Современная математика. Фундаментальные направления. Том 71, № 4 (2025). С. 663–685
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4-663-685
EDN: MJECGF

УДК 517.958, 517.97
Научная статья

КЛАСС АНИЗОТРОПНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ-ПЕРЕНОСА В НЕДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ

Л. Хоанг[1], **А. И. Ибрагимов**[2]

[1] *Texas Tech University, Lubbock, USA*
[2] *Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия*

Аннотация. В работе обобщается вероятностный метод Эйнштейна для броуновского движения на случай сжимаемых жидкостей в пористых средах. Рассматривается многомерный случай с произвольными функциями распределения вероятностей. Связывая ожидаемое смещение за единицу времени со скоростью жидкости, мы выводим анизотропное уравнение диффузии-переноса в недивергентной форме, содержащее член переноса. В предположении закона Дарси получено соответствующее нелинейное уравнение в частных производных для функции плотности. Исследованы классические решения этого уравнения, доказаны принцип максимума и сильный принцип максимума. Кроме того, получены оценки экспоненциального убывания решений при всех временах, в частности, доказана их экспоненциальная сходимость при $t \to \infty$. В основе анализа лежат явно построенные преобразования типа Бернштейна—Коула—Хопфа, которые удаётся сконструировать даже для весьма общих уравнений состояния. Доказана и использована лемма о росте во времени, позволившая получить указанные оценки убывания.

Ключевые слова: парадигма Эйнштейна, уравнение диффузии-переноса, фильтрация жидкости в пористых средах, нелинейность, уравнения в частных производных в недивергентной форме, качественный анализ, преобразование Бернштейна—Коула—Хопфа, асимптотический анализ.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. А. И. Ибрагимов выполнил работу при финансовой поддержке в рамках государственного задания Института проблем нефти и газа Российской академии наук (проект № 122022800272-4).

Для цитирования: *Л. Хоанг, А. И. Ибрагимов.* Класс анизотропных уравнений диффузии-переноса в недивергентной форме// Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. **71**, № 4. С. 663–685, DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4-663-685.

1. Введение

Цель этой статьи состоит в следующем:

(1) разработка новой модели процессов диффузии и переноса жидкостей в пористых средах с использованием парадигмы Эйнштейна для броуновского движения [14];
(2) строгий анализ этой модели для получения конкретных результатов по устойчивости.

Что касается первой цели, напомним, что моделирование фильтрации в пористых средах традиционно базируется на следующих трёх компонентах [4, 23, 27]:

(a) уравнение непрерывности (материальный баланс/сохранение массы);
(b) уравнение движения, которое обычно представляет собой закон Дарси или одно из его обобщений;
(c) уравнение состояния, описывающее связь между давлением и плотностью.

Это приводит к уравнениям в частных производных (УрЧП) параболического типа (линейным, квазилинейным, вырожденным и т. д.) для функции давления или плотности (см. [1,3,7]). Благодаря (a), все они естественным образом возникают в дивергентной форме. Эти уравнения изучаются уже давно, и существует обширная литература, см., например, [1,29] для течений Дарси, [2,6–10,15,17–19,24,25,28] для течений Форхгеймера и ссылки в этих работах. Они относятся к более широкому классу нелинейных параболических уравнений, см. книги [13,21].

Хотя три уравнения (a), (b), (c), упомянутые выше, являются детерминированными, они, по сути, могут быть подвержены стохастическим возмущениям [26,30]. Принимая во внимание эту стохастическую точку зрения, мы предлагаем альтернативный подход к первой составляющей (a) — сохранению массы — пересматривая и используя вероятностное уравнение материального баланса Эйнштейна [14]. Более конкретно, мы применяем парадигму Эйнштейна [14] и рассматриваем движение жидкости в пористой среде как случайные перемещения частиц из точки x в точку $x+\zeta$ в течение малого интервала времени τ, где ζ — случайное смещение. Обобщая рассуждения из [14] на многомерное пространство, мы приходим к следующему уравнению в частных производных для функции плотности ρ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{E}{\tau} \cdot \nabla \rho, \tag{1.1}$$

где $a_{ij}(x,t)$ — коэффициенты диффузии, а $E(x,t) = \int \zeta \phi(x,t,\zeta) \mathrm{d}\zeta$, где $\phi(x,t,\zeta)$ обозначает распределение вероятностей этих событий (более подробно см. в разделе 2 ниже). Здесь E/τ — это новый член переноса, поскольку $\phi(x,t,\zeta)$ не предполагается чётной функцией по ζ. Обратим внимание, что E — это ожидаемое значение смещения частицы в течение времени от t до $t+\tau$. Поэтому мы постулируем (см. гипотезу 2.1), что средняя скорость E/τ пропорциональна скорости жидкости v, или, в более общем случае,

$$M_0 v = \frac{1}{\tau} E, \tag{1.2}$$

где M_0 — матрица, гарантирующая определённый уровень «соответствия» v и E/τ, см. (2.14). Предположение (1.2) связывает микроскопический перенос с макроскопическим. Это важно для понимания и развития нашей модели.

После (1.1) и (1.2) мы рассматриваем анизотропный закон Дарси для (b) и изоэнтропические течения газа, а также течения слабосжимаемой жидкости для (c). В результате получается квазилинейное параболическое уравнение второго порядка в недивергентной форме относительно ρ, содержащее квадратичный член по $\nabla\rho$ и другие нелинейности по ρ, см. (2.18)–(2.22) ниже.

Перейдём ко второй цели статьи — математическому анализу полученных моделей. Мы докажем принцип максимума и сильный принцип максимума для решений. Для начальной задачи с постоянными граничными данными мы получаем оценки экспоненциального убывания решения в пространственной C^0-норме. Следовательно, решение экспоненциально сходится в C^0-норме к своему постоянному граничному значению при стремлении времени к бесконечности. Для доказательства мы явно строим *отдельные* преобразования типа Бернштейна—Коула—Хопфа [5,11,20], чтобы преобразовать *то же самое* решение в необходимое суб- или суперрешение соответствующего усеченного линейного оператора. Более того, лемма о росте во времени устанавливается с помощью метода Ландиса. Затем она применяется на последовательных временных интервалах для получения оценок экспоненциального убывания.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы выводим модели в несколько этапов. Во-первых, обобщая вероятностный метод Эйнштейна [14] на многомерное пространство, мы выводим общее уравнение диффузии (2.8) в недивергентной форме. Без предположения о чётности функции распределения вероятностей, это уравнение содержит отношение $E(x,t)/\tau$ — среднее смещение за единицу времени. Во-вторых, связывая это отношение $E(x,t)/\tau$ со скоростью $v(x,t)$ жидкости, мы получаем уравнение (2.22). Основным предположением является гипотеза 2.1, которая обобщает основную идею (2.11). Эта гипотеза связывает микроскопические понятия, такие как движение частиц с вероятностями, со скоростью, которая является макроскопической характеристикой жидкости. В-третьих, используя закон Дарси, мы находим уравнение (2.17) для давления p и плотности ρ. Наконец, уравнение состояния используется для получения нелинейного уравнения в частных производных (2.22) для плотности. Особыми случаями являются уравнения (2.18), (2.19) и (2.20).

Раздел 3 посвящен изучению уравнения (2.22) в его общем виде (3.3) с точки зрения принципа максимума и сильного принципа максимума для нелинейного оператора L, см. (3.7). Принцип максимума доказан в теореме 3.1, а сильный принцип максимума — в теореме 3.2. Для последней теоремы в лемме 3.1 построены преобразования типа Бернштейна—Коула—Хопфа, преобразующие решение оператора L в субрешения и суперрешения усечённого линейного оператора $\mathcal{L}$. Эти преобразования явно записываются в терминах уравнения состояния.

В последнем разделе 4 мы изучаем поведение решения начально-краевой задачи (4.36) при больших временах. Основным инструментом служит лемма Ландиса о росте для линейного оператора $\widetilde{L}$, представляющего собой общую форму $\mathcal{L}$, из леммы 4.1. Это приводит к оценкам суб- и суперрешений $\widetilde{L}$ в предложении 4.1. С помощью преобразований типа Бернштейна—Коула—Хопфа из раздела 3 для связи L, $\mathcal{L}$ и $\widetilde{L}$ мы получаем основные результаты теоремы 4.1. Они заключаются в оценках экспоненциального убывания для всех времён и, как следствие, экспоненциальной сходимости решений при стремлении времени к бесконечности. Фактически, экспоненциальная скорость может не зависеть от начальных данных, как показано в следствии 4.1. Приложения к различным типам течений жидкости приведены в примерах 4.1 и 4.2. Стоит отметить, что лемма о росте демонстрирует устойчивость исходной нелинейной задачи, что частично оправдывает предлагаемую нами модель динамики течений жидкости в пористых средах.

Авторы осознают, что разработанные в данной работе модели существенно отличаются от стандартных. Очевидно, что для их подтверждения необходимы дополнительные данные и эксперименты. Тем не менее, поскольку вывод настолько прост, их идеи, методы и математический анализ представлены здесь в надежде на дальнейшее обсуждение и развитие. В конечном итоге они могут оказаться полезными для разработки альтернативной методологии описания и понимания сложных процессов диффузии и переноса в пористых средах.

2. Вывод моделей

Обозначения. На протяжении всей статьи пространственная размерность $n \geqslant 1$ фиксирована. Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ его евклидова норма обозначается через $|x|$. Пусть $\mathcal{M}^{n\times n}$ обозначает множество матриц действительных чисел размера $n \times n$, а $\mathcal{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ — множество симметричных матриц в $\mathcal{M}^{n\times n}$. Для пары матриц $A, B \in \mathcal{M}^{n\times n}$ их скалярное произведение $\langle A, B\rangle$ равно следу $\mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}B)$. Для действительной функции $f(x)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, обозначим через $D^2 f$ матрицу Гессе вторых частных производных $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)_{i,j=1,\ldots,n}$.

2.1. Общие уравнения.

Пусть $\rho(x, t)$ — функция плотности жидкости в точке $x \in \mathbb{R}^n$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Пусть $\tau > 0$ — небольшой временной интервал в качестве входного параметра в момент наблюдения. Пусть $\zeta \in \mathbb{R}^n$ — случайное смещение частиц жидкости. Предположим, что вероятность перемещения частиц из точки x в момент времени t в точку $x + \zeta$ в момент времени $t + \tau$, где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$, может быть охарактеризована функцией распределения вероятностей $\phi(x, t, \zeta) \geqslant 0$, так что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t, \zeta)\mathrm{d}\zeta = 1.$$

Уравнение материального баланса Эйнштейна [14] записывается в виде

$$\rho(x, t + \tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x + \zeta, t)\phi(x, t, \zeta)\mathrm{d}\zeta. \tag{2.1}$$

При малом τ мы аппроксимируем производную по времени от ρ следующим образом:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \approx \frac{1}{\tau}(\rho(x, t + \tau) - \rho(x, t)). \tag{2.2}$$

Вычислим $\rho(x, t + \tau)$ в правой части (2.2) по материальному балансу (2.1). Предположим, что функция $\zeta \mapsto \phi(x, t, \zeta)$ сосредоточена в малом шаре с центром в начале координат. Согласно разложению Тейлора функции $\zeta \mapsto \rho(x+\zeta, t)$ при малых $|\zeta|$ с точностью до квадратичных членов имеем приближение

$$\rho(x+\zeta,t) \approx \rho(x,t) + \zeta \cdot \nabla\rho(x,t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \zeta_i\zeta_j \frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Затем, используя (2.1), мы можем записать аппроксимацию

$$\rho(x,t+\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x+\zeta,t)\phi(x,t,\zeta)\mathrm{d}\zeta \approx \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(x,t)\phi(x,t,\zeta)\mathrm{d}\zeta +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \zeta \cdot \nabla\rho(x,t)\phi(x,t,\zeta)\mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \zeta_i\zeta_j \frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}\phi(x,t,\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

Таким образом,

$$\rho(x,t+\tau) \approx \rho(x,t) + E(x,t)\cdot\nabla\rho(x,t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \bar a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}, \tag{2.3}$$

где вектор

$$E(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(x,t,\zeta)\zeta\mathrm{d}\zeta, \tag{2.4}$$

а коэффициенты

$$\bar a_{ij}(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \zeta_i\zeta_j\phi(x,t,\zeta)\mathrm{d}\zeta \quad \text{при} \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{2.5}$$

Объединяя (2.3) с (2.2) и заменяя приближение равенством, получаем

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\tau}\sum_{i,j=1}^{n} \bar a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{1}{\tau}E(x,t)\cdot\nabla\rho(x,t). \tag{2.6}$$

Определим матрицы размера $n\times n$

$$\bar A(x,t) = (\bar a_{ij}(x,t))_{i,j=1,\ldots,n} \quad \text{и} \quad A(x,t) = (a_{ij}(x,t))_{i,j=1,\ldots,n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\tau}\bar A(x,t). \tag{2.7}$$

Тогда уравнение (2.6) можно переписать в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{1}{\tau}E\cdot\nabla\rho = \langle A, D^2\rho\rangle + \frac{1}{\tau}E\cdot\nabla\rho. \tag{2.8}$$

Замечание 2.1. Следует сделать следующие замечания.

