

ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

И. В. БАРЫШЕВА, Н. И. ТРУСОВА, Е. В. ФРОЛОВА

*Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк,
Россия*

Аннотация. Исследуется частно-интегральный оператор со слабой особенностью в $\mathbb{R}^n$ в анизотропном пространстве непрерывных функций со значениями в пространстве L_p , $p \in (1, \infty)$. Доказаны теоремы о равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности исследуемого оператора. Из этих теорем вытекает теорема о переводе всякого ограниченного и равностепенно непрерывного множества в предкомпактное множество частно-интегральным оператором со слабой особенностью, действующим из пространства непрерывных по части переменных со значениями в L_p по другой части переменных функций в пространство непрерывных функций.

Ключевые слова: частный интеграл, частно-интегральный оператор, частно-интегральный оператор со слабой особенностью, анизотропное пространство функций, смешанная норма, равномерная ограниченность, равностепенная непрерывность, предкомпактность, компактность.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы благодарны профессору Л. Н. Ляхову за поставленную задачу и выражают искреннюю благодарность за консультацию.

Вклад авторов. Все авторы участвовали в анализе работ, посвященных исследованию частно-интегральных операторов со слабой особенностью в различных функциональных пространствах, формулировании теорем, разработке схем их доказательств и непосредственном проведении последних.

Для цитирования: Барышева И. В., Трусова Н. И., Фролова Е. В. Частно-интегральные операторы со слабой особенностью // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 227–236. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-227-236](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-227-236) EDN: [ATNOMT](https://edn.ru/ATNOMT)

1. ВВЕДЕНИЕ

Частно-интегральным оператором (далее ЧИ-оператором), отвечающим ядру k , в $\mathbb{R}^n$ называется выражение вида

$$(Kf)(s) = \int_{\Omega^m} k(y, z, t) f(t, z) dt, \quad (1.1)$$

где $\Omega^m \subset \mathbb{R}^m$, $s = (y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. В случае $m = n$ оператор (1.1) является классическим интегральным оператором.

Функция $k(y, z, t)$ называется интегрально ограниченной, если

$$\sup_s \int_{\Omega^m} |k(y, z, t)| dt = L < \infty.$$

Непрерывность и интегральная ограниченность частно-интегральных операторов, как и интегральных операторов в $\mathbb{R}^2$ с непрерывными ядрами и в пространстве непрерывных функций двух переменных, изучена в [3, 9]. В лебеговых пространствах функций ограниченные действия частно-интегральных и интегральных операторов имеют принципиальные различия. Это было замечено еще А. С. Калитвиным в книге [3], в которой доказаны теоремы действия для различных случаев перестановки переменных в ядре оператора и различных соотношений сопряженных показателей лебеговых пространств. Там же приведено пожелание доказать аналогичные утверждения в общем виде с использованием только свойств лебеговых пространств. Такой подход был осуществлен в работе [11]. Оказалось, что ограниченное действие частно-интегральных операторов возможно лишь в лебеговых пространствах функций со смешанной нормой. Такие пространства впервые введены в работах А. Бенедек и Р. Панцоне [10], исследовались в работах С. М. Никольского, его учеников и последователей, где эти пространства назывались анизотропными (см. [1, гл. 3]). Изучение частно-интегральных операторов, имеющих различные свойства по разным переменным, что обусловлено применением смешанных $\sup - L_p$ -норм, приведено в [8, 12].

В этой работе представлены результаты исследований частно-интегральных операторов со слабой особенностью в пространствах непрерывных функций со значениями в лебеговом пространстве функций L_p , $p \in (1, \infty)$. Классические интегральные операторы такого вида хорошо изучены, например, см. [2, 6, 7]. Частно-интегральные же операторы со слабой особенностью ранее рассматривались только для классов непрерывных функций двух переменных, принадлежащих $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ (см. [4]).

2. ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Работа посвящена исследованию ограниченности и непрерывности действия частно-интегральных операторов со слабой особенностью. Через $D = \{x: a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}$ обозначим конечный замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, $\alpha, \bar{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \dots, n)$ и $D = D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}$, m — размерность, а d — диаметр параллелепипеда D_α ($1 \leq m \leq n$).

ЧИ-оператором со слабой особенностью называется выражение

$$(K_\alpha^{(m)}u)(x) = \int_{D_\alpha} \kappa_\alpha(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha, \quad (2.1)$$

где

$$x = (x_\alpha, x_{\bar{\alpha}}), \quad \kappa_\alpha = \frac{k(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta}, \quad \beta < m.$$

При $m = n$ ЧИ-оператор (2.1) является классическим интегральным оператором со слабой особенностью.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $p_i \geq 1$ ($i = \overline{1, n}$). Следуя [1, с. 19], введем пространство $L_{\mathbf{p}}((a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n))$, норма в котором определяется равенством

$$\|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} |u(x)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \dots dx_{n-1} \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Следуя [5, с. 19], через $CL_p = C(D_{\bar{\alpha}}; L_p(D_\alpha))$ обозначим пространство непрерывных функций со значениями в лебеговом пространстве функций L_p , $p \in (1, \infty)$ с нормой

$$\|u\|_{CL_p} = \sup_{x_{\bar{\alpha}} \in D_{\bar{\alpha}}} \left(\int_{D_\alpha} |u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $D_\alpha \subset \mathbb{R}^m$, $D_{\bar{\alpha}} \subset \mathbb{R}^{n-m}$, $1 \leq m < n$. При $m = n$ норма в CL_p совпадает с нормой в пространстве L_p .

3. РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ ЧИ-ОПЕРАТОРА СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Напомним, что числа $p, p' > 1$ называются сопряженными, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Для ЧИ-оператора со слабой особенностью справедлива следующая теорема о равномерной ограниченности в CL_p .

Теорема 3.1. Пусть $p, p' > 1$ и $q, q' > 1$ — две пары сопряженных чисел, число β удовлетворяет неравенству $\beta p' q < m$, функция $k(x; t_\alpha) \in CL_{p'q'}$ и $U > 0$. Тогда для ЧИ-оператора $K_\alpha^{(m)}$ справедлива равномерная оценка

$$|(K_\alpha^{(m)}u)(x)| \leq A \|k\|_{CL_{p'q'}} U, \quad (3.1)$$

$$A = \left(\frac{|S_1(m)| d^{m-\beta p'q}}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}},$$

для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и для любых функций $u(x_\alpha, x_\alpha)$ таких, что $\|u\|_{CL_p} \leq U$, где $|S_1(m)|$ — площадь поверхности сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. Отметим, что принадлежность $u(x)$ пространству $CL_p(D) = C(D_\alpha; L_p(D_\alpha))$ означает выполнение следующих условий: $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0$ такое, что из неравенства $|x' - x''| < \delta_1$ следует неравенство

$$\left(\int_{D_\alpha} |u(x''_\alpha; t_\alpha) - u(x'_\alpha; t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon_1$$

и

$$\sup_{x_\alpha \in D_\alpha} \left(\int_{D_\alpha} |u(x_\alpha; t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}} = U_1 < \infty.$$

В свою очередь, для функции $k(x; t_\alpha)$, принадлежащей пространству $CL_{p'q'} = C(D; L_{p'q'}(D_{t_\alpha}))$, выполнены условия: $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0$ такое, что из неравенства $|x' - x''| < \delta_2$ следует неравенство

$$\left(\int_{D_\alpha} |k(x''; t_\alpha) - k(x'; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q'}} < \varepsilon_2$$

и

$$\sup_{x \in D} \left(\int_{D_\alpha} |k(x; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q'}} = K_1 < \infty.$$

Рассмотрим ЧИ-оператор со слабой особенностью (2.1). Имеем

$$|(K_\alpha^{(m)}u)(x)| = \left| \int_{D_\alpha} \kappa_\alpha(x; t_\alpha) u(x_\alpha, t_\alpha) dt_\alpha \right| \leq \sup_{x \in D} \left(\int_{D_\alpha} \frac{|k(x; t_\alpha)|}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta} |u(x_\alpha, t_\alpha)| dt_\alpha \right).$$

