrightarrow 0$ $(k = \overline{0,n})$ при $t \longrightarrow +\infty$.

Цель работы — вывод асимптотических формул для решений неполного интегро-дифференциального операторного уравнения второго порядка в описанном выше случае (см. теоремы 1.1, 1.2). Доказанные утверждения применяются к одному уравнению, моделирующему ряд приложений из механики вязкоупругих систем (см. лемму 3.5).

1.2. Постановка задачи и основные утверждения.

1.2.1. Общий случай. Пусть H, H_0 — комплексные гильбертовы пространства, $\mathcal{L}(H, H_0)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из H в H_0, $\mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H, H)$. Пусть A, G, C — плотно определённые замкнутые операторы:

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H, \quad G : \mathcal{D}(G) \subset H_0 \longrightarrow H_0, \quad C : \mathcal{D}(C) \subset H \longrightarrow H_0,$$

причём A, G — самосопряжённые положительно определённые операторы. Будем считать, что введённые операторы удовлетворяют следующей гипотезе:

1′) Оператор-функция $C^* \exp(-tG) C A^{-1}$ сильно непрерывна на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

Отсюда, из неравенства Гайнца (см. [9, гл. 1, §7, теорема 7.1]) и полярного разложения замкнутого оператора (см. [8, гл. 6, §2, п. 7]) следует, в частности, что $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(C)$. Обозначим через $\omega_G := \inf\{\lambda \in \sigma(G)\}$ ($\sigma(G)$ — спектр оператора G) нижнюю грань оператора G и предположим, что выполнены следующие гипотезы:

2′) Существует $a_1 \in (0,1)$ такое, что

$$\omega_G^{-1} \|Cu\|_{H_0}^2 \leqslant a_1 \|A^{1/2} u\|_H^2 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A^{1/2}); \tag{1.1}$$

3′) Существенный спектр $\sigma_{ess}(A)$ оператора A не более чем счётен и

$$\{0 \neq u \in \mathcal{D}(A) : \exists \lambda > 0 : Au = \lambda u\} \cap \operatorname{Ker} C = \varnothing. \tag{1.2}$$

По операторам A, G, C с учётом гипотез 1′), 2′) построим операторный пучок (оператор-функцию) $M(\cdot)$ следующим образом:

$$M(\lambda) := I + \lambda^2 A^{-1} - \big(CA^{-1/2}\big)^* (G - \lambda I)^{-1} \big(CA^{-1/2}\big). \tag{1.3}$$

Замечание 1.1. Гипотеза 2′) призвана обеспечить положительную определённость оператора $M(0)$ и в конкретной ситуации может быть ослаблена (см. (3.5) или (3.9)).

В гильбертовом пространстве H рассмотрим задачу Коши для неполного интегро-дифференциального операторного уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -Au + \int_0^t C^* \exp\big(-G(t-s)\big) C u(s)\, ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{1.4}$$

Определение 1.1. *Решением* задачи Коши (1.4) назовём функцию $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$ такую, что $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $u'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $Au, A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$, выполнены начальные условия и уравнение из (1.4) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены гипотезы* 1′), 2′), 3′).

1) *Если* $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, *то решение задачи Коши* (1.4) *существует и единственно.*

2) *Будем считать дополнительно, что*

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1,n}), \tag{1.5}$$

где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ $(k = \overline{0,n})$. *Если* $g, f_k' \in L_1(\mathbb{R}_+; H)$ $(k = \overline{0,n})$ *и* $\sigma_k^2 \notin \sigma_{ess}(A)$ $(k = \overline{1,n})$, *то для решения задачи Коши* (1.4) *выполнено соотношение*

$$\Big\| A^{1/2}\Big(u(t) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t)\Big)\Big\|_H^2 + \\ + \Big\| u'(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t)\Big\|_H^2 \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow +\infty). \tag{1.6}$$

1.2.2. Один частный случай. Рассмотрим теперь частный случай описанной выше конструкции. Пусть H_l $(l = 1, 2)$ — комплексные гильбертовы пространства. Пусть $G_1 \in \mathcal{L}(H_1)$, G_2, C_l — плотно определённые замкнутые операторы:

$$G_2 : \mathcal{D}(G_2) \subset H_2 \longrightarrow H_2, \quad C_l : \mathcal{D}(C_l) \subset H \longrightarrow H_l \quad (l = 1, 2),$$

причём G_l — самосопряжённые положительно определённые операторы. Обозначим через $\omega_{G_l} := \inf\{\lambda \in \sigma(G_l)\}$ нижнюю грань оператора G_l и будем считать, что введённые операторы удовлетворяют следующим гипотезам:

1″) Оператор-функции $C_l^* \exp(-tG_l) C_l A^{-1}$ $(l = 1, 2)$ сильно непрерывны на $\mathbb{R}_+$;
2″) Существуют $a_1 \in (0, 1)$, $a_2 > 0$ такие, что

$$\sum_{l=1}^{2} \frac{1}{\omega_{G_l}} \|C_l u\|_{H_l}^2 \leqslant a_1 \|A^{1/2} u\|_H^2, \quad \|C_1 u\|_{H_1}^2 \geqslant a_2 \|A^{1/2} u\|_H^2 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(C_1). \tag{1.7}$$

Замечание 1.2. Условие $G_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ и второе требование гипотезы 2″) призваны обеспечить равномерную экспоненциальную устойчивость полугруппы, связанной с (1.4) (см. лемму 2.9).

Будем теперь считать, что $H_0 = H_1 \oplus H_2$, а операторы G и C определены следующим образом:

$$\begin{aligned} &G := \operatorname{diag}(G_1, G_2), \quad G : \mathcal{D}(G) = H_1 \oplus \mathcal{D}(G_2) \subset H_0 \longrightarrow H_0, \\ &C := (C_1, C_2)^{\intercal}, \quad C : \mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(C_1) \cap \mathcal{D}(C_2) \subset H \longrightarrow H_0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь и далее символ $\intercal$ обозначает операцию транспонирования. Теперь ядро интегрального возмущения в (1.4) и оператор-функция $M(\cdot)$ из (1.3) примут следующий вид:

$$C^* \exp\big(-Gt\big) C = \sum_{l=1}^{2} C_l^* \exp\big(-G_l t\big) C_l, \tag{1.9}$$

$$M(\lambda) = I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^{2} \big(C_l A^{-1/2}\big)^* (G_l - \lambda I)^{-1} \big(C_l A^{-1/2}\big). \tag{1.10}$$

Теорема 1.2. *Пусть выполнены гипотезы* 1″), 2″), *а ядро интегрального слагаемого в* (1.4) *и оператор-функция* $M(\cdot)$ *имеют вид* (1.9) *и* (1.10) *соответственно.*

1) *Если* $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, *то решение задачи Коши* (1.4) *существует и единственно.*
2) *Будем считать дополнительно, что функция* $f(\cdot)$ *имеет вид* (1.5), *где* $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ $(k = \overline{0,n})$. *Если* $\|g(t)\|_H \longrightarrow 0$, $\|f_k'(t)\|_H \longrightarrow 0$ $(k = \overline{0,n})$ *при* $t \longrightarrow +\infty$, *то имеет место соотношение* (1.6).
3) *Если, в частности,* $\|g(t)\|_H$, $\|f_k'(t)\|_H$ $(k = \overline{0,n})$ *убывают экспоненциально при* $t \longrightarrow +\infty$, *то сходимость к нулю в* (1.6) *также экспоненциальная.*

2. Доказательство теорем

Идея доказательства теорем 1.1, 1.2 заключается в установлении связи между решениями задачи Коши (1.4) и решениями задачи Коши для некоторого дифференциально-операторного уравнения первого порядка с последующим использованием свойств решений этой задачи Коши.

В п. 2.1 доказываются леммы об асимптотическом поведении решений задач Коши для уравнений первого порядка с правой частью специального вида. Рассматриваются две ситуации — когда оператор уравнения генерирует сильно устойчивую либо равномерно экспоненциально устойчивую полугруппу. В п. 2.2 осуществляется переход от задачи Коши (1.4) к задаче Коши для некоторого дифференциально-операторного уравнения первого порядка. Оператор этого уравнения представляет собой операторную матрицу специального вида. В п. 2.3 исследуются операторные матрицы указанного вида. Находятся условия, достаточные для того, чтобы эти операторные матрицы генерировали сильно устойчивые либо равномерно экспоненциально устойчивые полугруппы. В п. 2.4 с использованием результатов п. 2.1 и п. 2.3 доказываются утверждения теоремы 1.1 (см. леммы 2.10, 2.11) и теоремы 1.2 (см. леммы 2.12, 2.13).

2.1. Асимптотика решений дифференциального уравнения первого порядка. Пусть оператор $-\mathcal{A}$ генерирует сильно непрерывную полугруппы $\mathcal{U}(t)$ на банаховом пространстве $\mathcal{E}$. Рассмотрим в $\mathcal{E}$ следующую задачу Коши:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0. \tag{2.1}$$

Определение 2.1. *Решением* задачи Коши (2.1) назовём функцию $\zeta \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{E})$ такую, что $\zeta(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\zeta \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{E})$, выполнено начальное условие и уравнение из (2.1) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены следующие условия. Сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$ равномерно ограничена. Множество $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ не более чем счётно и $\sigma_p(\mathcal{A}^*) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$.*

Функция $\mathcal{F}(t)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(t) := \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1,n}), \tag{2.2}$$

где $\mathcal{G} \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{E})$, $\mathcal{F}_k \in C^{m_k}(\mathbb{R}_+;\mathcal{E})$ $(m_k \in \mathbb{N}, k = \overline{0,n})$. Если $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\mathcal{G}, \mathcal{F}_k^{(m_k)} \in L_1(\mathbb{R}_+;\mathcal{E})$, $i\sigma_k \notin \sigma(\mathcal{A})$ $(k = \overline{0,n})$, то решение задачи Коши (2.1) существует, единственно и удовлетворяет асимптотической формуле $(\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) := (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{-1})$

$$\Big\|\zeta(t) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(t)\Big\|_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow +\infty). \tag{2.3}$$

Доказательство.

1) Покажем однозначную разрешимость задачи Коши (2.1) и найдём специальное представление для её решения.

Из $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, сильной непрерывности полугруппы $\mathcal{U}(t)$ и $\mathcal{F} \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{E})$ следует, что задача Коши (2.1) имеет единственное решение в смысле определения 2.1 (см., например, [9, гл. 1, §6, теорема 6.5] или [3, гл. 2, §1, теорема 1.4]).

С учётом $i\sigma_k \notin \sigma(\mathcal{A})$ $(k = \overline{0,n})$ будем разыскивать это решение в виде

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \chi(t). \tag{2.4}$$

Отсюда, из (2.1) и (2.2) получим, что

$$\frac{d\zeta}{dt} = \sum_{k=0}^{n} -i\sigma_k e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j+1)}(t) + \frac{d\chi}{dt} =$$

$$= -\mathcal{A}\zeta + \mathcal{F}(t) = \sum_{k=0}^{n} -\mathcal{A}e^{-i\sigma_k t}\sum_{j=0}^{m_k-1}(-1)^j\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(t) - \mathcal{A}\chi + \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t);$$

$$\sum_{k=0}^{n}(\mathcal{A} - i\sigma_k\mathcal{I})e^{-i\sigma_k t}\sum_{j=0}^{m_k-1}(-1)^j\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\sum_{j=1}^{m_k}(-1)^{j-1}\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \frac{d\chi}{dt} =$$

$$= -\mathcal{A}\chi + \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t);$$

$$\sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\sum_{j=1}^{m_k-1}(-1)^j\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\sum_{j=1}^{m_k-1}(-1)^{j-1}\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(t) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}(-1)^{m_k-1}\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{m_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(m_k)}(t) + \frac{d\chi}{dt} = -\mathcal{A}\chi + \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{F}_k(t).$$

Отсюда следует, что функция $\chi(\cdot)$ должна быть решением задачи Коши

$$\begin{gathered}\frac{d\chi}{dt} = -\mathcal{A}\chi + \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}(-1)^{m_k}\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{m_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(m_k)}(t),\\ \chi(0) = \zeta^0 - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m_k-1}(-1)^j\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).\end{gathered} \tag{2.5}$$

Чтобы обосновать представление для функции $\chi(\cdot)$ через интеграл Дюамеля, заметим, что решение задачи (2.5) можно представить в виде суммы $\chi(t) = \chi_1(t) + \chi_2(t)$, где $\chi_1(\cdot)$, $\chi_2(\cdot)$ — решения задач Коши

$$\frac{d\chi_1}{dt} = -\mathcal{A}\chi_1 + \mathcal{G}(t), \quad \chi_1(0) = \zeta^0 - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m_k-1}(-1)^j\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{2.6}$$

$$\frac{d\chi_2}{dt} = -\mathcal{A}\chi_2 + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}(-1)^{m_k}\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{m_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(m_k)}(t), \quad \chi_2(0) = 0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{2.7}$$

Задача Коши (2.6) разрешима в силу п. 2° теоремы [9, гл. 1, §6, теорема 6.5] (см. также п. (ii) теоремы [3, гл. 2, §1, теорема 1.3]). Задача Коши (2.7) разрешима в силу п. 1° теоремы [9, гл. 1, §6, теорема 6.5] (см. также п. (i) теоремы [3, гл. 2, §1, теорема 1.3]). При этом $\chi_1(\cdot)$, $\chi_2(\cdot)$ представимы через интегралы Дюамеля.