(a) Ввиду (2.5), матрица $\bar A(x,t)$ симметрична, а значит, и $A(x,t)$ тоже. Кроме того, для $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ имеем

$$\xi^{\mathrm{T}}\bar A(x,t)\xi = \sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\bar a_{ij}(x,t)\xi_j = \int\limits_{\mathbb{R}^n}|\xi\cdot\zeta|^2\phi(x,t,\zeta)\mathrm{d}\zeta \geqslant 0.$$

Следовательно, $\bar A(x,t)$ положительно полуопределена. Поскольку $\tau > 0$, то из (2.7) вытекает, что матрица $A(x,t)$ также положительно полуопределена.

(b) Если $\zeta\mapsto\phi(x,t,\zeta)$ — четная функция, то, согласно (2.4), $E(x,t)=0$, и мы имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2\rho}{\partial x_i\partial x_j}. \tag{2.9}$$

(c) Рассмотрим случай взаимно независимых событий относительно координат смещения ζ, т. е.

$$\phi(x,t,\zeta) = \phi_1(x,t,\zeta_1)\cdots\phi_n(x,t,\zeta_n), \ \text{при}\ \zeta = (\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n),$$

где каждая $\phi_i(x,t,\zeta_i)$ — это функция распределения вероятностей по переменной $\zeta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда имеем

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j & \text{при} \quad i \neq j, \\ \bar{\sigma}_{i,i}^2 & \text{при} \quad i = j, \end{cases}$$

где

$$\bar{\sigma}_i(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} s\phi_i(x,t,s)\mathrm{d}s, \qquad \bar{\sigma}_{i,i}(x,t) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} s^2 \phi_i(x,t,s)\mathrm{d}s \right)^{1/2}.$$

(d) Предположим, в дополнение к (c), что каждая функция $\phi_i(x,t,s)$ при $1 \leqslant i \leqslant n$ чётна по $s \in \mathbb{R}$. Тогда каждое $\sigma_i = 0$, и, следовательно, $\bar{A}(x,t)$ — диагональная матрица $\operatorname{diag}[\bar{\sigma}_{1,1}^2, \bar{\sigma}_{2,2}^2, \ldots, \bar{\sigma}_{n,n}^2]$. Поскольку каждое $\bar{\sigma}_{i,i}$ положительно, то в этом случае матрица $\bar{A}(x,t)$ положительно определена. Более того, функция $\zeta \mapsto \phi(x,t,\zeta)$ — четная, следовательно, согласно пункту (b), уравнение (2.8) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{\sigma}_{i,i}^2}{2\tau} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}. \tag{2.10}$$

Это многомерная версия уравнения, полученного Эйнштейном в [14].

Мы сосредоточимся на изучении общего уравнения (2.8), а не (2.9) или (2.10).

2.2. Основное предположение. Заметим, что $E(x,t)$ — это ожидаемое смещение из точки x между моментами времени t и $t+\tau$. Таким образом, $E(x,t)/\tau$ — это частное

$$\frac{\textit{среднее смещение}}{\textit{время}},$$

что можно рассматривать как среднюю скорость. Следовательно, при малых τ мы можем аппроксимировать это отношение $E(x,t)/\tau$ скоростью $v(x,t)$ жидкости, т. е.

$$\frac{E(x,t)}{\tau} \approx v(x,t). \tag{2.11}$$

Однако мы предположим гораздо более общее отношение, чем (2.11).

Гипотеза 2.1. *Существует безразмерная матрица $M_0(x,t)$ размера $n \times n$ такая, что*

$$M_0(x,t)v(x,t) = \frac{E(x,t)}{\tau}, \tag{2.12}$$

$$\xi^{\mathrm{T}} M_0(x,t)\xi \geqslant 0 \quad \textit{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.13}$$

Условие (2.13) указывает, что скорость жидкости $v(x,t)$ и отношение $E(x,t)/\tau$ имеют некоторое «соответствие», т. е.

$$v(x,t) \cdot \frac{E(x,t)}{\tau} \geqslant 0. \tag{2.14}$$

Гипотеза 2.1 — наше фундаментальное предположение. Она связывает микроскопические особенности движения частиц в среде с макроскопическими свойствами потока жидкости, а именно со скоростью жидкости в данном случае.

Объединение (2.8) с (2.12) даёт

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x,t), D^2\rho \rangle + (M_0(x,t)v(x,t)) \cdot \nabla \rho. \tag{2.15}$$

В этом уравнении член $\langle A(x,t), D^2\rho \rangle$ представляет диффузию в недивергентной форме, а член $(M_0(x,t)v(x,t)) \cdot \nabla \rho$ представляет перенос/конвекцию.

2.3. Движение жидкости в пористых средах. Пусть $p(x,t)$ — давление жидкости. Предположим, что закон Дарси — анизотропный [4, 12],

$$v = -\bar{K}(x,t)(\nabla p - \rho\vec{g}), \tag{2.16}$$

где $\bar{K}(x,t)$ — матрица размера $n \times n$, а $\vec{g}$ — ускорение свободного падения при $n = 1, 2, 3$, и может быть любым постоянным вектором для $n \geqslant 4$.

Объединение (2.15) с (2.16) даёт

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \langle A(x,t), D^2\rho\rangle - (K_0(x,t)\nabla p)\cdot\nabla\rho + \rho B_0(x,t)\cdot\nabla\rho, \tag{2.17}$$

где

$$K_0(x,t) = M_0(x,t)\bar{K}(x,t), \quad B_0(x,t) = M_0(x,t)\bar{K}(x,t)\vec{g}.$$

Далее мы используем уравнения состояния, чтобы связать давление p и плотность ρ в (2.17).

Случай изоэнтропических течений газа. Имеем $p = c\rho^\gamma$ с константой $c > 0$ и показателем адиабаты $\gamma \geqslant 1$. Тогда (2.17) принимает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \langle A(x,t), D^2\rho\rangle - c\gamma\rho^{\gamma-1}(K_0(x,t)\nabla\rho)\cdot\nabla\rho + \rho B_0(x,t)\cdot\nabla\rho. \tag{2.18}$$

В частности, для идеальных газов $\gamma = 1$, и уравнение (2.18) имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \langle A(x,t), D^2\rho\rangle - c(K_0(x,t)\nabla\rho)\cdot\nabla\rho + \rho B_0(x,t)\cdot\nabla\rho. \tag{2.19}$$

Случай слабосжимаемых жидкостей. Имеем

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp} = \kappa, \quad \text{где } \kappa \text{ — малая положительная постоянная сжимаемость.}$$

Заметив, что $\nabla\rho = \kappa\rho\nabla p$, перепишем (2.17) в виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \langle A(x,t), D^2\rho\rangle - \frac{1}{\kappa\rho}(K_0(x,t)\nabla\rho)\cdot\nabla\rho + \rho B_0(x,t)\cdot\nabla\rho. \tag{2.20}$$

В общем случае предположим справедливость уравнения состояния

$$p = P_0(\rho), \quad \text{где } P_0 \text{ — известная возрастающая функция.} \tag{2.21}$$

Тогда уравнение (2.17) становится уравнением в частных производных на ρ:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \langle A(x,t), D^2\rho\rangle - P_0'(\rho)(K_0(x,t)\nabla\rho)\cdot\nabla\rho + \rho B_0(x,t)\cdot\nabla\rho. \tag{2.22}$$

В следующих двух разделах мы сосредоточимся исключительно на математическом аспекте уравнения (2.22).

3. Принцип максимума и сильный принцип максимума

Пусть U — непустое, открытое, ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$ с границей Γ и замыканием $\bar{U}$. Пусть $T > 0$. Обозначим $U_T = U \times (0, T]$ и введём параболическую границу $\Gamma_T = \overline{U_T} \setminus U_T$, где $\overline{U_T} = \bar{U} \times [0, T]$ — замыкание U_T (в $\mathbb{R}^{n+1}$).

Пусть $A : U_T \to \mathcal{M}^{n\times n}_{\text{sym}}$, где $A(x,t) = (a_{ij}(x,t))_{i,j=1,\dots,n}$, $K : U_T \to \mathcal{M}^{n\times n}$ и $B : U_T \to \mathbb{R}^n$ — заданные функции. В данном разделе мы предполагаем, что существует константа $c_0 > 0$ такая, что

$$\xi^{\mathrm{T}} A(x,t)\xi \geqslant c_0|\xi|^2 \text{ для всех } (x,t) \in U_T \text{ и всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

Здесь и далее J — интервал с непустой внутренностью в $\mathbb{R}$, а P — функция из $C^1(J,\mathbb{R})$ с производной

$$P' \in C(J, [0,\infty)). \tag{3.2}$$

Для течений жидкости в пористых средах P связано с уравнением состояния (2.21). Однако мы будем рассматривать общие функции P. Из (3.2) ясно, что P — возрастающая функция от J.

Для любого интервала I из $\mathbb{R}$ обозначим через $C^{2,1}_{x,t}(U \times I)$ класс непрерывных функций $u(x,t)$ с непрерывными частными производными $\partial u/\partial t$, $\partial u/\partial x_i$, $\partial^2 u/\partial x_i\partial x_j$ для $i, j = 1\dots, n$.

Рассмотрим нелинейное уравнение (2.22) в форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \langle A(x,t), D^2u\rangle + uB(x,t)\cdot\nabla u + P'(u)(K(x,t)\nabla u)\cdot\nabla u = 0. \tag{3.3}$$

Для изоэнтропических неидеальных потоков газа в случае уравнения (2.18) с $\gamma > 1$ можно использовать

$$J = [0,\infty), \quad P(s) = s^\gamma, \quad K = cK_0, \quad B = -B_0. \tag{3.4}$$

Для потоков идеального газа в случае уравнения (2.19) также можно использовать (3.4) с $\gamma = 1$ для физического $u = \rho$ (плотности), но также можно заменить $J = \mathbb{R}$ на (3.4) для математического u. Таким образом,

$$J = [0,\infty) \text{ или } J = \mathbb{R}, \quad P(s) = s, \quad K = cK_0, \quad B = -B_0. \tag{3.5}$$

Например, для слабосжимаемых жидкостей и уравнения (2.20) мы можем использовать

$$J = (0,\infty), \quad P(s) = \ln s, \quad K = \kappa^{-1}K_0, \quad B = -B_0. \tag{3.6}$$

Явно определим нелинейный оператор L, связанный с левой частью (3.3):

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \langle A(x,t), D^2u\rangle + uB(x,t)\cdot\nabla u + P'(u)(K(x,t)\nabla u)\cdot\nabla u \tag{3.7}$$

для любой функции $u \in C^{2,1}_{x,t}(U_T)$ с областью значений $u(U_T)$, являющейся подмножеством J.

Ниже мы рассматриваем принципы максимума и сильного максимума, связанные с этим нелинейным оператором L.

3.1. Принцип максимума.

Теорема 3.1 (принцип максимума)**.** *Пусть*

$$u \in C(\overline{U_T}) \cap C^{2,1}_{x,t}(U_T), \quad u(U_T) \subset J. \tag{3.8}$$

(i) *Если* $Lu \leqslant 0$ *на* U_T, *тогда*

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u. \tag{3.9}$$

(ii) *Если* $Lu \geqslant 0$ *на* U_T, *тогда*

$$\min_{\overline{U_T}} u = \min_{\Gamma_T} u. \tag{3.10}$$

Доказательство. Определим $\widetilde{b}(x,t) = u(x,t)B(x,t) + P'(u(x,t))K(x,t)\nabla u(x,t)$ и оператор для функции v:

$$\widehat{L}v = \frac{\partial v}{\partial t} - \langle A(x,t), D^2v\rangle + \widetilde{b}(x,t)\cdot\nabla v.$$

Заметим, что $\widehat{L}u = Lu$.