Применим неравенство Гельдера с сопряженными показателями p и p' . Получим

$$|(K_\alpha^{(m)}u)(x)| \leq \sup_{x \in D} \left(\int_{D_\alpha} \frac{|k(x; t_\alpha)|^{p'}}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'}} \sup_{x_\alpha \in D_\alpha} \left(\int_{D_\alpha} |u(x_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В этом неравенстве к интегралу

$$\int_{D_\alpha} \frac{|k(x; t_\alpha)|^{p'}}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'}} dt_\alpha$$

вновь применим неравенство Гельдера с сопряженными показателями q и q' . Тогда

$$\int_{D_\alpha} \frac{|k(x; t_\alpha)|^{p'}}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'}} dt_\alpha \leq \left(\int_{D_\alpha} |k(x; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q'}} \times \left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}}.$$

Следовательно, для ЧИ-оператора (2.1) имеем

$$\begin{aligned} |(K_\alpha^{(m)}u)(x)| &\leq \sup_{x \in D} \left(\int_{D_\alpha} |k(x; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q'}} \times \\ &\times \sup_{x_\alpha \in D_\alpha} \left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}} \sup_{x_\alpha \in D_\alpha} \left(\int_{D_\alpha} |u(x_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|K_\alpha^{(m)}u| \leq \|k\|_{CL_{p'q'}} \|u\|_{CL_p} \sup_{x_\alpha \in D_\alpha} \left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}}. \quad (3.2)$$

Ограниченность частного интеграла

$$\left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}} \quad (3.3)$$

получается введением сферических координат в пространстве $\mathbb{R}^m$. Действительно, шар B_d с центром в точке x_α и радиуса d содержит параллелепипед D_α . Тогда

$$\left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}} \leq \left(\int_{B_d} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}}.$$

Перейдем к сферическим координатам по формулам

$$x_\alpha - t_\alpha = r\theta, \quad |\theta| = 1, \quad dt_\alpha = dS_1 r^{m-1} dr,$$

где через dS_1 обозначен элемент поверхности сферы $S_1(m)$ единичного радиуса в $\mathbb{R}^m$.

Имеем

$$\left(\int_{B_d} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}} = \left(\int_{S_1(m)} dS_1 \int_0^d \frac{r^{m-1} dr}{r^{\beta p'q}} \right)^{\frac{1}{p'q}} = \left(\frac{|S_1(m)| d^{m-\beta p'q}}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}} = A.$$

Следовательно, (3.2) примет вид

$$|K_\alpha^{(m)}u| \leq A \|k\|_{CL_{p'q'}} \|u\|_{CL_p}. \quad (3.4)$$

Наконец, так как $\|u\|_{CL_p(D)} \leq U$, то будет справедливым неравенство (3.1). $\square$

4. РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЧИ-ОПЕРАТОРА СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ НА ОГРАНИЧЕННОМ И РАВНОСТЕПЕННО НЕПРЕРЫВНОМ МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИЙ

Определение. Будем говорить, что множество $M \subset CL_p(D)$ *равностепенно непрерывно*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_3 > 0$ такое, что для любых $u \in M$ из неравенства $|x' - x''| < \delta_3$ следует неравенство

$$\left(\int_{D_\alpha} |u(x''_\alpha; t_\alpha) - u(x'_\alpha; t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда справедлива

Теорема 4.1. Пусть функция $k(x; t_\alpha)$ принадлежит пространству $C(D; L_{p'q'}(D_\alpha))$, и пусть множество $M \subset CL_p(D)$ ограничено и равномерно непрерывно в $CL_p(D)$. Тогда множество $\{K_\alpha^{(m)}u : u \in M\}$ равномерно непрерывно в $C(D)$.