Итак, складывая решения задач Коши (2.6) и (2.7), найдём представление для решения задачи (2.5). С учётом связи (2.4) найдём, что

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\sum_{j=0}^{m_k-1}(-1)^j\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \mathcal{U}(t)\Big(\zeta^0 - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m_k-1}(-1)^j\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(0)\Big) +$$
$$+ \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\Big(\mathcal{G}(s) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k s}(-1)^{m_k}\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{m_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(m_k)}(s)\Big)\,ds. \tag{2.8}$$

2) Докажем теперь формулу (2.3).

Из условий на спектр оператора $\mathcal{A}$ леммы 2.1 и теоремы Арендта—Батти—Любича—Ву (см. [15, гл. 2, §5, п. 5.5, теорема 5.5.5] или [28, гл. 5, §5.1, теорема 5.1.5]) следует, что полугруппа $\mathcal{U}(t)$, генерируемая оператором $-\mathcal{A}$, сильно устойчива, т. е. $\|\mathcal{U}(t)\xi\|_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0$ при $t \longrightarrow +\infty$ для любого $\xi \in \mathcal{E}$. Следовательно,

$$\Big\|\mathcal{U}(t)\Big(\zeta^0 - \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m_k-1}(-1)^j\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(j)}(0)\Big)\Big\|_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow +\infty). \tag{2.9}$$

Далее, из $\mathcal{G}, \mathcal{F}_k^{(m_k)} \in L_1(\mathbb{R}_+;\mathcal{E})$ $(k=\overline{0,n})$ следует, что неоднородность в (2.5) также принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}_+;\mathcal{E})$. Отсюда, из равномерной ограниченности и сильной устойчивости полугруппы $\mathcal{U}(t)$, и из [15, гл. 2, §5, п. 5.6, предложение 5.6.4] следует, что

$$\Big\| \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)\Big(\mathcal{G}(s)+\sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k s}(-1)^{m_k}\mathcal{R}_{i\sigma_k}^{m_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k^{(m_k)}(s)\Big)\,ds\Big\|_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0 \quad (t\longrightarrow+\infty). \tag{2.10}$$

Теперь из (2.9), (2.10) и (2.8) следует (2.3). Лемма доказана. □

Замечание 2.1. Если банахово пространство $\mathcal{E}$ рефлексивно, то условие $\sigma_p(\mathcal{A}^*)\cap i\mathbb{R}=\varnothing$ можно заменить на $\sigma_p(\mathcal{A})\cap i\mathbb{R}=\varnothing$ (см. [28, гл. 5, §5.1, предложение 5.1.15 и предложение 5.1.17]).

Лемма 2.2. *Пусть выполнены следующие условия. Сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$ равномерно экспоненциально устойчива, т. е. существуют $M\geqslant 1$, $\omega>0$ такие, что $\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}\leqslant M\exp(-\omega t)$ для любого $t\in\mathbb{R}_+$. Функция $\mathcal{F}(\cdot)$ имеет вид (2.2), где $\mathcal{G}\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{E})$, $\mathcal{F}_k\in C^{m_k}(\mathbb{R}_+;\mathcal{E})$ $(m_k\in\mathbb{N}, k=\overline{0,n})$.*

1) *Если $\zeta^0\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{E}}\longrightarrow 0$, $\|\mathcal{F}_k^{(m_k)}(t)\|_{\mathcal{E}}\longrightarrow 0$ $(k=\overline{0,n})$ при $t\longrightarrow+\infty$, то решение задачи Коши (2.1) существует, единственно и удовлетворяет асимптотической формуле (2.3).*
2) *Если, в частности, $\|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{E}}$, $\|\mathcal{F}_k^{(m_k)}(t)\|_{\mathcal{E}}$ $(k=\overline{0,n})$ убывают экспоненциально при $t\longrightarrow+\infty$, то сходимость к нулю в (2.3) также экспоненциальная.*

Доказательство.

1) Однозначная разрешимость задачи Коши (2.1) и представление (2.8) для её решения доказываются как в лемме 2.1. Нужно только учесть, что $\sigma(\mathcal{A})\cap i\mathbb{R}=\varnothing$, поскольку по условию леммы полугруппа $\mathcal{U}(t)$ равномерно экспоненциально устойчива.

2) Для доказательства формулы (2.3) заметим, что, например, из [15, гл. 2, §5, п. 5.5, предложение 5.6.1, d)] и $\|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{E}}\longrightarrow 0$, $\|\mathcal{F}_k^{(m_k)}(t)\|_{\mathcal{E}}\longrightarrow 0$ $(k=\overline{0,n})$ при $t\longrightarrow+\infty$ следует (2.10), а соотношение (2.9) следует из равномерной экспоненциальной устойчивости полугруппы $\mathcal{U}(t)$.

Если $\|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{E}}$, $\|\mathcal{F}_k^{(m_k)}(t)\|_{\mathcal{E}}$ $(k=\overline{0,n})$ убывают экспоненциально, то из представления (2.8) и равномерной экспоненциальной устойчивости полугруппы $\mathcal{U}(t)$ непосредственными вычислениями несложно вывести, что сходимость к нулю в (2.3) также экспоненциальная. Лемма доказана. □

2.2. Переход от (1.4) к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

2.2.1. Общий случай, выполнены гипотезы 1′), 2′), 3′). С учётом гипотез 1′), 2′) и формулы (1.3), определяющей оператор-функцию $M(\cdot)$, введём операторы $Q:=CA^{-1/2}\in\mathcal{L}(H,H_0)$ и $T:=M(0)$.

Лемма 2.3. *Имеет место формула $Q^*|_{\mathcal{D}(C^*)}=A^{-1/2}C^*$, оператор T положительно определён в гильбертовом пространстве H.*

Доказательство. Для любых $u\in H$, $v\in\mathcal{D}(C^*)$ имеем

$$(Qu,v)_{H_0}=(u,Q^*v)_H=(u,A^{-1/2}C^*v)_H,$$

откуда следует, что $Q^*|_{\mathcal{D}(C^*)}=A^{-1/2}C^*$.

Докажем, что оператор $T=M(0)\in\mathcal{L}(H)$ (см. (1.3)) положительно определён. Для любых $u\in H$ с учётом гипотезы 2′) (см. (1.1)) имеем

$$\begin{aligned}(Tu,u)_H&=\big((I-Q^*G^{-1}Q)u,u\big)_H=\|u\|_H^2-(G^{-1}Qu,Qu)_{H_0}\geqslant\|u\|_H^2-\omega_G^{-1}\|Qu\|_{H_0}^2=\\&=\|A^{1/2}(A^{-1/2}u)\|_H^2-\omega_G^{-1}\|C(A^{-1/2}u)\|_{H_0}^2\geqslant(1-a_1)\|A^{1/2}(A^{-1/2}u)\|_H^2=(1-a_1)\|u\|_H^2,\end{aligned}$$

где $1-a_1>0$. Лемма доказана. □

Предположим, что задача Коши (1.4) имеет решение $u(\cdot)$ (в смысле определения 1.1). Тогда по необходимости для начальных данных получим включения $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Перепишем уравнение из (1.4) в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A^{1/2}\Big(A^{1/2}u - \int\limits_0^t (A^{-1/2}C^*)\exp\big(-G(t-s)\big)(CA^{-1/2})A^{1/2}u(s)\,ds\Big) + f(t). \tag{2.11}$$

Отсюда и из леммы 2.3 следует, что функция $u(\cdot)$ будет также решением уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A^{1/2}\Big(A^{1/2}u - Q^*\int\limits_0^t \exp\big(-G(t-s)\big)QA^{1/2}u(s)\,ds\Big) + f(t). \tag{2.12}$$

По условию $A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$ (см. определение 1.1). Отсюда и из [3, гл. 1, §1, лемма 1.5] следует, что $(A^{1/2}u(t))' = A^{1/2}u'(t)$. Из этого соотношения и из $u^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ теперь можно вывести следующую форму интегрирования по частям:

$$\int\limits_0^t \exp\big(-G(t-s)\big)QA^{1/2}u(s)\,ds =$$

$$= G^{-1}QA^{1/2}u(t) - \exp(-Gt)G^{-1}QA^{1/2}u^0 - \int\limits_0^t \exp\big(-G(t-s)\big)G^{-1}QA^{1/2}u'(s)\,ds.$$

Преобразуем уравнение (2.12) с помощью полученной формулы. С учётом формулы для оператора T (см. лемму 2.3) из последнего соотношения получим, что (2.12) эквивалентно уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -A^{1/2}\Big(T^{1/2}(T^{1/2}A^{1/2}u) + Q^*\exp(-Gt)G^{-1}QA^{1/2}u^0 +$$

$$+ Q^*G^{-1/2}\int\limits_0^t \exp\big(-G(t-s)\big)G^{-1/2}QA^{1/2}u'(s)\,ds\Big) + f(t). \tag{2.13}$$

Определим функции

$$z(t) := u'(t), \quad v(t) := T^{1/2}A^{1/2}u(t), \quad w(t) := \int\limits_0^t \exp\big(-G(t-s)\big)G^{-1/2}QA^{1/2}u'(s)\,ds. \tag{2.14}$$

Функции $z(\cdot)$, $v(\cdot)$, очевидно, непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Относительно функции $w(\cdot)$ докажем следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Фиксируем произвольное $\tau > 0$. Пусть $A^{1/2}u' \in C([0,\tau]; H)$, тогда функция $w(\cdot)$, определённая в (2.14), является решением (в смысле определения 2.1) следующей задачи Коши:*

$$\frac{dw}{dt} = -Gw + G^{-1/2}QA^{1/2}u'(t), \quad w(0) = 0. \tag{2.15}$$

Доказательство.

1) Пусть $A^{1/2}u' \in C([0,\tau]; H)$. Тогда $A^{1/2}u' \in L_1([0,\tau]; H)$ и из [15, гл. 1, §3, п. 3.1, предложение 3.1.16] следует, что функция $w(\cdot)$, определённая в (2.14), является *слабым решением* (*mild solution*, см. [15, гл. 1, §3, п. 3.1]) задачи Коши (2.15). Теперь из $A^{1/2}u' \in C([0,\tau]; H)$ и [15, гл. 1, §3, п. 3.1, предложение 3.1.15] следует, что слабое решение $w(\cdot)$ тогда и только тогда будет решением задачи Коши (2.15) в смысле определения 2.1, когда $w \in C^1([0,\tau]; H)$.

2) Для дальнейшего понадобится вспомогательное соотношение. Пусть $h \in C([0,\tau]; H)$, тогда

$$\max_{s\in[0,\tau]} \|\big(\exp(-Gt) - I\big)h(s)\|_H \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow +0). \tag{2.16}$$

Допустим, что (2.16) не имеет места. Тогда существуют числовые последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,\tau]$ такие, что $t_k \longrightarrow +0$ и $\|\big(\exp(-Gt_k) - I\big)h(s_k)\|_H \not\longrightarrow 0$ $(k \longrightarrow \infty)$. Поскольку последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена, можно считать, что она сходится. Иначе ограничимся её сходящейся подпоследовательностью. Итак, $s_k \longrightarrow s_0 \in [0,\tau]$ $(k \longrightarrow \infty)$. Далее имеем

$$\begin{aligned}\|\big(\exp(-Gt_k) - I\big)h(s_k)\|_H &\leqslant \|\big(\exp(-Gt_k) - I\big)\big(h(s_k) - h(s_0)\big)\|_H + \|\big(\exp(-Gt_k) - I\big)h(s_0)\|_H \leqslant \\ &\leqslant \|\big(\exp(-Gt_k) - I\big)\|_{\mathcal{L}(H)}\|h(s_k) - h(s_0)\|_H + \|\big(\exp(-Gt_k) - I\big)h(s_0)\|_H \leqslant \\ &\leqslant 2\|h(s_k) - h(s_0)\|_H + \|\big(\exp(-Gt_k) - I\big)h(s_0)\|_H \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty)\end{aligned}$$

в силу непрерывности функции $h(\cdot)$ и сильной непрерывности в нуле полугруппы $\exp(-Gt)$. Полученное противоречие доказывает (2.16).