В случае (i) имеем $\widehat{L}u \leqslant 0$, следовательно, по стандартному принципу максимума для линейного оператора $\widehat{L}$ и функции u получаем (3.9).

В случае (ii) имеем $\widehat{L}u \geqslant 0$, следовательно, по стандартному принципу максимума для линейного оператора $\widehat{L}$ и функции u получаем (3.10). □

Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и u — ограниченная функция на S. Обозначим

$$\operatorname*{osc}_S u = \sup_S u - \inf_S u.$$

Следствие 3.1 (осцилляция)**.** *Пусть функция u удовлетворяет условию* (3.8)*. Если* $Lu = 0$ *на* U_T, *то*

$$\operatorname*{osc}_{\overline{U_T}} u = \operatorname*{osc}_{\Gamma_T} u. \tag{3.11}$$

Доказательство. Поскольку $Lu = 0$, мы можем применить как (i), так и (ii) в теореме 3.1. Следовательно, из (3.9) и (3.10) получаем (3.11). □

3.2. Преобразования типа Бернштейна—Коула—Хопфа. Для устранения квадратичных членов градиента введём следующее преобразование типа Бернштейна—Коула—Хопфа.

Для заданной функции u мы определяем оператор $\mathcal{L}$ следующим образом:

$$\mathcal{L}w = \frac{\partial w}{\partial t} - \langle A(x,t), D^2 w\rangle + u(x,t)B(x,t)\cdot\nabla w. \tag{3.12}$$

Заметим, что $\mathcal{L}$ является линейным оператором по w для каждой заданной функции u.

Лемма 3.1. *Пусть u — функция такая, что*

$$u \in C^{2,1}_{x,t}(U_T), \quad u(U_T)\subset J. \tag{3.13}$$

Определим линейный оператор $\mathcal{L}$ с помощью (3.12). Пусть $s_0\in J$. Для $\lambda\in\mathbb{R}$, $C>0$, $C'\in\mathbb{R}$, определим

$$F_\lambda(s) = C\int_{s_0}^{s} e^{\lambda P(z)}dz + C', \quad s\in J. \tag{3.14}$$

(i) *Тогда $F_\lambda \in C^2(J)$, $F'_\lambda>0$ и $\lambda F''_\lambda \geqslant 0$ на J.*

(ii) *Предположим, что существует константа $c_1\geqslant 0$ такая, что*

$$\xi^{\mathrm{T}}K(x,t)\xi \geqslant -c_1|\xi|^2 \quad \text{для всех } (x,t)\in U_T \text{ и всех } \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{3.15}$$

Если $Lu\leqslant 0$ на U_T, то для любых чисел $\lambda\geqslant c_1/c_0$, $C>0$, $C'\in\mathbb{R}$, функция $w=F_\lambda(u)$ удовлетворяет $\mathcal{L}w\leqslant 0$ на U_T.

(iii) *Предположим, что существует константа $c_2\geqslant 0$ такая, что*

$$\xi^{\mathrm{T}}K(x,t)\xi \leqslant c_2|\xi|^2 \quad \text{для всех } (x,t)\in U_T \text{ и всех } \xi\in\mathbb{R}^n. \tag{3.16}$$

Если $Lu\geqslant 0$ на U_T, то для любых чисел $\lambda\leqslant -c_2/c_0$, $C>0$, $C'\in\mathbb{R}$, функция $w=F_\lambda(u)$ удовлетворяет $\mathcal{L}w\geqslant 0$ на U_T.

Доказательство.

(i) Эти факты очевидно следуют из (3.14) и условия (3.2).

Для пунктов (ii) и (iii) находим $w=F(u)$ для функции $F\in C^2(J)$ такой, что

$$F'>0 \text{ на } J. \tag{3.17}$$

Имеем

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = F'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x_i\partial x_j} = F'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F''(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{L}w &= F'(u)\left[\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j} + uB\cdot\nabla u\right] - F''(u)\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} = \\ &= F'(u)\mathcal{L}u - F''(u)(\nabla u)^{\mathrm{T}}A(x,t)\nabla u.\end{aligned}$$

Заметим, что $Lu = \mathcal{L}u + P'(u)(\nabla u)^{\mathrm{T}}K(x,t)\nabla u$. Таким образом,

$$\mathcal{L}w = F'(u)\{Lu - P'(u)(\nabla u)^{\mathrm{T}}K(x,t)\nabla u\} - F''(u)(\nabla u)^{\mathrm{T}}A(x,t)\nabla u. \tag{3.18}$$

(ii) Рассмотрим $Lu\leqslant 0$ на U_T. Тогда из (3.18) следует, что

$$\mathcal{L}w \leqslant -P'(u)F'(u)(\nabla u)^{\mathrm{T}}K(x,t)\nabla u - F''(u)(\nabla u)^{\mathrm{T}}A(x,t)\nabla u.$$

Для $\mathcal{L}w\leqslant 0$ на U_T мы накладываем условие

$$F''(u)\xi^{\mathrm{T}}A(x,t)\xi \geqslant -P'(u)F'(u)\xi^{\mathrm{T}}K(x,t)\xi \quad \forall (x,t)\in U_T, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n. \tag{3.19}$$

Найдём F такое, что

$$F''\geqslant 0 \text{ на } J. \tag{3.20}$$

Это свойство и (3.1), (3.15) влекут для всех $(x,t)\in U_T$ и $\xi\in\mathbb{R}^n$ неравенства

$$F''(u)\xi^{\mathrm{T}}A(x,t)\xi \geqslant c_0F''(u)|\xi|^2, \quad -P'(u)F'(u)\xi^{\mathrm{T}}K(x,t)\xi \leqslant c_1P'(u)F'(u)|\xi|^2.$$

Благодаря этим неравенствам и (3.19) достаточным условием для $\mathcal{L}w \leqslant 0$ на U_T является

$$c_0 F''(s) \geqslant c_1 P'(s) F'(s).$$

Для $\lambda \geqslant c_1/c_0$ указанное выше неравенство будет следовать из уравнения

$$F''(s) = \lambda P'(s) F'(s), \tag{3.21}$$

что даёт решение

$$F'(s) = e^{\lambda \int P'(s)\mathrm{d}s} = Ce^{\lambda P(s)}. \tag{3.22}$$

Здесь мы выбираем $C > 0$ так, чтобы выполнялось условие (3.17). Затем выбираем решение $F = F_\lambda$, как в (3.14). Поскольку (3.17) уже выполнено, уравнение (3.21) и свойство (3.2) влекут за собой второе требование (3.20).

(iii) Рассмотрим $Lu \geqslant 0$ на U_T. Тогда из (3.18) следует, что

$$\mathcal{L}w \geqslant -P'(u)F'(u)(\nabla u)^{\mathrm{T}} K(x,t)\nabla u - F''(u)(\nabla u)^{\mathrm{T}} A(x,t)\nabla u.$$

Благодаря этому неравенству, достаточным условием для $\mathcal{L}w \geqslant 0$ на U_T является

$$F''(u)\xi^{\mathrm{T}} A(x,t)\xi \leqslant -P'(u)F'(u)\xi^{\mathrm{T}} K(x,t)\xi \quad \forall (x,t) \in U_T, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.23}$$

В этом случае мы найдём F такую, что

$$F'' \leqslant 0 \text{ на } J. \tag{3.24}$$

Это, а также (3.1) и (3.16) влекут для всех $(x,t) \in U_T$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ неравенства

$$F''(u)\xi^{\mathrm{T}} A(x,t)\xi \leqslant c_0 F''(u)|\xi|^2, \quad -P'(u)F'(u)\xi^{\mathrm{T}} K(x,t)\xi \geqslant -c_2 P'(u)F'(u)|\xi|^2.$$

Используя эти неравенства и (3.23), запишем достаточное условие для $\mathcal{L}w \geqslant 0$ на U_T:

$$c_0 F''(s) \leqslant -c_2 P'(s) F'(s).$$

При $\lambda \leqslant -c_2/c_0 \leqslant 0$ мы снова решаем уравнение (3.21). Как и в пункте (ii), мы выбираем решение $F = F_\lambda$ в (3.14). Требования (3.17) и (3.24) снова выполняются благодаря (3.22) и (3.21). □

Заметим, что функция F_λ в лемме 3.1 непрерывна и строго возрастает на J.

Пример 3.1. Имеем следующие примеры потоков жидкости.

(a) *Случай изоэнтропических неидеальных потоков газа.* Используя (3.4), мы можем выбрать

$$F_\lambda(s) = \int_0^s e^{\lambda z^\gamma} dz, \quad s \geqslant 0. \tag{3.25}$$

(b) *Случай идеального газа.* Мы используем (3.5) и выберем $s_0 = 0$ в (3.14) для обоих случаев J. При $\lambda = 0$ мы, очевидно, можем выбрать

$$F_\lambda(s) = s, \quad s \in J. \tag{3.26}$$

Для $\lambda \neq 0$ можно выбрать

$$F_\lambda(s) = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda s} \text{ для всех } s \in J \quad \text{или} \quad F_\lambda(s) = \operatorname{sign}(\lambda) e^{\lambda s} \text{ для всех } s \in J. \tag{3.27}$$

(c) *Случай слабосжимаемых жидкостей.* Используем (3.6). При $\lambda \neq -1$ в общем случае из (3.14) получаем, что

$$F_\lambda(s) = C\int_{s_0}^s z^\lambda \mathrm{d}z + C' = \frac{C}{\lambda+1}(s^{\lambda+1} - s_0^{\lambda+1}) + C',$$

и, следовательно, можно выбрать

$$F_\lambda(s) = \frac{s^{\lambda+1}}{\lambda+1} \text{ для всех } s > 0 \quad \text{или} \quad F_\lambda(s) = \operatorname{sign}(\lambda+1) s^{\lambda+1} \text{ для всех } s > 0. \tag{3.28}$$

Для $\lambda = -1$ можно аналогично выбрать

$$F_\lambda(s) = \ln s, \quad s > 0.$$

3.3. Строгий принцип максимума. Предположим дополнительно в этом пункте 3.3, что U связно.

Теорема 3.2. *Предположим, что $A(x,t)$ и $B(x,t)$ ограничены на U_T, а $K(x,t)$ удовлетворяет условию* (3.15) (*соответственно,* (3.16)). *Предположим, что u — функция, удовлетворяющая* (3.13), *ограниченная на U_T и такая, что $Lu \leqslant 0$ (соответственно, $Lu \geqslant 0$) на U_T. Пусть*

$$M = \sup_{U_T} u(x,t) \quad (\textit{соответственно, } m = \inf_{U_T} u(x,t)).$$

Предположим, что существует пара $(x_0,t_0) \in U_T$ такая, что

$$u(x_0,t_0) = M \quad (\textit{соответственно, } u(x_0,t_0) = m). \tag{3.29}$$

Тогда

$$u(x,t) = M \quad (\textit{соответственно, } u(x,t) = m) \quad \textit{для всех } (x,t) \in U_{t_0} = U \times (0,t_0]. \tag{3.30}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}w$ определено по формуле (3.12). Перепишем $\mathcal{L}w$ в виде

$$\mathcal{L}w = w_t - \langle A(x,t), D^2 w\rangle + \widetilde{B}(x,t)\cdot\nabla w, \quad \text{где} \quad \widetilde{B}(x,t) = u(x,t)B(x,t). \tag{3.31}$$

Поскольку и $u(x,t)$, и $B(x,t)$ ограничены на U_T, то $\widetilde{B}(x,t)$ также ограничено на U_T. Обратим внимание, что оператор $\mathcal{L}$ не содержит члена $c(x,t)w$. Ниже мы будем использовать сильный принцип максимума в частной форме [22, гл. 3, теорема 2.3], см. также [22, гл. 3, теорема 2.4].

Часть 1. Рассмотрим $Lu \leqslant 0$ в U_T и соответствующие условия. Из (3.29) следует, что $u(x_0,t_0) = \max\limits_{U_T} u(x,t)$.

Случай $c_1 = 0$. В этом случае $\mathcal{L}u \leqslant Lu \leqslant 0$ на U_T. Можно применить сильный принцип максимума к оператору $\mathcal{L}$ в форме (3.31) и функции $u + |M| + 1$, тогда получим $u = M$ на U_{t_0}. Таким образом, мы получаем первое утверждение из (3.30).

