

СУЩЕСТВОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СЛАБОВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. ЕГОРОВА¹, А. С. ШАМАЕВ²

¹МИРЭА "— Российский технологический институт, Москва, Россия

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлунского РАН, Москва, Россия

Аннотация. В данной работе мы рассматриваем модель взвеси двух жидкостей в трехмерной области, заполненной одной жидкостью и имеющей небольшие включения другой жидкости. Для анализа в таких комбинированных средах предполагается, что структура области периодическая с быстро чередующимися параметрами, при этом характерный размер чередования берется как малый параметр $\varepsilon > 0$. Вопрос о существовании фронта распространения звука для этой модели исследуется для соответствующей эффективной краевой задачи с интегро-дифференциальными уравнениями с медленно изменяющимися коэффициентами, полученными методом асимптотического усреднения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Показано, что при определенной гладкости изменения плотности между фазами в эффективной модели существуют передний фронт. Таким образом, доказано, что при финитном начальном возмущении рассматриваемой комбинированной среды распространение колебаний будет иметь конечную скорость.

Ключевые слова: волновой фронт, слабовязкая сжимаемая жидкость, взвесь, периодическая структура, асимптотическое усреднение, интегро-дифференциальное уравнение, финитное начальное возмущение.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена в рамках госзадания №124012500443-0.

Вклад авторов. Шамаев А. С. — постановка задачи, методика доказательства, редакция рукописи; Егорова А. А. — обработка материалов, реализация метода доказательства, написание рукописи.

Для цитирования: Егорова А. А., Шамаев А. С. Существование волнового фронта в модели динамики слабовязкой сжимаемой жидкости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 250–257. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257) EDN: [AWMJMS](https://www.edn.ru/awmjms)

1. ВВЕДЕНИЕ

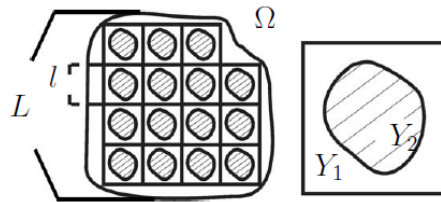
Вопрос о существовании волнового фронта является ключевым для описания различных моделей термодинамических и механических процессов, таких как распространение ударных волн или тепловых импульсов, где фронт определяет границу резкого изменения параметров системы (давления, температуры, плотности). Его корректное моделирование напрямую влияет на точность расчетов в аэродинамике, физике плазмы и термодинамике быстротекущих процессов, разделяя область возмущенного и невозмущенного состояния среды. Известен парадокс о том, что скорость распространения тепла в классической модели теплопроводности бесконечна, что противоречит основным физическим принципам. Использование моделей теплопроводности с

интегральным последствием в определенном смысле снимает это противоречие: скорость распространения в таких моделях становится конечной. Но для каждой конкретной модели этот вопрос о существовании фронта возникает. Известны результаты исследования о фронте для интегро-дифференциальных уравнений в работах американских и немецких математиков [5, 6] в 80-х годах 20 века. Они показали, что при достаточной гладкости ядра диссипации существование фронта будет зависеть от соответствующей задачи без интегрального слагаемого. При отсутствии гладкости ядра вопрос существования фронта становится неясным и требует отдельного исследования для каждой модели. Отметим работы Романова И. В. и Шамаева А. С. [4, 7], где доказано, что для одномерного уравнения Гуртина—Пипкина с конечным числом экспоненциальных слагаемых в ядре диссипации передний фронт будет существовать. А если ядро диссипации негладкое, например, заданное в виде функции Работнова, то уже можно указать случаи, когда фронт не будет существовать.