Доказательство. Требуется доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, β , что неравенство

$$\left| (K_\alpha^{(m)}u)(x'') - (K_\alpha^{(m)}u)(x') \right| < \varepsilon$$

выполняется для всех $x', x'' \in D$ таких, что $|x'' - x'| < \delta$, и для всех функций из $\{K_\alpha^{(m)}u : u \in M\}$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \left| (K_\alpha^{(m)}u)(x'') - (K_\alpha^{(m)}u)(x') \right| = \\ & = \left| \int_{D_\alpha} \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} u(x''_\alpha, t_\alpha) dt_\alpha - \int_{D_\alpha} \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} u(x'_\alpha, t_\alpha) dt_\alpha \right| \leq \\ & \leq \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} u(x''_\alpha, t_\alpha) - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} u(x'_\alpha, t_\alpha) \right| dt_\alpha + \\ & + \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right| |u(x'_\alpha, t_\alpha)| dt_\alpha = \\ & = \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right| |u(x''_\alpha, t_\alpha) - u(x'_\alpha, t_\alpha)| dt_\alpha + \\ & + \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right| |u(x'_\alpha, t_\alpha)| dt_\alpha. \end{aligned}$$

Применим неравенство Гельдера с сопряженными показателями p и p' . Получим

$$\begin{aligned} & \left| (K_\alpha^{(m)}u)(x'') - (K_\alpha^{(m)}u)(x') \right| \leq \\ & \leq \left\{ \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x''_\alpha, t_\alpha) - u(x'_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p}} + \\ & + \left\{ \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x'_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

К первому слагаемому в правой части неравенства (4.1) еще раз применим неравенство Гельдера с произвольными показателями q и q' и воспользуемся результатом теоремы 3.1. Имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x''_\alpha, t_\alpha) - u(x'_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \left\{ \int_{D_\alpha} \frac{dt_\alpha}{|x''_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} \right\}^{\frac{1}{p'q}} \left\{ \int_{D_\alpha} |k_\alpha(x''; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q'}} \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x''_\alpha, t_\alpha) - u(x'_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq A \|k\|_{CL_{p'q'}} \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x''_\alpha, t_\alpha) - u(x'_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Так как $u \in M$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем в качестве $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon)$ такое $\delta_3 > 0$, чтобы при $|x'' - x'| < \delta_3$ выполнялось неравенство

$$A \|k\|_{CL_{p'q'}} \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x''_{\alpha}, t_{\alpha}) - u(x'_{\alpha}, t_{\alpha})|^p dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.2)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в правой части неравенства (4.1). Воспользуемся тем, что $\|u\|_{CL_p} \leq U$. Без ограничения общности будем считать, что $|x'_{\alpha} - t_{\alpha}| < |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|$. Для произвольного числа $\eta > 0$ обозначим $g = \{t_{\alpha} : |x'_{\alpha} - t_{\alpha}| < \eta\}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} - \frac{k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})}{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x'_{\alpha}, t_{\alpha})|^p dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq U \left[\left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} - \frac{k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})}{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} + \left\{ \int_g \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} - \frac{k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})}{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} \right]. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого имеем

$$\begin{aligned} & U \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} - \frac{k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})}{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} = \\ & = U \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha}) |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} - k_{\alpha}(x'; t_{\alpha}) |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} = \\ & = U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha}) |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} - k_{\alpha}(x'; t_{\alpha}) |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} + k_{\alpha}(x'; t_{\alpha}) |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} - k_{\alpha}(x'; t_{\alpha}) |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \\ & \leq U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left(\frac{|k_{\alpha}(x''; t_{\alpha}) - k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})| |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} + \frac{|k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})| (|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} - |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right)^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Применяя последовательно неравенство Минковского и неравенство Гельдера с показателями q и q' , получим согласно 3.1

