

СУММИРУЕМОСТЬ ПО АБЕЛЮ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Р. А. БАЙРАШ^{1,2}, А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ^{1,2}

¹Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

²Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор $2m$ -го порядка с чисто интегральными условиями. В этом случае область определения соответствующего оператора не является плотной в $L_2(0, 1)$. При некоторых условиях на весовые функции, входящие в интегральные условия, доказана суммируемость по Абелю системы корневых функций соответствующего дифференциального оператора.

Ключевые слова: спектральные свойства, нелокальная задача, интегральные условия, суммируемость по Абелю.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект FSSF-2026-0013).

Вклад авторов. Скубачевский А. Л. — постановка задачи, формулировка результата о базисности по Абелю, идея использовать в доказательстве априорную оценку решений, зависящую от спектрального параметра. Байраш Р. А. — доказательство основного результата статьи (теорема 3.1 о базисности по Абелю), формулировка и доказательство вспомогательных утверждений (леммы 2.1–2.3, 3.1–3.2, следствие 3.1).

Для цитирования: Байраш Р. А., Скубачевский А. Л. Суммируемость по Абелю системы корневых функций дифференциального оператора четного порядка с интегральными условиями // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 213–226. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-213-226](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-213-226) EDN: [AR SXNB](https://www.edn.ru/AR SXNB)

ВВЕДЕНИЕ

История изучения обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями насчитывает более ста лет, см. [15, 21, 26, 27, 29].

Вопросы спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов с нелокальными условиями рассматривались многими авторами в случае, когда в нелокальных условиях присутствовали значения неизвестной функции и её производных на концах интервала и в его внутренних точках, а также интегралы Лебега от неизвестной функции с некоторыми весами. В этом случае область определения соответствующего оператора была плотной в $L_2(0, 1)$. Авторами рассматривались вопросы об асимптотике собственных значений [12], полноте и базисности системы корневых функций [4–6, 16, 19] и др.

В работе [16] было доказано, что собственные и присоединенные функции дифференциального оператора n -го порядка с регулярными краевыми условиями образуют базис Рисса со скобками в пространстве $L_2(0, 1)$. Отметим также работы [5, 19], в которых изучен спектр оператора, порожденного в пространстве $L_2(0, 1)$ дифференциальным выражением второго порядка и интегральными условиями, а также исследованы условия полноты системы корневых функций рассматриваемого оператора.

В случае многоточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем возникают более тонкие вопросы о полноте и базисности Рисса собственных и присоединенных функций, см. [22–25, 28] и имеющуюся там библиографию. Постановка задачи, когда нелокальные условия не содержат значений неизвестной функции и ее производных на концах интервала, является принципиально более сложной.

Отметим, что обыкновенные дифференциальные операторы с интегральными условиями обладают целым рядом принципиально новых свойств по сравнению с классическими дифференциальными операторами. Например, их спектр может занимать всю комплексную плоскость, оценка на резольвенту имеет меньший порядок убывания при росте спектрального параметра по сравнению с классическими оценками и т. д.

В работах [2, 3, 13, 14] получены априорные оценки решений и исследованы спектральные свойства обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с чисто интегральными условиями. Обобщение этих результатов на случай дифференциального оператора четного порядка с переменными коэффициентами было получено в работах [1, 18, 20].

Вопрос суммируемости по Абелю системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с интегральными условиями исследован в [9], базисность Рисса системы собственных и присоединенных функций доказана в [11].

В данной работе рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор четного порядка со спектральным параметром. Вместо классических краевых условий, возмущенных интегралами от неизвестной функции и значениями неизвестной функции во внутренних точках, задаются чисто интегральные условия. Доказана суммируемость по Абелю системы корневых функций соответствующего оператора.

Доказательство теоремы о суммируемости по Абелю системы корневых функций основано на использовании априорной оценки, полученной в работе [18], а также на методе, изложенном в статье В. Б. Лидского [8] и модифицированном в работах В. В. Подъяпольского [9, 10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим уравнение

$$Au + \lambda^{2m}u = (-1)^m a_0(t)u^{(2m)}(t) + \sum_{j=1}^{2m} a_j(t)u^{(2m-j)}(t) + \lambda^{2m}u = f_0(t) \quad (t \in (0, 1)) \quad (1.1)$$

с интегральными условиями

$$B_{\rho k}u = \int_0^1 \sum_{j=0}^k h_{\rho k j}(t)u^{(j)}(t)dt = f_{\rho k} \quad (\rho = 1, 2, k = 0, \dots, m-1). \quad (1.2)$$

Здесь a_i ($i = 0, \dots, 2m$) — вещественнозначные функции такие, что $a_0(t) \geq k_0 > 0$ ($0 \leq t \leq 1$) и $a_1, \dots, a_{2m} \in C[0, 1]$, $f_0 \in L_2(0, 1)$ — комплекснозначная функция, $f_{\rho k} \in \mathbb{C}$ ($\rho = 1, 2, k = 0, \dots, m-1$) — константы, а $h_{\rho k j}$ ($\rho = 1, 2, j = 0, \dots, k, k = 0, \dots, m-1$) — линейно независимые вещественнозначные функции.

Введем обозначения, которые будут в дальнейшем использоваться.

$C^\alpha[a, b]$ — пространство Гельдера непрерывных функций $u(t)$, $t \in [a, b]$, таких, что

$$|u(t_1) - u(t_2)| \leq c|t_1 - t_2|^\alpha \quad (t_1, t_2 \in [a, b]),$$

где константы $c > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$ не зависят от t_1 и t_2 .

$W_2^k(0, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, — пространство Соболева функций из $L_2(0, 1)$, имеющих все обобщенные производные из $L_2(0, 1)$ до порядка k включительно.

$W_{\infty}^{2m-1}(a, b)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $v(t), t \in [a, b]$, таких, что все производные вплоть до $(2m - 1)$ -го порядка принадлежат $L_{\infty}(a, b)$, т. е. $v^{(k)} \in L_{\infty}(a, b)$ ($k = 1, \dots, 2m - 1$).

$C_{\beta}^{\alpha}[0, 1] = \{v \in L_2(0, 1) : v \in C^{\alpha}[0, \beta], v \in C^{\alpha}[1 - \beta, 1]\}$, где $0 < \beta < 1/2$.

Будем предполагать, что

$$a_0 \in W_{\infty}^{2m-1}(0, 1), h_{\rho kj} \in C_{\beta}^{\alpha}[0, 1] \quad (\alpha \in (1/2, 1]).$$

Обозначим $\mathcal{W}[0, 1] = L_2(0, 1) \times \mathbb{C}^{2m}$. В пространстве Соболева $W_2^{2m}(0, 1)$ введем эквивалентную норму, зависящую от спектрального параметра:

$$|||u|||_{W_2^{2m}(0,1)} = \left(\|u\|_{W_2^{2m}(0,1)}^2 + |\lambda|^{4m} \|u\|_{L_2(0,1)}^2 \right)^{1/2}.$$

Эквивалентная норма в пространстве $\mathcal{W}[0, 1]$ зависит от порядка производных в условиях (1.2):

$$|||f|||_{\mathcal{W}[0,1]} = \left(\|f_0\|_{L_2(0,1)}^2 + \sum_{k=0}^{m-1} |\lambda|^{4m-2k} (|f_{1k}|^2 + |f_{2k}|^2) \right)^{1/2},$$

где $f = (f_0, f_{10}, f_{20}, \dots, f_{1,m-1}, f_{2,m-1})$, $|\lambda| \geq 1$.

