

КОАЛИЦИОННЫЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ СТРУКТУРЫ КАПИТАЛА И ИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Е. М. Богатов¹, Е. Г. Демидова²

¹Губкинский филиал НИТУ «МИСиС», Губкин, Россия

²Старооскольский технологический институт (филиал НИТУ «МИСиС»), Старый Оскол, Россия

Аннотация. Работа является продолжением исследований, проведенных в [2, 3]. При формировании структуры капитала предприятий (определения долей заёмных и собственных средств) важную роль играет баланс интересов собственников и менеджеров. При этом собственник заинтересован в получении максимальной отдачи от своего капитала (максимизации рентабельности собственного капитала ROE), а менеджер — в увеличении финансовой устойчивости фирмы за счёт снижения средневзвешенной стоимости капитала $WACC$. Разрешение конфликтной ситуации возможно, как показано авторами, в рамках неантагонистической теории игр, а именно в контексте биматричной игры и кооперативной игры двух лиц. В роли игрока А были выбраны собственники предприятий Π_i , а в качестве компонент его игровой матрицы — величины ROE предприятий из репрезентативной выборки, наблюдаемые в определённый период T . В роли игрока В были выбраны менеджеры предприятий Π_i , а в качестве компонент его игровой матрицы — величины вида $1/(1+WACC)$, определяемые в том же периоде T . Апробация алгоритмов нахождения равновесной по Нэшу структуры капитала для обеих моделей осуществлялась на основе реальных данных по пяти предприятиям металлургического сегмента, наблюдаемым в течение 5 лет. В результате удалось не только получить новые методы определения сбалансированной структуры капитала, но и провести анализ устойчивости полученных решений по отношению к возмущению начальных данных (редуцированных игровых матриц), что позволило рассчитать коридоры возможных изменений ROE и $WACC$ для эталонного набора предприятий Π_α в выделенном (укороченном) периоде наблюдений, а также наметить пути дальнейшего развития данной темы.

Ключевые слова: биматричные игры, кооперативные игры двух лиц, параметрический анализ, анализ устойчивости, равновесная структура капитала.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Богатов Е. М. — разработка концепции исследования, формулирование идеи, цели и задач исследования, разработка методов и процедур, написание текста рукописи. Демидова Е. Г. — сбор, обработка и анализ данных, проверка результатов, доработка выводов, редактирование текста и списка литературы.

Для цитирования: Богатов Е. М., Демидова Е. Г. Коалиционные теоретико-игровые модели структуры капитала и их параметрический анализ // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 237–249. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-237-249](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-237-249) EDN: [AUKPEA](https://edn.ru/AUKPEA)

ВВЕДЕНИЕ

Под структурой капитала в экономике принято понимать соотношение между собственными и заёмными средствами компании. К определению сбалансированной структуры капитала существует множество подходов (см., например, [5, 11]), среди которых особо выделим теоретико-игровой, берущий своё начало от работ американского исследователя С. В. Рю [16]. Рю (1985 г.)

рассмотрел модель некооперативной игры, характеризующей конфликт интересов собственников и кредиторов компании и привёл достаточные условия для нахождения Парето-оптимального решения соответствующей биматричной игры. Работа Рю стимулировала повышение интереса к применению теории игр в финансах (см. обзор [14]), однако до начала 2010-х гг. каких-либо моделей, основанных на конфликте интересов собственников и менеджеров компаний, предложено, по-видимому, не было. Ситуация поменялась в 2014 г. с выходом работы Ю. Тудосе [17], формализовавшей конфликтную ситуацию в виде антагонистической (матричной) игры и сведя её к линейной оптимизационной задаче. Подход Тудосе был продолжен авторами в заметке [2] и статье [3], где были рассмотрены модели биматричной и кооперативной игры соответственно, а также алгоритм нахождения равновесной (по Нэшу) структуры капитала в сегменте S , состоящей из пяти промышленных предприятий, финансово-экономические показатели которых наблюдались в течение пяти лет (период T). При этом результатом решения по Нэшу в смешанных стратегиях в биматричной игре является величина K^* , получаемая путём матричного умножения¹:

$$K^* = X^*CY^*,$$

где X^* — вектор вероятностей выбора предприятия $\Pi_j \in S$, Y^* — вектор вероятностей выбора года из периода T ; C — матрица «структуры капитала», состоящая из долей собственного или заёмного капитала, зафиксированного для предприятий Π_j ($j = 1, \dots, 5$) в период T .

Нахождение арбитражного решения Нэша N в смешанных стратегиях в кооперативной игре сводилось к определению² «средневзвешенной» структуры капитала по предприятиям Π_i и Π_m , соответствующим точкам P_i и Q_m Парето-оптимального множества, между которыми (то есть на отрезке P_iQ_m) находится точка N . При этом весами p и q в определении оптимальной по Нэшу структуры капитала по формуле

$$K^* = pK_i + qK_j$$

являются пропорции, в которых точка N делит отрезок P_iQ_m (см. [3]).

Представляется актуальным (в том числе для теории структуры капитала) выяснить, можно ли осуществить возмущение исходных данных задач (игровых матриц) в обеих постановках таким образом, чтобы равновесная структура капитала осталась без изменения? Поиску ответа на этот вопрос и посвящена настоящая статья.

1. КООПЕРАТИВНАЯ ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ДВУХ ЛИЦ КАК МОДЕЛЬ РАВНОВЕСНОЙ СТРУКТУРЫ КАПИТАЛА

Несмотря на то, что эта модель и вариант расчёта уже были рассмотрены авторами в [3], мы приведём их ещё раз (для другого периода T и для набора S), поскольку геометрическая структура множества допустимых решений и его частей будет использоваться ниже для параметрического анализа задачи.

Как и в [2,3], предположим, что имеется выборка n компаний из одного промышленного сегмента $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$, придерживающихся сходной стратегии финансово-экономического поведения как со стороны собственников, так и со стороны менеджеров. Тогда игровую матрицу A первого игрока (обобщённого гипотетического собственника) можно определить как матрицу, состоящую из величин ROE_{ij} , наблюдаемых для предприятий Π_i в течение m лет. При этом соответствующая матрица B второго игрока (обобщённого гипотетического управляющего) будет состоять из элементов b_{ij} , $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$, вычисленных по формуле [4]:

$$b_{ij} = \frac{1}{1 + WACC_{ij}}. \quad (1.1)$$

Расчёт $WACC$ осуществляется по формуле

$$WACC = R_d \cdot K_d(1 - t) + R_e \cdot K_e, \quad (1.2)$$

где K_d — доля заёмного капитала, K_e — доля собственного капитала, R_d — стоимость заёмного капитала, R_e — стоимость собственного капитала, t — ставка налога на прибыль. При этом стоимость собственного капитала можно вычислить по модели $SAPM$, основанной на том, что ожидаемая

¹Назовём этот вариант расчёта равновесной структуры капитала алгебраическим.