3) Итак, докажем, что $w \in C^1([0,\tau];H)$. Вычислим формально производную функции $w(\cdot)$ и покажем, что она непрерывна:

$$w'(t) = G^{-1/2}QA^{1/2}u'(t) - \int\limits_0^t G^{1/2}\exp\big(-G(t-s)\big)QA^{1/2}u'(s)\,ds. \tag{2.17}$$

Функция $G^{-1/2}QA^{1/2}u'(\cdot)$, очевидно, непрерывна на $[0,\tau]$, так как $G^{-1/2}Q \in \mathcal{L}(H,H_0)$ и по условию леммы $A^{1/2}u' \in C([0,\tau];H)$. Покажем, что свёртка в (2.17) непрерывна на $[0,\tau]$. Фиксируем $t_0 \in (0,\tau]$. С использованием оценки $\|G^{\alpha}\exp(-Gt)\|_{\mathcal{L}(H_0)} \leqslant C_{\alpha}t^{-\alpha}\exp(-\omega t)$ $(\alpha \geqslant 0,\ C_{\alpha} > 0,\ \omega > 0)$ для любого $t > 0$ (см. [10, гл. 1, §1.3, теорема 1.4.3]) и (2.16) для $0 \leqslant t < t_0$ найдём, что

$$\begin{aligned}&\Big\|\int\limits_0^t G^{1/2}\exp\big(-G(t-s)\big)QA^{1/2}u'(s)\,ds - \int\limits_0^{t_0} G^{1/2}\exp\big(-G(t_0-s)\big)QA^{1/2}u'(s)\,ds\Big\|_{H_0} = \\ &\quad= \Big\|\int\limits_0^t G^{1/2}\big(e^{-G(t-s)} - e^{-G(t_0-s)}\big)QA^{1/2}u'(s)\,ds - \int\limits_t^{t_0} G^{1/2}e^{-G(t_0-s)}QA^{1/2}u'(s)\,ds\Big\|_{H_0} = \\ &\quad= \Big\| - \int\limits_0^t G^{1/2}e^{-G(t-s)}\big(e^{-G(t_0-t)} - I\big)QA^{1/2}u'(s)\,ds - \int\limits_t^{t_0} G^{1/2}e^{-G(t_0-s)}QA^{1/2}u'(s)\,ds\Big\|_{H_0} \leqslant \\ &\quad\leqslant \max_{s\in[0,\tau]}\big\|\big(e^{-G(t_0-t)} - I\big)QA^{1/2}u'(s)\big\|_{H_0}\int\limits_0^t C_{1/2}(t-s)^{-1/2}e^{-\omega(t-s)}\,ds + \\ &\qquad\qquad + \max_{s\in[0,\tau]}\big\|QA^{1/2}u'(s)\big\|_{H_0}\int\limits_t^{t_0} C_{1/2}(t_0-s)^{-1/2}e^{-\omega(t_0-s)}\,ds \leqslant \\ &\quad\leqslant 2C_{1/2}t^{1/2}\max_{s\in[0,\tau]}\big\|\big(e^{-G(t_0-t)} - I\big)QA^{1/2}u'(s)\big\|_{H_0} + \\ &\qquad\qquad + 2C_{1/2}(t_0-t)^{1/2}\max_{s\in[0,\tau]}\big\|QA^{1/2}u'(s)\big\|_{H_0} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow t_0 - 0).\end{aligned}$$

Таким образом, свёртка непрерывна в точке t_0 слева.

Фиксируем теперь $t_0 \in [0,\tau)$. Вычислениями, аналогичными проведенным выше, показывается, что свёртка непрерывна в точке t_0 справа. Таким образом, $w \in C^1([0,\tau];H)$. Лемма доказана. □

Из (2.13), (2.14) и леммы 2.4 следует, что функции $z(\cdot)$, $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ удовлетворяют следующей системе уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dt} = -A^{1/2}\big(T^{1/2}v + Q^*G^{-1/2}w + Q^*\exp(-Gt)G^{-1}QA^{1/2}u^0\big) + f(t), \\ \dfrac{dv}{dt} = -\big(-T^{1/2}A^{1/2}z\big), \\ \dfrac{dw}{dt} = -\big(-G^{-1/2}QA^{1/2}z + Gw\big),\end{cases} \tag{2.18}$$

$$z(0)=u^1,\quad v(0)=T^{1/2}A^{1/2}u^0,\quad w(0)=0.$$

Перепишем систему (2.18) в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}:=H\oplus H\oplus H_0$:

$$\frac{d\xi}{dt}=-\mathcal{A}\big(\xi+\xi(u^0,t)\big)+\mathcal{F}(t),\quad \xi(0)=\xi^0. \tag{2.19}$$

Оператор $\mathcal{A}$ и его естественная область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ имеют следующий вид:

$$\mathcal{A}:=\begin{pmatrix}A^{1/2}&0&0\\0&I&0\\0&0&G^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&T^{1/2}&Q^*G^{-1}\\-T^{1/2}&0&0\\-G^{-1}Q&0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{1/2}&0&0\\0&I&0\\0&0&G^{1/2}\end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}):=\big\{\xi=(z;v;w)^\intercal\in\mathcal{H}:z\in\mathcal{D}(A^{1/2}),\ \ T^{1/2}v+Q^*G^{-1/2}w\in\mathcal{D}(A^{1/2}),\ \ w\in\mathcal{D}(G)\big\},$$

$$\xi^0:=(u^1;T^{1/2}A^{1/2}u^0;0)^\intercal,\ \ \xi(u^0,t):=(0;T^{-1/2}Q^*\exp(-Gt)G^{-1}QA^{1/2}u^0;0)^\intercal,\ \ \mathcal{F}(t):=(f(t);0;0)^\intercal.$$

Осуществим в задаче (2.19) замену $\zeta(t):=\xi(t)+\xi(u^0,t)$. В результате получим следующую основную задачу Коши:

$$\frac{d\zeta}{dt}=-\mathcal{A}\zeta+\xi'(u^0,t)+\mathcal{F}(t),\quad \zeta(0)=\xi^0+\xi(u^0,0). \tag{2.21}$$

2.2.2. Частный случай, выполнены гипотезы $1''$), $2''$). Пусть теперь выполнены гипотезы $1''$) и $2''$), а ядро интегрального возмущения в (1.4) и оператор-функция $M(\cdot)$ из (1.3) имеют вид (1.9) и (1.10) соответственно. Определим операторы $Q_l:=C_lA^{-1/2}\in\mathcal{L}(H,H_l)$ $(l=1,2)$ и $T:=M(0)$. Имеет место лемма, аналогичная лемме 2.3.

Лемма 2.5. *Имеет место формула* $Q_l^*|_{\mathcal{D}(C_l^*)}=A^{-1/2}C_l^*$ $(l=1,2)$, *операторы* T *и* $Q_1^*Q_1$ *положительно определены в гильбертовом пространстве* H.

Доказательство. В доказательстве здесь нуждается только положительная определённость оператора $Q_1^*Q_1$. Действительно, с учётом гипотезы $2''$) (см. (1.7)) для любого $u\in H$ имеем

$$(Q_1^*Q_1u,u)_H=\|Q_1u\|_{H_1}^2=\|C_1(A^{-1/2}u)\|_{H_1}^2\geqslant a_2\|A^{1/2}(A^{-1/2}u)\|_H^2=a_2\|u\|_H^2,$$

где $a_2>0$. Лемма доказана. □

Далее проводятся рассуждения, аналогичные проведенным выше при переходе от (2.11) к (2.18). Система (2.18) переписывается в виде (2.19). При этом в (2.20) для сокращения записи введены обозначения:

$$w:=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\in H_0:=H_1\oplus H_2,\quad Q:=\begin{pmatrix}Q_1\\Q_2\end{pmatrix},\quad G:=\operatorname{diag}(G_1,G_2),\quad \mathcal{D}(G)=H_1\oplus\mathcal{D}(G_2). \tag{2.22}$$

После соответствующей замены в (2.19) снова приходим к задаче (2.21).

2.3. Свойства оператора $\mathcal{A}$.

2.3.1. Общий случай, выполнены гипотезы $1'$), $2'$), $3'$). В дальнейших вычислениях понадобятся факторизации Шура—Фробениуса операторных блоков с ограниченными операторными коэффициентами и формулы обращения этих блоков (см., например, [31, гл. 1, §1.6, предложение 1.6.2]).

Замечание 2.2. Пусть E_1, E_2 банаховы пространства, $A_{kl}\in\mathcal{L}(E_l,E_k)$ $(k,l=1,2)$, $A_{22}^{-1}\in\in\mathcal{L}(E_2)$, $D_1:=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$. Если $D_1^{-1}\in\mathcal{L}(E_1)$, то существует

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}^{-1}&=\left[\begin{pmatrix}I&A_{12}A_{22}^{-1}\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1&0\\0&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\A_{22}^{-1}A_{21}&I\end{pmatrix}\right]^{-1}=\\&=\begin{pmatrix}D_1^{-1}&-D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\-A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1}&A_{22}^{-1}\big(A_{22}+A_{21}D_1^{-1}A_{12}\big)A_{22}^{-1}\end{pmatrix}\in\mathcal{L}(E_1\times E_2).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Пусть $A_{11}^{-1}\in\mathcal{L}(E_1)$, $D_2:=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Если $D_2^{-1}\in\mathcal{L}(E_2)$, то существует

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\left[\begin{pmatrix}I&0\\A_{21}A_{11}^{-1}&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&0\\0&D_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&A_{11}^{-1}A_{12}\\0&I\end{pmatrix}\right]^{-1}=$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}\bigl(A_{11}+A_{12}D_2^{-1}A_{21}\bigr)A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1} \\ -D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & D_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1\times E_2). \tag{2.24}$$

Лемма 2.6. *Оператор $-\mathcal{A}$ является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы. Кроме того, существует $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ и справедливо представление*

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & -T^{-1/2}Q^*G^{-1} \\ 0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -T^{-1/2} & 0 \\ T^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -G^{-1}QT^{-1/2} & G^{-1/2} \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

Доказательство.

1) Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ непрерывно обратим и выведем формулу (2.25). Отсюда будет следовать, что оператор $\mathcal{A}$ замкнут на своей естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Плотная определённость оператора $\mathcal{A}$ последует из формулы $\mathcal{H}=\overline{\operatorname{Im}\mathcal{A}^{-1}}\oplus\operatorname{Ker}(\mathcal{A}^{-1})^*$ ($\operatorname{Im}\mathcal{A}^{-1}$ — область значений оператора $\mathcal{A}^{-1}$) и равенства $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}^{-1})^*=\{0\}$.

Применим факторизацию (2.24) к обращению среднего операторного блока в разложении (2.20). С учётом $T^{-1}\in\mathcal{L}(H)$ (см. лемму 2.3) найдём, что существует

$$\begin{pmatrix} 0 & T^{1/2} & Q^*G^{-1} \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ -G^{-1}Q & 0 & I \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & G^{-1}QT^{-1/2} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & T^{1/2} & 0 \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & T^{-1/2}Q^*G^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\right]^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -T^{-1/2}Q^*G^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -T^{-1/2} & 0 \\ T^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -G^{-1}QT^{-1/2} & I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Отсюда и из (2.20) следует (2.25). Из (2.25) видно, что $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}^{-1})^*=\{0\}$, а значит, естественная область определения оператора $\mathcal{A}$ плотна в $\mathcal{H}$.

2) Покажем, что оператор $-\mathcal{A}$ является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы. Для этого достаточно установить, что оператор $-\mathcal{A}$ является замкнутым максимальным диссипативным оператором (см., например, [9, гл. 1, §4, п. 2, теорема 4.5]).

В 1) доказано, что оператор $\mathcal{A}$ плотно определён. Пусть $\xi=(z;v;w)^\intercal\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.20)), тогда $z\in\mathcal{D}(A^{1/2})$, $w\in\mathcal{D}(G)\subset\mathcal{D}(G^{1/2})$ и с использованием представления (2.20) найдём, что $\operatorname{Re}(-\mathcal{A}\xi,\xi)_{\mathcal{H}}=-\|A^{1/2}z\|_H^2-\|G^{1/2}w\|_{H_0}^2\leqslant 0$, то есть оператор $-\mathcal{A}$ диссипативен. Далее, из (2.25) следует, что $0\in\rho(\mathcal{A})$ ($\rho(\mathcal{A})$ — резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$). Учитывая, что $\rho(\mathcal{A})$ открытое множество, найдём, что $\rho(-\mathcal{A})\cap(0,+\infty)\neq\varnothing$. Следовательно (см., например, [9, гл. 1, §4, п. 2, теорема 4.3] или [24, гл. 1, §1.2, теорема 1.2.3]) замкнутый оператор $-\mathcal{A}$ максимален. Лемма доказана. □

Замечание 2.3. По лемме 2.6 оператор $\mathcal{A}$ плотно определён, замкнут и $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Из [8, гл. 3, §5, п. 5, теорема 5.30] следует, что $(\mathcal{A}^{-1})^*=(\mathcal{A}^*)^{-1}$. Отсюда и из (2.25) непосредственными вычислениями выводится формула

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -T^{1/2} & -Q^*G^{-1} \\ T^{1/2} & 0 & 0 \\ G^{-1}Q & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)=\bigl\{\xi=(z;v;w)^\intercal\in\mathcal{H}: z\in\mathcal{D}(A^{1/2}),\ \ T^{1/2}v+Q^*G^{-1/2}w\in\mathcal{D}(A^{1/2}),\ \ w\in\mathcal{D}(G)\bigr\}.$$

Лемма 2.7. *Имеет место следующая формула для резольвенты оператора $\mathcal{A}$:*

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ -\lambda^{-1}T^{1/2} & I & 0 \\ G^{-1/2}\mathcal{R}_\lambda(G)Q & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda M^{-1}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1}I & 0 \\ 0 & 0 & (I-\lambda G^{-1})^{-1} \end{pmatrix}\times$$

$$\times \begin{pmatrix} A^{-1/2} & \lambda^{-1}T^{1/2} & -Q^*\mathcal{R}_\lambda(G)G^{-1/2} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix}, \qquad (2.27)$$

при всех $\lambda \notin \sigma(M(\cdot)) \cup \sigma(G) \cup \{0\}$ (*здесь* $\sigma(M(\cdot))$, $\sigma(G)$ — *спектры операторного пучка* $M(\cdot)$ *и оператора* G *соответственно*).