Введем определители, зависящие от значений весовых функций при старших производных в интегральных условиях (1.2) в точках 0 и 1:

$$\Delta_h^k = \begin{vmatrix} h_{1kk}(0) & h_{1kk}(1) \\ h_{2kk}(0) & h_{2kk}(1) \end{vmatrix} \quad (k = 0, \dots, m-1).$$

Пусть

$$\omega_{\theta,q} = \{\gamma \in \mathbb{C} : |\arg \gamma| \leq \theta, |\gamma| \geq q\},$$

где $\theta > 0$. Рассмотрим линейный ограниченный оператор

$$L(\lambda) : W_2^{2m}(0, 1) \rightarrow \mathcal{W}[0, 1]$$

вида

$$L(\lambda)u = (Au + \lambda^{2m}u, B_{10}u, B_{20}u, \dots, B_{1,m-1}u, B_{2,m-1}u).$$

Введем линейный неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_B : L_2(0, 1) \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \rightarrow L_2(0, 1)$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = W_{2,B}^{2m}(0, 1) = \{u \in W_2^{2m}(0, 1) : B_{\rho k}u = 0, \quad \rho = 1, 2, \quad k = 0, \dots, m-1\}$$

по формуле $\mathcal{A}_B u = Au$ ($u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$).

При указанных выше условиях на весовые функции $h_{\rho kj}$ и коэффициент a_0 при $2m$ -ой производной в уравнении (1.1) в работе [18] получена следующая априорная оценка.

Теорема 1.1. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда для любого $0 < \theta < \pi/2m$ существует $q > 1$ такое, что для $\lambda \in \omega_{\theta,q}$ любая функция $u \in W_2^{2m}(0, 1)$ удовлетворяет неравенству

$$|||u|||_{W_2^{2m}(0,1)} \leq C |\lambda|^{1/2} |||L(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,1]}, \quad (1.3)$$

где $C > 0$ не зависит от λ, u .

Следствие 1.1. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Операторы $L(\lambda) : W_2^{2m}(0, 1) \rightarrow \mathcal{W}[0, 1]$ и $\mathcal{A}_B : L_2(0, 1) \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \rightarrow L_2(0, 1)$ фредгольмовы и $\text{ind } L(\lambda) = \text{ind } \mathcal{A}_B = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Спектр $\sigma(\mathcal{A}_B)$ дискретный.
3. Для $\mu \notin \sigma(\mathcal{A}_B)$ резольвента $R(\mu, \mathcal{A}_B) = (\mu I - \mathcal{A}_B)^{-1} : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ — компактный оператор.
4. Для любого $0 < \delta < \pi$ все точки спектра $\sigma(\mathcal{A}_B)$, кроме, быть может, конечного их числа, принадлежат углу комплексной плоскости $|\arg \mu| < \delta$.

2. ОЦЕНКА НОРМЫ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Обозначим

$$\Omega_{\varepsilon, r} = \{\gamma \in \mathbb{C} : |\arg \gamma| \geq \varepsilon, |\gamma| \geq r\},$$

где $0 < \varepsilon < \pi, r > 1$.

Из теоремы 1.1 и следствия 1.1 следует, что резольвента оператора $\mathcal{A}_B$

$$R(\mu, \mathcal{A}_B) = (\mu I - \mathcal{A}_B)^{-1}$$

может быть оценена сверху на любом луче $\arg \mu \neq 0$.

Лемма 2.1. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > 1$ такое, что для $\mu \in \Omega_{\varepsilon, r}$ справедлива оценка

$$\|R(\mu, \mathcal{A}_B)\| = O(|\mu|^{-1+1/4m}), \quad (2.1)$$

где $\|\cdot\|$ — норма оператора, действующего из $L_2(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$.

Доказательство. Из априорной оценки (1.3) следует, что если $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$, $\lambda \in \omega_{\theta, q}$ (θ и q определены в теореме 1.1), то

$$|\lambda|^{2m} \|u\|_{L_2(0,1)} \leq \|u\|_{W_2^{2m}(0,1)} \leq C|\lambda|^{1/2} \|Au + \lambda^{2m}u\|_{L_2(0,1)},$$

то есть

$$\|u\|_{L_2(0,1)} \leq C|\lambda|^{1/2-2m} \|Au + \lambda^{2m}u\|_{L_2(0,1)}. \quad (2.2)$$

В силу следствия 1.1 оператор $L(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $L^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}[0, 1] \rightarrow W_2^{2m}(0, 1)$ для $\lambda \in \omega_{\theta, q}$. Поэтому оператор $\mu I - \mathcal{A}_B : L_2(0, 1) \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \rightarrow L_2(0, 1)$ имеет ограниченный обратный $(\mu I - \mathcal{A}_B)^{-1} : L_2(0, 1) \rightarrow W_2^{2m}(0, 1)$ для $\mu \in \Omega_{\varepsilon, r}$, где $\varepsilon = \pi - 2m\theta$, $r = q^{2m}$ и $\mu = -\lambda^{2m}$. Тогда неравенство (2.2) примет вид

$$\|u\|_{L_2(0,1)} \leq C|\mu|^{-1+1/4m} \|(A - \mu I)u\|_{L_2(0,1)}.$$

Положим $u = R(\mu, \mathcal{A}_B)f_0$, $f_0 \in L_2(0, 1)$. Тогда

$$\|R(\mu, \mathcal{A}_B)f_0\|_{L_2(0,1)} \leq C|\mu|^{-1+1/4m} \|f_0\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Пусть выполнено условие леммы 2.1. Обозначим через μ_k собственные значения оператора $\mathcal{A}_B$. Пусть $z_0 \in \rho(\mathcal{A}_B)$ — некоторая фиксированная точка в резольвентном множестве оператора $\mathcal{A}_B$. Введем вполне непрерывный оператор

$$K = (\mathcal{A}_B - z_0 I)^{-1}$$

с собственными значениями $\nu_k = 1/(\mu_k - z_0)$. Очевидно, что

$$K^{-1} = (\mathcal{A}_B - z_0 I) = (\mu - z_0)I - (\mu I - \mathcal{A}_B) = (\mu - z_0)I - R(\mu, \mathcal{A}_B)^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R\left(\frac{1}{\mu - z_0}, K\right) &= \left(\frac{1}{\mu - z_0}I - (\mathcal{A}_B - z_0 I)^{-1}\right)^{-1} = \left(\frac{I - (\mu - z_0)(\mathcal{A}_B - z_0 I)^{-1}}{\mu - z_0}\right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{(\mathcal{A}_B - z_0 I)^{-1}((\mathcal{A}_B - z_0 I) - (\mu - z_0)I)}{\mu - z_0}\right)^{-1} = \left(\frac{K(\mathcal{A}_B - \mu I)}{\mu - z_0}\right)^{-1} = \\ &= -(\mu - z_0)R(\mu, \mathcal{A}_B)K^{-1} = (\mu - z_0)I - (\mu - z_0)^2 R(\mu, \mathcal{A}_B). \end{aligned}$$

Таким образом, резольвенты операторов $\mathcal{A}_B$ и K связаны следующим соотношением:

$$R\left(\frac{1}{\mu - z_0}, K\right) = (\mu - z_0)I - (\mu - z_0)^2 R(\mu, \mathcal{A}_B), \quad \mu \in \rho(\mathcal{A}_B) \setminus \{z_0\}. \quad (2.3)$$

Функция $\varphi \in L_2(0, 1)$ ($\varphi \neq 0$) — корневая функция оператора K , соответствующая собственному значению ν_k , если $(K - \nu_k I)^j \varphi = 0$ для некоторого $j \geq 1$. Как известно, размерности корневых подпространств конечны. Обозначим через $sp(K)$ замыкание в $L_2(0, 1)$ линейного пространства, образованного системой корневых функций оператора K .