Случай $c_1 > 0$. Пусть $\lambda_1 = c_1/c_0$ и $w = F_{\lambda_1}(u)$ на U_T. По лемме 3.1 (ii), имеем $\mathcal{L}w \leqslant 0$ на U_T и, ввиду роста F_{λ_1},

$$w(x_0,t_0) = F_{\lambda_1}(M) = \max_{U_T} w.$$

Применим сильный принцип максимума к оператору $\mathcal{L}$ и функции $w + |F_{\lambda_1}(M)| + 1$, тогда получим $w = F_{\lambda_1}(M)$ на U_{t_0}. Таким образом, $u = F_{\lambda_1}^{-1}(w) = M$ на U_{t_0}.

Часть 2. Рассмотрим $Lu \geqslant 0$ в U_T и соответствующие условия. Заметим, что $u(x_0,t_0) = \min\limits_{U_T} u(x,t)$.

Случай $c_2 = 0$. Имеем $\mathcal{L}u \geqslant Lu \geqslant 0$ на U_T. Применим сильный принцип максимума к оператору $\mathcal{L}$ и функции $u - |m| - 1$, тогда получим $u = m$ на U_{t_0}. Таким образом, получаем второе утверждение из (3.30).

Случай $c_2 > 0$. Пусть $\lambda_2 = -c_2/c_0$ и $w = F_{\lambda_2}(u)$ на U_T. Доказательство второго утверждения в (3.30) аналогично доказательству случаю $c_1 > 0$ в части 1 выше, с использованием леммы 3.1 (iii) вместо леммы 3.1 (ii) и сильного принципа максимума, применённого к оператору $\mathcal{L}$ и функции $w - |F_{\lambda_2}(m)| - 1$. Опустим подробности. □

4. Начально-краевая задача

Пусть U и Γ — такие же, как в разделе 3. Зафиксируем точку $x_0 \notin \bar{U}$ и положим

$$r_0 = \min\{|x - x_0| : x \in \bar{U}\}, \quad R = \max\{|x - x_0| : x \in \bar{U}\}.$$

Тогда $R > r_0 > 0$.

4.1. Результаты для линейных операторов. Как показано в разделе 3, исследование нелинейной задачи можно свести к исследованию некоторого линейного оператора. Поэтому сначала мы установим некоторые существенные результаты для общего линейного случая.

При условии $T > 0$ пусть U_T и Γ_T будут такими, как в разделе 3.

Предположение 4.1. *Пусть* $A : U_T \to \mathcal{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ *и* $b : U_T \to \mathbb{R}^n$ *таковы, что*

(i) A *удовлетворяет условию* (3.1) *для некоторой константы* $c_0 > 0$;

(ii) *существуют константы* $M_1 > 0$ *и* $M_2 \geqslant 0$ *такие, что*

$$\operatorname{Tr}(A(x,t)) \leqslant M_1, \quad |b(x,t)| \leqslant M_2 \quad \text{для всех } (x,t) \in U_T. \tag{4.1}$$

Определим линейный оператор $\widetilde{L}$ следующим образом:

$$\widetilde{L}w = w_t - \langle A(x,t), D^2 w\rangle + b(x,t)\cdot\nabla w, \quad w \in C^{2,1}_{x,t}(U_T). \tag{4.2}$$

Лемма 4.1 (лемма о росте)**.** *В условиях предположения* 4.1 *положим*

$$\beta = \frac{1}{4c_0}\max\left\{2(M_1 + M_2 R), \frac{R^2}{T}\right\}, \quad T_* = \frac{R^2}{4c_0\beta}, \quad \eta_* = 1 - (r_0/R)^{2\beta}. \tag{4.3}$$

Если $w \in C(\overline{U_T}) \cap C^{2,1}_{x,t}(U_T)$ *удовлетворяет* $\widetilde{L}w \leqslant 0$ *на* U_T *и* $w \leqslant 0$ *на* $\Gamma \times [0,T]$, *то имеем*

$$\max\left\{0, \max_{x\in\bar{U}} w(x,T_*)\right\} \leqslant \eta_* \max\left\{0, \max_{x\in\bar{U}} w(x,0)\right\}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Мы следуем [22, гл. 3, лемма 6.1], а также [16, лемма IV.3]. Значения в (4.3) временно игнорируем.

Шаг 1. Пусть функция $\varphi \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$ такова, что

$$\begin{gathered} 0 < d_0 \leqslant \varphi \leqslant d_1 \quad \text{на } \bar{U}, \\ |\nabla\varphi| \leqslant d_2, \quad \varphi \leqslant c_0|\nabla\varphi|^2, \quad |\langle A, D^2\varphi\rangle| \leqslant d_3 \quad \text{на } U \end{gathered} \tag{4.5}$$

для некоторых положительных чисел d_0, d_1, d_2, d_3. Заметим, что последнее условие в (4.5) выполняется в U_T (из-за свойств матрицы $A(x,t)$). Конкретная функция φ будет построена на 3-м шаге ниже. Определим барьерную функцию W на $\bar{U}\times\mathbb{R}$ следующим образом:

$$W(x,t) = \begin{cases} t^{-\beta} e^{-\frac{\varphi(x)}{t}}, & \text{если } (x,t) \in \bar{U}\times(0,\infty), \\ 0, & \text{если } (x,t) \in \bar{U}\times(-\infty,0], \end{cases}$$

где β — положительное число. В силу оценки снизу на $\varphi(x)$ в (4.5) мы имеем $W \in C(\bar{U}\times\mathbb{R})$. При $t > 0$ получим

$$W_t = -\frac{\beta}{t}W + \frac{\varphi}{t^2}W, \quad W_{x_i} = -\frac{\varphi_{x_i}}{t}W, \quad W_{x_i x_j} = -\frac{\varphi_{x_i x_j}}{t}W + \frac{\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}}{t^2}W$$

и будем иметь на U_T

$$\widetilde{L}W = \frac{W}{t^2}\left\{t(-\beta + \langle A, D^2\varphi\rangle - b\cdot\nabla\varphi) + \varphi - (A\nabla\varphi)\cdot\nabla\varphi\right\}.$$

Нам требуется $\widetilde{L}W \leqslant 0$ на $U\times(0,\infty)$, поэтому накладываем условия

$$\varphi \leqslant (A\nabla\varphi)\cdot\nabla\varphi, \quad \beta \geqslant \langle A, D^2\varphi\rangle - b\cdot\nabla\varphi \quad \text{на } U_T. \tag{4.6}$$

По (3.1), достаточным условием для первого условия в (4.6) является $\varphi \leqslant c_0|\nabla\varphi|^2$ на U_T, что, по сути, выполняется в соответствии с нашим предположением (4.5). Достаточным условием для второго условия в (4.6) является

$$\beta \geqslant |\langle A, D^2\varphi\rangle| + |b||\nabla\varphi| \quad \text{на } U_T. \tag{4.7}$$

Основываясь на (4.1) и (4.5), выберем

$$\beta \geqslant d_3 + M_2 d_2, \tag{4.8}$$

чтобы удовлетворялось (4.7). Итак, для β в (4.8) имеем $\widetilde{L}W \leqslant 0$ на $U\times(0,\infty)$.

Шаг 2. Пусть β удовлетворяет условию (4.8). Положим $M = \max\{0, \max_{\bar U} w(x,0)\}$ и определим $\widetilde{W} = M(1-\eta W)$ на $\bar U \times \mathbb{R}$, где $\eta = (d_0 e/\beta)^\beta > 0$. Тогда $\widetilde{L}\widetilde{W} \geqslant 0$ на $U \times (0,\infty)$. На $\bar U \times \{0\}$ имеем $W(x,0) = 0$ и, следовательно,

$$\widetilde{W}(x,0) = M \geqslant w(x,0) \quad \text{для всех } x \in \bar U. \tag{4.9}$$

Заметим, что при $t > 0$

$$\widetilde{W}(x,t) = M\left(1 - \eta t^{-\beta} e^{-\varphi(x)/t}\right) \geqslant M\left(1 - \eta t^{-\beta} e^{-d_0/t}\right).$$

Элементарные вычисления показывают, что функция $h_0(t) = t^{-\beta} e^{-d_0/t}$ на $(0,\infty)$ достигает максимума при $t_0 = d_0/\beta$ со значением $h_0(t_0) = \eta^{-1}$. Таким образом, на $\bar U \times (0,\infty)$ имеем:

$$\widetilde{W}(x,t) \geqslant M\left(1 - \eta h_0(t_0)\right) = 0.$$

В частности,

$$\widetilde{W} \geqslant w \quad \text{на } \Gamma \times (0,\infty). \tag{4.10}$$

Наложим ещё одно условие:

$$\beta \geqslant d_1/T, \quad T_* = d_1/\beta. \tag{4.11}$$

Тогда $T_* \leqslant T$, имеем $\widetilde{L}(w - \widetilde{W}) \leqslant 0$ на $U \times (0, T_*]$ и, ввиду (4.9), (4.10), $w - \widetilde{W} \leqslant 0$ на параболической границе $U \times (0, T_*]$. Применяя принцип максимума к оператору $\widetilde{L}$ и функции $(w - \widetilde{W})$ на множестве $\bar U \times [0, T_*]$, получаем

$$w \leqslant \widetilde{W} \quad \text{на } \bar U \times [0, T_*]. \tag{4.12}$$

Заметим, что

$$\widetilde{W}(x,t) \leqslant M\left(1 - \eta t^{-\beta} e^{-d_1/t}\right). \tag{4.13}$$

При $t = T_*$, из (4.12) и (4.13) для всех $x \in \bar U$ следует, что

$$w(x,T_*) \leqslant \widetilde{W}(x,T_*) \leqslant M\left[1 - \left(\frac{d_0 e}{\beta}\right)^\beta \left(\frac{d_1}{\beta}\right)^{-\beta} e^{-d_1(\beta/d_1)}\right] = M\left[1 - \left(\frac{d_0}{d_1}\right)^\beta\right] = \eta_* M,$$

где

$$\eta_* = 1 - (d_0/d_1)^\beta \in (0,1). \tag{4.14}$$

Таким образом, мы получаем неравенство (4.4) для T_*, η_* при β, удовлетворяющем условиям (4.8), (4.11), (4.14).

Шаг 3. Выберем функцию $\varphi(x) = \mu|x - x_0|^2$ с числом $\mu > 0$, которое определим позже. Тогда $\mu r_0^2 \leqslant \varphi \leqslant \mu R^2$ на $\bar U$, следовательно, мы выбираем $d_0 = \mu r_0^2$ и $d_1 = \mu R^2$ в (4.5).

Для второго условия в (4.5), поскольку $|\nabla\varphi| = 2\mu|x - x_0| \leqslant 2\mu R$, выберем $d_2 = 2\mu R$.

Третье условие в (4.5) трансформируется в $\mu|x - x_0|^2 \leqslant 4c_0\mu^2|x - x_0|^2$, потому выберем

$$\mu = \frac{1}{4c_0}.$$

Для последнего условия в (4.5) заметим, что $\langle A, D^2\varphi\rangle = 2\mu \mathrm{Tr}(A(x,t))$, и, таким образом, выберем $d_3 = 2\mu M_1$.

При указанных выше значениях μ, d_0, d_1, d_2, d_3 отношения (4.8) и (4.11) трансформируются в

$$\beta \geqslant 2\mu(M_1 + M_2 R) = \frac{2(M_1 + M_2 R)}{4c_0}, \quad \beta \geqslant \frac{\mu R^2}{T} = \frac{R^2}{4c_0 T}, \quad T_* = \frac{\mu R^2}{\beta} = \frac{R^2}{4c_0\beta}. \tag{4.15}$$

Выбранное β в (4.3) удовлетворяет первым двум условиям в (4.15). Кроме того, T_* в (4.15) в точности соответствует заданному в (4.3). Более того, из (4.14) следует, что

$$\eta_* = 1 - (\mu r_0^2/(\mu R^2))^\beta = 1 - (r_0/R)^{2\beta},$$

что является тем же числом, что и в (4.3). Доказательство завершено. $\square$

Ключевым улучшением оценки (4.4) по сравнению с принципом максимума является множитель η_*, принадлежащий интервалу $(0,1)$. Из приведённой выше леммы о росте выведем более конкретные оценки для суб- и суперрешений, а также сами решения для всех времён. Основное внимание уделим убывающим решениям для больших времён, хотя также получим некоторые «оптимальные» оценки для малых времён.