Доказательство. Из факторизации (2.20) оператора $\mathcal{A}$ в симметричной форме имеем

$$\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda A^{-1} & T^{1/2} & Q^*G^{-1} \\ -T^{1/2} & -\lambda I & 0 \\ -G^{-1}Q & 0 & I - \lambda G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Применим факторизацию (2.23) к обращению среднего операторного блока в последнем разложении. При $\lambda \notin \sigma(G) \cup \{0\}$ найдём, что

$$\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\lambda^{-1}T^{1/2} & Q^*\mathcal{R}_\lambda(G) \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} D_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & I - \lambda G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \lambda^{-1}T^{1/2} & I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(G)Q & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}. \qquad (2.28)$$

Здесь оператор-функция $D_1(\cdot)$, с учётом (1.3), $Q = CA^{-1/2}$ и $T = M(0)$ (см. лемму 2.3), вычисляется следующим образом (см. (2.23)):

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= -\lambda A^{-1} - \begin{pmatrix} T^{1/2}, & Q^*G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda^{-1}I & 0 \\ 0 & (I - \lambda G^{-1})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T^{1/2} \\ -G^{-1}Q \end{pmatrix} = \\ &= -\lambda A^{-1} - \lambda^{-1}T + Q^*(G - \lambda I)^{-1}G^{-1}Q = \\ &= -\lambda A^{-1} - \lambda^{-1}(I - Q^*G^{-1}Q) + Q^*(G - \lambda I)^{-1}G^{-1}Q = \\ &= -\lambda^{-1}\big(I + \lambda^2 A^{-1} - (Q^*G^{-1}Q + \lambda Q^*(G - \lambda I)^{-1}G^{-1}Q)\big) = \\ &= -\lambda^{-1}\big(I + \lambda^2 A^{-1} - Q^*\big(I + \lambda(G - \lambda I)^{-1}\big)G^{-1}Q\big) = -\lambda^{-1}M(\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.28) следует (2.27). Лемма доказана. □

Лемма 2.8. *Пусть выполнены гипотезы* 1′), 2′), 3′). *Тогда сильно непрерывная полугруппа* $\mathcal{U}(t)$, *генерируемая оператором* $-\mathcal{A}$, *является сильно устойчивой, т. е.* $\|\mathcal{U}(t)\xi\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0$ *при* $t \longrightarrow +\infty$ *для любого* $\xi \in \mathcal{H}$. *При этом если* $i\beta \in \sigma(\mathcal{A})$ *при некотором* $\beta \in \mathbb{R}$, *то* $\beta^2 \in \sigma_{ess}(A)$.

Доказательство. Доказательство первой части леммы состоит в применении теоремы Арендта—Батти—Любича—Ву (см. [15, гл. 2, §5, п. 5.5, теорема 5.5.5] или [28, гл. 5, §5.1, теорема 5.1.5]): *если сильно непрерывная полугруппа* $\mathcal{U}(t)$ *с генератором* $-\mathcal{A}$ *равномерно ограничена, множество* $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ *счётно и* $\sigma_p(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$ (*см. замечание* 2.1), *то* $\mathcal{U}(t)$ *сильно устойчива.*

1) По лемме 2.6 сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$ равномерно ограничена (сжимающая).

2) Проверим, что оператор $\mathcal{A}$ не имеет собственных значений на мнимой оси. Допустим, что это не так, тогда существуют $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (по лемме 2.6 можно считать, что $\beta \neq 0$, так как $0 \in \rho(\mathcal{A})$) и $0 \neq \xi = (z; v; w)^\intercal \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ такие, что $(\mathcal{A} - i\beta\mathcal{I})\xi = 0$. С учётом (2.20) последнее соотношение запишем в виде

$$\begin{cases} A^{1/2}(T^{1/2}v + Q^*G^{-1/2}w) - i\beta z = 0, \\ -T^{1/2}A^{1/2}z - i\beta v = 0, \\ -G^{-1/2}QA^{1/2}z + Gw - i\beta w = 0. \end{cases} \qquad (2.29)$$

Умножим правую и левую части первого, второго и третьего уравнений системы (2.29) на z справа, v слева и w слева соответственно. Просуммируем полученные соотношения и с использованием включений $z \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $w \in \mathcal{D}(G) \subset \mathcal{D}(G^{1/2})$, следующих из $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.20)), получим, что $\|G^{1/2}w\|^2_{H_0} + i\beta(-\|z\|^2_H + \|v\|^2_H + \|w\|^2_{H_0}) = 0$. Выделяя действительную часть из последнего соотношения и используя положительную определённость оператора G, найдём, что

$w = 0$. Теперь из первого уравнения в (2.29) следует, что $T^{1/2}v \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, а из второго, следовательно, что $TA^{1/2}z \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Применяя к левой и правой части второго уравнения в (2.29) оператор $T^{1/2}$, а затем $A^{1/2}$ найдём, что $A^{1/2}TA^{1/2}z = \beta^2 z$. Отсюда, из $T = M(0) = I - Q^*G^{-1}Q$ (см. (1.3)) и третьего соотношения в (2.29) ($G^{-1/2}QA^{1/2}z = G^{-1/2}Cz = 0$) получим, что $Az = \beta^2 z$. Таким образом, $z \in \{0 \neq u \in \mathcal{D}(A) : \exists\lambda > 0 : Au = \lambda u\} \cap \operatorname{Ker} C$, однако в силу гипотезы $3''$) последнее множество пусто, а значит, $z = 0$. Теперь из второго уравнения в (2.29) следует, что $v = 0$. Следовательно, $\xi = 0$, а значит, число $i\beta$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

3) Покажем, что множество $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ не более чем счётно. Точнее, если $i\beta \in \sigma(\mathcal{A})$ при некотором $\beta \in \mathbb{R}$, то $\beta^2 \in \sigma_{ess}(A)$.

Вычислениями, аналогичными проведенным выше в 2), показывается, что оператор $\mathcal{A}^*$ (см. замечание 2.3 и (2.26)) не имеет собственных значений на мнимой оси. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ не имеет остаточного спектра на мнимой оси.

Предположим, что $i\beta$ ($\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) — точка непрерывного спектра оператора $\mathcal{A}$. Тогда, поскольку $\operatorname{Im}(\mathcal{A} - i\beta\mathcal{I})$ плотно в $\mathcal{H}$, аппроксимативная степень вырождения и аппроксимативный дефект оператора $\mathcal{A} - i\beta\mathcal{I}$ равны бесконечности (см. [8, гл. 4, §5, п. 2, теорема 5.10]). По теореме Вольфа (см. [32] или [8, гл. 4, §5, п. 2, теорема 5.11]) существует последовательность нормированных к единице элементов $\{\xi_k = (z_k; v_k; w_k)^\intercal\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, не содержащая сходящуюся подпоследовательность и такая, что $\|(\mathcal{A} - i\beta\mathcal{I})\xi_k\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$. С учётом (2.20) последнее соотношение запишем в виде (см. (2.29))

$$\begin{cases} A^{1/2}(T^{1/2}v_k + Q^*G^{-1/2}w_k) - i\beta z_k = o(1), \\ -T^{1/2}A^{1/2}z_k - i\beta v_k = o(1), \\ -G^{-1/2}QA^{1/2}z_k + Gw_k - i\beta w_k = o(1) \quad (k \longrightarrow \infty), \\ \|\xi_k\|_{\mathcal{H}}^2 = \|z_k\|_H^2 + \|v_k\|_H^2 + \|w_k\|_{H_0}^2 = 1, \end{cases} \tag{2.30}$$

где под $o(1)$ понимается бесконечно малая последовательность элементов в соответствующем пространстве. Как и при исследовании (2.29), умножим левую и правую части первого, второго и третьего уравнений системы из (2.30) на z_k справа, v_k слева и w_k слева соответственно. Просуммируем полученные соотношения и с использованием включений $z_k \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $w_k \in \mathcal{D}(G) \subset \mathcal{D}(G^{1/2})$, следующих из $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.20)), получим, что

$$\|G^{1/2}w_k\|_{H_0}^2 + i\beta\big(-\|z_k\|_H^2 + \|v_k\|_H^2 + \|w_k\|_{H_0}^2\big) \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty).$$

Отсюда и из нормировочного соотношения в (2.30) следует, что

$$\|z_k\|_H^2 \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad \|v_k\|_H^2 \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad \|w_k\|_{H_0}^2 \leqslant \omega_G^{-1}\|G^{1/2}w_k\|_{H_0}^2 \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty). \tag{2.31}$$

Выразим v_k из второго соотношения в (2.30) и подставим его в первое соотношение. Преобразованное первое соотношение и третье примут следующий вид:

$$\begin{cases} A^{1/2}\big(-TA^{1/2}z_k + i\beta Q^*G^{-1/2}w_k + o(1)\big) + i\beta^2 z_k = o(1), \\ G^{-1/2}QA^{1/2}z_k + i\beta w_k = Gw_k + o(1) \quad (k \longrightarrow \infty). \end{cases}$$

Вспоминая, что $T = M(0) = I - Q^*G^{-1}Q$ (см. (1.3)), преобразуем здесь первое соотношение с помощью второго. Получим, что

$$(A^{-1} - \beta^{-2}I)z_k = o(1) \quad (k \longrightarrow \infty). \tag{2.32}$$

Рассмотрим различные варианты расположения точки β.

Предположим, что $\beta^2 \in \rho(A)$. Тогда из (2.32) получим, что $\|z_k\|_H \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$. Приходим к противоречию с (2.31).

Предположим теперь, что β^2 изолированное конечнократное собственное значение оператора A, или, что то же, β^{-2} изолированное конечнократное собственное значение оператора A^{-1}. Обозначим через P_{β^2} ортогональный проектор пространства H на $\operatorname{Ker}(A^{-1} - \beta^{-2}I)$. Применяя P_{β^2} и

$P_{\beta^2}^{\perp}$ к левой и правой части соотношения (2.32), найдём, что $\|P_{\beta^2}^{\perp} z_k\|_H \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$, а последовательность $\{P_{\beta^2} z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \operatorname{Ker}(A^{-1} - \beta^{-2} I)$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Последнее следует из ограниченности последовательности и $\dim \operatorname{Ker}(A^{-1} - \beta^{-2} I) < \infty$. Итак, предположим, что $P_{\beta^2} z_{k_l} \longrightarrow z$ при $l \longrightarrow \infty$. Тогда и предыдущего получим, что $z_{k_l} \longrightarrow z$ при $l \longrightarrow \infty$. Из первого соотношения в (2.30) теперь получим, что $v_{k_l} \longrightarrow i\beta T^{-1/2} A^{-1/2} z$ при $l \longrightarrow \infty$. Таким образом, последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, что противоречит исходному предположению.

Таким образом, β^2 может лежать только в $\sigma_{ess}(A)$, а это множество не более чем счётно по гипотезе $3'$). Итак, множество $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ не более чем счётно. Применение теоремы Арендта—Батти—Любича—Ву завершает доказательство леммы. □

2.3.2. Частный случай, выполнены гипотезы $1''$), $2''$). В рассматриваемом случае имеют место леммы 2.6 и 2.7. Докажем утверждение об устойчивости полугруппы.

Лемма 2.9. *Пусть выполнены гипотезы* $1''$), $2''$). *Сильно непрерывная полугруппа* $\mathcal{U}(t)$, *генерируемая оператором* $-\mathcal{A}$, *является равномерно экспоненциально устойчивой, т. е. существуют* $\omega > 0$ *и* $M \geqslant 1$ *такие, что*

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant M e^{-\omega t} \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{2.33}$$

Доказательство. Доказательство леммы состоит в применении теоремы Герхарта (см. [22] или [19, гл. 5, §1, теорема 1.11]). Точнее, применяется утверждение, эквивалентное указанной теореме в случае, когда сильно непрерывная полугруппа является сжимающей (см. [24, гл. 1, §1.3, теорема 1.3.2]): *сильно непрерывная сжимающая полугруппа на гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *равномерно экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда* $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ *и*

$$\sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})^{-1}\|_{\mathcal{H}} < \infty. \tag{2.34}$$

1) По лемме 2.6 сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$ является сжимающей.

2) Покажем, что $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

Проверим, что оператор $\mathcal{A}$ не имеет собственных значений на мнимой оси. Рассуждая как в лемме 2.8, придём к системе (2.29), затем и к равенству $w = 0$. Теперь из третьего уравнения в (2.29), с учётом (1.8) и обозначения $Q_l = C_l A^{-1/2}$ (см. лемму 2.5), получим следующие соотношения: $-G_l^{1/2} C_l z = 0$ $(l = 1, 2)$. Отсюда и из гипотезы $2''$) (см. (1.7)) следует, что $z = 0$. Теперь из второго уравнения в (2.29) и условия $\beta \neq 0$ найдём, что $v = 0$. Следовательно, $\xi = 0$, а значит, число $i\beta$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

Далее как и в лемме 2.8 заключаем, что оператор $\mathcal{A}$ не имеет остаточного спектра на $i\mathbb{R}$.