Аналогичным образом определяется корневая функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ ($\varphi \neq 0$) оператора $\mathcal{A}_B$, соответствующая собственному значению μ_k .

Можно показать, что функция φ является корневой функцией оператора $\mathcal{A}_B$, соответствующей собственному значению μ_k тогда и только тогда, когда φ является корневой функцией оператора K , соответствующей собственному значению $\nu_k = 1/(\mu_k - z_0)$. То есть операторы $\mathcal{A}_B$ и K имеют одинаковые корневые функции. Поэтому в дальнейшем будем исследовать оператор K .

Лемма 2.2. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда для любого $\varkappa > 0$ существует $\delta_0 = \delta_0(\varkappa) > 0$ такое, что

$$\|C(\mu)R(\mu, K)\| \leq e^{|\mu|^{-1/2m-\varkappa}} \quad (|\mu| \leq \delta_0), \quad (2.4)$$

где $C(\mu)$ — целая функция по переменной $1/\mu$ порядка не выше $1/2m$.

Доказательство. В силу следствия 1.1, для любого $0 < \varepsilon < \pi$ существует $r > 1$ такое, что для $\mu \in \Omega_{\varepsilon, r}$ получим $R(\mu, \mathcal{A}_B)f_0 \in W_2^{2m}(0, 1)$ при $f_0 \in L_2(0, 1)$. Тогда, применяя тождество Гильберта, получим

$$\begin{aligned} K &= (\mathcal{A}_B - z_0 I)^{-1} = -R(z_0, \mathcal{A}_B) = -R(z_0, \mathcal{A}_B) + R(\mu, \mathcal{A}_B) - R(\mu, \mathcal{A}_B) = \\ &= (\mu - z_0)R(\mu, \mathcal{A}_B)R(z_0, \mathcal{A}_B) - R(\mu, \mathcal{A}_B) = -R(\mu, \mathcal{A}_B)(I - (\mu - z_0)R(z_0, \mathcal{A}_B)). \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $K : L_2(0, 1) \rightarrow W_2^{2m}(0, 1)$ ограниченный. Поэтому в силу компактности вложения $W_2^{2m}(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$ оператор $K : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ компактный. Применяя теорему A1.1 из [17], получим утверждение леммы. $\square$

Без ограничения общности предположим, что $\mu = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}_B$. Поэтому возьмем $z_0 = 0$. Из (2.1) и (2.3) можно получить оценку нормы оператора $(I - \mu K)^{-1}$ на некоторых лучах.

Лемма 2.3. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > 1$ такое, что для $\mu \in \Omega_{\varepsilon, r}$ выполнена оценка

$$\|(I - \mu K)^{-1}\| = O(|\mu|^{1/4m}). \quad (2.5)$$

Доказательство. Из представления (2.3) при $z_0 = 0$ следует, что

$$\left(\frac{1}{\mu}I - K\right)^{-1} = \mu I - \mu^2 R(\mu, \mathcal{A}_B), \quad \mu \neq \mu_k,$$

откуда

$$(I - \mu K)^{-1} = I - \mu R(\mu, \mathcal{A}_B).$$

Тогда, применяя оценку (2.1) к последнему равенству, получим утверждение леммы. $\square$

3. СУММИРУЕМОСТЬ ПО АБЕЛЮ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В силу теоремы 1.1 и п. 4 следствия 1.1 имеем

$$\sigma(\mathcal{A}_B) \subset \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon\} \cup \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < r\},$$

где $\varepsilon = \pi - 2m\theta$, $r = q^{2m}$ ($0 < \theta < \pi/2m$, $q > 1$). Сдвинув при необходимости спектральный параметр, можно получить, что спектр оператора $\mathcal{A}_B$ лежит в угле $\{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon\}$ и вне круга $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < r\}$. Поэтому далее, без ограничения общности, будем считать, что спектр оператора $\mathcal{A}_B$ лежит в угле $\tilde{\omega}_\varepsilon = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon\}$, где $0 < \varepsilon < \pi$.

Рассмотрим многозначную функцию μ^α , где $\mu \in \mathbb{C}$. Очевидно, что при нецелых $\alpha > 0$ точка $\mu = 0$ — точка ветвления, и две различные ветви этой аналитической функции отличаются на множитель $e^{i2\pi k\alpha}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $\alpha > 0$, причем $\alpha\varepsilon < \pi/2$. Положим

$$\mu^\alpha := |\mu|^\alpha e^{i\alpha \arg \mu}, \quad \mu \in \tilde{\omega}_\varepsilon,$$

так, что $|e^{-\mu^\alpha t}| \rightarrow 0$ при $t = \text{const} > 0$, $\mu \in \tilde{\omega}_\varepsilon$, $|\mu| \rightarrow \infty$. Очевидно, что при данном выборе α мы имеем $|\arg \mu^\alpha| < \pi/2$.

Построим систему векторов $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) из жордановых базисов в корневых подпространствах оператора $\mathcal{A}_B$. В [8, гл. II, §4] показано, что найдется система векторов $\{g_j\}$ ($j = 1, 2, \dots$), биортогональная к системе $\{e_i\}$.

Для некоторого заданного $\alpha > 0$ введем полиномы относительно параметра t :

$$P_m^\alpha(\xi^{-1}, t) = \frac{e^{t\xi^{-\alpha}}}{m!} \frac{d^m}{d\xi^m} e^{-t\xi^{-\alpha}} \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (3.1)$$

Пусть $f \in L_2(0, 1)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} c_s(t) e_s, \quad (3.2)$$

коэффициенты которого вычисляются следующим образом. Если e_q — собственный вектор оператора $\mathcal{A}_B$, не имеющий присоединенных векторов, то

$$c_q(t) = e^{-\mu_q^\alpha t} c_q, \quad (3.3)$$

где μ_q — собственное значение, соответствующее собственному вектору e_q , $\mu_q^\alpha = |\mu_q|^\alpha e^{i\alpha \arg \mu_q}$, $\alpha > 0$, c_q — коэффициент формального разложения вектора f по системе $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$):

$$c_q = \frac{(f, g_q)}{(e_q, g_q)}.$$

Если векторы $e_q, e_{q+1}, \dots, e_{q+k}$ образуют жорданову цепочку, то

$$c_{q+j}(t) = e^{-\mu_q^\alpha t} \sum_{m=0}^{k-j} P_m^\alpha(\mu_q, t) c_{q+j+m} \quad (0 \leq j \leq k). \quad (3.4)$$