$$\begin{aligned} & U \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} - \frac{k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})}{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \\ & \leq U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \frac{|k_{\alpha}(x''; t_{\alpha}) - k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})|^{p'}}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta p'}} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} + U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left(\frac{|k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})| (|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} - |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{2\beta}} \right)^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \\ & \leq U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} |k_{\alpha}(x''; t_{\alpha}) - k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})|^{p'q'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'q'}} \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{-\beta p'q} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'q}} + \\ & + U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} |k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})|^{p'q'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'q'}} \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left(\frac{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} - |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}}{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{2\beta}} \right)^{p'q} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'q}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq U\varepsilon_2 \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \eta^{-\beta p' q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}} + UK_1 \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left(\frac{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta - |x''_\alpha - t_\alpha|^\beta}{|x'_\alpha - t_\alpha|^{2\beta}} \right)^{p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}}.$$

Поскольку разность $|x'_\alpha - t_\alpha|^{2\beta} > \eta^{2\beta}$ на $D_\alpha \setminus g$, а функция $|x_\alpha - t_\alpha|^\beta$ равномерно непрерывна на $D_\alpha \setminus g$, то для любого $\varepsilon_4 > 0$ найдется $\delta_4 = \delta_4(\varepsilon_4) > 0$ такое, что из неравенства $|x'' - x'| < \delta_4$ будет следовать неравенство $\frac{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta - |x''_\alpha - t_\alpha|^\beta}{|x'_\alpha - t_\alpha|^{2\beta}} < \varepsilon_4$. Тогда

$$U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq U(\varepsilon_2 \eta^{-\beta} + K_1 \varepsilon_4) \left(V(D_\alpha \setminus g) \right)^{\frac{1}{p'q}},$$

где через $V(D_\alpha \setminus g)$ обозначен объем области интегрирования.

Осталось подобрать число $\delta_5 = \delta_5(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $\delta_5 < \min\{\delta_2, \delta_4\}$, $\delta_5 < \eta/2$ и чтобы при $|x'' - x'| < \delta_5$ выполнялось неравенство

$$U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.3)$$

Тогда при $\delta = \min\{\delta_3, \delta_5\}$ неравенства (4.2) и (4.3) будут выполняться одновременно.

Теперь к интегралу

$$\left\{ \int_g \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}}$$

применим неравенство Минковского. Имеем

$$\left\{ \int_g \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \left\{ \int_g \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} + \left\{ \int_g \left| \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}}.$$

Продолжая к обоим слагаемым применять неравенство Гельдера с показателями q и q' , получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_g \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} + \left\{ \int_g \left| \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \\ & \leq \left\{ \int_g |k_\alpha(x''; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q'}} \cdot \left\{ \int_g |x''_\alpha - t_\alpha|^{-\beta p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}} + \\ & + \left\{ \int_g |k_\alpha(x'; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q'}} \cdot \left\{ \int_g |x'_\alpha - t_\alpha|^{-\beta p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}}. \end{aligned}$$

Применяя теорему 3.1 к интегралу по области g , получим

$$\left\{ \int_g |x'_\alpha - t_\alpha|^{-\beta p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}} = \left(\frac{|S_1(m)| \eta^{m-\beta p'q}}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}}.$$

Оценим интеграл

$$\left\{ \int_g |x''_\alpha - t_\alpha|^{-\beta p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}}.$$

Пусть $|x''_\alpha - x'_\alpha| < \eta/2$. Тогда $r = |x''_\alpha - t_\alpha| < |x'_\alpha - t_\alpha| + \eta/2$, но $|x'_\alpha - t_\alpha| < \eta$ и поэтому $r < 3\eta/2$. Следовательно, шар $|x'_\alpha - t_\alpha| < \eta$ заключен в шаре $r < 3\eta/2$. Отсюда имеем

$$\left\{ \int_g |x''_\alpha - t_\alpha|^{-\beta p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}} < \left\{ \int_{r < 3\eta/2} |x''_\alpha - t_\alpha|^{-\beta p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}} = \left(\frac{|S_1(m)|(3\eta/2)^{m-\beta p'q}}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}}.$$