Предположим, что $i\beta$ $(\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ — точка непрерывного спектра оператора $\mathcal{A}$. Рассуждая как в лемме 2.8, придём к системе (2.30) и к соотношениям (2.31).

Учитывая (2.22), обозначим $w_k := (w_{1k}; w_{2k})^{\intercal}$ и распишем третье уравнение в (2.30) в виде

$$-G_l^{-1/2} Q_l A^{1/2} z_k + G_l w_{lk} - i\beta w_{lk} = o(1) \quad (k \longrightarrow \infty), \quad l = 1, 2. \tag{2.35}$$

Учитывая $\|w_k\|_{H_0}^2 = \|w_{1k}\|_{H_1}^2 + \|w_{2k}\|_{H_2}^2 \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$, а также $G_1, G_1^{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$, из (2.35) при $l = 1$ найдём, что

$$\begin{aligned} \|w_{1k} - (G_1 - i\beta I)^{-1} o(1)\|_{H_1}^2 &= \|(G_1 - i\beta I)^{-1} Q_1 A^{1/2} z_k\|_{H_1}^2 = \\ &= \big((G_1^2 + \beta^2 I)^{-1} Q_1 A^{1/2} z_k, Q_1 A^{1/2} z_k\big)_{H_1} \geqslant \gamma\big((G_1^2 + \beta^2)^{-1}\big) \cdot \gamma(Q_1^* Q_1) \cdot \|A^{1/2} z_k\|_H^2, \end{aligned}$$

где $\gamma\big((G_1^2 + \beta^2)^{-1}\big) > 0$, $\gamma(Q_1^* Q_1) \geqslant a_2 > 0$ (см. лемму 2.5) — нижние грани соответствующих операторов. Из последнего соотношения теперь найдем, что

$$\|A^{1/2} z_k\|_H^2 \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty).$$

Отсюда и из второго соотношения в системе (2.30) теперь получим противоречие с (2.31):

$$\begin{aligned} \|v_k\|_H^2 = \big\|i\beta^{-1}\big(T^{1/2} A^{1/2} z_k + o(1)\big)\big\|_H^2 &\leqslant 2\beta^{-2}\big(\|T^{1/2} A^{1/2} z_k\|_H^2 + \|o(1)\|_H^2\big) \leqslant \\ &\leqslant 2\beta^{-2}\big(\|T^{1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \|A^{1/2} z_k\|_H^2 + \|o(1)\|_H^2\big) \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty). \end{aligned}$$

Из проведенных вычислений следует, что $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

3) Докажем оценку (2.34). Допустим, что (2.34) не верно. Тогда существует последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и последовательность элементов $\{\xi_k = (z_k; v_k; w_k)^\intercal\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ такие, что

$$|\beta_k| > 0, \quad \|\xi_k\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad |\beta_k| \longrightarrow \infty, \quad \|(\mathcal{A} - i\beta_k \mathcal{I})\xi_k\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty).$$

С учётом (2.20) последнее соотношение запишем в виде (см. (2.29), (2.30))

$$\begin{cases} A^{1/2}(T^{1/2}v_k + Q^*G^{-1/2}w_k) - i\beta_k z_k = o(1), \\ -T^{1/2}A^{1/2}z_k - i\beta_k v_k = o(1), \\ -G^{-1/2}QA^{1/2}z_k + Gw_k - i\beta_k w_k = o(1) \quad (k \longrightarrow \infty), \\ \|\xi_k\|_{\mathcal{H}}^2 = \|z_k\|_H^2 + \|v_k\|_H^2 + \|w_k\|_{H_0}^2 = 1. \end{cases} \tag{2.36}$$

Рассуждая как при исследовании системы (2.30), придём к соотношениям (2.31) и аналогу (2.35):

$$-G_l^{-1/2}Q_l A^{1/2}z_k + G_l w_{lk} - i\beta_k w_{lk} = o(1) \quad (k \longrightarrow \infty), \quad l = 1, 2.$$

Отсюда при $l = 1$ как и выше найдём, что

$$\begin{aligned} \|w_{1k} - (G_1 - i\beta_k I)^{-1}o(1)\|_{H_1}^2 &= \|(G_1 - i\beta_k I)^{-1}Q_1 A^{1/2}z_k\|_{H_1}^2 = \\ = \big((G_1^2 + \beta_k^2 I)^{-1}Q_1 A^{1/2}z_k, Q_1 A^{1/2}z_k\big)_{H_1} &= \beta_k^{-2}\big((I + \beta_k^{-2}G_1^2)^{-1}Q_1 A^{1/2}z_k, Q_1 A^{1/2}z_k\big)_{H_1} \geqslant \\ &\geqslant \gamma\big((I + \beta_k^{-2}G_1^2)^{-1}\big) \cdot \gamma(Q_1^*Q_1) \cdot \beta_k^{-2}\|A^{1/2}z_k\|_H^2, \end{aligned}$$

где $\gamma(Q_1^*Q_1) \geqslant a_2 > 0$, $\gamma\big((I + \beta_k^{-2}G_1^2)^{-1}\big) \geqslant \gamma_0 > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, поскольку $0 < |\beta_k| \longrightarrow \infty$. Из последнего соотношения теперь найдем, что

$$\beta_k^{-2}\|A^{1/2}z_k\|_H^2 \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty).$$

Отсюда и из второго соотношения в системе (2.36) теперь получим противоречие с (2.31):

$$\begin{aligned} \|v_k\|_H^2 = \big\|i\beta_k^{-1}\big(T^{1/2}A^{1/2}z_k + o(1)\big)\big\|_H^2 &\leqslant 2\beta_k^{-2}\big(\|T^{1/2}A^{1/2}z_k\|_H^2 + \|o(1)\|_H^2\big) \leqslant \\ &\leqslant 2\beta_k^{-2}\big(\|T^{1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}^2\|A^{1/2}z_k\|_H^2 + \|o(1)\|_H^2\big) \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

2.4. Доказательство теорем 1.1, 1.2.

2.4.1. Общий случай, выполнены гипотезы 1′), 2′), 3′). В следующих двух леммах докажем утверждения 1) и 2) теоремы 1.1.

Лемма 2.10. *Если* $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, *то задача Коши* (1.4) *имеет единственное решение* (*в смысле определения* 1.1).

Доказательство.

1) Покажем, что из условий леммы следует однозначная разрешимость задачи Коши (2.21). Будем искать решение задачи Коши (2.21) в виде $\zeta(t) = \zeta_1(t) + \zeta_2(t)$, где $\zeta_1(\cdot)$, $\zeta_2(\cdot)$ — решения следующих начальных задач:

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = -\mathcal{A}\zeta_1 + \mathcal{F}(t), \quad \zeta_1(0) = \xi^0 + \xi(u^0, 0), \tag{2.37}$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = -\mathcal{A}\zeta_2 + \xi'(u^0, t), \quad \zeta_2(0) = 0. \tag{2.38}$$

Проверим выполнение условий п. 2° теоремы [9, гл. 1, §6, теорема 6.5] о разрешимости задачи Коши (2.37) (см. также условие п. (*ii*) теоремы [3, гл. 2, §1, теорема 1.3]). Из (1.8), (2.20) и леммы 2.3 найдём, что

$$\begin{aligned} \zeta_1(0) = \xi^0 + \xi(u^0, 0) &= (u^1; T^{1/2}A^{1/2}u^0; 0)^\intercal + (0; T^{-1/2}Q^*G^{-1}QA^{1/2}u^0; 0)^\intercal = \\ &= (u^1; T^{-1/2}\big((I - Q^*G^{-1}Q)A^{1/2}u^0 + Q^*G^{-1}QA^{1/2}u^0\big); 0)^\intercal = (u^1; T^{-1/2}A^{1/2}u^0; 0)^\intercal \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

так как (см. определение области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ в (2.20))

$$u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad T^{1/2}(T^{-1/2}A^{1/2}u^0) + Q^*G^{-1/2}0 = A^{1/2}u^0 = A^{-1/2}(Au^0) \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad 0 \in \mathcal{D}(G).$$

Далее, если $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, то, очевидно, $\mathcal{F} = (f; 0; 0)^\intercal \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Таким образом, задача Коши (2.37) имеет единственное решение в смысле определения 2.1.

Проверим теперь выполнение условий п. 1° теоремы [9, гл. 1, §6, теорема 6.5] о разрешимости задачи Коши (2.38) (см. также условие п. (i) теоремы [3, гл. 2, §1, теорема 1.3]). Очевидно, что $\zeta_2(0) = 0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Покажем, что $\xi'(u^0, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{A}\xi'(u^0, \cdot) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Из (2.20) найдём, что $\xi'(u^0, t) = (0; T^{-1/2}Q^* \exp(-Gt)QA^{1/2}u^0; 0)^\intercal$. Отсюда, учитывая гипотезу $1'$), формулу для $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.20)) и $Q = CA^{-1/2}$ (см. лемму 2.3), имеем при любом $t \in \mathbb{R}_+$

$$0 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad T^{1/2}(T^{-1/2}Q^* \exp(-Gt)QA^{1/2}u^0) + Q^*G^{-1/2}0 = Q^*|_{\mathcal{D}(C^*)} \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0) =$$
$$= A^{-1/2}C^* \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0) \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad 0 \in \mathcal{D}(G),$$

т. е. $\xi'(u^0, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Теперь непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathcal{A}\xi'(u^0, t) = (0; C^* \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0); 0)^\intercal$$

— непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция со значениями в $\mathcal{H}$. Таким образом, задача Коши (2.38), а значит, и задача Коши (2.21), имеет единственное решение в смысле определения 2.1.

2) Пусть $\zeta(\cdot)$ — (единственное) решение задачи Коши (2.21). Введём функцию $\xi(t) := \zeta(t) - \xi(u^0, t)$. Тогда $\xi(\cdot)$ есть решение задачи Коши (2.19) в том смысле, что $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) + \xi(u^0, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{A}(\xi + \xi(u^0, \cdot)) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнено начальное условие и уравнение из (2.19). Последнее эквивалентно тому, что функции $z(\cdot)$, $v(\cdot)$, $w(\cdot)$, являющиеся координатами функции $\xi(\cdot) = (z(\cdot); v(\cdot); w(\cdot))^\intercal$, удовлетворяют включениям

$$\begin{aligned} &z, v \in C^1(\mathbb{R}_+; H), \quad w \in C^1(\mathbb{R}_+; H_0), \quad Gw \in C(\mathbb{R}_+; H_0), \\ &A^{1/2}z \in C(\mathbb{R}_+; H), \quad A^{1/2}(T^{1/2}v + Q^*G^{-1/2}w) \in C(\mathbb{R}_+; H) \end{aligned} \tag{2.39}$$

и являются решением системы (2.18).

Введём функцию $u(t) := A^{-1/2}T^{-1/2}v(t)$, исходя из формул (2.14), и покажем, что эта функция и есть (единственное) решение исходной задачи Коши (1.4).

Из второго уравнения в (2.18) следует, что $u'(t) = z(t)$, а значит, $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$ (см. (2.39)). Кроме того, из (2.39) следует, что $u'(t) = z(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Из равенства $u'(t) = z(t)$ следует также, что $u'(0) = z(0) = u^1$, а из определения функции $u(\cdot)$, что $u(0) = A^{-1/2}T^{-1/2}v(0) = A^{-1/2}T^{-1/2}(T^{1/2}A^{1/2}u^0) = u^0$, то есть начальные условия в (1.4) выполнены. Осталось показать, что $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $Au \in C(\mathbb{R}_+; H)$ и $u(\cdot)$ удовлетворяет уравнению из (1.4).

Итак, учитывая $z(t) = u'(t)$, найдём из третьего соотношения в (2.18) функцию w (см. (2.14)):

$$w(t) = \int_0^t \exp\big(-G(t-s)\big)G^{-1/2}QA^{1/2}u'(s)\,ds.$$

Подставляя найденные $w(t)$, $z(t) = u'(t)$, $v(t) = T^{1/2}A^{1/2}u(t)$ в первое соотношение в (2.18), получим, что функция $u(\cdot)$ есть решение уравнения (2.13). Поскольку $A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$ и $u^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$, можем осуществить обратный переход от (2.13) к уравнению (2.12). Из (2.12) теперь получим, что на $\mathbb{R}_+$ непрерывна функция

$$A\Big(u(t) + \int_0^t R(t-s)u(s)\,ds\Big), \quad \text{где} \quad R(t) := A^{-1/2}Q^* \exp(-Gt)QA^{1/2}. \tag{2.40}$$

Это утверждение перепишем в следующей эквивалентной форме:

$$u(t) + \int_0^t R(t-s)u(s)\,ds = g(t), \quad Ag \in C(\mathbb{R}_+; H). \tag{2.41}$$

Определим на $\mathcal{D}(A)$ норму $\|u\|_{E(A)} := \|Au\|_H$, эквивалентную норме графика, и превратим его таким образом в банахово пространство $E(A)$. Тогда (2.41) можно рассматривать как уравнение Вольтерра второго рода в $E(A)$.