²Этот вариант расчёта равновесной структуры капитала будем называть геометрическим.

доходность акций является суммой безрисковой процентной ставки и премии за рыночный риск акций:

$$\text{CAPM} = R_e = R_f + \beta_i(R_m - R_f),$$

где R_f — безрисковая ставка; R_e — стоимость собственного капитала; R_m — среднерыночная ставка доходности; β_i — коэффициент чувствительности доходности акций к изменениям рыночной доходности (подробности см. в [3]).

Стратегией игрока I будет являться выбор им определённого года (строки в матрице A), а игрока II — выбор конкретного предприятия (столбца в матрице B).

В качестве эмпирической базы будем использовать данные бухгалтерской отчетности пяти крупных компаний металлургической отрасли за пять лет [13], на основе которых определим рентабельность собственного капитала ROE, следуя [5] (см. табл. 1).

ТАБЛИЦА 1. Рентабельность собственного капитала (ROE) пяти металлургических предприятий России

TABLE 1. Return on equity (ROE) of five Russian metallurgical enterprises

Годы/Years	Предприятия/Enterprises				
	П1	П2	П3	П4	П5
2020	0,21	0,24	0,56	0,44	0,36
2021	0,60	0,78	1,01	0,77	0,43
2022	0,14	0,36	0,36	-0,15	0,35
2023	0,20	0,32	0,27	0,09	0,91
2024	0,15	0,09	0,26	0,11	0,32

Здесь:

П1 — «Магнитогорский металлургический комбинат»,

П2 — «Новолипецкий металлургический комбинат»,

П3 — «Северсталь»,

П4 — «Евраз Нижнетагильский металлургический комбинат»,

П5 — «Трубная металлургическая компания».

Таким образом, платёжная матрица A будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,24 & 0,56 & 0,44 & 0,36 \\ 0,60 & 0,78 & 1,01 & 0,77 & 0,43 \\ 0,14 & 0,36 & 0,36 & -0,15 & 0,35 \\ 0,20 & 0,32 & 0,27 & 0,09 & 0,91 \\ 0,15 & 0,09 & 0,26 & 0,11 & 0,32 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Пользуясь информацией о дивидендных выплатах по акциям анализируемых компаний, рассчитаем средневзвешенную стоимость капитала WACC по формуле (1.2) на основе сведений о долях заёмного и собственного капитала, а также о его стоимости в предположении о том, что средняя доходность собственного капитала определяется на основе выплаченных дивидендов. Результат сведём в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2. Средневзвешенная стоимость капитала пяти металлургических предприятий России

TABLE 2. Weighted average cost of capital of five metallurgical enterprises in Russia

Годы/Years	Предприятия/Enterprises				
	П1	П2	П3	П4	П5
2020	0,0576	0,0606	0,0465	0,0298	0,0630
2021	0,0846	0,0943	0,0516	0,0289	0,0459
2022	0,0421	0,0157	0,0356	0,0282	0,0548
2023	0,0665	0,1132	0,0852	0,0386	0,0641
2024	0,0870	0,0231	0,0708	0,0525	0,0768

Вычислим элементы матрицы B на основе формулы (1.1), исходя из сведений, представленных в табл. 2. В результате получим платёжную матрицу следующего вида:

$$B = \begin{pmatrix} 0,946 & 0,943 & 0,956 & 0,971 & 0,941 \\ 0,922 & 0,914 & 0,951 & 0,972 & 0,956 \\ 0,960 & 0,985 & 0,966 & 0,973 & 0,948 \\ 0,938 & 0,898 & 0,921 & 0,963 & 0,940 \\ 0,920 & 0,977 & 0,934 & 0,950 & 0,929 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Будем считать, что акционеры и менеджеры выбранных нами компаний, интересы которых описываются матрицами A и B , могут вступать в кооперацию, допускающую совместный выбор стратегий, в том числе смешанных. Пользуясь известным алгоритмом решения кооперативной игры двух лиц (см., например, [10, гл. 3]), обозначим через U — множество всех точек плоскости Oxy , соответствующим значениям выигрышей игроков при применении ими своих стратегий вида

$$\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y').$$

Здесь $\lambda \in [0, 1]$, а (x, y) и (x', y') — пара чистых стратегий, которым соответствуют точки (a_{ij}, b_{ij}) с координатами, взятыми из матриц (1.3) и (1.4). В итоге множество U будет представлять собой выпуклую комбинацию 25 точек:

- M_1, \dots, M_5 с координатами (a_{1j}, b_{1j}) , $j = 1, \dots, 5$;
- L_1, \dots, L_5 с координатами (a_{2j}, b_{2j}) , $j = 1, \dots, 5$;
- K_1, \dots, K_5 с координатами (a_{3j}, b_{3j}) , $j = 1, \dots, 5$;
- N_1, \dots, N_5 с координатами (a_{4j}, b_{4j}) , $j = 1, \dots, 5$;
- Q_1, \dots, Q_5 с координатами (a_{5j}, b_{5j}) , $j = 1, \dots, 5$;

которое в нашем случае являет собой многоугольник с вершинами $K_4 K_2 L_4 L_3 L_2 N_2$ (см. рис. 1).

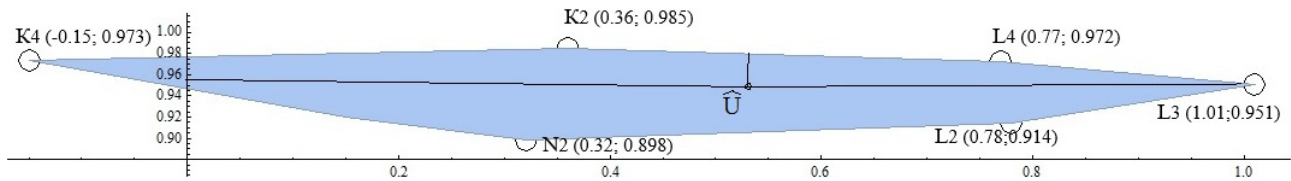


Рис. 1. Область допустимых решений и переговорное множество кооперативной задачи с платёжными матрицами A , B . Горизонтальная ось — ROE .

FIG. 1. The feasible region and the negotiating set of a cooperative problem with payoff matrices A , B . The horizontal axis is ROE .