Определение 3.1. Будем говорить, что ряд (3.2), соответствующий f , суммируем к f по методу Абеля порядка α , если для этого ряда существует подпоследовательность частичных сумм

$$S_{N_\nu} = \sum_{s=N_\nu+1}^{N_\nu+1} c_s(t) e_s, \quad (3.5)$$

сходящаяся в $L_2(0, 1)$ при всех $t > 0$, такая, что

$$u(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} S_{N_\nu}, \quad (3.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} u(t) = f.$$

Определение 3.2. Будем говорить, что система e_q ($q = 1, 2, \dots$) корневых функций оператора $\mathcal{A}_B$ образует базис Абеля со скобками порядка α в $L_2(0, 1)$, если для любого $f \in L_2(0, 1)$ соответствующий ряд (3.2) суммируем к f по методу Абеля порядка α .

Пусть $\tilde{\omega}_{\varepsilon, r} = \{\mu \in \tilde{\omega}_\varepsilon : |\mu| > r\}$. Рассмотрим интеграл

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f d\mu, \quad (3.7)$$

где $\Gamma := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > 0, |\arg \mu| < \varepsilon\} \cup \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \geq r, |\arg \mu| = \varepsilon\}$ — контур, являющийся границей $\tilde{\omega}_{\varepsilon, r}$, ориентированный так, что при его обходе указанная область остается справа. Число r выбирается так, что оператор $(I - \mu K)^{-1}$ аналитичен внутри круга $B_r := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq r\}$.

Изложим план доказательства суммируемости ряда по корневым функциям, следуя В. Б. Лидскому [8]. Доказательство будет связано с вычислением интеграла (3.7) с использованием теории вычетов. Сначала в лемме 3.1 будет показано, что $\lim_{t \rightarrow 0+0} u(t) = f$ (для $f = Kw$, $w \in L_2(0, 1)$).

После этого в лемме 3.2 будут найдены выражения для вычетов подынтегральной функции в полюсах μ_i оператора $(I - \mu K)^{-1}$, что приведет нас к многочленам вида (3.1). То есть мы свяжем интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f d\mu,$$

где замкнутый контур Γ_i , лежащий в угле $\tilde{\omega}_\varepsilon$, охватывает только полюс μ_i , с многочленами вида (3.1). Затем будет доказано существование уходящей в бесконечность последовательности контуров, на которых справедлива оценка вида

$$\|(I - \mu K)^{-1}\| \leq k e^{|\mu|^{1/2m+\kappa/2}}.$$

Эти утверждения позволят представить интеграл (3.7) в виде сходящегося ряда, членами которого являются вычеты, найденные в лемме 3.2, т. е. получить формулу вида (3.6).

Лемма 3.1. Если $f = Kw$, $w \in L_2(0, 1)$, то

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} u(t) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f d\mu = f.$$

Доказательство. Заметим, что

$$(I - \mu K)^{-1} K^2 = \frac{1}{\mu^2} [(I - \mu K)^{-1} - (I + \mu K)].$$

Поэтому, если $f = Kw$, то

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\mu^\alpha t} \frac{(I - \mu K)^{-1} w}{\mu^2} d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\mu^\alpha t} \frac{(I + \mu K)w}{\mu^2} d\mu =: I_1(t) + I_2(t).$$

Покажем, что $I_2(t) = 0$. Пусть $G_R := \{\mu \in \tilde{\omega}_{\varepsilon, r} : |\mu| < R\}$ ($R > r$). Определим контур Γ' как границу G_R . Очевидно, что подынтегральная функция аналитична в G_R . Нужно показать, что вклад этого интеграла по дуге $\Gamma'_R := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R, |\arg \mu| \leq \varepsilon\}$ при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_R} e^{-\mu^\alpha t} \frac{(I + \mu K)w}{\mu^2} d\mu \right\|_{L_2(0,1)} &\leq R^{-2} \|(I + RK)w\|_{L_2(0,1)} \int_{\Gamma'_R} |e^{-\mu^\alpha t}| d\mu \leq \\ &\leq R^{-1} \|(I + RK)w\|_{L_2(0,1)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-t \operatorname{Re} \mu^\alpha} d \arg \mu. \end{aligned}$$

В силу выбора ветвей функции μ^α имеем $|\arg \mu^\alpha| < \pi/2$. Тогда существует число $\beta_0 > 0$ достаточно малое, такое, что $|\arg \mu^\alpha| \leq \pi/2 - \beta_0$, и

$$\operatorname{Re} \mu^\alpha \geq |\mu|^\alpha \cos(\pi/2 - \beta_0) \geq |\mu|^\alpha \sin \beta_0.$$

Тогда правую часть последнего неравенства можно сверху оценить следующим выражением:

$$R^{-1} \|(I + RK)w\|_{L_2(0,1)} (\pi - 2\beta_0) e^{-t|\mu|^\alpha \sin \beta_0}.$$

Таким образом, мы получим, что при $R \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_R} e^{-\mu^\alpha t} \frac{(I + \mu K)w}{\mu^2} d\mu = 0.$$

Следовательно, по теореме Коши $I_2(t) = 0$.

Перейдем к вычислению $I_1(t)$. Очевидно, что оператор-функция $(I - \mu K)^{-1}$ аналитическая в пересечении дополнения $\tilde{\omega}_{\varepsilon, r}$ с кругом $B_R = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq R\}$. Кроме того, интеграл $I_1(t)$ в силу оценки (2.5) сходится равномерно по t при $t \geq 0$. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(I - \mu K)^{-1} w}{\mu^2} d\mu.$$

Замкнем контур Γ по дуге $\Gamma''_R := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R, |\arg \mu| \geq \varepsilon\}$. Внутри области, охватываемой этим контуром (обход совершается против часовой стрелки), нет других полюсов подынтегральной функции кроме $\mu = 0$. Поэтому мы получим, что последний интеграл равен вычету подынтегральной функции при $\mu = 0$. Для его вычисления представим оператор $(I - \mu K)^{-1}$ в виде ряда

Неймана в окрестности точки $\mu = 0$:

$$(I - \mu K)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j K^j.$$

Тогда подынтегральная функция примет вид

$$\frac{(I - \mu K)^{-1} w}{\mu^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j-2} K^j w.$$

Поэтому

$$\operatorname{Res}_{\mu=0} \frac{(I - \mu K)^{-1} w}{\mu^2} = K w = f.$$

Таким образом

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} u(t) = f.$$

□

Лемма 3.2. *Вычет функции $e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f$ в полюсе μ_i оператора $(I - \mu K)^{-1}$ равен*

$$- \sum_{q=q_1}^{q_2} c_q(t) e_s,$$

где $e_{q_1}, e_{q_1+1}, \dots, e_{q_2}$ — жорданов базис оператора K в корневом подпространстве $\mathcal{N}_i$, а $c_q(t)$ — коэффициенты, вычисляемые по формулам (3.3), (3.4).