Покажем, что оператор-функция $R(t)$ сильно непрерывна на $\mathbb{R}_+$ со значениями в $E(A)$. Для любого $u \in E(A) = \mathcal{D}(A)$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ с учётом $Q = CA^{-1/2}$, леммы 2.3, (2.40) и гипотезы 1′) имеем

$$\|R(t)u\|_{E(A)} = \big\|A^{1/2}Q^* \exp(-Gt)QA^{-1/2}(Au)\big\|_H = \big\|A^{1/2}Q^*|_{\mathcal{D}(C^*)} \exp(-Gt)CA^{-1}(Au)\big\|_H =$$
$$= \big\|C^* \exp(-Gt)CA^{-1}(Au)\big\|_H \leqslant \big\|C^* \exp(-Gt)CA^{-1}\big\|_{\mathcal{L}(H)} \cdot \|u\|_{E(A)},$$

$$\|R(t)u - R(t_0)u\|_{E(A)} = \big\|\big(C^* \exp(-Gt)CA^{-1} - C^* \exp(-Gt_0)CA^{-1}\big)(Au)\big\|_H \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow t_0).$$

Из проведенных вычислений следует, что уравнение (2.41) имеет единственное решение $u \in C(\mathbb{R}_+; E(A))$. Последнее означает, что $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $Au \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Отсюда следует, что в (2.12) можно раскрыть скобки и заменить Q^* на $Q^*|_{\mathcal{D}(C^*)} = A^{-1/2}C^*$. Таким образом, функция $u(\cdot)$ — (единственное) решение уравнения (2.11). Лемма доказана. □

Лемма 2.11. *Пусть функция $f(\cdot)$ имеет вид* (1.5)*, где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ $(k = \overline{0,n})$.*
Если $g, f_k' \in L_1(\mathbb{R}_+; H)$ $(k = \overline{0,n})$ и $\sigma_k^2 \notin \sigma_{ess}(A)$ $(k = \overline{1,n})$, то имеет место соотношение (1.6).

Доказательство.

1) По (единственному) решению задачи Коши (1.4) построим решение задачи Коши (2.21). Если функция $f(\cdot)$ имеет вид (1.5), где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ $(k = \overline{0,n})$, то задача (2.21) примет вид задачи Коши (2.1) с $\zeta^0 = \xi^0 + \xi(u^0, 0)$ и функцией $\mathcal{F}(\cdot)$ вида (2.2), где

$$\mathcal{G}(t) := (g(t); T^{-1/2}Q^* \exp(-Gt)QA^{1/2}u^0; 0)^\intercal, \quad \mathcal{F}_k(t) := (f_k(t); 0; 0)^\intercal \quad (k = \overline{0,n}). \tag{2.42}$$

2) По лемме 2.8 сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$, генерируемая оператором $-\mathcal{A}$, сильно устойчива и если $\sigma_k^2 \notin \sigma_{ess}(A)$, то $i\sigma_k \notin \sigma(\mathcal{A})$ $(k = \overline{0,n})$. Применим лемму 2.1 при $m_k = 1$ $(k = \overline{0,n})$ к сложившейся ситуации. Несложно видеть, что из условия $g, f_k' \in L_1(\mathbb{R}_+; H)$ $(k = \overline{0,n})$ следует, что $\mathcal{G}, \mathcal{F}_k' \in L_1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ $(k = \overline{0,n})$ (см. (2.42)). Учитывая связь $\zeta(t) = \xi(t) + \xi(u^0, t)$ между решениями задач Коши (2.21) и (2.19), формулу для $\xi(u^0, t)$, по лемме 2.1 имеем при $t \longrightarrow +\infty$

$$\Big\|\xi(t) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|_{\mathcal{H}} \leqslant \Big\|\zeta(t) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|_{\mathcal{H}} + \big\|\xi(u^0, t)\big\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0. \tag{2.43}$$

Учитывая формулу (2.25) для оператора $\mathcal{A}^{-1}$, формулу (2.27) для резольвенты оператора $\mathcal{A}$ и связи (2.14), найдём, что

$$\Big\|\xi(t) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|_{\mathcal{H}}^2 = \Big\|\xi(t) - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}_0(t) - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A})\mathcal{F}_k(t)\Big\|_{\mathcal{H}}^2 =$$
$$= \left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & -T^{-1/2}Q^*G^{-1} \\ 0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -T^{-1/2} & 0 \\ T^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2}f_0(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ -(i\sigma_k)^{-1}T^{1/2} & I & 0 \\ G^{-1/2}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(G)Q & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma_k M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 =$$
$$= \left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} \begin{pmatrix} -i\sigma_k A^{-1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \\ T^{1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \\ -i\sigma_k G^{-1/2}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(G)QM^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geqslant$$
$$\geqslant \Big\|u'(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}i\sigma_k A^{-1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t)\Big\|_H^2 +$$
$$+ \Big\|T^{1/2}A^{1/2}u(t) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}T^{1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t)\Big\|_H^2 \geqslant$$
$$\geqslant \Big\|u'(t) + \sum_{k=1}^{n} e^{-i\sigma_k t}i\sigma_k A^{-1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t)\Big\|_H^2 +$$

$$+(1-a_1)\Big\|A^{1/2}\Big(u(t)-\sum_{k=0}^{n}e^{-i\sigma_k t}A^{-1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t)\Big)\Big\|_H^2. \tag{2.44}$$

Из (2.43), (2.44) следует (1.6). Лемма доказана. □

2.4.2. Частный случай, выполнены гипотезы 1″), 2″). Доказательство следующего утверждения почти полностью повторяет доказательство леммы 2.10 и лишь учитывает (1.8).

Лемма 2.12. *Пусть ядро интегрального слагаемого в* (1.4) *и оператор-функция* $M(\cdot)$ *имеют вид* (1.9) *и* (1.10) *соответственно. Если* $u^0\in\mathcal{D}(A)$, $u^1\in\mathcal{D}(A^{1/2})$, $f\in C^1(\mathbb{R}_+;H)$, *то решение задачи Коши* (1.4) *существует и единственно.*

Лемма 2.13. *Пусть ядро интегрального слагаемого в* (1.4) *и* $M(\cdot)$ *имеют вид* (1.9) *и* (1.10) *соответственно. Пусть функция* $f(\cdot)$ *имеет вид* (1.5), *где* $g, f_k\in C^1(\mathbb{R}_+;H)$ $(k=\overline{0,n})$.

Если $\|g(t)\|_H\longrightarrow 0$, $\|f_k'(t)\|_H\longrightarrow 0$ $(k=\overline{0,n})$ *при* $t\longrightarrow+\infty$, *то имеет место соотношение* (1.6).

Если, в частности, $\|g(t)\|_H$, $\|f_k'(t)\|_H$ $(k=\overline{0,n})$ *убывают экспоненциально при* $t\longrightarrow+\infty$, *то сходимость к нулю в* (1.6) *также экспоненциальная.*

Доказательство. Доказательство этой леммы почти полностью повторяет доказательство леммы 2.11. Нужно только вместо леммы 2.8 использовать лемму 2.9, а вместо леммы 2.1, соответственно, лемму 2.2. Экспоненциальное убывание к нулю в (1.6) следует из (2.33), п. 2) леммы 2.2 и экспоненциального убывания к нулю при $t\longrightarrow+\infty$ функции $\|\xi(u^0,t)\|_{\mathcal{H}}$. □

3. Приложения

3.1. Пример реализации операторного ядра.

3.1.1. Общий случай, выполнены гипотезы 1′), 2′), 3′). Рассмотрим пример реализации операторного ядра в интегральном слагаемом из (1.4). Пусть H_k $(k=\overline{1,m})$ — комплексные гильбертовы пространства. Введём m гильбертовых пространств $l_2(H_k)$ со обычными скалярными произведениями и нормами:

$$l_2(H_k):=\Big\{X_k=\{x_p\}_{p\in\mathbb{N}}:x_p\in H_k,\ \sum_{p\in\mathbb{N}}\|x_p\|_{H_k}^2<+\infty\Big\},$$

$$(X_k,Y_k)_{l_2(H_k)}:=\sum_{p\in\mathbb{N}}(x_p,y_p)_{H_k},\quad \|X_k\|_{l_2(H_k)}^2=\sum_{p\in\mathbb{N}}\|x_p\|_{H_k}^2\quad(k=\overline{1,m}).$$

Определим гильбертово пространство H_0 со скалярным произведением и нормой:

$$H_0:=\bigoplus_{k=1}^{m}l_2(H_k)=\Big\{X=(X_1;X_2;\dots;X_m)^{\intercal}:X_k\in l_2(H_k)\ \ (k=\overline{1,m})\Big\},$$

$$(X,Y)_H:=\sum_{k=1}^{m}(X_k,Y_k)_{l_2(H_k)},\quad \|X\|_H^2=\sum_{k=1}^{m}\|X_k\|_{l_2(H_k)}^2.$$

Пусть $C_{k,\alpha}$ $(k=\overline{1,m})$ — плотно определённые замкнутые операторы, действующие из H в H_k: $C_{k,\alpha}:\mathcal{D}(C_{k,\alpha})\subset H\longrightarrow H_k$, $\{\alpha_{kp}\}_{p\in\mathbb{N}}$, $\{\gamma_{kp}\}_{p\in\mathbb{N}}$ $(k=\overline{1,m})$ — последовательности положительных чисел. Будем считать, что выполнены следующие условия:

$$\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(C_{k,\alpha}^*C_{k,\alpha}),\quad \sum_{p\in\mathbb{N}}\alpha_{kp}<+\infty,\quad \inf_{p\in\mathbb{N}}\gamma_{kp}>0\quad(k=\overline{1,m}). \tag{3.1}$$

Определим операторы C_k, G_k $(k=\overline{1,m})$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned}&C_ku:=\big\{\sqrt{\alpha_{kp}}C_{k,\alpha}u\big\}_{p\in\mathbb{N}},\quad \mathcal{D}(C_k)=\mathcal{D}(C_{k,\alpha}),\quad C_k:\mathcal{D}(C_k)\subset H\longrightarrow l_2(H_k),\\ &G_kX_k:=\big\{\gamma_{kp}x_p\big\}_{p\in\mathbb{N}},\quad \mathcal{D}(G_k):=\Big\{X_k\in l_2(H_k):\sum_{p\in\mathbb{N}}\|\gamma_{kp}x_p\|_{H_k}^2<+\infty\Big\}\subset l_2(H_k).\end{aligned} \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Операторы G_k $(k=\overline{1,m})$ являются самосопряженными и положительно определёнными. Операторы C_k замкнуты на $\mathcal{D}(C_k)$ и*

$$C_k^* X_k = C_{k,\alpha}^* \sum_{p\in\mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kp}}\, x_p, \quad \mathcal{D}(C_k^*) = \Big\{ X_k \in l_2(H_k) : \sum_{p\in\mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kp}}\, x_p \in \mathcal{D}(C_{k,\alpha}^*) \Big\} \subset l_2(H_k).$$

Доказательство.

1) С учётом (3.1) видно, что $G_k^{-1} X_k = \{(\gamma_{kp})^{-1} x_p\}_{p\in\mathbb{N}}$, $G_k^{-1} \in \mathcal{L}(H_k)$ $(k=\overline{1,m})$. Отсюда и из $(G_k^{-1} X_k, X_k)_{l_2(H_k)} \in \mathbb{R}$ следует (см., например, [23, гл. 2, §12, теорема 12.3]), что операторы G_k^{-1}, а значит, и G_k, самосопряженные.

2) Покажем, что операторы C_k замкнуты на $\mathcal{D}(C_k)$. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(C_k)$ такая, что $\|u_n - u\|_H \longrightarrow 0$, $\|C_k u_n - X_k\|_{l_2(H_k)} \longrightarrow 0$ $(X_k := \{x_p\}_{p\in\mathbb{N}})$ при $n \longrightarrow \infty$. Отсюда следует, в частности, что последовательность $\{C_k u_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $l_2(H_k)$:

$$\|C_k u_n - C_k u_m\|_{l_2(H_k)}^2 = \sum_{p\in\mathbb{N}} \big\| \sqrt{\alpha_{kp}} C_{k,\alpha} u_n - \sqrt{\alpha_{kp}} C_{k,\alpha} u_m \big\|_{H_k}^2 =$$

$$= \|C_{k,\alpha} u_n - C_{k,\alpha} u_m\|_{H_k}^2 \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_{kp} \longrightarrow 0 \quad (n,m \longrightarrow \infty).$$

Следовательно, последовательность $\{C_{k,\alpha} u_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в H_k, а значит, существует $v \in H_k$ такой, что $\|C_{k,\alpha} u_n - v\|_{H_k} \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$. Отсюда, в силу замкнутости операторов $C_{k,\alpha}$, имеем $u \in \mathcal{D}(C_{k,\alpha}) = \mathcal{D}(C_k)$ и $C_{k,\alpha} u = v$. Отсюда и из единственности предела сходящейся последовательности имеем $X_k = \{x_p\}_{p\in\mathbb{N}} = \{\sqrt{\alpha_{kp}}\, v\}_{p\in\mathbb{N}}$. Таким образом, $u \in \mathcal{D}(C_k)$ и $C_k u = \big\{\sqrt{\alpha_{kp}} C_{k,\alpha} u\big\}_{p\in\mathbb{N}} = \{\sqrt{\alpha_{kp}}\, v\}_{p\in\mathbb{N}} = X_k$, то есть оператор C_k замкнут.