Выделим из U Парето-оптимальное множество, удовлетворяющее условию того, что увеличение выигрыша одного игрока возможно только за счёт уменьшения выигрыша его партнёра — северо-восточную границу множества U . В нашем случае это ломаная $K_2 L_4 L_3$. Придерживаясь алгоритма решения кооперативной игры двух лиц методом арбитражных схем (см., например [1]), определим точку угрозы $\hat{U}(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$. Её координаты — это величины выигрышей игроков v_A и v_B , которые они могут получить, не заключая каких-либо соглашений друг с другом. При оценке гарантированного уровня v_A будем исходить из того, что игрок II может вести себя, как противник игрока I в антагонистической игре с платёжной матрицей A .

Перейдём к её решению, для чего редуцируем матрицу A на основе принципа доминирования [9, §1.8]. Поскольку элементы первого столбца A меньше элементов её второго столбца ($B_1 < B_2$), а элементы второго столбца A , в свою очередь, меньше элементов её третьего столбца ($B_2 < B_3$), то столбцы B_2 и B_3 можно из рассмотрения исключить, поскольку противник игрока I их заведомо не выберет. Получим редуцированную матрицу вида:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,44 & 0,36 \\ 0,60 & 0,77 & 0,43 \\ 0,14 & -0,15 & 0,35 \\ 0,20 & 0,09 & 0,91 \\ 0,15 & 0,11 & 0,32 \end{pmatrix}.$$

Рассуждая зеркальным образом по отношению к строкам ($A_1 > A_3, A_2 > A_1, A_2 > A_5$), исключаем строки A_1, A_3 и A_5 , так как их выбор заведомо невыгоден игроку I. В итоге будем иметь:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,77 & 0,43 \\ 0,2 & 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица не имеет седловой точки, но допускает решение в смешанных стратегиях, которые можно найти геометрически (см., например [6]) — рис. 2).

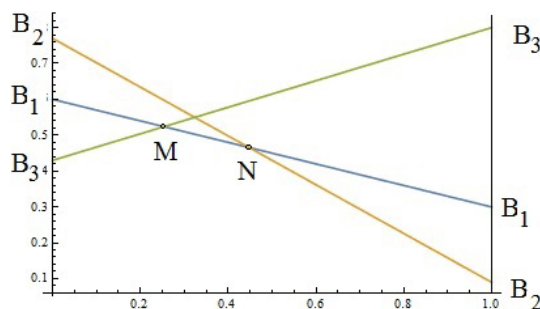


Рис. 2. Максиминное решение антагонистической игры с матрицей \bar{A}

FIG. 2. Maximin solution of an antagonistic game with matrix \bar{A}

Система уравнений для определения выигрыша v_A игрока I и вероятности p будет иметь вид

$$\begin{cases} 0,43p + 0,91(1 - p) = v, \\ 0,6p + 0,2(1 - p) = v. \end{cases}$$

Таким образом, $p = 71/88; \hat{u}_1 = v_A = 23/44$.

Найдём теперь цену игры с платёжной матрицей B . Исключая доминируемые столбцы B_1, B_3, B_5 ($B_4 > B_3, B_4 > B_3, B_4 \geq B_1$), получаем матрицу

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 0,943 & 0,971 \\ 0,914 & 0,972 \\ 0,985 & 0,973 \\ 0,898 & 0,963 \\ 0,977 & 0,950 \end{pmatrix}.$$

Исключим доминируемые строки A_1, A_2, A_3 (невыгодные для противника игрока II стратегии, поскольку они дают игроку II бóльший выигрыш), опираясь на неравенства $A_3 > A_2, A_1 > A_4, A_2 > A_4$. Получим редуцированную матрицу

$$\bar{\bar{B}} = \begin{pmatrix} 0,898 & 0,963 \\ 0,977 & 0,950 \end{pmatrix},$$

которая не имеет седловой точки. Для нахождения решения матричной игры в смешанных стратегиях, обозначим через q вероятность выбора игроком II первого столбца (предприятия П2), тогда $(1 - q)$ — это вероятность выбора им второго столбца (предприятия П4). При этом система уравнений для определения выигрыша v_B игрока II и вероятности q будет иметь вид (см., например, [1])

$$\begin{cases} 0,898q + 0,963(1 - q) = v, \\ 0,977q + 0,950(1 - q) = v. \end{cases}$$

Решением этой системы будет пара чисел $(0,1413; 0,9538)$, второе из которых и является выигрышем игрока v_B . Таким образом, $\hat{u}_2 = v_B = 0,9538$ и точка угрозы \hat{U} имеет координаты $(23/44; 0,9538)$, а переговорное множество S , соответствующее увеличенным выигрышам игроков при совместном выборе стратегий, представляет собой трапецию $\hat{U}QL_4D$, высекаемую из множества допустимых решений U прямыми $x = 23/44$ и $y = 0,9538$.

Действуя согласованно, игроки всегда могут договориться выбирать стратегии, соответствующие точкам на множестве $L = QL_4D$, являющимся пересечением множества S с Парето-оптимальным, поскольку это выгодно обеим сторонам. Именно на L будет располагаться точка арбитражного решения Нэша N , в которой достигается максимум произведения превышения выигрышей каждого из игроков над гарантированными выигрышами, которые могут быть получены без кооперирования. Поскольку область допустимых решений U выпукло, замкнуто и ограничено сверху, то по теореме Нэша (см., например, [10, §3.2]), точка N существует, единственна и представляет максимум функции полезности вида $g(x, y) = (x - v_A)(y - v_B)$ на множестве L .

Для решения задачи условной оптимизации

$$\begin{cases} g(M) \rightarrow \max \\ M \in L \end{cases} \quad (1.5)$$

рассмотрим два случая.

Случай 1. Точка M принадлежит отрезку QL_4 . Составим уравнение прямой, проходящей через точки $K_2(0,36; 0,985)$ и $L_4(0,77; 0,972)$, получим $y = 0,996415 - 0,0317073x$.

Таким образом, функция полезности приобретёт вид $g(x, y) = (x - 23/44)(y - 0,9538)$ на отрезке QL_4 , что после преобразований даст следующее квадратичное выражение:

$$g(x) = -0,0317x^2 + 0,0592x - 0,0223 \quad (1.6)$$

Найдём абсциссу вершины параболы (1.6) по обычной формуле $x_0 = -b/2a$, получим $x_0 \approx 0,934$. Поскольку x_0 не принадлежит проекции $[a, b]$ отрезка QL_4 на ось абсцисс, наибольшее значение функции $g(x)$ будет достигаться в правой границе этого отрезка. Найдём это значение, подставив в формулу (1.6) вместо x число $0,77$, получим $g_{\max}^1 \approx 0,0045$.