Доказательство см. в [8, лемма 6].

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [10]. Однако для удобства читателя приведем это доказательство полностью.

Теорема 3.1. *Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда для любого $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ ряд (3.2) по корневым функциям оператора $\mathcal{A}_B$ суммируем к f в $L_2(0, 1)$ по методу Абеля порядка α , где $\alpha > 1/2m$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы осталось показать, что для любого $t > 0$ существует сходящаяся подпоследовательность частичных сумм вида (3.5).

В силу леммы 2.2 для резольвенты оператора K справедлива оценка (2.4). Относительно переменной $1/\mu$ оценка примет вид:

$$\left\| C \left(\frac{1}{\mu} \right) R \left(\frac{1}{\mu}, K \right) \right\| \leq k_1 e^{|\mu|^{1/2m+\kappa}} \quad (|\mu| \geq \tilde{\delta}_0 > 0), \quad (3.8)$$

где константа $k_1 > 0$, $C(1/\mu)$ — целая функция по переменной μ порядка не выше $1/2m$, $\tilde{\delta}_0 = \tilde{\delta}_0(\kappa) = 1/\delta_0(\kappa) > 0$.

Очевидно, что

$$R \left(\frac{1}{\mu}, K \right) = \left(\frac{1}{\mu} I - K \right)^{-1} = \mu (I - \mu K)^{-1}.$$

Тогда неравенство (3.8) примет вид

$$\| \mu (I - \mu K)^{-1} \| \leq k_1 \frac{e^{|\mu|^{1/2m+\kappa}}}{|C(1/\mu)|} \quad (|\mu| \geq \tilde{\delta}_0). \quad (3.9)$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится оценка целой функции конечного порядка снизу (см., например, [7, гл. I, §3, п. 9]). А именно, пусть $F(z)$ — целая функция конечного порядка η и $z_1, z_2, \dots$ — ее нули. Тогда вне кружков $|z - z_m| < |z_m|^{-q}$, $q > \eta$ ($m = 1, 2, \dots$) имеет место оценка снизу

$$|F(z)| > e^{-r^{\eta+\kappa_0}}, \quad r > r_0(\kappa_0) \quad \forall \kappa_0 > 0.$$

Сумма диаметров исключительных кружков конечна. Пусть $R > 0$ и $0 < \delta < 1$. Тогда в кольце

$$(1 - \delta)R < |\mu| < R$$

найдется окружность

$$|\mu| = \tilde{R},$$

на которой верна оценка

$$|C(1/\mu)| \geq e^{-|\mu|^{1/2m+\kappa}}. \quad (3.10)$$

Подставив $\kappa/4$ вместо κ в (3.9) и (3.10), мы получим, что на окружности $|\mu| = \tilde{R}$ справедлива оценка

$$\|(I - \mu K)^{-1}\| \leq k_1 |\mu|^{-1} e^{2|\mu|^{1/2m+\kappa/4}}.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\|(I - \mu K)^{-1}\| \leq k_2 e^{|\mu|^{1/2m+\kappa/2}} \quad (|\mu| = \tilde{R}), \quad (3.11)$$

где $k_2 > 0$.

Зафиксировав R и δ , рассмотрим монотонно возрастающую последовательность чисел $\{R_\nu\}_0^\infty$:

$$R_\nu = R(1 - \delta)^{-\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

В каждом кольце $R_\nu < |\mu| < R_{\nu+1}$ найдется окружность $|\mu| = \tilde{R}_\nu$, на которой выполнена оценка (3.11). Обозначим через Γ_ν границу пересечения кольца $\tilde{R}_\nu \leq |\mu| \leq \tilde{R}_{\nu+1}$ с углом $\tilde{\omega}_\varepsilon$. Контур Γ_ν состоит из двух дуг окружностей $|\mu| = \tilde{R}_\nu$ и $|\mu| = \tilde{R}_{\nu+1}$ (обозначим их через $A_\nu B_\nu$ и $B_{\nu+1} A_{\nu+1}$, соответственно) и двух отрезков лучей, ограничивающих угол $\tilde{\omega}_\varepsilon$ (см. рис. 1).

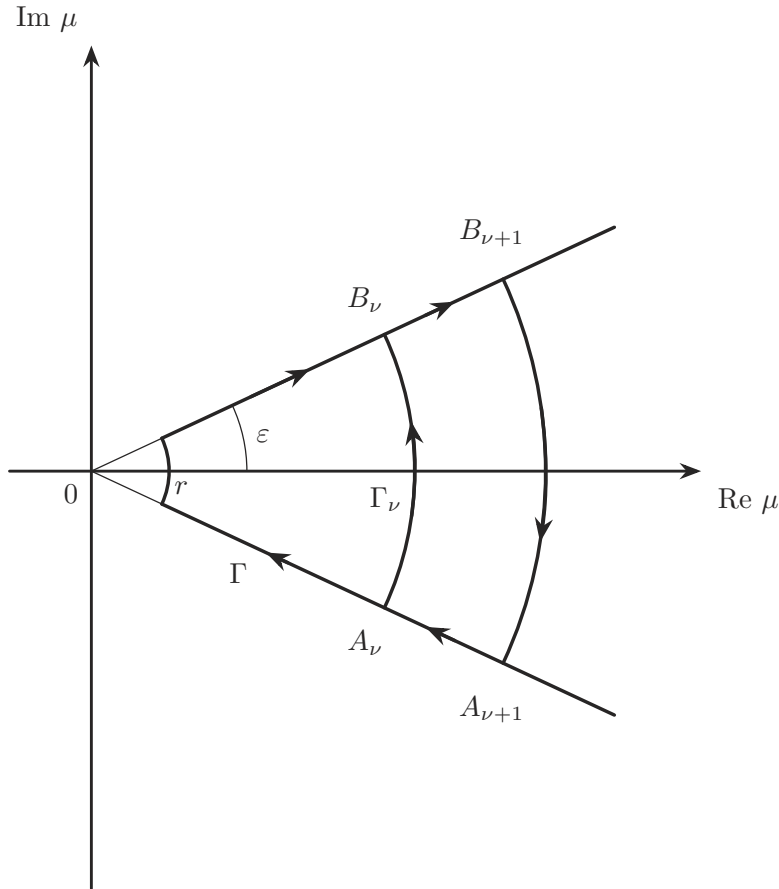


РИС. 1. Контур Γ_ν

FIG. 1. Contour Γ_ν

Пусть N_ν — число полюсов оператора $(I - \mu K)^{-1}$ (с учетом их кратности) в круге $|\mu| \leq \tilde{R}_\nu$. В силу леммы 3.2 получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f d\mu = \sum_{s=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} c_s(t) e_s.$$

Этот интеграл вычисляется по контуру $A_\nu B_\nu B_{\nu+1} A_{\nu+1}$ (обход совершается по часовой стрелке). Для того чтобы оценить норму этого интеграла, разобьем его на четыре части. На дуге $A_\nu B_\nu$, в силу оценки (3.11), справедливо неравенство

$$\|I_\nu\|_{L_2(0,1)} = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{A_\nu B_\nu} e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f d\mu \right\|_{L_2(0,1)} \leq k_3 \|K\| |\mu| e^{-t \operatorname{Re} \mu^\alpha} e^{|\mu|^{1/2m+\kappa/2}} \|f\|_{L_2(0,1)},$$

где константа $k_3 > 0$.