В данной работе рассматривается модель взвеси из двух слабвязких жидкостей (с коэффициентом вязкости порядка ε^2 , $0 < \varepsilon \ll 1$), где некоторая трехмерная область заполнена одной жидкостью и имеет малые по размеру (порядка ε) включения другой жидкости. Для анализа в подобных комбинированных средах предполагают включение фаз быстро чередующейся периодической структурой, при этом характерный размер чередования принимают за малый параметр $\varepsilon > 0$. Вопрос существования фронта для данной модели исследуется для соответствующей эффективной краевой задачи с интегро-дифференциальными уравнениями с медленно меняющимися коэффициентами, полученной методом асимптотического усреднения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Показано, что при определенной гладкости изменения плотности между фазами в эффективной модели существуют передний фронт. Таким образом, доказано, что при финитном начальном возмущении рассматриваемой комбинированной среды, распространение акустических колебаний будет иметь конечную скорость и даны формулы для скорости звука.

2. ЗАДАЧА О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ВЗВЕСИ ИЗ СЛАБОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Рассматривается движение взвеси в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ при внешних звуковых возмущениях $\mathbf{f}(x, t)$ малой амплитуды. Периодически расположенные одинаковые включения имеют достаточно гладкую форму.



Характеристики жидкостей в состоянии покоя (вязкости μ и скорости звука c) считаются сравнимыми:

$$c(\xi) = c_i, \quad \varepsilon^2 \mu(\xi) = \varepsilon^2 \mu_i, \quad \xi \in Y_i, \quad i = 1, 2;$$

$$c_1 \sim c_2, \quad \mu_1 \sim \mu_2.$$

Плотность $\rho(\xi)$ считаем достаточно гладкой функцией, отношение стороны l ячейки периодичности Y и размера L области Ω мало и равно $\varepsilon \ll 1$. Закон движения в взвеси задаётся уравнением типа Навье—Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \varepsilon^2 \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{\varepsilon^2 \mu}{3} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{v}(x, t, \varepsilon)$ — скорость дисперсионной среды, $p(x, t, \varepsilon)$ — давление, $\mathbf{f}(x, t)$ — функция воздействия звукового поля на область Ω , удовлетворяющая неравенству:

$$|\mathbf{f}(x, t)| \leq M,$$

где $M > 0$ — заданная константа. На границах фаз предполагается непрерывность скорости и тензора напряжений. Перемещение $\mathbf{u}(x, t, \varepsilon) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \equiv (H_0^1(\Omega))^3$ связано со скоростью $\mathbf{v}$ и давлением p следующими соотношениями:

$$\mathbf{u}(x, t, \varepsilon) = \int_0^t \mathbf{v}(x, s, \varepsilon) ds, \quad p(x, t, \varepsilon) = -\gamma \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

где характеристики жидкостей: $\gamma(\xi) = c^2(\xi)\rho(\xi) > 0$ — модуль объемной упругости, $c(\xi)$ — скорость звука, $\rho(\xi)$ — плотность — принимают разные значения для каждой из жидкостей. Начальное перемещение и скорость задаются вектор-функциями:

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \varphi_1(x). \quad (2.3)$$

3. ЭФФЕКТИВНАЯ ЗАДАЧА

На основе техники двухмасштабных асимптотических разложений, разработанной Ж. П. Лионсом и Н. С. Бахваловым, в работе [1] выводится и строго обосновывается усредненное уравнение для рассматриваемой задачи (2.1)–(2.3). Согласно этому методу, компоненты решения $\mathbf{u}(x, t, \varepsilon)$ отыскиваются с помощью асимптотического разложения вида

$$u(x, x/\varepsilon, t) = u^0 \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) + \varepsilon u^1 \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) + \varepsilon^2 u^2 \left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) + \dots,$$

где $u^0(x, y, t), u^1(x, y, t), u^2(x, y, t)$ — функции от трех переменных x, y, t , периодические по переменной y , подлежащие определению.