Предположение 4.2. *Пусть $A : U \times (0,\infty) \to \mathcal{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$ и $b : U \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим условиям:*

(i) *существует положительная константа c_0 такая, что*

$$\xi^{\mathrm{T}} A(x,t)\xi \geqslant c_0|\xi|^2 \quad \text{для всех } (x,t) \in U \times (0,\infty) \text{ и всех } \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{4.16}$$

(ii) *$A(x,t)$ и $b(x,t)$ ограничены на $U \times (0,\infty)$.*

В предположении 4.2 определим линейный оператор $\widetilde{L}$ формулой (4.2) для $w \in C^{2,1}_{x,t}(U\times(0,\infty))$. По условию (ii) в предположении 4.2, существуют константы $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ такие, что

$$\operatorname{Tr}(A(x,t)) \leqslant M_1, \quad |b(x,t)| \leqslant M_2 \text{ для всех } (x,t) \in U \times (0,\infty). \tag{4.17}$$

Предложение 4.1. *Пусть предположение 4.2 справедливо, а положительные числа M_1, M_2 заданы как в (4.17). Положим*

$$\begin{gathered} \beta = \frac{1}{2c_0}(M_1 + M_2 R), \quad T_* = \frac{R^2}{4c_0\beta}, \quad \eta_* = 1 - (r_0/R)^{2\beta}, \\ \nu = T_*^{-1}\ln(1/\eta_*), \quad \nu_0 = \frac{R^2}{2c_0}\ln(R/r_0). \end{gathered} \tag{4.18}$$

Пусть $w \in C(\bar{U} \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}_{x,t}(U \times (0,\infty))$.

(i) *Если $\widetilde{L}w \leqslant 0$ на $U \times (0,\infty)$ и $w \leqslant 0$ на $\Gamma \times (0,\infty)$, тогда*

$$\max_{x\in\bar{U}} w(x,t) \leqslant (1 - e^{-\nu_0/t})\max\{0, \max_{x\in\bar{U}} w(x,0)\} \qquad \text{при } 0 < t \leqslant T_*, \tag{4.19}$$

$$\max_{x\in\bar{U}} w(x,t) \leqslant \eta_*^{-1}e^{-\nu t}\max\{0, \max_{x\in\bar{U}} w(x,0)\} \qquad \text{при } t \geqslant 0, \tag{4.20}$$

и, следовательно,

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{x\in\bar{U}} w(x,t) \leqslant 0. \tag{4.21}$$

(ii) *Если $\widetilde{L}w \geqslant 0$ на $U \times (0,\infty)$ и $w \geqslant 0$ на $\Gamma \times (0,\infty)$, тогда*

$$\min_{x\in\bar{U}} w(x,t) \geqslant (1 - e^{-\nu_0/t})\min\{0, \min_{x\in\bar{U}} w(x,0)\} \qquad \text{при } 0 < t \leqslant T_*, \tag{4.22}$$

$$\min_{x\in\bar{U}} w(x,t) \geqslant \eta_*^{-1}e^{-\nu t}\min\{0, \min_{x\in\bar{U}} w(x,0)\} \qquad \text{при } t \geqslant 0, \tag{4.23}$$

и, следовательно,

$$\liminf_{t\to\infty}\min_{x\in\bar{U}} w(x,t) \geqslant 0. \tag{4.24}$$

(iii) *Если $\widetilde{L}w = 0$ на $U \times (0,\infty)$ и $w = 0$ на $\Gamma \times (0,\infty)$, тогда*

$$\max_{x\in\bar{U}} |w(x,t)| \leqslant (1 - e^{-\nu_0/t})\max_{x\in\bar{U}} |w(x,0)| \qquad \text{при } 0 < t \leqslant T_*, \tag{4.25}$$

$$\max_{x\in\bar{U}} |w(x,t)| \leqslant \eta_*^{-1}e^{-\nu t}\max_{x\in\bar{U}} |w(x,0)| \qquad \text{при } t \geqslant 0, \tag{4.26}$$

и, следовательно,

$$\lim_{t\to\infty}\max_{x\in\bar{U}} |w(x,t)| = 0. \tag{4.27}$$

Доказательство. Для любого целого числа $k \geqslant 0$ положим

$$T_k = kT_*, \quad J_k = \max\{0, \max_{x\in\bar{U}} w(x,T_k)\} \geqslant 0.$$

(i) В этом случае $\widetilde{L}w \leqslant 0$ на $U \times (0,\infty)$ и $w \leqslant 0$ на $\Gamma \times [0,\infty)$.

Сначала докажем (4.19). Полагая $t \in (0, T_*]$, применим лемму 4.1 к $T = t$. Переобозначим β, T_*, η_* через β', T'_*, η'_* в (4.3) и, заметив, что

$$t \leqslant T_* = \frac{R^2}{4c_0\beta} = \frac{R^2}{2(M_1 + M_2R)},$$

получим

$$\begin{aligned} \beta' &= \frac{1}{4c_0}\max\left\{2(M_1 + M_2R), \frac{R^2}{t}\right\} = \frac{R^2}{4c_0t}, \\ T'_* &= R^2/(4c_0\beta') = t, \\ \eta'_* &= 1 - (r_0/R)^{R^2/(2c_0t)} = 1 - e^{-\nu_0/t}. \end{aligned}$$

Из (4.4) получаем, что

$$\max_{\bar U} w(x,t) \leqslant \eta'_* \max\{0, \max_{\bar U} w(x,0)\} = (1 - e^{-\nu_0/t})\max\{0, \max_{\bar U} w(x,0)\},$$

что доказывает (4.19).

Далее докажем (4.20). При $k \geqslant 1$ применяем лемму 4.1 к цилиндру $\bar U \times [T_{k-1}, T_k]$, т. е. при $T = T_k - T_{k-1} = T_*$. Снова, используя β', T'_*, η'_* для обозначения β, T_*, η_* в (4.3), получаем

$$\begin{aligned} \beta' &= \max\left\{\frac{M_1 + M_2R}{2c_0}, \frac{R^2}{4c_0T}\right\} = \beta, \\ T'_* &= \frac{R^2}{4c_0\beta'} = \frac{R^2}{4c_0\beta} = T_*, \\ \eta'_* &= 1 - (r_0/R)^{2\beta'} = 1 - (r_0/R)^{2\beta} = \eta_*. \end{aligned}$$

Таким образом, из оценки (4.4) следует, что $J_k \leqslant \eta_* J_{k-1}$. Итерируя это неравенство по k, получаем

$$J_k \leqslant \eta_*^k J_0 \quad \text{для любого } k \geqslant 0. \tag{4.28}$$

Для каждого $t > 0$ пусть $k \geqslant 0$ и $t \in (T_k, T_{k+1}]$. Заметим, что $k+1 \geqslant t/T_*$. Из принципа максимума, неравенства $w \leqslant 0$ на $\Gamma \times (T_{k-1}, T_k]$ и неравенства (4.28) имеем

$$w(x,t) \leqslant J_k \leqslant \eta_*^k J_0 = \eta_*^{-1}\eta_*^{k+1} J_0 \leqslant \eta_*^{-1}\eta_*^{t/T_*} J_0 = \eta_*^{-1} e^{-tT_*^{-1}\ln(1/\eta_*)} J_0.$$

Таким образом,

$$\max_{x\in\bar U} w(x,t) \leqslant \eta_*^{-1} e^{-\nu t} J_0 \quad \text{для любого } t \geqslant 0,$$

что доказывает (4.20). Устремляя t к бесконечности в (4.20), получаем (4.21).

(ii) В этом случае мы можем применить результаты пункта (i), заменив w на $-w$. Тогда из (4.19) и (4.20) следует, что

$$\max_{x\in\bar U}(-w(x,t)) \leqslant (1 - e^{-\nu_0/t})\max\{0, \max_{\bar U}(-w(x,0))\} \quad \text{при } 0 < t \leqslant T_*, \tag{4.29}$$

$$\max_{x\in\bar U}(-w(x,t)) \leqslant \eta_*^{-1} e^{-\nu t}\max\{0, \max_{\bar U}(-w(x,0))\} \quad \text{при } t \geqslant 0, \tag{4.30}$$

что влечёт (4.22) и (4.23) соответственно. Устремляя t к бесконечности в (4.23), получим (4.24).

(iii) Поскольку $\widetilde{L}w = 0$ на $U \times (0,\infty)$ и $w = 0$ на $\Gamma \times (0,\infty)$, мы можем применить результаты обоих пунктов (i) и (ii) выше. Заметим, что

$$|w(x,t)| = \max\{w(x,t), -w(x,t)\} \leqslant \max\{\max_{x\in\bar U} w(x,t), \max_{x\in\bar U}(-w(x,t))\}. \tag{4.31}$$

При $0 < t \leqslant T_*$, объединяя (4.31) с (4.19) и (4.29), и используя тот факт, что

$$\max_{\bar U} w(x,0),\ \max_{\bar U}(-w(x,0)) \leqslant \max_{\bar U}|w(x,0)|, \tag{4.32}$$

получаем (4.25).

При $t \geqslant 0$ объединение (4.31) с (4.20), (4.30) и (4.32) даёт (4.26). Наконец, из (4.26) следует (4.27). □

Замечание 4.1. Заметим, что оценки (4.19), (4.22) и (4.21) для малых времён при $t \to 0^+$ более оптимальны, чем их аналоги для больших времён (4.20), (4.23) и (4.27). Это связано с тем, что множители перед исходными данными сходятся к 1 при $t \to 0^+$, а не к $\eta_*^{-1} > 1$.

4.2. Результаты для нелинейной задачи. Вернёмся к нелинейной задаче.

Предположение 4.3. *Пусть* $A : U \times (0,\infty) \to \mathcal{M}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$, $K : U \times (0,\infty) \to \mathcal{M}^{n\times n}$ *и* $B : U \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ *таковы, что*

(i) $A(x,t)$ *удовлетворяет условию* (4.16);

(ii) $A(x,t)$ *и* $B(x,t)$ *ограничены на* $U \times (0,\infty)$;

(iii) *существуют константы* $c_1 \geqslant 0$ *и* $c_2 \geqslant 0$ *такие, что*

$$-c_1|\xi|^2 \leqslant \xi^{\mathrm{T}} K(x,t)\xi \leqslant c_2|\xi|^2 \text{ для всех } (x,t) \in U \times (0,\infty), \text{ всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4.33}$$

Будем считать предположение 4.3 выполненным до конца этого раздела. Условие (4.33) в предположении 4.3 означает, что K удовлетворяет условиям (3.15) и (3.16) для всех $T > 0$. (В частности, если K ограничено на $U \times (0,\infty)$, то (4.33) заведомо выполняется.) В силу ограниченности B и A на $U \times (0,\infty)$ существуют положительные числа M_0 и M_1 такие, что

$$|B(x,t)| \leqslant M_0 \quad \text{для всех } (x,t) \in U \times (0,\infty), \tag{4.34}$$

$$\mathrm{Tr}(A(x,t)) \leqslant M_1 \quad \text{для всех } (x,t) \in U \times (0,\infty). \tag{4.35}$$

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \langle A, D^2 u\rangle + uB\cdot\nabla u + P'(u)(K\nabla u)\cdot\nabla u = 0 & \text{на } U \times (0,\infty),\\ u(x,t) = u_* & \text{на } \Gamma \times (0,\infty),\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{на } U, \end{cases} \tag{4.36}$$

где u_* — константа, а $u_0(x)$ — заданная функция.

Определим нелинейный оператор L с помощью (3.7) для любой функции $u \in C^{2,1}_{x,t}(U \times (0,\infty))$, причём область значений u является подмножеством J.

Предположим, что $u \in C(\bar U \times [0,\infty)) \cap C^{2,1}_{x,t}(U \times (0,\infty))$ является решением (4.36) и удовлетворяет условию

$$u(x,t) \in J \quad \text{для всех } (x,t) \in U \times (0,\infty), \tag{4.37}$$

Как и в (3.31), мы определяем линейный оператор $\mathcal{L}$ по формуле

$$\mathcal{L}w = w_t - \langle A(x,t), D^2 w\rangle + \widetilde{B}(x,t)\cdot\nabla w, \text{ где } \widetilde{B}(x,t) = u(x,t)B(x,t)$$

для любой функции $w \in C^{2,1}_{x,t}(U \times (0,\infty))$.