Случай 2. Точка M принадлежит отрезку L_4D .

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $L_4(0,77; 0,972)$ и $L_3(1,01; 0,951)$, получим $y = 1,03938 - 0,0879x$.

Функция полезности будет иметь вид $g(x) = -0,0875x^2 + 0,131319x - 0,044735$.

Она достигает максимума в точке $x_1 \approx 0,7504$, которая не принадлежит проекции L_4D на ось абсцисс. В данном случае максимальное значение функции полезности будет достигаться в левой границе проекции L_4L_3 на ось абсцисс, поэтому $g_{\max}^2 = g(0,7504) \approx 0,0045$ и $g_{\max}^2 = g_{\max}^1$ и решением задачи (1.5) будет точка L_4 с абсциссой $x = 0,77$ (см. рис. 1) и ординатой $y = 0,972$.

Таким образом, арбитражное решение Нэша находится в точке $L_4(0,77; 0,972)$; ему соответствует оптимальная (по Парето) величина рентабельности собственного капитала ROE , равная $0,77$ и структура капитала предприятия П4 в 2021 г., состоящая из $51,3\%$ собственных и $48,7\%$ заёмных средств.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОАЛИЦИОННОЙ ИГРОВОЙ МОДЕЛИ (ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ)

Как и в [15], проведём анализ игровой ситуации на основании «сохранения рисунка» игры. Введём параметр ε возмущения редуцированной матрицы \bar{A} в предположении о том, что угловые точки, образующие северо-восточную границу области допустимых решений (K_2, L_4, L_3) остались прежними:

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,77 & 0,43 \\ 0,2 + \varepsilon & 0,09 & 0,91 - \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Для нахождения абсциссы точки угрозы необходимо решить матричную игру с платёжной матрицей A_ε . Следуя стандартной логике геометрического способа решения игры 2×3 (см., например, [6, §1]), найдём нижнюю огибающую семейства трёх прямых, соответствующих стратегиям противника игрока A (столбцам матрицы A_ε , которые обозначим через B_1, B_2, B_3) (см. рис. 2).

Ею будет ломаная B_3MNB_2 . При заданном значении ε (на рисунке $\varepsilon = 0,1$) точка M будет являться точкой минимакса. Найдём её координаты, как точки пересечения прямых B_1B_1 и B_3B_3 , считая, что первая строка матрицы A_ε играет с вероятностью p :

$$0,43p + (0,91 - \varepsilon)(1 - p) = 0,6p + (0,2 + \varepsilon)(1 - p). \quad (2.1)$$

Отсюда $p = (0,71 - 2\varepsilon)/(0,88 - 2\varepsilon)$. Найдём ординату точки M , подставив в правую часть равенства (2.1), получим $y_M = (0,515\varepsilon - 0,23)/(\varepsilon - 0,44)$. Для сохранения рисунка игры (точка M остаётся точкой минимакса) ордината точки N не должна превышать y_M . Найдём координаты точки N , как точки пересечения прямых B_1B_1 и B_2B_2 :

$$0,77p + 0,09(1 - p) = 0,6p + (0,2 + \varepsilon)(1 - p).$$

Получаем $p = (0,11 + \varepsilon)/(0,28 + \varepsilon)$. Тогда $y_N = (0,77\varepsilon + 0,1)/(\varepsilon + 0,28)$. Решая неравенство $y_M \geq y_N$, получим

$$\frac{0,515\varepsilon - 0,23}{\varepsilon - 0,44} \geq \frac{0,77\varepsilon + 0,1}{\varepsilon + 0,28},$$

что даёт промежутки возможного изменения ε :

$$\varepsilon \in (-0,28; 0,2] \cup [0,4; 0,44). \tag{2.2}$$

При этом абсцисса точки угрозы $u_1 = v_A(\varepsilon) = (0,515\varepsilon - 0,23)/(\varepsilon - 0,44)$ должна принадлежать проекции отрезка K_2L_4 на ось абсцисс: $u_1 \in (0,36, 0,77)$, откуда получаем ещё одно (двойное) неравенство:

$$0,36 < \frac{0,515\varepsilon - 0,23}{\varepsilon - 0,44} < 0,77,$$

решением которого являются два промежутка: $(-\infty; 0,426667) \cup (0,461935; +\infty)$. С учётом (2.2) это даёт

$$\varepsilon \in (-0,28; 0,2] \cup [0,4; 0,427). \tag{2.3}$$

Если предполагать, что мы имеем дело с безубыточными предприятиями ($a_{ij} \geq 0$), то промежуток (2.3) переходит в

$$\varepsilon \in [-0,2; 0,2] \cup [0,4; 0,427).$$

Подставляя минимальное и максимальное значения ε в последнюю строку матрицы A_ε , получим $ROE_{23}^{\min} = 0,473$; $ROE_{21}^{\max} = 0,627$. По отношению к исходным значениям ROE ($ROE_{23}^0 = 0,91$, $ROE_{21}^0 = 0,2$) получается предел уменьшения ROE в размере 48% (предприятие П1), предел увеличения ROE в размере 213% (предприятие П5) соответственно. Таким образом, один из репрезентативных экономических агентов (П5) имеет запас роста рентабельности собственного капитала более, чем в два раза, причём равновесная (по сегменту) структура капитала при условии наличия такого роста будет оставаться прежней¹.

Перейдём к аналогичной задаче для матрицы B , предполагая, что исходные данные (WACC) могут измениться, что приведёт к новой матрице \bar{B} , которую обозначим через B_δ :

$$B_\delta = \begin{pmatrix} 0,898 + \delta & 0,963 \\ 0,977 - \delta & 0,950 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Для решения игры с матрицей B_δ в смешанных стратегиях составим уравнение

$$(0,898 + \delta)q + 0,963(1 - q) = (0,977 - \delta)q + 0,95(1 - q),$$

где q — вероятность выбора вторым игроком первой чистой стратегии (первого столбца). Решение этого уравнения выглядит так: $q = \frac{13}{4(23 - 500\delta)}$. При этом выигрыш игрока будет равен $u_2 =$

$$= u_2(\delta) = \frac{87,751 - 1900\delta}{4(23 - 500\delta)}.$$

Для того, чтобы точка угрозы не вышла за пределы переговорного множества, достаточно, чтобы величина u_2 принадлежала проекции отрезка K_2L_4 на ось Y — промежутку $[0,951; 0,985]$. Это даёт следующие пределы для возможного изменения δ :

$$\delta \in [-0,1295; 0,041]. \tag{2.5}$$

Вернёмся к исходным для матрицы B данным — величинам WACC. Обращая формулу $b = 1/(1 + \text{WACC})$, получим

$$\text{WACC} = \frac{1}{b} - 1,$$

¹Наличие указанной возможности свидетельствует о потенциале роста доходности собственного капитала во всём сегменте S .