В ходе усреднения возникает краевая задача на ячейке периодичности Y для вектор-функций $\mathbf{V}^j(t)$ со значениями в $\mathbb{H}_{per}^1(Y) \equiv (H_{per}^1(Y))^3$:

$$\rho(\xi) \frac{\partial \mathbf{V}^j(\xi, t)}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{V}^j(\xi, t) + \nabla q(\xi, t) = 0, \quad \xi \in Y, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div}_{\xi} \mathbf{V}^j = 0, \quad \mathbf{V}^j|_{t=0} = \frac{\mathbf{e}_j}{\rho(\xi)}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{V}^{j1}|_S = \mathbf{V}^{j2}|_S, \quad \sigma(\mathbf{V}^{j1}) \cdot \mathbf{n}|_S = \sigma(\mathbf{V}^{j2}) \cdot \mathbf{n}|_S, \quad (3.3)$$

где $\sigma = (\sigma_{ij})$, $\sigma_{ij} = \delta_{ij}q + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}e_{ij}e_{kl}$, S — граница между фазами.

Для решений $\mathbf{V}^j \in \mathbb{H}_{per}^1(Y)$ определим матрицу

$$\mathbf{K}(t) = \{K_{ij}(t)\} : \quad K_{ij} = \left\langle V_i^j \right\rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y V_i^j(\xi, t) d\xi.$$

Тогда задача для усредненного давления $p^0(x, t)$ имеет вид:

$$\left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y \frac{\partial p^0(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x \int_0^t \mathbf{K}(t-s)(\mathbf{f}(x, s) - \nabla p^0(x, s)) ds = 0, \quad (3.4)$$

$$[\mathbf{K}(t) * (\mathbf{f}(x, t) - \nabla p^0(x, t))] \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.5)$$

Для предельных функций перемещения $\mathbf{u}^0$ и скорости $\mathbf{v}^0$, имеющих значения в $\mathbb{H}^1(\Omega, \mathbb{H}_{per}^1(Y))$, справедливы равенства:

$$\mathbf{v}^0(x, \xi, t) = \frac{\partial \mathbf{u}^0(x, \xi, t)}{\partial t}, \quad (3.6)$$

$$\langle \mathbf{v}^0(x, \xi, t) \rangle_Y = \int_0^t \mathbf{K}(t-s)(\mathbf{f}(x, s) - \nabla p^0(x, s)) ds, \quad (3.7)$$

где $\langle g(\xi) \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y g(\xi) d\xi$ — среднее по ячейке.

Теорема 3.1 (см. [1]). Для решений усредненной (3.4)–(3.7) и исходной задач (2.1)–(2.3) справедливы равенства:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{v}(x, t, \varepsilon) - \mathbf{v}^0(x, \frac{x}{\varepsilon}, t)\|_{L_2(\Omega)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla_x \mathbf{v}(x, t, \varepsilon) - \nabla_{\frac{x}{\varepsilon}} \mathbf{v}^0(x, \frac{x}{\varepsilon}, t)\|_{L_2(\Omega)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|p(x, t, \varepsilon) - p^0(x, t)\|_{L_2(\Omega)} &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, из этой теоремы следует, что, исследуя эффективную модель, мы можем судить и о колебаниях в двухфазной взвеси с периодически повторяющимися включениями малых размеров одной жидкости в другой.

4. Плотность и ядро диссипации

Существенную роль в дальнейшем будет играть матрица $\mathbf{K}(t)$, элементы которой определяются как средние по ячейке Y от решений вспомогательной задачи (3.1)–(3.3). В случае симметричности включений можно считать, что ядро диссипации $\mathbf{K}(t)$ — диагональная матрица, т. е. $\mathbf{K}(t) = K(t)\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, а $K(t)$ — скалярная функция, которая представима в виде:

$$K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-\lambda_i t}. \quad (4.1)$$

Из вида задачи (3.1)–(3.3) следует, что показатели $\lambda_i > 0$ являются собственными значениями спектральной задачи типа Стокса [1]

$$-\mu \Delta \psi_k + \nabla q_k = \rho \lambda_k \psi_k, \quad \operatorname{div} \psi_k = 0, \quad \psi_k - Y\text{-периодична}, \quad (4.2)$$

а коэффициенты $c_i > 0$ можно найти по формулам:

$$C_i = \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \frac{\psi_i(\xi)}{\rho(\xi)} \right\rangle_Y \langle \psi_i(\xi) \rangle_Y, \quad \gamma(\xi) = c^2(\xi) \rho(\xi). \quad (4.3)$$

Аналогично утверждениям из работы [2] можно доказать справедливость следующей леммы.