В силу непрерывности $u(x,t)$ на $\bar U \times [0,\infty)$ мы должны иметь

$$u(x,0) = u_* \quad \text{при } x \in \Gamma \tag{4.38}$$

и, вместе с требованием (4.37), $u_* \in \bar J$. Кроме того, функция $u_0(x)$ непрерывна при $x \in U$, а $u(x,0)$ является её единственным продолжением до непрерывной функции на $\bar U$. Следовательно, можно сказать, что $u(x,0) = u_0(x)$ на $\bar U$ и $u = u_*$ на $\Gamma \times [0,\infty)$. Обозначим

$$m_* = \min_{x\in\bar U} u(x,0), \qquad M_* = \max_{x\in\bar U} u(x,0).$$

Тогда в силу (4.38) имеем $m_* \leqslant u_* \leqslant M_*$. Поскольку $u(U \times (0,\infty)) \subset J$, то $m_*, M_* \in \bar J$ и, следовательно, отрезок $[m_*, M_*] \subset \bar J$.

Из принципа максимума — теоремы 3.1 — следует, что для всех $T > 0$

$$m_* \leqslant u(x,t) \leqslant M_* \quad \text{на } \bar U \times [0,\infty). \tag{4.39}$$

Если $m_* = M_*$, то, очевидно,

$$u = m_* = u_* = M_* \quad \text{на } \bar U \times [0,\infty). \tag{4.40}$$

По этой причине сейчас мы сосредоточимся на случае $m_* < M_*$. Выберем любую точку $(x_0, t_0) \in U \times (0,\infty)$. Тогда $u(x_0,t_0) \in J \cap [m_*, M_*]$.

Рассмотрим случай $m_* \notin J$. Поскольку m_*, M_* находятся в интервале $\bar J$ и $m_* < M_*$, можно сделать вывод, что m_* не может быть правой конечной точкой J, следовательно, m_* должна быть левой конечной точкой J и $\bar{J}$. Аналогично, если $M_* \notin J$, то M_* должна быть правой конечной точкой J и $\bar{J}$.

Из этих рассуждений получим следующие условия для $m_* < M_*$:

(E1) $M_* \in J$, $m_* \notin J$, правый предел $\lim\limits_{z\to m_*^+} P(z)$ существует и принадлежит $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$,

(E2) $m_* \in J$, $M_* \notin J$, левосторонний предел $\lim\limits_{z\to M_*^-} P(z)$ существует и принадлежит $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

Рассмотрим случай (E1) и $\lambda > 0$. Функцию $e^{\lambda P(z)}$, $z \in J$, можно продолжить до непрерывной функции $E_\lambda : J\cup\{m_*\} \to [0,\infty)$. Любую функцию F_λ из (3.14) можно продолжить до C^1-функции с $J\cup\{m_*\}$ в $\mathbb{R}$, по-прежнему обозначая её F_λ, следующим образом:

$$F_\lambda(s) = C\int\limits_{s_0}^{s} E_\lambda(z)dz + C', \quad s \in J\cup\{m_*\}. \tag{4.41}$$

Рассмотрим случай (E2) и $\lambda < 0$. Аналогичным образом, любую функцию F_λ из (3.14) можно продолжить до C^1-функции с $J\cup\{M_*\}$ в $\mathbb{R}$, по-прежнему обозначая её F_λ:

$$F_\lambda(s) = C\int\limits_{s_0}^{s} E_\lambda(z)dz + C', \quad s \in J\cup\{M_*\}. \tag{4.42}$$

Теорема 4.1. *Пусть* $m_* < M_*$.

(i) *Если* $m_*, M_* \in J$, *то существуют число* $C_0 > 0$, *зависящее от* c_0, c_1, c_2, M_0, M_1, m_*, M_*, *и число* $\nu > 0$, *зависящее от* c_0, M_0, M_1, m_*, M_*, *такие, что*

$$\max_{x\in\bar{U}} |u(x,t) - u_*| \leqslant C_0 e^{-\nu t}\max_{x\in\bar{U}}|u_0(x) - u_*| \quad \text{при } t \geqslant 0. \tag{4.43}$$

(ii) *Предположим, что выполняется либо* $c_1 = 0$, *либо условие* (E1). *Тогда*

$$\limsup_{t\to\infty}\max_{x\in\bar{U}} u(x,t) \leqslant u_*. \tag{4.44}$$

Если, кроме того, $u_* = m_*$, *то*

$$\lim_{t\to\infty}\max_{x\in\bar{U}}|u(x,t) - u_*| = 0. \tag{4.45}$$

(iii) *Предположим, что выполняется либо* $c_2 = 0$, *либо условие* (E2). *Тогда*

$$\liminf_{t\to\infty}\min_{x\in\bar{U}} u(x,t) \geqslant u_*. \tag{4.46}$$

Если, кроме того, $u_* = M_*$, *то имеем* (4.45).

(iv) *Следовательно, если либо*
(a) $c_1 = 0$ *и* (E2), *либо*
(b) $c_2 = 0$ *и* (E1),
то имеет место (4.45).

Доказательство. Из (4.39) получаем $|u(x,t)| \leqslant \max\{|m_*|,|M_*|\}$ для всех $(x,t) \in \bar{U}\times[0,\infty)$. Объединяя это с (4.34), получаем

$$|\widetilde{B}(x,t)| \leqslant M_2 \quad \text{для всех } (x,t)\in U\times(0,\infty), \quad \text{где } M_2 = M_0\max\{|m_*|,|M_*|\}. \tag{4.47}$$

Пусть M_1 и M_2 определены как в (4.35) и (4.47), а s, η_* и ν определены, как в (4.18). Заметим, что последние три числа зависят только от c_0, M_0, M_1, m_*, M_*.

Пусть

$$\lambda_1 > 0 \text{ и } \lambda_2 < 0 \quad \text{таковы, что} \quad \lambda_1 \geqslant c_1/c_0 \text{ и } \lambda_2 \leqslant -c_2/c_0. \tag{4.48}$$

Пусть функции F_{λ_j}, $j = 1,2$, заданы формулой (3.14) при $C = 1$, $C' = 0$ и $\lambda = \lambda_j$. Определим

$$w_j = F_{\lambda_j}(u) \quad \text{на } U\times(0,\infty). \tag{4.49}$$

По лемме 3.1 (ii) и (iii) имеем

$$\mathcal{L}w_1 \leqslant 0, \quad \mathcal{L}w_2 \geqslant 0 \quad \text{на } U\times(0,\infty). \tag{4.50}$$

Ниже, всякий раз, когда мы применяем предложение 4.1 к оператору $\mathcal{L}$, это подразумевает, что $\widetilde{L} = \mathcal{L}$, где $b(x,t) = \widetilde{B}(x,t)$.

(i) Доказательство (4.43) разделим на три шага.

Шаг 1. Поскольку $m_*, M_* \in J$, имеем

$$u(\bar{U} \times [0,\infty)) \subset [m_*, M_*] \subset J. \tag{4.51}$$

Выберем два числа λ_1 и λ_2, удовлетворяющие условию (4.48). В этом случае в силу (4.51) можно продолжить функцию (4.49) до $w_j = F_{\lambda_1}(u)$ на $\bar{U} \times [0,\infty)$, $j = 1,2$. Тогда мы по-прежнему имеем (4.50).

Определим $w_{*,j} = F_{\lambda_j}(u_*)$ и $\bar{w}_j = w_j - w_{*,j}$, $j = 1,2$, на $\bar{U} \times [0,\infty)$. Очевидно, $\bar{w}_j = 0$ на $\Gamma \times [0,\infty)$, $j = 1,2$. Применяя предложение 4.1 (i) к оператору $\mathcal{L}$ и функции $w := \bar{w}_1$, из (4.20) при $t \geqslant 0$ получаем, что

$$\max_{x\in\bar{U}} \bar{w}_1(x,t) \leqslant \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max\{0, \max_{\bar{U}} \bar{w}_1(x,0)\} \leqslant \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |\bar{w}_1(x,0)|. \tag{4.52}$$

Аналогично, применяя предложение 4.1 (ii) к оператору $\mathcal{L}$ и функции $w := \bar{w}_2$, из (4.23) для всех $t \geqslant 0$ следует, что

$$\min_{x\in\bar{U}} \bar{w}_2(x,t) \geqslant \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \min\{0, \min_{\bar{U}} \bar{w}_2(x,0)\} \geqslant -\eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |\bar{w}_2(x,0)|\} \text{ при } t \geqslant 0. \tag{4.53}$$

Шаг 2. Следующий шаг состоит в том, чтобы связать неравенства (4.52) и (4.53) при $u(x,t) - u_*$. Для этого обозначим

$$C_1 = \min\{e^{\lambda_1 P(m_*)}, e^{\lambda_2 P(M_*)}\}, \quad C_2 = \max\{e^{\lambda_1 P(M_*)}, e^{\lambda_2 P(m_*)}\}.$$

Для $j = 1,2$ имеем

$$0 < C_1 \leqslant F'_{\lambda_j}(z) = e^{\lambda_j P(z)} \leqslant C_2 \quad \text{при } z \in [m_*, M_*].$$

Выше мы использовали свойство возрастания P, см. (3.2). Следовательно, для $j = 1,2$

$$C_1|s - u_*| \leqslant |F_{\lambda_j}(s) - F_{\lambda_j}(u_*)| \leqslant C_2|s - u_*| \quad \text{при } z \in [m_*, M_*]. \tag{4.54}$$

Более конкретно, по теореме о среднем значении для $j = 1,2$ имеем:

$$\begin{aligned} &C_1(s - u_*) \leqslant F_{\lambda_j}(s) - F_{\lambda_j}(u_*) \leqslant C_2(s - u_*) \quad \text{при } s \in [u_*, M_*], \\ &C_2(s - u_*) \leqslant F_{\lambda_j}(s) - F_{\lambda_j}(u_*) \leqslant C_1(s - u_*) \quad \text{при } s \in [m_*, u_*). \end{aligned} \tag{4.55}$$

Следовательно, при $j = 1$ из (4.55) для $s \in [m_*, M_*]$ имеем, что

$$s - u_* \leqslant \max\{C_1^{-1}(F_{\lambda_1}(s) - F_{\lambda_1}(u_*)), C_2^{-1}(F_{\lambda_1}(s) - F_{\lambda_1}(u_*))\}. \tag{4.56}$$

При $j = 2$, для $s \in [m_*, M_*]$ имеем:

$$s - u_* \geqslant \min\{C_2^{-1}(F_{\lambda_2}(s) - F_{\lambda_2}(u_*)), C_1^{-1}(F_{\lambda_2}(s) - F_{\lambda_2}(u_*))\}. \tag{4.57}$$

Шаг 3. Теперь, объединяя неравенство (4.56) с оценкой (4.52), получаем для любого $t \geqslant 0$, что

$$\begin{aligned} u(x,t) - u_* &\leqslant \max\{C_1^{-1}(w_1(x,t) - w_{*,1}), C_2^{-1}(w_1(x,t) - w_{*,1})\} \leqslant \\ &\leqslant \max\{C_1^{-1}\eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |w_1(x,0) - w_{*,1}|, C_2^{-1}\eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |w_1(x,0) - w_{*,1}|\} \leqslant \\ &\leqslant C_1^{-1}\eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |w_1(x,0) - w_{*,1}|. \end{aligned}$$

Вместе с (4.54) для оценки последнего максимума это даёт

$$u(x,t) - u_* \leqslant C_1^{-1} C_2 \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |u(x,0) - u_*|. \tag{4.58}$$

Далее, объединяя неравенство (4.57) с оценкой (4.53), получаем

$$\begin{aligned} &u(x,t) - u_* \geqslant \min\{C_2^{-1}(w_2(x,t) - w_{*,2}), C_1^{-1}(w_2(x,t) - w_{*,2})\} \geqslant \\ &\geqslant \min\{-C_2^{-1}\eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |w_2(x,0) - w_{*,2}|, -C_1^{-1}\eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |w_2(x,0) - w_{*,2}|\} \geqslant \\ &\geqslant -C_1^{-1}\eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |w_2(x,0) - w_{*,2}|. \end{aligned}$$

Опять же, отсюда с учётом (4.54) получим

$$u(x,t) - u_* \geqslant -C_1^{-1} C_2 \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |u(x,0) - u_*|. \tag{4.59}$$

Наконец, объединение оценок (4.58) и (4.59) даёт

$$|u(x,t) - u_*| \leqslant C_1^{-1} C_2 \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |u(x,0) - u_*|,$$

что доказывает искомую оценку (4.43).

(ii) Сначала докажем (4.44).

Случай 1: $c_1 = 0$. В этом случае $\mathcal{L}u \leqslant Lu = 0$. Тогда, применяя предложение 4.1 (ii) к оператору $\mathcal{L}$ и функции $w := u - u_*$, получаем (4.44) из (4.21).