И снова на рассматриваемой дуге для функции μ^α справедливо неравенство $|\arg \mu^\alpha| < \pi/2$, откуда следует, что существует $\beta_0 > 0$ такое, что $|\arg \mu^\alpha| \leq \pi/2 - \beta_0$, и

$$\operatorname{Re} \mu^\alpha \geq |\mu|^\alpha \cos(\pi/2 - \beta_0) \geq |\mu|^\alpha \sin \beta_0. \quad (3.12)$$

Учитывая, что

$$R_\nu < |\mu| < R_{\nu+1} = R(1 - \delta)^{-\nu} = R_\nu(1 - \delta)^{-1},$$

получим

$$\|I_\nu\|_{L_2(0,1)} \leq k_3 \|K\| R_\nu(1 - \delta)^{-1} e^{-t|R_\nu|^\alpha \sin \beta_0 + |R_\nu|^{1/2m+\kappa/2}} \|f\|_{L_2(0,1)}. \quad (3.13)$$

Аналогичная оценка справедлива и для интеграла $I_{\nu+1}$ взятого по дуге $B_{\nu+1} A_{\nu+1}$.

Для интеграла J_ν по прямолинейному участку $A_{\nu+1} A_\nu$ с учетом (2.5) получим

$$\begin{aligned} \|J_\nu\|_{L_2(0,1)} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{A_{\nu+1} A_\nu} e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f d\mu \right\|_{L_2(0,1)} \leq \\ &\leq k_4 \|K\| |\mu|^{1/4m} e^{-t \operatorname{Re} \mu^\alpha} (R_{\nu+1} - R_\nu) \|f\|_{L_2(0,1)}, \end{aligned}$$

где константа $k_4 > 0$. Учитывая, что

$$R_{\nu+1} - R_\nu = R(1 - \delta)^{-\nu} - R(1 - \delta)^{-\nu+1} = R(1 - \delta)^{-\nu+1} ((1 - \delta)^{-1} - 1) = R_\nu ((1 - \delta)^{-1} - 1),$$

а также (3.12), мы получим

$$\begin{aligned} \|J_\nu\|_{L_2(0,1)} &\leq k_4 \|K\| R_{\nu+1}^{1/4m} e^{-t R_\nu^\alpha \sin \beta_0} R_\nu ((1 - \delta)^{-1} - 1) \|f\|_{L_2(0,1)} = \\ &= k_4 \|K\| R_\nu^{1+1/4m} (1 - \delta)^{-1/4m} e^{-t R_\nu^\alpha \sin \beta_0} ((1 - \delta)^{-1} - 1) \|f\|_{L_2(0,1)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Аналогичная оценка справедлива для интеграла J'_ν по прямолинейному участку $B_\nu B_{\nu+1}$.

Если положить $\alpha > 1/2m + \kappa/2$, где $\kappa > 0$ — достаточно малое число, то из оценок (3.13) и (3.14) следует, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\|I_\nu\| + \|I_{\nu+1}\| + \|J_\nu\| + \|J'_\nu\|)$$

сходится при любом $t > 0$. □

Следствие 3.1. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда система корневых функций оператора $\mathcal{A}_B$ полна в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ в топологии $W_2^{2m}(0, 1)$.

Доказательство. В силу теоремы 3.1 система корневых функций оператора $\mathcal{A}_B$ плотна в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ в топологии пространства $L_2(0, 1)$. Без ограничения общности будем считать, что $\mu = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}_B$. Тогда оператор $\mathcal{A}_B^{-1}$ существует и отображает ограниченным образом $L_2(0, 1)$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$. Тогда для любой функции $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ функция $g = \mathcal{A}_B u \in L_2(0, 1)$. В силу полноты в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ системы корневых функций оператора $\mathcal{A}_B$ существует последовательность $\{g_k\}$ конечных сумм корневых функций такая, что $g_k \rightarrow g$ в $L_2(0, 1)$. Тогда

$$\mathcal{A}_B^{-1} g_k \rightarrow \mathcal{A}_B^{-1} g = f \quad (k \rightarrow \infty) \quad (3.15)$$

в топологии $W_2^{2m}(0, 1)$. Кроме того, корневые функции инвариантны относительно $\mathcal{A}_B^{-1}$. Тогда $\{\mathcal{A}_B^{-1}g_k\}$ также является последовательностью конечных сумм корневых функций. Отсюда и из (3.15) следует полнота корневых функций оператора $\mathcal{A}_B$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ в топологии $W_2^{2m}(0, 1)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байраш Р. А., Скубачевский А. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения четного порядка с интегральными условиями // Докл. РАН. Мат. Инф. Проц. упр. — 2025. — 522. — С. 7–10. — DOI: [10.7868/s3034504925020024](https://doi.org/10.7868/s3034504925020024).
2. Галахов Е. И., Скубачевский А. Л. Об одной нелокальной спектральной задаче // Дифф. уравн. — 1997. — 33, № 1. — С. 25–32.
3. Даровская К. А., Скубачевский А. Л. Об одной спектральной задаче с интегральными условиями // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2011. — 28. — С. 147–160.
4. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифф. уравн. — 1986. — 22, № 12. — С. 2059–2071.
5. Ишкин Х. К., Кангуужин Б. Е. Об условиях полноты системы корневых функций дифференциального оператора на отрезке с интегральными условиями // Уфимск. мат. ж. — 2025. — 17, № 4. — С. 40–54. — DOI: [10.13108/2025-17-4-37](https://doi.org/10.13108/2025-17-4-37).
6. Кангуужин Б. Е., Токмагамбетов Н. Е. О полноте системы корневых функций обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с интегральными краевыми условиями // Вестн. КазНУ. Сер. Мат. Мех. — 2014. — 2, № 81. — С. 72–87.
7. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1983.
8. Лидский В. Б. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // Тр. Моск. мат. об-ва — 1962. — 11. — С. 3–35.
9. Подъяпольский В. В. Суммируемость по Абелю системы корневых функций одной нелокальной задачи с интегральными условиями // Мат. заметки. — 1999. — 65, № 5. — С. 797–800. — DOI: [10.4213/mzm1114](https://doi.org/10.4213/mzm1114).
10. Подъяпольский В. В. Полнота системы корневых функций одной нелокальной задачи в L_p // Мат. заметки. — 2002. — 71, № 6. — С. 878–889. — DOI: [10.4213/mzm392](https://doi.org/10.4213/mzm392).
11. Сенцов Ю. Г. О базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора с интегральными условиями // Мат. заметки. — 1999. — 65, № 6. — С. 948–952. — DOI: [10.4213/mzm1134](https://doi.org/10.4213/mzm1134).
12. Сильченко Ю. Т. Собственные значения и собственные функции дифференциального оператора с нелокальными граничными условиями // Дифф. уравн. — 2006. — 42, № 6. — С. 764–768.
13. Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. I // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — 26. — С. 3–132.
14. Скубачевский А. Л., Стеблов Г. М. О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0, 1)$ // Докл. АН СССР. — 1991. — 321, № 6. — С. 1158–1163.
15. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. — Петроград: Тип. М. П. Фроловой, 1917.
16. Шкаликов А. А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1982. — № 6. — С. 12–21.
17. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Commun. Pure Appl. Math. — 1962. — 15. — С. 119–147. — DOI: [10.1002/cpa.3160150203](https://doi.org/10.1002/cpa.3160150203).
18. Bayrash R. A., Skubachevskii A. L. A priori estimates of solutions of ordinary differential equation with spectral parameter and integral conditions // Math. Nachr. — 2026. — 299, № 1. — С. 85–116. — DOI: [10.1002/mana.70074](https://doi.org/10.1002/mana.70074).
19. Ishkin Kh. K. On conditions for the finiteness of the spectrum of a second order differential operator with integral boundary conditions // J. Math. Mech. Comp. Sci. — 2024. — 124, № 4. — С. 26–37. — DOI: [10.26577/JMMCS2024-v124-i4-a2](https://doi.org/10.26577/JMMCS2024-v124-i4-a2).
20. Karamyan R. D., Skubachevskii A. L. Spectral properties of the fourth order differential operator with integral conditions // Lobachevskii J. Math. — 2024. — 45, № 4. — С. 1404–1420. — DOI: [10.1134/S1995080224601188](https://doi.org/10.1134/S1995080224601188).
21. Krall A. M. The development of general differential and general boundary systems // Rocky Mountain J. Math. — 1975. — 5, № 4. — С. 493–542. — DOI: [10.1216/RMJ-1975-5-4-493](https://doi.org/10.1216/RMJ-1975-5-4-493).
22. Lunyov A. A., Malamud M. M. On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications // J. Spectr. Theory. — 2015. — 5, № 1. — С. 17–70. — DOI: [10.4171/JST/90](https://doi.org/10.4171/JST/90).