Лемма 4.1. Для каждого собственного значения λ_k спектральной задачи типа Стокса (4.2) в трехмерной периодической области Ω существуют положительные постоянные α_1, α_2 такие, что выполняется неравенство:

$$\alpha_1 k^{\frac{2}{3}} \leq \lambda_k \leq \alpha_2 k^{\frac{2}{3}}. \quad (4.4)$$

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ПРИ УСЛОВИИ РЕГУЛЯРНОСТИ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ

Введем определение и приведем теорему из [5]. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ рефлексивное банахово пространство.

Определение 5.1. Семейство ограниченных линейных операторов $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ на пространстве X распространяет семейство замкнутых подпространств $\{P_t\}_{t \geq 0}$ из X , если $T(t)P_s \subset P_{t+s}$ для каждого $t, s > 0$. Аналогично, семейство замкнутых подпространств $\{Q_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ распространяется семейством $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, если $T(t)Q_s \subset Q_{t+s}$ для каждого $t \geq 0, s \in \mathbb{R}$.

Теорема 5.1. Пусть A — инфинитезимальный оператор линейной C_0 -полугруппы на рефлексивном пространстве X , и $F(\cdot), K(\cdot)$ — ограниченные линейные операторы на X такие, что для любого $x^* \in X^*$ $t \rightarrow F^*(t)x^*$ также как и $t \rightarrow K^*(t)x^*$ принадлежат пространству $H^1(0, \infty; X^*)$. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned}x'(t) &= A \left[x(t) + \int_{-\infty}^0 F(-u)x_t(u) du \right] + \int_{-\infty}^0 K(-u)x_t(u) du, \\ (x(0), x_0) &= (z, \psi) \in X \times L^2(\mathbb{R}^-; X).\end{aligned} \quad (5.1)$$

Предположим, что $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ — возрастающее семейство замкнутых подпространств пространства X , непрерывное в каждой точке t . Кроме того, предположим, что каждое подпространство P_t инвариантно относительно операторов $F(s)$ и $K(s)$ для всех $t \in \mathbb{R}, s \geq 0$. Тогда полугруппа $S(s)$, порожденная оператором A , распространяет семейство $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ в том и только том случае, если из условий $z \in P_\alpha$ и $\psi(u) \in P_\alpha$ п.в. следует, что сильное решение $x(t)$ уравнения (5.1) удовлетворяет условию $x(t) \in P_{\alpha+t}, t \geq 0$.

Предположим, что колебания среды направлены только по одной из осей координат Ox_1 и величины компонент смещения и давления зависят только от переменных t, x_1 . Полагая $\mathbf{f}(x, t) \equiv 0, x = x_1$, рассмотрим одномерное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^0(x, t)}{\partial t} - \int_0^t K(t-s) p_{xx}^0(x, s) ds &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ p^0|_{t=0} &= \theta_0(x), \quad p^0(0, t) = p^0(1, t) = 0, \\ K(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-\lambda_i t}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Пусть $H_{per}^2(Y)$ — пространство Y -периодических функций из $L_2(Y)$, имеющих обобщенные производные до 2-го порядка.

Теорема 5.2. Если функция θ_0 достаточно гладкая и финитная функция и функция плотности $\rho(\xi) \in H_{per}^2(Y)$, то решение задачи (5.2) является финитной по x функцией для каждого фиксированного конечного момента времени t .

Эта теорема означает, что у эффективной модели будет существовать передний фронт, если предполагать, что граница между фазами двух жидкостей непрерывна.