Случай 2: $c_1 > 0$ *и выполнено* (E1). Имеем диапазон $u(\bar{U} \times [0, \infty))$, являющийся подмножеством $J \cup \{m_*\}$. Пусть $\lambda_1 = c_1/c_0 > 0$. Используем расширенное определение функции F_{λ_j} на $J \cup \{m_*\}$, заданное формулой (4.41) с $C = 1$, $C' = 0$ и $\lambda = \lambda_1$. Тогда мы можем определить $w_{*,1} = F_{\lambda_1}(u_*)$ и $w_1 = F_{\lambda_1}(u)$, $\bar{w}_1 = w_j - w_{*,1}$ на $\bar{U} \times [0, \infty)$.

Согласно (4.50), имеем $\mathcal{L}\bar{w}_1 \leqslant 0$ на $U \times (0, \infty)$. Согласно предложению 4.1 (i), применённому к оператору $\mathcal{L}$ и функции $\bar{w}_1$, из (4.21) следует, что

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{U}} w_1(x,t) \leqslant w_{*,1}. \tag{4.60}$$

Из возрастания и непрерывности F_{λ_1} по (4.60) следует, что

$$F_{\lambda_1}(u_*) = w_{*,1} \geqslant \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{U}} F_{\lambda_1}(u(x,t)) = \limsup_{t\to\infty} F_{\lambda_1}(\max_{x\in\bar{U}} u(x,t)) = F_{\lambda_1}(\limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{U}} u(x,t)).$$

Поэтому благодаря строгому возрастанию F_{λ_1} имеем

$$u_* \geqslant \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{U}} u(x,t), \tag{4.61}$$

что доказывает (4.44). Это завершает доказательство (4.44).

Теперь рассмотрим $u_* = m_*$. Имеем $u(x,t) \geqslant u_*$, откуда по (4.44) следует, что

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{U}} |u(x,t) - u_*| = \limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{U}} (u(x,t) - u_*) \leqslant 0.$$

Таким образом, получаем (4.45).

(iii) Сначала докажем (4.46).

Случай 1: $c_2 = 0$. В этом случае $\mathcal{L}u \geqslant Lu = 0$. Тогда из (4.24) следует (4.46) после применения предложения 4.1 (iii) к оператору $\mathcal{L}$ и функции $w := u - u_*$.

Случай 2: $c_2 > 0$ *и выполнено* (E2). Доказательство такое же, как в части (ii), случай 2. Действительно, имеем $u(\bar{U} \times [0, \infty)) \subset J \cup \{M_*\}$. Пусть $\lambda_2 = -c_2/c_0 < 0$, а F_{λ_2} — расширенная функция на $J \cup \{M_*\}$, определяемая формулой (4.42) с $C = 1$, $C' = 0$ и $\lambda = \lambda_2$. Определим $w_{*,2} = F_{\lambda_2}(u_*)$ и $w_2 = F_{\lambda_2}(u)$, $\bar{w}_2 = w_j - w_{*,2}$ на $\bar{U} \times [0, \infty)$.

Согласно (4.50), имеем $\mathcal{L}\bar{w}_2 \geqslant 0$ на $U \times (0, \infty)$. Тогда, применяя предложение 4.1 (ii) к оператору $\mathcal{L}$ и функции $\bar{w}_2$, из (4.24) получаем, что

$$\liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{U}} w_2(x,t) \geqslant w_{*,2}. \tag{4.62}$$

Так же, как и в (4.61), из (4.62) имеем, что

$$u_* \leqslant \liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{U}} u(x,t),$$

что доказывает (4.46).

Теперь, когда (4.46) уже установлено, рассмотрим $u_* = M_*$. Из (4.46) следует, что

$$\limsup_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{U}} |u(x,t) - u_*| = -\liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{U}} (-|u(x,t) - u_*|) = -\liminf_{t\to\infty} \min_{x\in\bar{U}} (u(x,t) - u_*) \leqslant 0,$$

следовательно, мы снова получаем (4.45).

(iv) С одной стороны, с учётом (4.31) имеем

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty}\max_{x\in\bar U}|u(x,t)-u_*| &\leqslant \\ &\leqslant \max\{\limsup_{t\to\infty}\max_{x\in\bar U}(u(x,t)-u_*),\limsup_{t\to\infty}\max_{x\in\bar U}(-(u(x,t)-u_*))\} = \\ &= \max\{\limsup_{t\to\infty}\max_{x\in\bar U}(u(x,t)-u_*),-\liminf_{t\to\infty}\min_{x\in\bar U}(u(x,t)-u_*)\}. \quad (4.63)\end{aligned}$$

С другой стороны, в обоих случаях (a) и (b) имеем (4.44) и (4.46). Тогда, объединяя (4.63) с (4.44) и (4.46), получаем (4.45). □

В качестве следствия покажем, что экспоненциальная скорость убывания $|u(x,t)-u_*|$ при $t\to\infty$ зависит только от асимптотического поведения $A(x,t)$ и $B(x,t)$ при $t\to\infty$, но не от начальных данных $u_0(x)$ и матрицы $K(x,t)$.

Следствие 4.1. *В предположении* 4.3 *положим*

$$c_0' = \liminf_{t\to\infty}\inf_{x\in U}\min_{\xi\in\mathbb{R}^n,|\xi|=1}\xi^{\mathrm T}A(x,t)\xi, \tag{4.64}$$

и пусть M_0', M_1' будут двумя положительными числами такими, что

$$\limsup_{t\to\infty}\sup_{x\in U}|B(x,t)| < M_0', \tag{4.65}$$

$$\limsup_{t\to\infty}\sup_{x\in U}\mathrm{Tr}(A(x,t)) < M_1'. \tag{4.66}$$

Если $m_*, M_*\in J$, то существует число $\nu_*>0$, зависящее от u_*, c_0', M_0', M_1', но не от начальных данных $u_0(x)$, такое, что

$$\max_{x\in\bar U}|u(x,t)-u_*| = \mathcal{O}(e^{-\nu_* t}) \quad \text{при } t\to\infty. \tag{4.67}$$

Доказательство. Из (4.43) ясно, что

$$\lim_{t\to\infty}\max_{x\in\bar U}|u(x,t)-u_*| = 0. \tag{4.68}$$

Также заметим, что $u_*\in J$. Согласно (4.64), (4.66), (4.65), (4.68), существуют $T>0$ и $m', M'\in J$, достаточно близкие к u_*, при этом $m'<u_*<M'$, такие, что

$$u(x,t)\in[m',M'] \quad \text{для всех } (x,t)\in\bar U\times[T,\infty),$$

$$|B(x,t)|\leqslant M_0', \quad \mathrm{Tr}(A(x,t))\leqslant M_1' \quad \text{для всех } (x,t)\in U\times[T,\infty),$$

$$\xi^{\mathrm T}A(x,t)\xi \geqslant \frac{c_0'}{2}|\xi|^2 \quad \text{для всех } (x,t)\in U\times[T,\infty),\ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Повторим доказательство теоремы 4.1 (i) при

$$u := u(x,t+T), \quad A := A(x,t+T), \quad B := B(x,t+T), \quad K := K(x,t+T),$$

$$c_0 := c_0'/2, \quad M_0 := M_0', \quad M_1 := M_1', \quad m_* := m', \quad M_* := M'$$

и теми же числами c_1, c_2. Заметим, что доказательство работает с заменами $m_* := m'$ и $M_* := M'$, как указано выше, хотя m' и M' могут не быть минимальным и максимальным значениями $u(x,T)$ в $\bar U$. Пусть $\nu_*=\nu$ задано формулой 4.18, где M_2 заменено на $M_2' = M_0'\max\{|m'|,|M'|\}$, см. (4.47). Тогда ν_* зависит только от чисел $c_0'/2$, M_0', M_1', m', M', и, следовательно, не зависит от $u_0(x)$. Из (4.43) получаем, что

$$|u(x,t+T)-u_*| \leqslant C_* e^{-\nu_* t}\max_{\bar U}|u(x,T)-u_*| \quad \text{для некоторого числа } C_*>0.$$

Таким образом, получаем оценку (4.67). □

Пример 4.1. Используя пример 3.1, рассмотрим случаи (a) с (3.25) и (b) с (3.26), (3.27). Как при $J=[0,\infty)$, так и при $J=\mathbb{R}$ всегда имеем $m_*, M_*\in J$. Следовательно, для любого $u_*\in J=\bar J$ и любого соответствующего решения u из теоремы 4.1 (i) следует оценка (4.43) для всех $t\geqslant 0$.

Пример 4.2. Рассмотрим слабосжимаемые жидкости, как в случае (c) из примера 3.1. Имеем $J = (0,\infty)$, $u \geqslant 0$ на $\bar{U}\times[0,\infty)$ и $M_* \geqslant u_* \geqslant m_* \geqslant 0$. Учитывая (4.39) и $u > 0$ на $U \times (0,\infty)$, имеем $M_* > 0$, т. е. $M_* \in J$. Учитывая (4.40), ниже рассмотрим только $m_* < M_*$.

Случай 1: $u_* > 0$. Рассмотрим два подслучая.

Случай 1a: $m_* > 0$. Тогда $m_*, M_* \in J$ и из теоремы 4.1 (i) следует оценка (4.43) для всех $t \geqslant 0$.

Случай 1b: $m_* = 0$. Тогда выполняется условие (E1). С использованием (4.44) из теоремы 4.1 (ii) следует оценка u для больших времён, которая не зависит от $u_0(x)$. Если, кроме того, $c_2 = 0$, то из теоремы 4.1 (iv)(b) следует предел (4.45).

Случай 2: $u_* = 0$. Тогда $m_* = 0 \notin J$ и выполняется условие (E1). Из теоремы 4.1 (ii) получаем предел (4.45), который запишем как

$$\lim_{t\to\infty} \max_{x\in\bar{U}} u(x,t) = 0. \tag{4.69}$$

Более того, мы можем даже получить оценки убывания для всего времени. Действительно, можно взять $c_1 > 0$, $\lambda_1 = c_1/c_0$ и следовать случаю 2 доказательства теоремы 4.1 (ii). Можно проверить, что $e^{\lambda_1 P(z)}$ при $z > 0$ имеет продолжение $E_{\lambda_1}(z) = z^{\lambda_1}$ при $z \geqslant 0$. Аналогично полученному нами результату (3.28), положив $m = \lambda_1 + 1 = c_1/c_0 + 1$ и выбрав $\lambda = \lambda_1$, $C = m$, $C' = s_0^m$ в формуле (4.41), мы можем использовать явную функцию $F_{\lambda_1}(s) = s^m$ при $s \geqslant 0$. Затем на шаге (4.60) мы используем оценку (4.20) вместо предельного значения (4.21). Получаем при $t \geqslant 0$:

$$\max_{x\in\bar{U}} w_1(x,t) \leqslant \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{x\in\bar{U}} w_1(x,0)$$

что влечёт

$$\max_{x\in\bar{U}} u^m(x,t) \leqslant \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{x\in\bar{U}} u^m(x,0).$$

Поэтому вместо предела (4.69) мы имеем

$$\max_{x\in\bar{U}} u(x,t) \leqslant \eta_*^{-1/m} e^{-\nu t/m} \max_{x\in\bar{U}} u(x,0) \quad \text{для всех } t \geqslant 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aronson D. G.* The porous medium equation// В сб.: «Nonlinear diffusion problems». — Berlin—Heidelberg: Springer, 1986. — С. 1–46. — DOI: 10.1007/BFb0072687.
2. *Aulisa E., Bloshanskaya L., Hoang L., Ibragimov A.* Analysis of generalized Forchheimer flows of compressible fluids in porous media// J. Math. Phys. — 2009. — *50*, № 10. — 103102. — DOI: 10.1063/1.3204977.
3. *Barletta A.* Thermal instability in a horizontal porous channel with horizontal through flow and symmetric wall heat fluxes// Transp. Porous Media. — 2012. — *92*, № 2. — С. 419–437. — DOI: 10.1007/s11242-011-9910-y.
4. *Bear J.* Dynamics of fluids in porous media. — New York: Dover Publications, 1988.
5. *Bernstein S.* Sur les équations du calcul des variations// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. — 1912. — *29*. — С. 431–485.
6. *Celik E., Hoang L.* Maximum estimates for generalized Forchheimer flows in heterogeneous porous media// J. Differ. Equ. — 2017. — *262*, № 3. — С. 2158–2195. — DOI: 10.1016/j.jde.2016.10.043.
7. *Celik E., Hoang L., Ibragimov A., Kieu T.* Fluid flows of mixed regimes in porous media// J. Math. Phys. — 2017. — *58*, № 2. — 023102. — DOI: 10.1063/1.4976195.
8. *Celik E., Hoang L., Kieu T.* Doubly nonlinear parabolic equations for a general class of Forchheimer gas flows in porous media// Nonlinearity. — 2018. — *31*, № 8. — С. 3617–3650. — DOI: 10.1088/1361-6544/aabf05.
9. *Celik E., Hoang L., Kieu T.* Studying a doubly nonlinear model of slightly compressible Forchheimer flows in rotating porous media// Turkish J. Math. — 2023. — *47*, № 3. — С. 949–987. — DOI: 10.55730/1300-0098.340510.55730/1300-0098.3405.
10. *Chadam J., Qin Y.* Spatial decay estimates for flow in a porous medium// SIAM J. Math. Anal. — 1997. — *28*, № 4. — С. 808–830. — DOI: 10.1137/S0036141095290562.
11. *Cole J. D.* On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics// Quart. Appl. Math. — 1951. — *9*. — С. 225–236. — DOI: 10.1090/qam/42889.
12. *Darcy H.* Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. — Paris: Dalmont, 1856.
13. *DiBenedetto E.* Degenerate parabolic equations. — New York: Springer, 1993.