тогда для компонент первого столбца в (2.3) находим

$$WACC_{11} = \frac{1}{0,898 + \delta} - 1 = \frac{0,102 - \delta}{0,898 + \delta}; \quad WACC_{21} = \frac{1}{0,977 - \delta} - 1 = \frac{0,023 + \delta}{0,977 - \delta}.$$

Подставляя крайние границы промежутка изменения δ из (2.5) в последние формулы, получим:

$$WACC_{11}^{\max} \approx 0,30; \quad WACC_{11}^{\min} \approx 0,065; \quad WACC_{21}^{\max} \approx 0,068; \quad WACC_{21}^{\min} \approx -0,096.$$

Таким образом, возможный размах изменения $WACC$ на предприятии П2 (по отношению к исходным значениям $WACC_{11}^0 = 0,1132$, $WACC_{21}^0 = 0,0231$) может составлять от -43% до 172% (2023 г.) и до 194% (2024 г.), что свидетельствует о его финансовой устойчивости.

Подводя итог, заключаем, что найдены своего рода пределы устойчивости структуры капитала по отношению к изменению ROE и $WACC$ на предприятиях, формирующих заданный промышленный сегмент.

3. БИМАТРИЧНАЯ ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ И ЕЁ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Будем предполагать, что игроки не вступают в коалицию, не имеют возможности договориться и играют «каждый сам за себя». Тогда мы имеем дело с классической (неантагонистической) биматричной игрой, решать которую будет традиционным способом (см., например, [6]). Обозначая строки матрицы A в (1.3) через A_i ($i = 1, \dots, 5$) и опираясь на принцип доминирования стратегий, в силу неравенств $A_2 > A_1$, $A_2 > A_3$, $A_2 > A_5$, исключаем из рассмотрения строки A_1 , A_3 , A_5 . Остаётся матрица A_r вида

$$A_r = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,78 & 1,01 & 0,77 & 0,43 \\ 0,20 & 0,32 & 0,27 & 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}.$$

Принцип доминирования стратегий для столбцов матрицы B в силу неравенств $B_4 > B_3$, $B_4 > B_5$, $B_4 > B_1$ позволяет исключить из рассмотрения стратегии B_1 , B_3 , B_5 . После редуцирования останется матрица B_r вида

$$B_r = \begin{pmatrix} 0,943 & 0,971 \\ 0,914 & 0,972 \\ 0,985 & 0,973 \\ 0,898 & 0,963 \\ 0,977 & 0,950 \end{pmatrix}.$$

Предполагая далее, для простоты, что игрок I знает, какие предприятия оставлены игроком II (или, наоборот, что игроку II известны годы, которые игрок I считает наиболее благоприятными), редуцируем матрицы A_r и B_r повторно. Получим двумерную биматричную игру с матрицами \bar{A}_r и \bar{B}_r :

$$\bar{A}_r = \begin{pmatrix} 0,78 & 0,77 \\ 0,32 & 0,09 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_r = \begin{pmatrix} 0,914 & 0,972 \\ 0,898 & 0,963 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

В этой игре есть седловая точка (A_1, B_2) , которой соответствует ROE , равное 77% (предприятие П4, 2021-й год) и $WACC$, равный $0,0288$ (см. (2.4)). Отвечающая этому предприятию структура капитала предполагает наличие $51,3\%$ собственных средств и $49,7\%$ заёмных (табл. 3).

ТАБЛИЦА 3. Структура капитала предприятий выбранного сегмента

TABLE 3. Capital structure of enterprises in the selected segment

Показатель/Indicator	Годы/Years	П1	П2	П3	П4	П5
K_e (Доля собственного капитала/Share of equity)	2020	0,57	0,45	0,40	0,41	0,14
	2021	0,63	0,53	0,42	0,513	0,05
	2022	0,70	0,50	0,58	0,44	0,05
	2023	0,70	0,70	0,61	0,40	0,09
	2024	0,75	0,65	0,55	0,37	0,10

Решение Нэша в смешанных стратегиях для матриц (3.1) отсутствует. Следуя логике, приведённой в [15], осуществим возмущения матриц \bar{A}_r , \bar{B}_r таким образом, чтобы игра стала иметь

решение в смешанных стратегиях, а седловая точка отсутствовала¹. Для этого достаточно одновременно уменьшить компоненты матриц \bar{A}_r, \bar{B}_r (a_{11} и b_{12}) таким образом, чтобы выполнялись неравенства:

$$\begin{cases} 0 < a_{11}(\varepsilon) < 0,32, \\ 0 < b_{12}(\delta) < 0,914. \end{cases} \quad (3.2)$$

Сами матрицы в этом случае примут вид:

$$A_r^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0,78 - \varepsilon & 0,77 \\ 0,32 & 0,09 \end{pmatrix}, \quad B_r^\delta = \begin{pmatrix} 0,914 & 0,972 - \delta \\ 0,898 & 0,963 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Тогда (3.2) влечёт выполнение неравенств:

$$\begin{cases} 0,46 < \varepsilon < 0,78, \\ 0,058 < \delta < 0,972. \end{cases} \quad (3.4)$$

Обозначим равновесную смешанную стратегию игрока I через $X = (p, 1 - p)$; равновесную смешанную стратегию игрока II — через $Y = (q, 1 - q)^T$, где $p, q \in [0, 1]$. Условие приемлемости ситуации (X, Y) для обоих игроков имеют вид [6]:

$$A_i Y^T \leq X A Y^T; \quad i = 1, 2 \quad (3.5)$$

$$X B_j \leq X B Y^T; \quad j = 1, 2 \quad (3.6)$$

где A_i — i -я строка матрицы A_r^ε ; B_j — j -й столбец матрицы B_r^δ .

