Современная математика. Фундаментальные направления. Том 71, № 4 (2025). С. 626–641
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4-626-641
EDN: MEOFVV

УДК 517.9
Научная статья

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ РОСТА ПЕСЧАНЫХ НАСЫПЕЙ В БУНКЕРЕ

Г. Краста, А. Малуса

Sapienza Università di Roma, Рим, Италия

Аннотация. В данной работе обсуждаются некоторые особенности краевой задачи для системы уравнений в частных производных, описывающей рост насыпи песка в контейнере под действием вертикального источника. В частности, характеризуется долговременное поведение профилей поверхности и приводится достаточное условие на вертикальный источник, гарантирующее сходимость к равновесию за конечное время. На контрпримерах показано, что устойчивая конфигурация может не достигаться за конечное время, вообще говоря, даже если источник не зависит от времени. Наконец, дается полная характеристика равновесных профилей поверхности.

Ключевые слова: система уравнений в частных производных, эволюционная задача, песчаная насыпь, профиль поверхности, стационарное решение, сходимость за конечное время.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы были частично поддержаны Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni (GNAMPA) Национального института высшей математики (INDAM). Г. Краста частично поддержан проектом Sapienza—Ateneo 2023 «Долговременная динамика нелинейных систем в неоднородных средах».

Для цитирования: *Г. Краста, А. Малуса.* О дифференциальной модели роста песчаных насыпей в бункере// Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. **71**, № 4. С. 626–641, DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4-626-641.

1. Введение

Со времени работы [12] вариационный подход к изучению растущих песчаных насыпей зарекомендовал себя как эффективный способ описания макроскопического поведения сыпучих материалов. В этих моделях сложная динамика течения сыпучих материалов упрощается путём разделения материала на статический нижний слой (сто́ящий слой), содержащий бо́льшую часть насыпи, и текучий, динамичный верхний слой (скользящий слой). Этот подход особенно эффективен для моделирования эволюции песчаной насыпи по мере добавления нового материала (см. [3, 10]).

Нас интересует эволюция песчаной насыпи, растущей в ограниченном контейнере (бункере) под действием вертикального источника. Контейнер имеет плоское основание $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и вертикальные стенки, высота которых задаётся функцией $\phi\colon \partial\Omega \to [0, +\infty[$. Вертикальный источник, который предполагается не зависящим от времени, моделируется функцией $f\colon \Omega \to [0, +\infty[$. В каждый момент времени $t \geqslant 0$ форма песчаной насыпи (т. е. профиль стоящего слоя) описывается графиком функции $u(t, \cdot)$, где $u\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$. Обозначим через u_0 начальный профиль насыпи. Ключевой особенностью сыпучего материала является существование критического угла наклона, который не может быть превышен стоящим слоем. Далее мы нормализуем критический уклон к единице и, следовательно, накладываем ограничение $|\nabla u| \leqslant 1$ на пространственный градиент u. Толщина слоя скатывания определяется выражением $v\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to [0, +\infty[$, и предполагается, что материал, выбрасываемый источником, скатывается вниз только при попадании в точки с критическим уклоном, т. е. $(1 - |\nabla u|)v = 0$ в $\mathbb{R}^+ \times \Omega$. Когда профиль достигает вершины стенки (т. е. в тех точках $\partial\Omega$, где $u = \phi$), песок, скользящий из слоя скатывания, стекает вниз. Поэтому мы вводим третью переменную в нашей задаче: неотрицательную меру ν на $\partial\Omega$, описывающую количество песка, стекающего в каждой точке границы. Предполагая, что материал катится вдоль направлений наискорейшего спуска, закон сохранения массы можно записать как $\partial_t u - \operatorname{div}(v\, \nabla u) = f - \nu$.

Подводя итог, можно сказать, что для заданного бункера (Ω, ϕ) и вертикального источника f динамика соответствующей растущей насыпи песка описывается триплетом (u, v, ν), удовлетворяющим следующей системе уравнений в частных производных с ограничениями:

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(v\, \nabla u) = f - \nu & \text{в } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ |\nabla u| \leqslant 1,\ v \geqslant 0,\ (1 - |\nabla u|)v = 0 & \text{в } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ 0 \leqslant u(t,x) \leqslant \phi(x) & \forall t \geqslant 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(t,x) = \phi(x) & \text{для } \nu\text{-п.в. } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Точное определение решения задачи (1.1) будет дано в начале раздела 2. Поскольку анализ можно провести в пространстве любой размерности $N \geqslant 1$, в приведенной выше задаче и далее мы будем предполагать, что Ω — открытое ограниченное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$. Более того, для упрощения изложения мы будем предполагать, что $u_0 = 0$, т. е. эволюция начинается с пустого бункера. Тем не менее, мы будем рассматривать возможно ненулевые начальные данные при анализе связанного вариационного неравенства для компоненты u (см. предложение 2.1), что, в свою очередь, будет полезно для изучения стационарных решений задачи (2.2), т. е. решений (u, v, ν) задачи