Формально, одномерное уравнение (5.2) совпадает с одномерным уравнением Гуртина—Пипкина. Заметим, что, если ядро диссипации состоит из конечного числа слагаемых: $K(t) = \sum_{i=1}^m C_i e^{-\lambda_i t}$, то существование фронта в одномерном уравнении Гуртина—Пипкина доказано в работе [4]. В отличие от техники доказательств в [4], где применялись преобразование Фурье и методы теории функций комплексного переменного, в настоящей работе используются методы из теории полугрупп.

Доказательство. Предполагаем, что плотность $\rho(\xi)$ периодична и не может быть равна нулю, поэтому $\frac{1}{\rho(\xi)} \in H_{per}^2(Y)$. Можно показать, что ее коэффициенты $f_s = \left\langle \frac{\psi_s(\xi)}{\rho(\xi)} \right\rangle_Y$ разложения в ряд Фурье по ортонормированной системе собственных функций $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи типа Стокса (4.2) удовлетворяют неравенству:

$$\sum_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^2 \leq C \left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{H^2(Y)}^2, \quad (5.3)$$

где λ_s — собственные значения задачи (4.2), а положительная постоянная C не зависит от функции $\frac{1}{\rho}(\xi)$. Это утверждение доказывается для периодических функций так же, как для оператора Лапласа (см. [3, гл. IV, §2]). Тогда из формул (4.3) следует, что

$$|K(t)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-\lambda_i t} \right| \leq M \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| = M \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| |\lambda_i| |\lambda_i|^{-1} \leq M \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2 |\lambda_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{-2}}. \quad (5.4)$$

Тогда из леммы 4.1 следует, что ряд в последнем множителе неравенства (5.4) сходится. Таким образом, из (5.3), (5.4) получим, что $|K(t)| \leq M_1 \left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{H^2(Y)}, \forall t \in [0; \infty)$ т. е. $K(t) \in C[0; +\infty)$.

Воспользуемся теоремой Вейерштрасса о том, что для любой непрерывной функции существует последовательность бесконечно гладких функций, стремящихся к ней равномерно. Пусть последовательность $\{K_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ состоит из бесконечно гладких функций $K_n \in C^\infty[0; +\infty)$ и $K_n(t) \rightrightarrows K(t)$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial p_n(x, t)}{\partial t} - \int_0^t K_n(t-s) \frac{\partial^2 p_n(x, s)}{\partial x^2} ds = 0, \quad t > 0, \quad (5.5)$$

$$p_n|_{t=0} = \theta_0(x), \quad p_n(0, t) = p_n(1, t) = 0.$$

Докажем, что утверждение теоремы верно для решений этой задачи.

Продифференцируем уравнение (5.5) по t :

$$\frac{\partial^2 p_n(x, t)}{\partial t^2} - K_n(0) \frac{\partial^2 p_n(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t K'_n(t-s) \frac{\partial^2 p_n(x, s)}{\partial x^2} ds = 0, \quad t > 0 \quad (5.6)$$

Введем замену: $v = \frac{\partial p_n}{\partial t}$, $w = \sqrt{K_n(0)} \frac{\partial p_n}{\partial x}$. Тогда из (5.6) получим:

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{K_n(0)} \frac{\partial}{\partial x} \\ \sqrt{K_n(0)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{K'_n(t-s)}{K_n(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ w(s) \end{pmatrix} ds \right] = 0. \quad (5.7)$$

Пусть $X = L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ и $D(A) = H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$, тогда оператор A из (5.7), заданный как

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{K_n(0)} \frac{\partial}{\partial x} \\ \sqrt{K_n(0)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix},$$

порождает C_0 -полугруппу, которая распространяет семейство подпространств

$$\{P_s\}_{s \in \mathbb{R}} : P_s = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp}(u) \subset (-\infty; \sqrt{K_n(0)}s)\}^2.$$

Так как оператор

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{K'_n(t)}{K_n(0)} \end{pmatrix}$$

отображает $\{P_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ в себя, то из теоремы 5.1 следует, что C_0 -полугруппа, порожденная оператором A , распространяет семейство $\{P_t\}_{t \geq 0}$ тогда и только тогда, когда решение уравнения (5.7)

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in P_{\alpha+t}, t \geq 0 \text{ при условии } \begin{pmatrix} v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} \in P_\alpha \text{ п.в.}$$

Таким образом, получаем, что задача (5.5) имеет передний волновой фронт, т. к. носитель решения будет ограничен справа, как и у начального условия $\theta_0(x)$.