В предположении о том, что игра с матрицами (3.3) не имеет решений в чистых стратегиях, для приемлемой ситуации в силу (3.5) получаем равновесную стратегию второго игрока:

$$Y^* = \left(\frac{34}{11 + 50\varepsilon}, \frac{50\varepsilon - 23}{11 + 50\varepsilon} \right). \quad (3.7)$$

Из условия (3.6) определяем равновесную стратегию первого игрока:

$$X^* = \left(\frac{65}{7 + 1000\delta}, \frac{1000\delta - 58}{7 + 1000\delta} \right). \quad (3.8)$$

Рассчитаем теперь выигрыши игроков I и II по известным формулам $H_1 = X^* A (Y^*)^T$ и $H_2 = X^* B (Y^*)^T$, получим:

$$H_1(\varepsilon, \delta) = \frac{61,67 + 31,5\varepsilon + 8810\delta + 4500\varepsilon\delta}{(11 + 50\varepsilon)(7 + 1000\delta)}, \quad (3.9)$$

$$H_2(\varepsilon, \delta) = \frac{80,586 + 366,3\varepsilon + 9878\delta + 44900\varepsilon\delta}{(11 + 50\varepsilon)(7 + 1000\delta)}. \quad (3.10)$$

Для нахождения границ возможных выигрышей игроков достаточно решить задачу на экстремум для функций двух переменных (3.9), (3.10), заданных в прямоугольнике Π в системе координат (ε, δ) , определяемом неравенствами (3.4):

$$\begin{cases} H_i(\varepsilon, \delta) \rightarrow \max \\ (\varepsilon, \delta) \in \Pi; \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} H_i(\varepsilon, \delta) \rightarrow \min \\ (\varepsilon, \delta) \in \Pi; \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (3.12)$$

Применяя к задачам (3.11)-(3.12) стандартные методы дифференциального исчисления, получим:

$$H_1^{\min} = H_1(0,78; 0,88) \approx 0,2464 = \text{ROE}_1; \quad (3.13)$$

$$H_1^{\max} = H_1(0,46; 0,71) \approx 0,3199 = \text{ROE}_2; \quad (3.14)$$

$$H_2^{\min} = H_2(0,748; 0,97) \approx 0,899; \quad (3.15)$$

¹Максимальные элементы в столбцах матрицы \bar{A}_r не совпадают с максимальными элементами в строках матрицы \bar{B}_r .

$$H_2^{\max} = H_2(0,744; 0,058) \approx 0,914. \quad (3.16)$$

Из этих результатов следует, что в рамках указанных возмущений величина ROE может варьироваться от 24,64% до 31,99%, а величина $WACC$ может находиться в пределах от 0,0941 до 0,112 (см. формулу (2.5)). При этом будет наблюдаться различная структура капитала, определяемая равенством¹:

$$K_\alpha = X_\alpha C Y_\alpha,$$

где C — фрагмент матрицы заёмного/собственного капитала из табл. 3, соответствующей предприятиям П2, П4 для 2021 и 2023 гг.; $X_\alpha = X_\alpha(\delta)$, $Y_\alpha = Y_\alpha(\varepsilon)$ — стратегии игроков I и II, получаемые из формул (3.7) и (3.8) путём подстановки величин δ и ε , фигурирующих в качестве аргументов функций H_i ($i = 1, 2$) в формулах (3.13)-(3.14).

Переходя к первому случаю ($\delta = 0,88$, $\varepsilon = 0,78$), получим:

$$K_1 = \begin{pmatrix} \frac{65}{887} & \frac{822}{887} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,53 & 0,513 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,68 \\ 0,32 \end{pmatrix} \approx 0,5982.$$

Этому случаю соответствует величина ROE , равная 24,64%.

Для второго случая ($\delta = 0,71$, $\varepsilon = 0,46$) имеем:

$$K_2 = \begin{pmatrix} \frac{65}{717} & \frac{652}{717} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,53 & 0,513 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx 0,6846.$$

Ему соответствует $ROE \approx 32\%$.

Таким образом, с точки зрения игрока I желаемый процент собственного капитала должен находиться в пределах $P_1 = [59,82; 68,46]$.

Перейдём к позиции игрока II. Для случая ($\delta = 0,97$, $\varepsilon = 0,478$) выводим:

$$K_3 = \begin{pmatrix} \frac{65}{977} & \frac{917}{977} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,53 & 0,513 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{85}{121} \\ \frac{36}{121} \end{pmatrix} \approx 0,605.$$

Соответствующая величина $WACC$ будет равна 11,23%.

Для последнего случая ($\delta = 0,058$, $\varepsilon = 0,744$) вычисляем:

$$K_4 = (1 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0,53 & 0,513 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{170}{241} \\ \frac{71}{241} \end{pmatrix} \approx 0,525.$$

Такому проценту (52,5) собственного капитала соответствует $WACC$, равный 9,4%.

Получается, что предпочтительный для игрока II процент собственного капитала K будет находиться в пределах $P_2 = [52,5; 60,5]$. Пересечение промежутков P_1 и P_2 даст сегмент P_2 , определяющий пределы варьирования K , в рамках которых возможно сохранение баланса экономических интересов игроков (собственников и менеджеров).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возможности реализации представленного алгоритма параметрического анализа кооперативной и биматричной игровых моделей структуры капитала ограничены. Существенное значение имеет размерность редуцированных матриц \bar{A} , \bar{B} : $\dim \bar{A} \leq 3$, $\dim \bar{B} \leq 3$ (в нашем случае это соответствует случаю не более трёх «эталонных»² предприятий, оставшихся в репрезентативной выборке) и матриц A_r , B_r : $\dim A_r = \dim B_r = 2$ (это соответствует выбору «эталонного» периода,

¹Отметим, что способ нахождения равновесной (по Нэшу) структуры капитала предполагает, по сути, наличие трёх матриц — игровых матриц A и B , связанных с ценой капитала и его рентабельностью, а также «внеигровой» матрицы C , связанной со структурой капитала.

²С точки зрения экономики это говорит о существовании «ядра предприятий» в выбранном сегменте, на финансово-кредитную политику которых в эталонном периоде целесообразно ориентироваться остальным предприятиям сегмента.

состоящего из двух лет). Если для количества строк (m) матрицы \bar{A} и столбцов (n) матрицы \bar{B} будут выполняться неравенства

$$\begin{cases} n \geq 3, \\ m \geq 3, \end{cases}$$

то, при отсутствии седловых точек, придётся находить решение соответствующих матричных игр путём перехода к эквивалентной задаче линейного программирования (см., например, [8, гл. III]), что уже не позволяет апеллировать к тезису о сохранении рисунка игры для коалиционного случая. Увеличение размерности матриц A_r , B_r (в отсутствие седловой точки) в свою очередь, приведёт к необходимости использования итерационного алгоритма Лемке—Хоусона (см., например, [7]), что представляется более сложным, но реальным вариантом. Здесь появляется возможность для добавления ещё одного параметра в матрицы A_r и B_r ($A_r = A_r(\varepsilon_i)$, $B_r = B_r(\delta_i)$, $i = 1, 2$) и проведения двухпараметрического анализа игровой ситуации (см. [15]), что, в итоге, приведёт к задачам на экстремум для функций четырёх переменных $H_j = H_j(\varepsilon_i, \delta_i)$; $j = 1, 2$; $i = 1, 2$.