Из неравенства (4.1) с учетом неравенств (4.2) и (4.3) получим

$$\begin{aligned} & \left| (K_\alpha^{(m)}u)(x'') - (K_\alpha^{(m)}u)(x') \right| \leq \\ & \leq \frac{2\varepsilon}{3} + U \|k\|_{CL_{p'q'}} \left[\left(\frac{|S_1(m)|\eta^{m-\beta p'q}}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}} + \left(\frac{|S_1(m)|(3\eta/2)^{m-\beta p'q}}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}} \right] = \\ & = \frac{2}{3}\varepsilon + U \|k\|_{CL_{p'q'}} \left(1 + \frac{3}{2} \right)^{\frac{m}{p'q}-\beta} \left(\frac{|S_1(m)|}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}} \eta^{\frac{m}{p'q}-\beta} = \frac{2}{3}\varepsilon + U \gamma \eta^{\frac{m}{p'q}-\beta}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma = \|k\|_{CL_{p'q'}} \left(1 + \frac{3}{2} \right)^{\frac{m}{p'q}-\beta} \left(\frac{|S_1(m)|}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}}.$$

Величину η выберем настолько малой, чтобы выполнялось неравенство

$$U \gamma \eta^{\frac{m}{p'q}-\beta} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для всех функций из $\{(K_\alpha^{(m)}u)(x)\}$ выполняется неравенство

$$\left| (K_\alpha^{(m)}u)(x'') - (K_\alpha^{(m)}u)(x') \right| < \varepsilon$$

при $|x'' - x'| < \delta$ для любой функции $u \in M$. Следовательно, множество $\{K_\alpha^{(m)}u : u \in M\}$ равномерно непрерывно в $C(D)$. $\square$

Из теорем 3.1, 4.1 и теоремы Арцела—Асколи вытекает

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия теорем 3.1 и 4.1, тогда множество $\{K_\alpha^{(m)}u : u \in M\}$ предкомпактно в $C(D)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
3. Калитвин А. С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000.
4. Калитвин А. С., Фролова Е. В. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. — Липецк: ЛГПУ, 2004.
5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
6. Мизлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977.
7. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974.
8. Трусова Н. И. Весовые частно-интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода в пространствах функций со смешанной анизотропностью // Дисс. к.ф.-м.н. — Казань, 2023.
9. Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial integral operators and integro-differential equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — DOI: [10.1201/9781482270402](https://doi.org/10.1201/9781482270402).
10. Benedek A., Panzone R. The space L_p with mixed norm // Duke Math. J. — 1961. — 28, № 3. — С. 301–324. — DOI: [10.1215/S0012-7094-61-02828-9](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-61-02828-9).
11. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue spaces. II: Multidimensional case // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2020. — 247, № 6. — С. 893–899. — DOI: [10.1007/s10958-020-04845-7](https://doi.org/10.1007/s10958-020-04845-7).
12. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I., Trusova N. I. About Fredholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$ // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2020. — 251, № 6. — С. 839–849. — DOI: [10.1007/s10958-020-05132-1](https://doi.org/10.1007/s10958-020-05132-1).

И. В. Барышева

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

E-mail: barysheva_iv@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 2918-8263, РИНЦ AuthorID: [746263](#), Scopus: [58171343100](#), ORCID: [0009-0000-6644-8113](#)

Н. И. Трусова

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

E-mail: trusova.nat@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 7119-7653, РИНЦ AuthorID: [830030](#), Scopus: [57195455908](#)

Е. В. Фролова

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

E-mail: lsnn48@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 7044-5867, РИНЦ AuthorID: [178464](#), Scopus: [56908069300](#)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-227-236](#)

EDN: [ATNOMT](#)

UDC 517.98

Research article

Partial integral operators with weak singularity

I. V. Barysheva, N. I. Trusova, and E. V. Frolova

Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk, Russia

Abstract. We study a partial integral operator with a weak singularity in $\mathbb{R}^n$ in the anisotropic space of continuous functions with values in the space L_p , $p \in (1, \infty)$. We prove theorems on the uniform boundedness and equicontinuity of the operator under study. These theorems imply a theorem on the mapping of any bounded and equicontinuous set into a precompact set by a partial integral operator with a weak singularity acting from the space of functions continuous in some variables with values in L_p with respect to the other part of the variables to the space of continuous functions.