23. *Lunyov A. A., Malamud M. M.* On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — 441. — С. 57–103. — DOI: [10.1016/j.jmaa.2016.03.085](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.03.085).
24. *Lunyov A. A., Malamud M. M.* On the completeness property of root vector systems for 2×2 Dirac type operators with non-regular boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. — 2025. — 543, № 2, pt. 1. — 128949. — DOI: [10.1016/j.jmaa.2024.128949](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128949).
25. *Makin A. S.* On the completeness of the root function system of the Dirac operator with two-point boundary conditions // Math. Nachr. — 2024. — 297, №. 7. — С. 2468–2487. — DOI: [10.1002/mana.202300241](https://doi.org/10.1002/mana.202300241).
26. *Picone M.* I teoremi d'esistenza per gl'integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni // Rend. Accad. Lincei. — 1908. — 17. — С. 340–347.
27. *Picone M.* Equazione integrale traduce il piu generale problema lineare per le equation differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine // Accad. Naz. Lincei Atti Convegni. Roma. — 1932. — 15, № 6. — С. 942–948.
28. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. — 2014. — 96, № 5-6. — С. 777–810. — DOI: [10.1134/S0001434614110169](https://doi.org/10.1134/S0001434614110169).
29. *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklarung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen // Atti IV Congr. Intern. Mat. Rome. — 1909. — 3. — С. 116–124.

Р. А. Байраш

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

E-mail: bayrash-ra@rudn.ru, РИНЦ SPIN-код: 4223-6706, РИНЦ AuthorID: [1343828](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=1343828), Scopus: [60165024600](https://orcid.org/0000-0001-8385-0139)

А. Л. Скубачевский

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

E-mail: skubachevskiy-al@rudn.ru, РИНЦ SPIN-код: 9751-1272, РИНЦ AuthorID: [3477](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=3477), ResearcherID: [H-7828-2016](https://orcid.org/0000-0001-8385-0139), Scopus: [6602633010](https://orcid.org/0000-0001-8385-0139), ORCID: [0000-0001-8385-0139](https://orcid.org/0000-0001-8385-0139)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-213-226](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-213-226)

EDN: [ARSXNB](https://elibrary.ru/arsxnb)

UDC 517.984.52

Research article

Abel summability of a system of root functions of an even-order differential operator with integral conditions

R. A. Bayrash^{1,2} and A. L. Skubachevskii^{1,2}

¹*RUDN University, Moscow, Russia*

²*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Abstract. We consider an ordinary $2m$ -th order differential operator with purely integral conditions. In this case, the domain of definition of the corresponding operator is not dense in $L_2(0, 1)$. Under certain conditions for the weight functions included in the integral conditions, the Abel summability of the system of root functions of the corresponding differential operator is proved.

Keywords: spectral properties, non-local problem, integral conditions, Abel summability.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.



Acknowledgments and funding. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the state assignment (project No. FSSF-2026-0013).

Authors' contribution. *Skubachevskii A. L.* — statement of the problem, formulation of the result on the Abel basis property, the idea of using in the proof an a priori estimate of solutions depending on the spectral parameter. *Bayrash R. A.* — proof of the main result of the paper (Theorem 3.1 on the Abel basis property), formulation and proof of auxiliary assertions (Lemmas 2.1–2.3, 3.1–3.2, Corollary 3.1).

For citation: R. A. Bayrash, A. L. Skubachevskii, “Abel summability of a system of root functions of an even-order differential operator with integral conditions,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 2, 213–226. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-213-226](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-213-226) EDN: ARSXNB