Перспективным, на наш взгляд, является переход от дискретных игровых моделей структуры капитала к непрерывным (к дифференциальным играм), что позволит рассматривать вопросы устойчивости решений в контексте теории динамических систем [12]. Но эта тема требует отдельной серьёзной проработки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безруков А. Б., Саитгараев С. С. Прикладная теория игр: учеб. пособие. — Челябинск: Челяб. гос. унив., 2001.
2. Богатов Е. М., Демидова Е. Г. Теоретико-игровая модель структуры капитала: биматричный подход // В сб.: «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2025): Сб. тр. Международной научной конференции, Воронеж, 3–5 декабря 2025 г.». — Воронеж: Научная книга. — С. 18–20.
3. Богатов Е. М., Демидова Е. Г. Теоретико-игровое моделирование структуры капитала // Цифр. модели и решения. — 2026. — 5, № 1. — С. 53–76. — DOI: [10.29141/2949-477X-2026-5-1-4](https://doi.org/10.29141/2949-477X-2026-5-1-4).
4. Гулюгина Т. И. Теоретико-игровая модель оптимизации структуры капитала компании // Вопр. экономики и права. — 2012. — 46. — С. 100–104.
5. Демидова Е. Г., Богатов Е. М. Моделирование структуры корпоративного капитала с применением формулы приращений // Вопр. экономики. — 2023. — № 6. — С. 62–75. — DOI: [10.32609/0042-8736-2023-6-62-75](https://doi.org/10.32609/0042-8736-2023-6-62-75).
6. Коноховский П. В., Малова А. С. Теория игр. — М.: ЮРАЙТ, 2014.
7. Набатова Д. С. Обеспечение сходимости для вычислительного алгоритма Лемке—Хоусона решения биматричной игры // Соврем. мат. и ее прилож. — 2015. — 95. — С. 100–113.
8. Оуэн Г. Теория игр. — М.: Мир, 1971.
9. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014.
10. Стронгин Р. Г. Исследование операций и модели экономического поведения. — М.: ИНТУИТ, 2016.
11. Шарикова О. В. Определение оптимальной структуры капитала российских организаций // Корпорат. финансы. — 2013. — № 1. — С. 33–43. — DOI: [10.17323/j.jcfr.2073-0438.7.1.2013.34-46](https://doi.org/10.17323/j.jcfr.2073-0438.7.1.2013.34-46).
12. Якушкина Т. С. О распределенной репликаторной системе, соответствующей биматричной игре // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Выч. мат. и киберн. — 2016. — № 1. — С. 19–27.
13. Центр раскрытия корпоративной информации // Интерфакс [электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.e-disclosure.ru> (дата обращения: 15.06.2026).
14. Allen F., Morris S. Game theory models in finance // В сб.: «Game Theory and Business Applications». — Boston: Springer, 2013. — С. 17–41. — DOI: [10.1007/978-1-4614-7095-3_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7095-3_2).
15. Bogatov E. M., Bogatova N. E. Research of the problem of fair distribution of fishing quotas by the methods of game theory // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2024. — 285, № 3. — С. 316–327. — DOI: [10.1007/s10958-024-07444-y](https://doi.org/10.1007/s10958-024-07444-y).
16. Ryu S. W. Game theoretic approach to the capital structure and investment decision problems of a levered firm. — Philadelphia: Univ. Pennsylvania, 1985.
17. Tudose B. M. Game theory: minimising the cost of capital vs. maximising the return of investors // Studies and Scientific Researches. Economics Edition. — 2014. — 20. — DOI: [10.29358/scoco.v0i20.264](https://doi.org/10.29358/scoco.v0i20.264).

Е. М. Богатов

Губкинский филиал НИТУ «МИСиС», Губкин, Россия

E-mail: embogatov@inbox.ru, РИНЦ SPIN-код: 4609-9235, РИНЦ AuthorID: 14859, ResearcherID: [GWR-2097-2022](https://orcid.org/0000-0002-4897-0394), Scopus: [8912933400](https://orcid.org/0000-0002-4897-0394), ORCID: [0000-0002-4897-0394](https://orcid.org/0000-0002-4897-0394)

Е. Г. Демидова

Старооскольский технологический институт (филиал НИТУ «МИСиС»), Старый Оскол, Россия

E-mail: dmitrikey@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 1270-9040, РИНЦ AuthorID: 774582, ResearcherID: [KLY-7919-2024](https://orcid.org/0000-0001-8496-973X), ORCID: [0000-0001-8496-973X](https://orcid.org/0000-0001-8496-973X)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-237-249](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-237-249)

EDN: [AUKPEA](https://edn.ru/AUKPEA)

UDC 519.83

Research article

Coalition game-theoretic models of capital structure and their parametric analysis

E. M. Bogatov¹ and E. G. Demidova²

¹National University of Science and Technology “MISIS,” Gubkin branch, Gubkin, Russia

²Starooskol'skii Technological Institute (branch of NUST “MISIS”), Starii Oskol, Russia

Abstract. This work is a continuation of the research conducted in [2,3]. When forming the capital structure of enterprises (determining the shares of borrowed and equity funds), the balance of interests of owners and managers plays an important role. In this case, the owner is interested in obtaining the maximum return on his capital (maximizing its rentability *ROE*), and the manager — in increasing the financial stability of the company by reducing the weighted average cost of capital *WACC*. Resolving the conflict situation is possible, as shown by the authors, within the framework of nonantagonistic game theory, namely in the context of a bimatrix game and a cooperative game of two people. The owners of enterprises Π_i were chosen as player A, and the *ROE* values of enterprises from a representative sample, observed in a certain period T , were chosen as the components of his game matrix. The role of player B was played by the managers of enterprises Π_i , and the components of his game matrix were values of the form $1/(1 + WACC)$ determined in the same period T . The algorithms for finding the Nash equilibrium capital structure for both models were tested using real data for five enterprises in the metallurgical segment observed over a period of 5 years. As a result, it was possible not only to obtain new methods for determining the balanced capital structure, but also to analyze the stability of the obtained solutions with respect to perturbations of the initial data (reduced game matrices), which made it possible to calculate the corridors of possible changes in *ROE* and *WACC* for the reference set of enterprises Π_α in the selected (shortened) observation period, as well as to outline paths for further development of this topic.