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(v\, \nabla u) = f - \nu & \text{в } \mathbb{R}^N, \\ |\nabla u| \leqslant 1,\ v \geqslant 0,\ (1 - |\nabla u|)v = 0 & \text{п.в. в } \Omega, \\ 0 \leqslant u \leqslant \phi & \text{на } \partial\Omega, \\ u(x) = \phi(x) & \text{для } \nu\text{-п.в. } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Как мы покажем в разделе 4, указанную выше задачу можно сформулировать и без явного указания граничной меры ν, а только в терминах её носителя Γ_f, который можно явно построить (см. (2.4)). В этом контексте мы можем опираться на хорошо известные результаты, касающиеся явной характеризации решений (см. [2, 4–9]). Более точно, в [2] был рассмотрен случай задачи открытого стола (т. е. $\phi = 0$) с регулярной границей, который впоследствии был обобщён на анизотропный случай в [5, 6] (см. также [7] о применении той же вариационной задачи к макроскопической электродинамике анизотропных жёстких сверхпроводников). В [4] был исследован случай частично открытого контейнера, т. е. $\phi = 0$ на части границы и $\phi = +\infty$ на оставшейся части. В [8] нами была исследована задача о подносе, соответствующая граничным данным ϕ, достигнутым профилем на всей границе. Наконец, общая задача о бункере, рассмотренная в разделе 4, была изучена в [9].

Статья устроенная следующим образом.

В разделе 2 мы формулируем предположения относительно Ω, ϕ и f, которые гарантируют существование решения задачи (1.1) (его N-мерной слабой формулировки), как доказано в [10].

Раздел 3 посвящен асимптотическому поведению формы насыпи. Мы показываем, что решение $u(t,\cdot)$ сходится при $t \to +\infty$ к пределу u_∞ (см. теорему 3.2). После явных вычислений примеров 3.1 и 3.2 мы обсуждаем условия его сходимости за конечное время, формулируя предположение и доказывая результат в этом направлении (см. предположение 3.1 и теорему 3.3).

В разделе 4 мы показываем, что u_∞ является компонентой u стационарного решения задачи (1.1) (см. теорему 4.3). Этот результат, по сути, основан на тщательном анализе стационарной задачи, проведённом в [9].

Обозначения.

- Евклидова норма вектора $\xi \in \mathbb{R}^N$ обозначается как $|\xi|$.
- Для множества $E \subseteq \mathbb{R}^N$ через χ_E обозначим характеристическую функцию E, т. е.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin E. \end{cases}$$

- Для любого $E \subset \mathbb{R}^N$ мы обозначим через $\mathcal{M}(E)$ множество ограниченных борелевских мер, сосредоточенных на E, а через $\mathcal{M}^+(E)$ — множество неотрицательных мер в $\mathcal{M}(E)$.
- Для $\mu \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}(E))$ положим $\mu_t = \mu(t,\cdot)$.
- Для функции $u = u(t,x)$ через $\partial_t u$ и ∇u обозначим соответственно производную по времени и пространственную часть градиента.
- Для любого открытого множества A через $C_c^\infty(A)$ обозначим множество гладких функций с компактным носителем в A, а через $\mathcal{D}'(A)$ — его топологически двойственное, т. е. множество распределений на A.
- $\mathrm{Lip}_1(A)$ — множество липшицевых функций в $\overline{A}$ с константой Липшица 1, т. е.

$$\mathrm{Lip}_1(A) = \left\{u\colon \overline{A} \to \mathbb{R}\colon u(x) - u(y) \leqslant |x-y|,\ \forall x, y \in \overline{A}\right\}.$$

- $L^1_+(A)$ — множество неотрицательных функций из $L^1(A)$.
- Для $f \in L^1_+(A)$ под $\mathrm{supp}(f) \subseteq \overline{A}$ будем понимать существенный носитель f как функции, расширенной в $\mathbb{R}^N$ путём продолжения нулём на $\mathbb{R}^N \setminus A$.

2. Эволюционная задача

Зафиксируем целое число $N \geqslant 1$, а также:

(D1) непустое открытое выпуклое ограниченное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
(D2) полунепрерывную снизу функцию $\phi\colon \partial\Omega \to [0,+\infty[$;
(D3) неотрицательную интегрируемую функцию $f \in L^1_+(\Omega)$.

Введём выпуклое множество допустимых профилей

$$\mathbb{X}_\phi := \left\{u \in \mathrm{Lip}_1(\Omega)\colon u \geqslant 0 \text{ в } \overline{\Omega},\ u \leqslant \phi \text{ на } \partial\Omega\right\}, \tag{2.1}$$

и рассмотрим эволюционную задачу (1.1) с предыдущими данными и начальным профилем $u_0 = 0$. Точнее, будем говорить, что (u, v, ν) является решением системы

$$\begin{cases} \partial_t u - \mathrm{div}(v\,\nabla u) = f - \nu & \text{в } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ |\nabla u| \leqslant 1,\ v \geqslant 0,\ (1-|\nabla u|)v = 0 & \text{в } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ 0 \leqslant u \leqslant \phi & \text{в } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u = \phi & \nu\text{-п.в. в } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0,\cdot) = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