3) Вычислим C_k^*. Пусть $X_k = \{x_p\}_{p\in\mathbb{N}} \in l_2(H_k)$ такой, что функционал $f(u) := (C_k u, X_k)$ является (линейным) и ограниченным на $\mathcal{D}(C_k) = \mathcal{D}(C_{k,\alpha})$. Используя свойства скалярного произведения и, в частности, его непрерывность, имеем

$$f(u) = (C_k u, X_k)_{l_2(H_k)} = \sum_{p\in\mathbb{N}} \big(\sqrt{\alpha_{kp}} C_{k,\alpha} u, x_p\big)_{H_k} = \big(C_{k,\alpha} u, \sum_{p\in\mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kp}}\, x_p\big)_{H_k} \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(C_{k,\alpha}).$$

Отсюда следует искомое утверждение. Лемма доказана. □

С использованием (3.2) определим, наконец, операторы C и G по следующим формулам:

$$C := (C_1; C_2; \ldots; C_m)^{\intercal}, \quad C : \mathcal{D}(C) = \bigcap_{k=1}^{m} \mathcal{D}(C_k) \subset H \longrightarrow H_0,$$

$$G := \operatorname{diag}(G_1, G_2, \ldots, G_m), \quad G : \mathcal{D}(G) = \bigoplus_{k=1}^{m} \mathcal{D}(G_k) \subset H_0 \longrightarrow H_0,$$

тогда для любого $u \in \mathcal{D}(C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha})$, с учётом леммы 3.1,

$$C^* \exp(-tG) C u = \sum_{k=1}^{m} C_k^* \exp(-tG_k) C_k u = \sum_{k=1}^{m} C_{k,\alpha}^* \sum_{p\in\mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kp}}\, e^{-\gamma_{kp} t} \Big(\sqrt{\alpha_{kp}}\, C_{k,\alpha} u \Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} C_{k,\alpha}^* \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_{kp} e^{-\gamma_{kp} t} C_{k,\alpha} u = \sum_{k=1}^{m} \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_{kp} e^{-\gamma_{kp} t} C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha} u. \tag{3.3}$$

Лемма 3.2. *Оператор-функция $C^* \exp(-tG) C A^{-1}$ сильно непрерывна на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Из $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha})$ (см. (3.1)) следует, что $C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha} A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Отсюда и из (3.3) для любых $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $u \in H$ имеем

$$\big\| C^* \exp(-Gt) C A^{-1} u - C^* \exp(-Gt_0) C A^{-1} u \big\| = \Big\| \sum_{k=1}^{m} \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_{kp} \big(e^{-\gamma_{kp} t} - e^{-\gamma_{kp} t_0} \big) C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha} A^{-1} u \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \big\| C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha} A^{-1} u \big\|_{\mathcal{L}(H)} \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_{kp} \big| e^{-\gamma_{kp} t} - e^{-\gamma_{kp} t_0} \big|. \tag{3.4}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из (3.1) получим, что

$$\exists\, N(\varepsilon,u)\in\mathbb{N}:\ \sum_{k=1}^{m}\bigl\|C_{k,\alpha}^{*}C_{k,\alpha}A^{-1}u\bigr\|_{\mathcal{L}(H)}\sum_{p=N(\varepsilon,u)+1}^{\infty}2\alpha_{kp}<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists\,\delta(\varepsilon,u)>0:\ \sum_{k=1}^{m}\bigl\|C_{k,\alpha}^{*}C_{k,\alpha}A^{-1}u\bigr\|_{\mathcal{L}(H)}\sum_{p=1}^{N(\varepsilon,u)}\alpha_{kp}\bigl|e^{-\gamma_{kp}t}-e^{-\gamma_{kp}t_0}\bigr|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall\, t\in(t_0-\delta,t_0+\delta).$$

Отсюда и из (3.4) следует, что

$$\bigl\|C^{*}\exp(-G_lt)CA^{-1}u-C^{*}\exp(-G_lt_0)CA^{-1}u\bigr\|<\varepsilon\quad\forall\, t\in(t_0-\delta(\varepsilon,u),t_0+\delta(\varepsilon,u)),$$

то есть оператор-функция (3.3) сильно непрерывна в точке t_0. Лемма доказана. □

Таким образом, для оператор-функции (3.3) выполнена гипотеза 1′). Гипотеза 2′) (см. (1.1)), связывающая введённые операторы и числовые коэффициенты, принимает следующий вид:

2′) Существует $a_1\in(0,1)$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{m}\Biggl(\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{\alpha_{kp}}{\gamma_{kp}}\Biggr)\|C_{k,\alpha}u\|_{H_k}^{2}\leqslant a_1\|A^{1/2}u\|_{H}^{2}\quad\forall\, u\in\mathcal{D}(A^{1/2}).\tag{3.5}$$

Гипотеза 3′) (см. (1.2)) остаётся без изменений.

3.1.2. Частный случай, выполнены гипотезы 1″), 2″). В этом случае мы можем построить два ядра по образцу приведенной выше конструкции, поскольку в гипотезах 1′) и 1″) содержатся идентичные требования. При этом чтобы выполнить условия, достаточные для равномерной экспоненциальной устойчивости полугруппы $\mathcal{U}(t)$, для «первого» ядра нужно обеспечить условие $G_1\in\mathcal{L}(H_1)$ (см. замечание 1.2).

Итак, пусть $H_{k,l}$ $(k=\overline{1,m_l},\ l=1,2)$ — комплексные гильбертовы пространства. Введём m_l гильбертовых пространств $l_2(H_{k,l})$ $(k=\overline{1,m_l})$ со обычными скалярными произведениями и нормами. Определим гильбертовы пространства $H_l:=\bigoplus_{k=1}^{m_l}l_2(H_{k,l})$ $(l=1,2)$.

Пусть $C_{k,\alpha,l}$ — плотно определённые замкнутые операторы, действующие из H в $H_{k,l}$: $C_{k,\alpha,l}:\mathcal{D}(C_{k,\alpha,l})\subset H\longrightarrow H_{k,l}$, $\{\alpha_{kp}^{(l)}\}_{p\in\mathbb{N}}$, $\{\gamma_{kp}^{(l)}\}_{p\in\mathbb{N}}$ $(k=\overline{1,m_l},\ l=1,2)$ — последовательности положительных чисел. Будем считать, что выполнены следующие условия:

$$\begin{gathered}\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(C_{k,\alpha,l}^{*}C_{k,\alpha,l}),\quad\sum_{p\in\mathbb{N}}\alpha_{kp}^{(l)}<+\infty\quad(k=\overline{1,m_l},\ l=1,2),\\ \inf_{p\in\mathbb{N}}\gamma_{kp}^{(l)}>0,\quad\sup_{p\in\mathbb{N}}\gamma_{kp}^{(1)}<+\infty\quad(k=\overline{1,m_l},\ l=1,2).\end{gathered}\tag{3.6}$$

Определим операторы $C_{k,l}$, $G_{k,l}$ $(k=\overline{1,m_l},\ l=1,2)$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned}&C_{k,l}u:=\bigl\{\sqrt{\alpha_{kp}^{(l)}}C_{k,\alpha,l}u\bigr\}_{p\in\mathbb{N}},\quad\mathcal{D}(C_{k,l})=\mathcal{D}(C_{k,\alpha,l}),\quad C_{k,l}:\mathcal{D}(C_{k,l})\subset H\longrightarrow l_2(H_{k,l}),\\ &G_{k,l}X_k:=\bigl\{\gamma_{kp}^{(l)}x_p\bigr\}_{p\in\mathbb{N}},\quad\mathcal{D}(G_{k,l}):=\Bigl\{X_k\in l_2(H_{k,l}):\sum_{p\in\mathbb{N}}\|\gamma_{kp}^{(l)}x_p\|_{H_{k,l}}^{2}<+\infty\Bigr\}\subset l_2(H_{k,l}).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Без доказательства сформулируем лемму, аналогичную лемме 3.1.

Лемма 3.3. *Операторы $G_{k,l}$ $(k=\overline{1,m_l},\ l=1,2)$ являются самосопряженными и положительно определёнными, $G_{k,1}\in\mathcal{L}(l_2(H_{k,1}))$. Операторы $C_{k,l}$ замкнуты на $\mathcal{D}(C_{k,l})$ и*

$$C_{k,l}^{*}X_k=C_{k,\alpha,l}^{*}\sum_{p\in\mathbb{N}}\sqrt{\alpha_{kp}^{(l)}}\,x_p,\quad\mathcal{D}(C_{k,l}^{*})=\Bigl\{X_k\in l_2(H_{k,l}):\sum_{p\in\mathbb{N}}\sqrt{\alpha_{kp}^{(l)}}\,x_p\in\mathcal{D}(C_{k,\alpha,l}^{*})\Bigr\}\subset l_2(H_{k,l}).$$

С использованием (3.7) определим теперь операторы C_l и G_l $(l=1,2)$ по следующим формулам:

$$C_l:=(C_{1,l};C_{2,l};\ldots;C_{m_l,l})^{\intercal},\quad C_l:\mathcal{D}(C_l)=\bigcap_{k=1}^{m_l}\mathcal{D}(C_{k,l})\subset H\longrightarrow H_l,$$

$$G_l := \operatorname{diag}(G_{1,l}, G_{2,l}, \dots, G_{m_l,l}), \quad G_l : \mathcal{D}(G_l) = \bigoplus_{k=1}^{m_l} \mathcal{D}(G_{k,l}) \subset H_l \longrightarrow H_l,$$

тогда для любого $u \in \mathcal{D}(C^*_{k,\alpha,l}C_{k,\alpha,l})$, с учётом леммы 3.3, получим (см. вычисления в (3.3))

$$\sum_{l=1}^{2} C_l^* \exp(-tG_l)C_l u = \sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{m_l}\sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_{kp}^{(l)} e^{-\gamma_{kp}^{(l)}t} C^*_{k,\alpha,l}C_{k,\alpha,l}u. \tag{3.8}$$

Аналогично лемме 3.2 доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Оператор-функции* $C_l^* \exp(-tG_l)C_l A^{-1}$ $(l = 1, 2)$ *сильно непрерывны на* $\mathbb{R}_+$.

Таким образом, для оператор-функции (3.8) выполнена гипотеза $1''$). Гипотеза $2''$) (см. (1.7)), связывающая введённые операторы и числовые коэффициенты, принимает следующий вид:

$2''$) Существуют $a_1 \in (0, 1)$, $a_2 > 0$ такие, что

$$\begin{gathered}\sum_{l=1}^{2}\sum_{k=1}^{m_l}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{\alpha_{kp}^{(l)}}{\gamma_{kp}^{(l)}}\right)\|C_{k,\alpha,l}u\|^2_{H_{k,l}} \leqslant a_1\|A^{1/2}u\|^2_H,\\ \|C_{k,\alpha,1}u\|^2_{H_{k,1}} \geqslant a_2\|A^{1/2}u\|^2_H \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(C_{k,\alpha,1}) \quad (k = \overline{1, m_1}).\end{gathered} \tag{3.9}$$

Замечание 3.1. Рассмотрим ядро, представляющее собой ряд экспоненциальных функций с операторными коэффициентами (ядро вида (3.8)). Пусть операторы и числовые коэффициенты в этом ядре удовлетворяют условиям подчинённости, суммируемости и ограниченности снизу из (3.6). Если найдётся хотя бы один оператор $C_{k,\alpha,l}$, удовлетворяющий второму условию из (3.9), то понятно, что можно разбить ядро на две части так, чтобы они уложились в описанную выше конструкцию.

3.1.3. Частный случай ядра (3.8). Пусть $H_{k,l} = H$, $C_{k,\alpha,l} = A^{1/2}$ $(k = \overline{1, m_l},\ l = 1, 2)$. Тогда получим ядро, в котором фигурирует только один оператор A. Уравнение (1.4) с таким ядром, в зависимости от реализации главного оператора A (см. [7, гл. 6, §23]), может описывать продольные колебания однородного стержня, поперечные колебания неоднородной по толщине балки либо пластины, поперечные колебания ортотропной пластинки из гомогенного полимера и т. д.

Это уравнение изучалось, в частности, в [1, гл. 3, §3.2]. В указанной монографии исследовались вопросы существования, единственности и гладкости решений, а также проводился спектральный анализ символа этого уравнения. Отмечено, что уравнение (1.4) возникает в теории теплопроводности, теории вязкоупругих сред, кинетической теории газов.

Итак, в комплексном гильбертовом пространстве H рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -Au + \int_0^t \sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_p e^{-\gamma_p(t-s)}Au(s)\,ds + g(t) + \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \tag{3.10}$$

Здесь числа σ_k $(k = \overline{0, n})$ те же, что и в теореме 1.1 (или в теореме 1.2), а $\{\alpha_p\}_{p\in\mathbb{N}}$, $\{\gamma_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ — последовательности положительных чисел, удовлетворяющих неравенствам (см. (3.6), (3.9))

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} \alpha_p < +\infty, \quad \inf_{p\in\mathbb{N}} \gamma_p > 0, \quad 1 - \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_p}{\gamma_p} > 0. \tag{3.11}$$

Непосредственно проверяется, что операторный пучок $M(\cdot)$ из (1.10) в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$M(\lambda) = I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_p}{\gamma_p - \lambda} I. \tag{3.12}$$

Предположим дополнительно, что спектр оператора A дискретен и $\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^{\infty}$, $\{u_j(A)\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательности его собственных значений и соответствующих им собственных элементов, нормированных к единице. Применим теорему 1.2 к задаче Коши (3.10). С учётом предположения относительно оператора A придём к следующему утверждению.