Keywords: bimatrix games, two-person cooperative games, parametric analysis, stability analysis, equilibrium capital structure.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors' contribution. *Bogatov E. M.* — development of the research concept, formulation of the idea, goals and objectives of the research, development of methods and procedures, writing the text of the manuscript. *Demidova E. G.* — collection, processing and analysis of data, verification of results, finalization of conclusions, editing of the text and list of references.

For citation: E. M. Bogatov, E. G. Demidova, “Coalition game-theoretic models of capital structure and their parametric analysis,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 237–249. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-237-249](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-237-249) EDN: [AUKPEA](https://edn.ru/AUKPEA)



REFERENCES

1. A. B. Bezrukov and S. S. Saitgaraev, *Prikladnaya Teoriya Igr: Ucheb. Posobie* [Applied Game Theory: A Textbook], Chelyab. State Univ., Chelyabinsk, 2001 (in Russian).
2. E. M. Bogatov and E. G. Demidova, “Teoretiko-igrovaya model’ struktury kapitala: bimatrichnyy podkhod” [Game-theoretic model of capital structure: a bimatrix approach], In: *Sovremennye Metody Prikladnoy Matematiki, Teorii Upravleniya i Komp’yuternykh Tekhnologiy (PMTUKT-2025): Sb. Tr. Mezhd. Nauch. Konf., Voronezh, 3–5 Dek. 2025 g.* [Modern Methods of Applied Mathematics, Control Theory and Computer Technology: Proc. Int. Sci. Conf. Voronezh, 3–5 Dec. 2025], Nauchnaya Kniga, Voronezh, 2025, pp. 18–20 (in Russian).
3. E. M. Bogatov and E. G. Demidova, “Teoretiko-igrovoe modelirovanie struktury kapitala” [Game-theoretic modeling of capital structure], *Tsifr. Modeli i Resheniya* [Digit. Models Solutions], 2026, **5**, No. 1, 53–76 (in Russian), DOI: [10.29141/2949-477X-2026-5-1-4](https://doi.org/10.29141/2949-477X-2026-5-1-4).
4. T. I. Gulyugina, “Teoretiko-igrovaya model’ optimizatsii struktury kapitala kompanii” [Game-theoretic model of optimization of a company’s capital structure], *Vopr. Ekonomiki i Prava* [Issues Econ. Law], 2012, **46**, 100–104 (in Russian).
5. E. G. Demidova and E. M. Bogatov, “Modelirovanie struktury korporativnogo kapitala s primeneniem formuly prirashcheniy” [Modeling the structure of corporate capital using the increment formula], *Vopr. Ekonomiki* [Issues Econ.], 2023, No. 6, 62–75 (in Russian), DOI: [10.32609/0042-8736-2023-6-62-75](https://doi.org/10.32609/0042-8736-2023-6-62-75).
6. P. V. Konyukhovskii and A. S. Malova, *Teoriya Igr* [Game Theory], YuRAYT, Moscow, 2014 (in Russian).
7. D. S. Nabatova, “Obespechenie skhodimosti dlya vychislitel’nogo algoritma Lemke–Khousona resheniya bimatrichnoy igry” [Ensuring convergence for the Lemke–Howson computational algorithm for solving a bimatrix game], *Sovrem. Mat. i Ee Prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2015, **95**, 100–113 (in Russian).
8. G. Owen, *Teoriya Igr* [Game Theory], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
9. L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich, and E. V. Shevkoplyas, *Teoriya Igr* [Game Theory], BKhV-Peterburg, St. Petersburg, 2014 (in Russian).
10. R. G. Strongin, *Issledovanie Operatsiy i Modeli Ekonomicheskogo Povedeniya* [Operations Research and Models of Economic Behavior], INTUIT, Moscow, 2016 (in Russian).
11. O. V. Sharikova, “Opreделение optimal’noy struktury kapitala rossiyskikh organizatsiy” [Determining the optimal capital structure of Russian organizations], *Korporat. Finansy* [Corporate Finances], 2013, No. 1, 33–43 (in Russian), DOI: [10.17323/j.jcfr.2073-0438.7.1.2013.34-46](https://doi.org/10.17323/j.jcfr.2073-0438.7.1.2013.34-46).
12. T. S. Yakushkina, “O raspredelennoy replikatornoy sisteme, sootvetstvuyushchey bimatrichnoy igre” [On a distributed replicator system corresponding to a bimatrix game], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 15. Vych. mat. i kibern.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 15. Comput. Math. Cybern.], 2016, No. 1, 19–27 (in Russian).
13. “Corporate Disclosure Center,” *Interfax*. Available online: <https://www.e-disclosure.ru>, accessed on June 15, 2026 (in Russian).
14. F. Allen and S. Morris, “Game theory models in finance,” In: *Game Theory and Business Applications*, Springer, Boston, 2013, pp. 17–41, DOI: [10.1007/978-1-4614-7095-3_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7095-3_2).
15. E. M. Bogatov and N. E. Bogatova, “Research of the problem of fair distribution of fishing quotas by the methods of game theory,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2024, **285**, No. 3, 316–327, DOI: [10.1007/s10958-024-07444-y](https://doi.org/10.1007/s10958-024-07444-y).
16. S. W. Ryu, *Game Theoretic Approach to the Capital Structure and Investment Decision Problems of a Levered Firm*, Univ. Pennsylvania, Philadelphia, 1985.
17. B. M. Tudose, “Game theory: minimising the cost of capital vs. maximising the return of investors,” *Studies and Scientific Researches. Economics Edition*, 2014, **20**, DOI: [10.29358/scoco.v0i20.264](https://doi.org/10.29358/scoco.v0i20.264).

E. M. Bogatov

National University of Science and Technology “MISIS,” Gubkin branch, Gubkin, Russia

E-mail: embogatov@inbox.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4609-9235, eLIBRARY AuthorID: [14859](https://elibrary.ru/14859),
 ResearcherID: [GWR-2097-2022](https://orcid.org/0000-0002-4897-0394), Scopus: [8912933400](https://orcid.org/8912933400), ORCID: [0000-0002-4897-0394](https://orcid.org/0000-0002-4897-0394)

E. G. Demidova

Starooskol’skii Technological Institute (branch of NUST “MISIS”), Starii Oskol, Russia

E-mail: dmitrikey@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 1270-9040, eLIBRARY AuthorID: [774582](https://elibrary.ru/774582),
 ResearcherID: [KLY-7919-2024](https://orcid.org/0000-0001-8496-973X), ORCID: [0000-0001-8496-973X](https://orcid.org/0000-0001-8496-973X)