14. *Einstein A.* Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen// Ann. Physik. — 1905. — *322*, № 8. — С. 549–560. — DOI: 10.1002/andp.19053220806.
15. *Hoang L., Ibragimov A.* Structural stability of generalized Forchheimer equations for compressible fluids in porous media// Nonlinearity. — 2011. — *24*, № 1. — С. 1–41. — DOI: 10.1088/0951-7715/24/1/001.
16. *Hoang L. T., Ibragimov A., Kieu T. T.* A family of steady two-phase generalized Forchheimer flows and their linear stability analysis// J. Math. Phys. — 2014. — *55*, № 12. — 123101. — DOI: 10.1063/1.4903002.
17. *Hoang L., Ibragimov A., Kieu T., Sobol Z.* Stability of solutions to generalized Forchheimer equations of any degree// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2015. — *210*, № 4. — С. 476–544. — DOI: 10.1007/s10958-015-2576-1.
18. *Hoang L., Kieu T.* Global estimates for generalized Forchheimer flows of slightly compressible fluids// J. Anal. Math. — 2019. — *137*, № 1. — С. 1–55. — DOI: 10.1007/s11854-018-0064-5.
19. *Hoang L., Kieu T.* Anisotropic flows of Forchheimer-type in porous media and their steady states// Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2025. — *84*. — 104269. — DOI: 10.1016/j.nonrwa.2024.104269.
20. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xx}$// Commun. Pure Appl. Math. — 1950. — *3*, № 3. — С. 201–230. — DOI: 10.1002/cpa.3160030302.
21. *Ladyženskaja O. A., Solonnikov V. A., Ural'ceva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. — Providence: Am. Math. Soc., 1968.
22. *Landis E. M.* Second-order equations of elliptic and parabolic type. — Providence: Am. Math. Soc., 1998.
23. *Muskat M.* The flow of homogeneous fluids through porous media. — New York: McGraw–Hill, 1937.
24. *Payne L. E., Song J. C., Straughan B.* Continuous dependence and convergence results for Brinkman and Forchheimer models with variable viscosity// R. Soc. Lond. Proc. Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci. — 1999. — *455*, № 1986. — С. 2173–2190. — DOI: 10.1098/rspa.1999.0398.
25. *Payne L. E., Straughan B.* Convergence and continuous dependence for the Brinkman—Forchheimer equations// Stud. Appl. Math. — 1999. — *102*, № 4. — С. 419–439. — DOI: 10.1111/1467-9590.00116.
26. *Rubin Y.* Transport in heterogeneous porous media: Prediction and uncertainty// Water Resour. Res. — 1991. — *27*, № 7. — С. 1723–1738. — DOI: 10.1029/91WR00589.
27. *Scheidegger A. E.* The physics of flow through porous media. — Toronto: University of Toronto Press, 1974.
28. *Straughan B.* Stability and wave motion in porous media. — New York: Springer, 2008.
29. *Vázquez J. L.* The porous medium equation. — Oxford: Clarendon Press, 2007.
30. *Wang F., Landau D. P.* Efficient, multiple-range random walk algorithm to calculate the density of states// Phys. Rev. Lett. — 2001. — *86*. — С. 2050–2053. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.2050.

Л. Хоанг
Texas Tech University, Lubbock, USA
E-mail: luan.hoang@ttu.edu, Scopus: 13905538000, ORCID: 0000-0002-8008-4915

А. И. Ибрагимов
Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
E-mail: ilya1sergey@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 3162-9406, РИНЦ AuthorID: 10270, ResearcherID: AFZ-8749-2022, Scopus: 23968895600, ORCID: 0000-0001-6827-8007

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4-663-685
EDN: MJECGF

UDC 517.958, 517.97
Research article

A class of anisotropic diffusion-transport equations in nondivergent form

L. Hoang[1] **and A. I. Ibragimov**[2]

[1] *Texas Tech University, Lubbock, USA*
[2] *Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia*

Abstract. We generalize Einstein's probabilistic method for the Brownian motion to study compressible fluids in porous media. The multi-dimensional case is considered with general probability distribution functions. By relating the expected displacement per unit time with the velocity of the fluid, we derive an anisotropic diffusion equation in non-divergence form that contains a transport term. Under the Darcy law assumption, a corresponding nonlinear partial differential equations for the density function is obtained. The classical solutions of this equation are studied, and the maximum and strong maximum principles are established. We also obtain exponential decay estimates for the solutions for all time, and particularly, their exponential convergence as time tends to infinity. Our analysis uses some transformations of the Bernstein–Cole–Hopf type which are explicitly constructed even for very general equation of state. Moreover, the Lemma of Growth in time is proved and utilized in order to achieve the above decaying estimates.

Keywords: Einstein paradigm, diffusion-transport, fluids in porous media, nonlinearity, partial differential equations non-divergence form, qualitative study, Bernstein–Cole–Hopf, asymptotic analysis

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. A. I. Ibragimov was financially supported within the framework of the state assignment of Oil and Gas Research Institute of the Russian Academy of Sciences (project 122022800272-4).

For citation: L. Hoang, A. I. Ibragimov, "A class of anisotropic diffusion-transport equations in nondivergent form," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. **71**, No. 4, 663–685, DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4-663-685.

REFERENCES

1. D. G. Aronson, "The porous medium equation," In: *Nonlinear diffusion problems*, Springer, Berlin—Heidelberg, 1986, pp. 1–46, DOI: 10.1007/BFb0072687.
2. E. Aulisa, L. Bloshanskaya, L. Hoang, and A. Ibragimov, "Analysis of generalized Forchheimer flows of compressible fluids in porous media," *J. Math. Phys.*, 2009, **50**, No. 10, 103102, DOI: 10.1063/1.3204977.
3. A. Barletta, "Thermal instability in a horizontal porous channel with horizontal through flow and symmetric wall heat fluxes," *Transp. Porous Media*, 2012, **92**, No. 2, 419–437, DOI: 10.1007/s11242-011-9910-y.
4. J. Bear, *Dynamics of fluids in porous media*, Dover Publications, New York, 1988.
5. S. Bernstein, "Sur les équations du calcul des variations," *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 1912, **29**, 431–485.
6. E. Celik and L. Hoang, "Maximum estimates for generalized Forchheimer flows in heterogeneous porous media," *J. Differ. Equ.*, 2017, **262**, No. 3, 2158–2195, DOI: 10.1016/j.jde.2016.10.043.
7. E. Celik, L. Hoang, A. Ibragimov, and T. Kieu, "Fluid flows of mixed regimes in porous media," *J. Math. Phys.*, 2017, **58**, No. 2, 023102, DOI: 10.1063/1.4976195.
8. E. Celik, L. Hoang, and T. Kieu, "Doubly nonlinear parabolic equations for a general class of Forchheimer gas flows in porous media," *Nonlinearity*, 2018, **31**, No. 8, 3617–3650, DOI: 10.1088/1361-6544/aabf05.

9. E. Celik, L. Hoang, and T. Kieu, "Studying a doubly nonlinear model of slightly compressible Forchheimer flows in rotating porous media," *Turkish J. Math.*, 2023, **47**, No. 3, 949–987, DOI: 10.55730/1300-0098.3405.
10. J. Chadam and Y. Qin, "Spatial decay estimates for flow in a porous medium," *SIAM J. Math. Anal.*, 1997, **28**, No. 4, 808–830, DOI: 10.1137/S0036141095290562.
11. J. D. Cole, "On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics," *Quart. Appl. Math.*, 1951, **9**, 225–236, DOI: 10.1090/qam/42889.
12. H. Darcy, *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, Dalmont, Paris, 1856.
13. E. DiBenedetto, *Degenerate parabolic equations*, Springer, New York, 1993.
14. A. Einstein, "Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen," *Ann. Physik*, 1905, **322**, No. 8, 549–560, DOI: 10.1002/andp.19053220806.
15. L. Hoang and A. Ibragimov, "Structural stability of generalized Forchheimer equations for compressible fluids in porous media," *Nonlinearity*, 2011, **24**, No. 1, 1–41, DOI: 10.1088/0951-7715/24/1/001.
16. L. T. Hoang, A. Ibragimov, and T. T. Kieu, "A family of steady two-phase generalized Forchheimer flows and their linear stability analysis," *J. Math. Phys.*, 2014, **55**, No. 12, 123101, DOI: 10.1063/1.4903002.
17. L. Hoang, A. Ibragimov, T. Kieu, and Z. Sobol, "Stability of solutions to generalized Forchheimer equations of any degree," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2015, **210**, No. 4, 476–544, DOI: 10.1007/s10958-015-2576-1.
18. L. Hoang and T. Kieu, "Global estimates for generalized Forchheimer flows of slightly compressible fluids," *J. Anal. Math.*, 2019, **137**, No. 1, 1–55, DOI: 10.1007/s11854-018-0064-5.
19. L. Hoang and T. Kieu, "Anisotropic flows of Forchheimer-type in porous media and their steady states," *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2025, **84**, 104269, DOI: 10.1016/j.nonrwa.2024.104269.
20. E. Hopf, "The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xx}$," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1950, **3**, No. 3, 201–230, DOI: 10.1002/cpa.3160030302.
21. O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Am. Math. Soc., Providence, 1968.
22. E. M. Landis, *Second-order equations of elliptic and parabolic type*, Am. Math. Soc., Providence, 1998.
23. M. Muskat, *The flow of homogeneous fluids through porous media*, McGraw–Hill, New York, 1937.
24. L. E. Payne, J. C. Song, and B. Straughan, "Continuous dependence and convergence results for Brinkman and Forchheimer models with variable viscosity," *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci.*, 1999, **455**, No. 1986, 2173–2190, DOI: 10.1098/rspa.1999.0398.
25. L. E. Payne and B. Straughan, "Convergence and continuous dependence for the Brinkman—Forchheimer equations," *Stud. Appl. Math.*, 1999, **102**, No. 4, 419–439, DOI: 10.1111/1467-9590.00116.
26. Y. Rubin, "Transport in heterogeneous porous media: Prediction and uncertainty," *Water Resour. Res.*, 1991, **27**, No. 7, 1723–1738, DOI: 10.1029/91WR00589.
27. A. E. Scheidegger, *The physics of flow through porous media*, University of Toronto Press, Toronto, 1974.
28. B. Straughan, *Stability and wave motion in porous media*, Springer, New York, 2008.
29. J. L. Vázquez, *The porous medium equation*, Clarendon Press, Oxford, 2007.
30. F. Wang and D. P. Landau, "Efficient, multiple-range random walk algorithm to calculate the density of states," *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **86**, 2050–2053, DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.2050.

Luan Hoang
Texas Tech University, Lubbock, USA
E-mail: `luan.hoang@ttu.edu`, Scopus: 13905538000, ORCID: 0000-0002-8008-4915

Akif Ibragimov
Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: `ilya1sergey@gmail.com`, eLIBRARY SPIN-code: 3162-9406, eLIBRARY AuthorID: 10270, ResearcherID: AFZ-8749-2022, Scopus: 23968895600, ORCID: 0000-0001-6827-8007