REFERENCES

1. R. A. Bayrash and A. L. Skubachevskii, “Obyknoennyye differentsial'nye uravneniya chetnogo poryadka s integral'nymi usloviyami” [Ordinary differential equations of even-order with integral conditions], *Dokl. RAN. Mat. Inf. Prots. Upr.* [Rep. Russ. Acad. Sci. Math. Inf. Control], 2025, **522**, 7–10 (in Russian), DOI: [10.7868/s3034504925020024](https://doi.org/10.7868/s3034504925020024).
2. E. I. Galakhov and A. L. Skubachevskii, “Ob odnoy nelokal'noy spektral'noy zadache” [On one nonlocal spectral problem], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1997, **33**, No. 1, 25–32 (in Russian).
3. K. A. Darovskaya and A. L. Skubachevskii, “Ob odnoy spektral'noy zadache s integral'nymi usloviyami” [On one spectral problem with integral conditions], *Tr. Sem. Im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2011, **28**, 147–160 (in Russian).
4. V. A. Il'in, “Neobkhodimyye i dostatochnyye usloviya bazisnosti Rissa kornevykh vektorov razryvnykh operatorov vtorogo poryadka” [Necessary and sufficient conditions for the Riesz basis property of root vectors of discontinuous second-order operators], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1986, **22**, No. 12, 2059–2071 (in Russian).
5. Kh. K. Ishkin and B. E. Kanguzhin, “Ob usloviyakh polnoty sistemy kornevykh funktsiy differentsial'nogo operatora na otrezke s integral'nymi usloviyami” [On the conditions for the completeness of the system of root functions of a differential operator on a segment with integral conditions], *Ufimsk. Mat. Zh.* [Ufa Math. J.], 2025, **17**, No. 4, 40–54 (in Russian), DOI: [10.13108/2025-17-4-37](https://doi.org/10.13108/2025-17-4-37).
6. B. E. Kanguzhin and N. E. Tokmagambetov, “O polnote sistemy kornevykh funktsiy obyknovennogo differentsial'nogo operatora vtorogo poryadka s integral'nymi kraevymi usloviyami” [On the completeness of the system of root functions of an ordinary second-order differential operator with integral boundary conditions], *Vestn. KazNU. Ser. Mat. Mekh.* [Bull. Kazakh Nat. Univ. Ser. Math. Mech.], 2014, **2**, No. 81, 72–87 (in Russian).
7. A. F. Leont'ev, *Tselye Funktsii. Ryady Ekspontent* [Entire Functions. Exponential Series], Nauka, Moscow, 1983 (in Russian).
8. V. B. Lidskii, “O summiruемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов” [On the summability of series in principal vectors of non-self-adjoint operators], *Tr. Mosk. Mat. Ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1962, **11**, 3–35 (in Russian).
9. V. V. Pod'yapol'skii, “Summiruemość po Abelyu sistemy kornevykh funktsiy odnoy nelokal'noy zadachi s integral'nymi usloviyami” [Abel summability of a system of root functions of a nonlocal problem with integral conditions], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1999, **65**, No. 5, 797–800 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm1114](https://doi.org/10.4213/mzm1114).
10. V. V. Pod'yapol'skii, “Polnota sistemy kornevykh funktsiy odnoy nelokal'noy zadachi v L_p ” [Completeness of the system of root functions of one nonlocal problem in L_p], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2002, **71**, No. 6, 878–889 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm392](https://doi.org/10.4213/mzm392).
11. Yu. G. Sentsov, “O bazisnosti Rissa sistemy sobstvennykh i prisoedinennykh funktsiy differentsial'nogo operatora s integral'nymi usloviyami” [On the Riesz basis property of a system of eigen- and associated functions of a differential operator with integral conditions], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1999, **65**, No. 6, 948–952 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm1134](https://doi.org/10.4213/mzm1134).
12. Yu. T. Sil'chenko, “Sobstvennye znacheniya i sobstvennye funktsii differentsial'nogo operatora s nelokal'nymi granichnymi usloviyami” [Eigenvalues and eigenfunctions of a differential operator with nonlocal boundary conditions], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2006, **42**, No. 6, 764–768 (in Russian).
13. A. L. Skubachevskii, “Neklassicheskie kraevye zadachi. I” [Nonclassical boundary-value problems. I], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132 (in Russian).

14. A. L. Skubachevskii and G. M. Steblov, “O spektre differentsial’nykh operatorov s oblast’yu opredeleniya, ne plotnoy v $L_2(0, 1)$ ” [On the spectrum of differential operators with domains not dense in $L_2(0, 1)$], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1991, **321**, No. 6, 1158–1163 (in Russian).
15. Ya. D. Tamarkin, *O Nekotorykh Obshchikh Zadachakh Teorii Obyknovennykh Lineynykh Differentsial’nykh Uravneniy i o Razlozhenii Proizvol’nykh Funktsiy v Ryady* [On Some General Problems of the Theory of Ordinary Linear Differential Equations and on the Expansion of Arbitrary Functions into Series], Typ. M. P. Frolova, Petrograd, 1917 (in Russian).
16. A. A. Shkalikov, “O bazisnosti sobstvennykh funktsiy obyknovennykh differentsial’nykh operatorov s integral’nymi kraevymi usloviyami” [On the basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1982, No. 6, 12–21 (in Russian).
17. S. Agmon, “On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1962, **15**, 119–147, DOI: [10.1002/cpa.3160150203](https://doi.org/10.1002/cpa.3160150203).
18. R. A. Bayrash and A. L. Skubachevskii, “A priori estimates of solutions of ordinary differential equation with spectral parameter and integral conditions,” *Math. Nachr.*, 2026, **299**, No. 1, 85–116, DOI: [10.1002/mana.70074](https://doi.org/10.1002/mana.70074).
19. Kh. K. Ishkin, “On conditions for the finiteness of the spectrum of a second order differential operator with integral boundary conditions,” *J. Math. Mech. Comp. Sci.*, 2024, **124**, No. 4, 26–37, DOI: [10.26577/JMMCS2024-v124-i4-a2](https://doi.org/10.26577/JMMCS2024-v124-i4-a2).
20. R. D. Karamyan and A. L. Skubachevskii, “Spectral properties of the fourth order differential operator with integral conditions,” *Lobachevskii J. Math.*, 2024, **45**, No. 4, 1404–1420, DOI: [10.1134/S1995080224601188](https://doi.org/10.1134/S1995080224601188).
21. A. M. Krall, “The development of general differential and general boundary systems,” *Rocky Mountain J. Math.*, 1975, **5**, No. 4, 493–542, DOI: [10.1216/RMJ-1975-5-4-493](https://doi.org/10.1216/RMJ-1975-5-4-493).
22. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, “On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications,” *J. Spectr. Theory*, 2015, **5**, No. 1, 17–70, DOI: [10.4171/JST/90](https://doi.org/10.4171/JST/90).
23. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, “On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **441**, 57–103, DOI: [10.1016/j.jmaa.2016.03.085](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.03.085).
24. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, “On the completeness property of root vector systems for 2×2 Dirac type operators with non-regular boundary conditions,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2025, **543**, No. 2, pt. 1, 128949, DOI: [10.1016/j.jmaa.2024.128949](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128949).
25. A. S. Makin, “On the completeness of the root function system of the Dirac operator with two-point boundary conditions,” *Math. Nachr.*, 2024, **297**, No. 7, 2468–2487, DOI: [10.1002/mana.202300241](https://doi.org/10.1002/mana.202300241).
26. M. Picone, “I teoremi d’esistenza per gl’integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni,” *Rend. Accad. Lincei.*, 1908, **17**, 340–347.
27. M. Picone, “Equazione integrale traducente il piu generale problema lineare per le equation differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine,” *Accad. Naz. Lincei Atti Convegni. Roma*, 1932, **15**, No. 6, 942–948.
28. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, “The Dirac operator with complex-valued summable potential,” *Math. Notes*, 2014, **96**, No. 5-6, 777–810, DOI: [10.1134/S0001434614110169](https://doi.org/10.1134/S0001434614110169).
29. A. Sommerfeld, “Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklarung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen,” *Atti IV Congr. Intern. Mat. Rome*, 1909, **3**, 116–124.

R. A. Bayrash

RUDN University, Moscow, Russia

Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

E-mail: bayrash-ra@rudn.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4223-6706, eLIBRARY AuthorID: [1343828](https://elibrary.ru/1343828),

Scopus: [60165024600](https://orcid.org/0000-0001-6016-5024)

A. L. Skubachevskii

RUDN University, Moscow, Russia

Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

E-mail: alskubachevskii@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 9751-1272, eLIBRARY AuthorID:

[3477](https://elibrary.ru/3477), ResearcherID: [H-7828-2016](https://orcid.org/0000-0001-7828-2016), Scopus: [6602633010](https://orcid.org/0000-0001-6602-6330), ORCID: [0000-0001-8385-0139](https://orcid.org/0000-0001-8385-0139)