Лемма 3.5. *Пусть* $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ $(k = \overline{0,n})$. *Если* $\|g(t)\|_H \longrightarrow 0$, $\|f_k'(t)\|_H \longrightarrow 0$ $(k = \overline{0,n})$ *при* $t \longrightarrow +\infty$, *то для решения* $u(\cdot)$ *задачи Коши* (3.10) *выполнено*

$$\left\|A^{1/2}\Big(u(t) - \sum_{k=0}^{n} e^{-i\sigma_k t}u_k(t)\Big)\right\|_H^2 + \left\|u'(t) + \sum_{k=1}^{n} i\sigma_k e^{-i\sigma_k t}u_k(t)\right\|_H^2 \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow +\infty),$$

где (*см.* (1.6), (3.12))

$$u_k(t) := \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\Big\{1 - \sum_{p\in\mathbb{N}}\frac{\alpha_p}{\gamma_p - i\sigma_k}\Big\}\lambda_j(A) - \sigma_k^2\Big)^{-1}\big(f_k(t), u_j(A)\big)_H u_j(A) \quad (k = \overline{0,n}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
2. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с сингулярными ядрами // Дифф. уравн. — 2021. — *57*, № 10. — С. 1426–1430. — DOI: 10.31857/S0374064121100149.
3. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
4. *Закора Д. А.* Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // Мат. заметки. — 2018. — *103*, № 5. — С. 702–719. — DOI: 10.4213/mzm11703.
5. *Закора Д. А.* Асимптотика решений в задаче о малых движениях сжимаемой жидкости Максвелла // Дифф. уравн. — 2019. — *55*, № 9. — С. 1195–1208. — DOI: 10.1134/S0374064119090048.
6. *Закора Д. А.* Асимптотическое поведение решений полного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2022. — *68*, № 3. — С. 451–466. — DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-451-466.
7. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
10. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.
11. *Alabau-Boussouria F., Cannarsa P.* A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations // C. R. Acad. Sci. Paris. — 2009. — *347*. — С. 867–872. — DOI: 10.1016/j.crma.2009.05.011.
12. *Alabau-Boussouria F., Cannarsa P., Sforza D.* Decay estimates for second order evolution equations with memory // J. Funct. Anal. — 2008. — *254*. — С. 1342–1372. — DOI: 10.1016/j.jfa.2007.09.012.
13. *Ammar-Khodja F., Benabdallah A., Muñoz Rivera J. E., Racke R.* Energy decay for Timoshenko systems of memory type // J. Differ. Equ. — 2003. — *194*, № 1. — С. 82–115. — DOI: 10.1016/S0022-0396(03)00185-2.
14. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J. M.* Thermodynamics of materials with memory. — Boston: Springer, 2012. — DOI: 10.1007/978-1-4614-1692-0.
15. *Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. — Basel: Birkhäuser , 2011. — DOI: 10.1007/978-3-0348-0087-7.
16. *Dafermos C. M.* Asymptotic stability in viscoelasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1970. — *37*. — С. 297–308. — DOI: 10.1007/bf00251609.
17. *Dafermos C. M.* An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity // J. Differ. Equ. — 1970. — *7*, № 3. — С. 554–569. — DOI: 10.1016/0022-0396(70)90101-4.
18. *Dell'Oro F.* Asymptotic stability of thermoelastic systems of Bresse type // J. Differ. Equ. — 2015. — *258*, № 11. — С. 3902–3927. — DOI: 10.1016/j.jde.2015.01.025.
19. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution eqations. — New York: Springer, 2000.
20. *Fabrizio M., Morro A.* Mathematical problems in linear viscoelasticity. — Philadelphia: SIAM, 1992. — DOI: 10.1137/1.9781611970807.
21. *Fatori L. H., Monteiro R. N., Sare H. D. F.* The Timoshenko system with history and Cattaneo law // Appl. Math. Comput. — 2014. — *228*, № 1. — С. 128–140. — DOI: 10.1016/j.amc.2013.11.054.
22. *Gearhart L.* Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces // Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *236*. — С. 385–394. — DOI: 10.1090/S0002-9947-1978-0461206-1.
23. *Gohberg I., Goldberg S.* Basic operator theory. — Boston—Basel—Stuttgart: Birkhäuser, 1981. — DOI: 10.1007/978-1-4612-5985-5.
24. *Liu Z., Zheng S.* Semigroups associated with dissipative systems. — London: Chapman & Hall/CRC, 1999.

25. *Ma Z., Zhang L., Yang X.* Exponential stability for a Timoshenko-type system with history // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — *380*, № 1. — С. 299–312. — DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.02.078.
26. *Messaoudi S. A., Apalara T. A.* General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III // Arab J. Math. Sci. — 2014. — *20*, № 2. — С. 213–232. — DOI: 10.1016/j.ajmsc.2013.08.004.
27. *Muñoz Rivera J. E., Naso M. G.* Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — *326*. — С. 691–707. — DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.03.022.
28. *Neerven J.* The Asymptotic behaviour of semigroups of linear operators. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1996.
29. *Racke R., Said-Houari B.* Global existence and decay property of the Timoshenko system in thermoelasticity with second sound // Nonlinear Anal. — 2012. — *75*, № 13. — С. 4957–4973. — DOI: 10.1016/j.na.2012.04.011.
30. *Renardy M., Hrusa W. J., Nohel J. A.* Mathematical problems in viscoelasticity. — New York: Longman Sci. & Tech., 1987.
31. *Tretter C.* Spectral theory of block operator matrices and applications. — London: Imperial College Press, 2008. — DOI: 10.1142/P493.
32. *Wolf F.* On the essential spectrum of partial differential boundary problems // Commun. Pure. Appl. Math. — 1959. — *12*. — С. 211–228. — DOI: 10.1002/cpa.3160120202.
33. *Zakora D. A.* Forced motions of thermoelastic systems of memory type // Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 5. — С. 1124–1139. — DOI: 10.1134/S199508022105022X.

Д. А. Закора
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 4632-1311, РИНЦ AuthorID: 771394, Scopus: 25026570600, ORCID: 0000-0002-6084-1114

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2-258-281
EDN: AZYDIE
UDC 517.968.72
Research article

Asymptotic behavior of solutions of an incomplete second-order integro-differential equation

D. A. Zakora

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

Abstract. In this paper, we study an incomplete second-order integro-differential operator equation in a Hilbert space. The difference-type kernel of an integral perturbation is a holomorphic semigroup bordered by unbounded operators. The asymptotic behavior of solutions of this equation is studied. Asymptotic formulas for solutions are proved in the case when the right-hand side is close to an almost periodic function. The obtained formulas are applied to one equation describing a number of applications from the mechanics of viscoelastic systems.

Keywords: operator equation, integro-differential equation, Cauchy problem, solution asymptotics.

Conflict-of-interest. The author declares no conflict of interest.

Acknowledgments and funding. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2026-1313.

© D. A. Zakora, 2026
This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode

For citation: D. A. Zakora, "Asymptotic behavior of solutions of an incomplete second-order integro-differential equation," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 258–281. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2-258-281 EDN: AZYDIE

REFERENCES

1. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy Analiz Funktsional'no-Differentsial'nykh Uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
2. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Eksponentsial'naya ustoychivost' polugrupp, porozhdaemykh vol'terrovymi integro-differentsial'nymi uravneniyami s singulyarnymi yadrami" [Exponential stability of semigroups generated by Volterra integro-differential equations with singular kernels], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2021, **57**, No. 10, 1426–1430 (in Russian), DOI: 10.31857/S0374064121100149.
3. J. Goldstein, *Polugruppy Lineynykh Operatorov i Ikh Prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (Russian translation).
4. D. A. Zakora, "Eksponentsial'naya ustoychivost' odnoy polugruppy i prilozheniya" [Exponential stability of one semigroup and applications], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2018, **103**, No. 5, 702–719 (in Russian), DOI: 10.4213/mzm11703.
5. D. A. Zakora, "Asimptotika resheniy v zadache o malykh dvizheniyakh szhimaemoy zhidkosti Maksvella" [Asymptotics of solutions in the problem of small motions of a compressible Maxwell fluid], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2019, **55**, No. 9, 1195–1208 (in Russian), DOI: 10.1134/S0374064119090048.
6. D. A. Zakora, "Asimptoticheskoe povedenie resheniy polnogo integro-differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka" [Asymptotic behavior of solutions of a complete second-order integro-differential equation], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 3, 451–466 (in Russian), DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-3-451-466.
7. A. A. Il'yushin and B. E. Pobedrya, *Osnovy Matematicheskoy Teorii Termovyazkouprugosti* [Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
8. T. Kato, *Teoriya Vozmushcheniy Lineynykh Operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
9. C. G. Kreyn, *Lineynye Differentsial'nye Uravneniya v Banakhovom Prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
10. D. Henry, *Geometricheskaya Teoriya Polulineynykh Parabolicheskikh Uravneniy* [Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations], Mir, Moscow, 1985 (Russian translation).
11. F. Alabau-Boussouria and P. Cannarsa, "A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations," *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2009, **347**, 867–872, DOI: 10.1016/j.crma.2009.05.011.
12. F. Alabau-Boussouria, P. Cannarsa, and D. Sforza, "Decay estimates for second order evolution equations with memory," *J. Funct. Anal.*, 2008, **254**, 1342–1372, DOI: 10.1016/j.jfa.2007.09.012.
13. F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. Muñoz Rivera, R. Racke, "Energy decay for Timoshenko systems of memory type," *J. Differ. Equ.*, 2003, **194**, No. 1, 82–115, DOI: 10.1016/S0022-0396(03)00185-2.
14. G. Amendola, M. Fabrizio, and Golden J. M., *Thermodynamics of Materials with Memory*, Springer, Boston, 2012, DOI: 10.1007/978-1-4614-1692-0.
15. W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander, *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Birkhäuser, Basel, 2011, DOI: 10.1007/978-3-0348-0087-7.
16. C. M. Dafermos, "Asymptotic stability in viscoelasticity," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1970, **37**, 297–308, DOI: 10.1007/bf00251609.
17. C. M. Dafermos, "An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity," *J. Differ. Equ.*, 1970, **7**, No. 3, 554–569, DOI: 10.1016/0022-0396(70)90101-4.
18. F. Dell'Oro, "Asymptotic stability of thermoelastic systems of Bresse type," *J. Differ. Equ.*, 2015, **258**, No. 11, 3902–3927, DOI: 10.1016/j.jde.2015.01.025.
19. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 2000.
20. M. Fabrizio and A. Morro, *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*, SIAM, Philadelphia, 1992, DOI: 10.1137/1.9781611970807.
21. L. H. Fatori, R. N. Monteiro, and H. D. F. Sare, "The Timoshenko system with history and Cattaneo law," *Appl. Math. Comput.*, 2014, **228**, No. 1, 128–140, DOI: 10.1016/j.amc.2013.11.054.
22. L. Gearhart, "Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, **236**, 385–394, DOI: 10.1090/S0002-9947-1978-0461206-1.

23. I. Gohberg and S. Goldberg, *Basic operator theory*, Birkhäuser, Boston—Basel—Stuttgart, 1981, DOI: 10.1007/978-1-4612-5985-5.
24. Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Chapman & Hall/CRC, London, 1999.
25. Z. Ma, L. Zhang, and X. Yang, "Exponential stability for a Timoshenko-type system with history," *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, **380**, No. 1, 299–312, DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.02.078.
26. S. A. Messaoudi and T. A. Apalara, "General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III," *Arab J. Math. Sci.*, 2014, **20**, No. 2, 213–232, DOI: 10.1016/j.ajmsc.2013.08.004.
27. J. E. Muñoz Rivera, M. G. Naso, "Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory," *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **326**, 691–707, DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.03.022.
28. J. Neerven, *The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1996.
29. R. Racke and B. Said-Houari, "Global existence and decay property of the Timoshenko system in thermoelasticity with second sound," *Nonlinear Anal.*, 2012, **75**, No. 13, 4957–4973, DOI: 10.1016/j.na.2012.04.011.
30. M. Renardy, W. J. Hrusa, and J. A. Nohel, *Mathematical Problems in Viscoelasticity*, Longman Sci. & Tech., New York, 1987.
31. C. Tretter, *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*, Imperial College Press, London, 2008, DOI: 10.1142/P493.
32. F. Wolf, "On the essential spectrum of partial differential boundary problems," *Commun. Pure. Appl. Math.*, 1959, **12**, 211–228, DOI: 10.1002/cpa.3160120202.
33. D. A. Zakora, "Forced motions of thermoelastic systems of memory type," *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 1124–1139, DOI: 10.1134/S199508022105022X.

D. A. Zakora
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 4632-1311, eLIBRARY AuthorID: 771394, Scopus: 25026570600, ORCID: 0000-0002-6084-1114