Keywords: partial integral, partial integral operator, partial integral operator with weak singularity, anisotropic function space, mixed norm, uniform boundedness, equicontinuity, precompactness, compactness.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors are grateful to Prof. L. N. Lyakhov for the problem formulation and express their sincere gratitude for his consultation.

Authors' contribution. All authors participated in the analysis of works devoted to the study of partial integral operators with a weak singularity in various functional spaces, the formulation of theorems, the development of schemes for their proofs and the direct implementation of the latter.

For citation: I. V. Barysheva, N. I. Trusova, E. V. Frolova, "Partial integral operators with weak singularity," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 2, 227–236. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-227-236](#) EDN: [ATNOMT](#)



REFERENCES

1. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye Predstavleniya Funktsiy i Teoremy Vlozheniya* [Integral Representations of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
2. V. S. Vladimirov, *Uravneniya Matematicheskoy Fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
3. A. S. Kalitvin, *Lineynye Operatory s Chastnymi Integralami* [Linear Operators with Partial Integrals], TsChKI, Voronezh, 2000 (in Russian).
4. A. S. Kalitvin and E. V. Frolova, *Lineynye Uravneniya s Chastnymi Integralami. S-teoriya* [Linear Partial Integral Equations. C-Theory], LGPU, Lipetsk, 2004 (in Russian).
5. J.-L. Lions, *Nekotorye Metody Resheniya Nelineynykh Kraevykh Zadach* [Some Methods of Solving Nonlinear Boundary Value Problems], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
6. S. G. Mikhlin, *Lineynye Uravneniya v Chastnykh Proizvodnykh* [Linear Partial Differential Equations], Vysshaya Shkola, Moscow, 1977 (in Russian).
7. S. L. Sobolev, *Vvedenie v Teoriyu Kubaturnykh Formul* [Introduction to the Theory of Cubature Formulas], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
8. N. I. Trusova "Vesovye chastno-integral'nye uravneniya Fredgol'ma i Vol'terra vtorogo roda v prostranstvakh funktsiy so smeshannoy anizotropnost'yu" [Weighted Fredholm and Volterra partial integral equations of the second kind in spaces of functions with mixed anisotropy], *PhD Thesis*, Kazan', 2023.
9. J. M. Appell, A. S. Kalitvin, and P. P. Zabrejko, *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, Marcel Dekker, New York, 2000, DOI: [10.1201/9781482270402](https://doi.org/10.1201/9781482270402).
10. A. Benedek and R. Panzone, "The space L_p with mixed norm," *Duke Math. J.*, 1961, **28**, No. 3, 301–324, DOI: [10.1215/S0012-7094-61-02828-9](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-61-02828-9).
11. L. N. Lyakhov and A. I. Inozemtsev, "Partial integrals in anisotropic Lebesgue spaces. II: Multidimensional case," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2020, **247**, No. 6, 893–899, DOI: [10.1007/s10958-020-04845-7](https://doi.org/10.1007/s10958-020-04845-7).
12. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, and N. I. Trusova, "About Fredholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2020, **251**, No. 6, 839–849, DOI: [10.1007/s10958-020-05132-1](https://doi.org/10.1007/s10958-020-05132-1).

I. V. Barysheva

Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk, Russia

E-mail: barysheva_iv@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 2918-8263, eLIBRARY AuthorID: [746263](#),

Scopus: [58171343100](#), ORCID: [0009-0000-6644-8113](#)

N. I. Trusova

Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk, Russia

E-mail: trusova.nat@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 7119-7653, eLIBRARY AuthorID:

[830030](#), Scopus: [57195455908](#)

E. V. Frolova

Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk, Russia

E-mail: lsnn48@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 7044-5867, eLIBRARY AuthorID: [178464](#),

Scopus: [56908069300](#)