Так как $K_n(t) \rightrightarrows K(t)$, $n \rightarrow \infty$, то нетрудно показать, что соответствующие решения $p_n(x, t)$ и $p^0(x, t)$ также будут близки при $n \rightarrow \infty$. Это значит, что из финитности решения $p_n(x, t)$ следует финитность и для $p^0(x, t)$. Теорема доказана. $\square$

Дополнительно отметим, что из выражений для коэффициентов ядра $K(t)$ можно увидеть, что скорость распространения звука в эффективной модели взвеси имеет вид:

$$\sqrt{K(0)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} C_k}, \quad C_k = \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \frac{\psi_k(\xi)}{\rho(\xi)} \right\rangle_Y \langle \psi_k(\xi) \rangle_Y.$$

Эта формула обобщает хорошо известную формулу распространения звука в однородной среде:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гавриков А. А., Шамаев А. С. Некоторые вопросы акустики эмульсий // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2011. — 28. — С. 114–146.
2. Ильин А. А. О спектре оператора Стокса // Функци. анализ и его прилож. — 2009. — 43, № 4. — С. 14–25. — DOI: [10.4213/faa2962](https://doi.org/10.4213/faa2962).
3. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
4. Романов И. В., Шамаев А. С. О существовании волнового фронта в задаче Коши для уравнения Гуртина—Пипкина // Мат. заметки. — 2024. — 116, № 4. — С. 636–640. — DOI: [10.4213/mzm14368](https://doi.org/10.4213/mzm14368).
5. Desch W., Grimmer R., Schappacher W. Wellposedness and wave propagation for a class of integrodifferential equations in Banach space // J. Differ. Equ. — 1988. — 74. — С. 391–411. — DOI: [10.1016/0022-0396\(88\)90011-3](https://doi.org/10.1016/0022-0396(88)90011-3).
6. Desch W., Schappacher W. A semigroup approach to integrodifferential equations in Banach spaces // J. Integral Equ. — 1985. — 10. — С. 99–110.
7. Romanov I. V., Shamaev A. S. On the Absence of a propagation front in the Cauchy problem for a certain integro-differential equation with a Rabotnov kernel // Russ. J. Math. Phys. — 2024. — 31. — С. 758–761. — DOI: [10.1134/S1061920824040137](https://doi.org/10.1134/S1061920824040137).

А. А. Егорова

МИРЭА "— Российский технологический институт, Москва, Россия

E-mail: alena.egorova@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 5547-7195, РИНЦ AuthorID: [551678](https://elibrary.ru/authors/551678), ResearcherID: [AEP-2107-2022](https://orcid.org/0000-0002-0606-0130), Scopus: [57210848119](https://orcid.org/57210848119), ORCID: [0000-0002-0606-0130](https://orcid.org/0000-0002-0606-0130)

А. С. Шамаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mail: shamaev@ipmnet.ru, РИНЦ SPIN-код: 9735-0458, РИНЦ AuthorID: [5556](https://elibrary.ru/authors/5556), ResearcherID: [N-8776-2015](https://orcid.org/N-8776-2015), Scopus: [6603596715](https://orcid.org/6603596715), ORCID: [0000-0003-2766-6382](https://orcid.org/0000-0003-2766-6382)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257)

EDN: [AWMJMS](https://elibrary.ru/awmjms)

UDC 517.958

Research article

Existence of a wave front in a model of the dynamics of a low-viscosity compressible fluid

A. A. Egorova¹ and A. S. Shamaev²

¹MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia

²Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we consider a model of an emulsion of two liquids in a three-dimensional domain filled with one liquid and having small inclusions of another liquid. For analysis in such combined media, it is assumed that the structure of the domain is periodic with rapidly alternating parameters, while the characteristic size of the alternation is taken as a small parameter $\varepsilon > 0$. The question of the existence of a sound propagation front for this model is investigated for the corresponding effective boundary value problem with integro-differential equations with slowly varying coefficients obtained by the method of asymptotic averaging at $\varepsilon \rightarrow 0$. It is shown that with a certain smoothness of the density change between phases, there is a leading edge in the effective model. Thus, it is proved that with a finite initial perturbation of the combined medium under consideration, the propagation of vibrations will have a finite velocity.



Keywords: wave front, low-viscosity compressible fluid, suspension, periodic structure, asymptotic averaging, integro-differential equation, finite initial disturbance.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out within the framework of state assignment No. 124012500443-0.

Authors' contribution. Shamaev A. S. — statement of the problem, proof method, editing of the manuscript; Egorova A. A. — processing of materials, implementation of the proof method, writing of the manuscript.

For citation: A. A. Egorova, A. S. Shamaev, “Existence of a wave front in a model of the dynamics of a low-viscosity compressible fluid,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 2, 250–257. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257) EDN: [AWMJMS](https://www.edn.ru/awmjms)

REFERENCES

1. A. A. Gavrikov and A. S. Shamaev, “Nekotorye voprosy akustiki emul'siy” [Some issues of acoustics of emulsions], *Tr. Sem. Im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2011, **28**, 114–146 (in Russian).
2. A. A. Il'in, “O spektre operatora Stoksa” [On the spectrum of the Stokes operator], *Funkts. Analiz i Ego Prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2009, **43**, No. 4, 14–25 (in Russian), DOI: [10.4213/faa2962](https://doi.org/10.4213/faa2962).
3. V. P. Mikheylov, *Differentsial'nye Uravneniya v Chastnykh Proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
4. I. V. Romanov and A. S. Shamaev, “O sushchestvovanii volnovogo fronta v zadache Koshi dlya uravneniya Gurtina—Pipkina” [On the existence of a wave front in the Cauchy problem for the Gurtin—Pipkin equation], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2024, **116**, No. 4, 636–640 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm14368](https://doi.org/10.4213/mzm14368).
5. W. Desch, R. Grimmer, and W. Schappacher, “Wellposedness and wave propagation for a class of integrodifferential equations in Banach space,” *J. Differ. Equ.*, 1988, **74**, 391–411, DOI: [10.1016/0022-0396\(88\)90011-3](https://doi.org/10.1016/0022-0396(88)90011-3).
6. W. Desch and W. Schappacher, “A semigroup approach to integrodifferential equations in Banach spaces,” *J. Integral Equ.*, 1985, **10**, 99–110.
7. I. V. Romanov and A. S. Shamaev, “On the Absence of a propagation front in the Cauchy problem for a certain integro-differential equation with a Rabotnov kernel,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2024, **31**, 758–761, DOI: [10.1134/S1061920824040137](https://doi.org/10.1134/S1061920824040137).

A. A. Egorova

MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia

E-mail: alena.egorova@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 5547-7195, eLIBRARY AuthorID: 551678, ResearcherID: [AEP-2107-2022](https://orcid.org/0000-0002-0606-0130), Scopus: [57210848119](https://orcid.org/0000-0002-0606-0130), ORCID: [0000-0002-0606-0130](https://orcid.org/0000-0002-0606-0130)

A. S. Shamaev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: shamaev@ipmnet.ru, eLIBRARY SPIN-code: 9735-0458, eLIBRARY AuthorID: 5556, ResearcherID: [N-8776-2015](https://orcid.org/0000-0003-2766-6382), Scopus: [6603596715](https://orcid.org/0000-0003-2766-6382), ORCID: [0000-0003-2766-6382](https://orcid.org/0000-0003-2766-6382)