если для каждого $T > 0$

(S1) $u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$, $\partial_t u \in L^2(]0,T[\times\Omega)$, $u(t,\cdot) \in \mathbb{X}_\phi$ для п.в. $t \in [0,T]$;
(S2) $v \in L^\infty(0,T;L^1_+(\Omega))$, $\nu \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\partial\Omega))$;
(S3) $(1-|\nabla u(t,x)|)\,v(t,x) = 0$ для $\mathcal{L}^{N+1}$-п.в. $(t,x) \in]0,T[\times\Omega$;
(S4) $u(0,\cdot) = 0$ в Ω;
(S5) $u(t,x) = \phi(x)$ ν_t-п.в. на $\partial\Omega$, для п.в. $t \in]0,T[$;
(S6) для каждой пробной функции $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ справедливо

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)\varphi(x)\,dx + \int_\Omega v(t,x)\nabla u(t,x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx - \int_{\partial\Omega}\varphi(x)\,d\nu_t(x) \quad \text{в } \mathcal{D}'(0,T).$$

Замечание 2.1. Заметим, что каждая функция $u \in L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ принадлежит также $C([0,T];L^2(\Omega))$ (см. [13, Theorem 7.104]), так что начальное условие $u(0,\cdot) = 0$ (или даже $u(0,\cdot) = u_0 \in \mathbb{X}_\phi$) имеет смысл. Более того, это также означает, что условие $u(t,\cdot) \in \mathbb{X}_\phi$ в (S1) выполняется для всех $t \in [0,T]$.

Решающую роль в описании решения задачи (2.2) играет функция Лакса—Хопфа, связанная с граничными данными ϕ:

$$u_\phi(x) := \min\{\phi(y) + |x-y| \colon y \in \partial\Omega\}, \qquad x \in \overline{\Omega}.$$

Напомним, что u_ϕ — липшицева функция в $\overline{\Omega}$, $|\nabla u_\phi| = 1$ п.в. в Ω, и эта функция является максимальной во множестве $\mathbb{X}_\phi$, определённом в (2.1), т. е.

$$u \leqslant u_\phi \text{ в } \overline{\Omega}, \qquad \forall u \in \mathbb{X}_\phi. \tag{2.3}$$

Замечание 2.2. Если $\phi = 0$ (задача открытого стола в вариационных моделях для растущих песчаных насыпей), то функция Лакса—Хопфа является функцией расстояния от границы Ω.

Для $x \in \Omega$ введём множество $\Pi(x)$ всех проекций x на $\partial\Omega$, т. е.

$$\Pi(x) := \{y \in \partial\Omega \colon u_\phi(x) = \phi(y) + |x-y|\},$$

и границу стока

$$\Gamma_f := \{y \in \partial\Omega \colon \exists x \in \operatorname{supp}(f) \text{ такой, что } y \in \Pi(x)\} = \bigcup_{x \in \operatorname{supp}(f)} \Pi(x). \tag{2.4}$$

Поскольку ϕ — полунепрерывная снизу функция, а носитель $\operatorname{supp}(f)$ компактен, то легко видеть, что Γ_f замкнута.

Следующий результат существования для задачи (2.2) и свойства решений, необходимые в остальной части статьи, были доказаны в [10, Theorem 6.5] (см. также [12]).

Теорема 2.1. *При условиях* (D1)–(D3) *существует решение* (u, v, ν) *уравнения* (2.2). *Более того,*

(i) *u-компонента решения единственна, а $t \mapsto u(t,\cdot)$ — неубывающая функция в $\mathbb{R}^+$;*

(ii) *мера ν_t сосредоточена на Γ_f для п.в. $t \geqslant 0$, и каждому ν соответствует единственная v.*

Замечание 2.3. Фактически, результат в [10] получен в более общей постановке: предполагается, что источник f является неотрицательной ограниченной мерой в Ω, а компонента v, в свою очередь, является неотрицательной ограниченной мерой в Ω. Тем не менее, компоненты (v, ν) получены с помощью двойственности и оптимального переноса, и следовательно, мы можем применить результаты о регулярности для плотностей потока (см. [11, Theorem 4.13] или [14, Theorem 2]) и восстановить абсолютную непрерывность компоненты v относительно меры Лебега в Ω.

Следующий результат, впервые доказанный в [12], а затем подробно описанный в [10, Theorem 4.3] (см. также [1]), показывает, что система уравнений в частных производных (2.2) может рассматриваться как эквивалентное условие первого порядка для задачи ограниченной оптимизации, решаемой относительно компоненты u, таким образом, другие компоненты (v, ν) решения могут пониматься как множители Лагранжа.

Теорема 2.2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *Если (u, v, ν) является решением* (2.2), *то для любого $T > 0$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_\Omega (f(x) - \partial_t u(t,x))\,(w(x) - u(t,x))\,dx \leqslant 0 \qquad \forall w \in \mathbb{X}_\phi \tag{2.5}$$

для п.в. $t \in]0, T[$.

(ii) *Пусть $u \in L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega))$ удовлетворяет условию* (S1), *начальному условию* (S4) *и условию максимальности* (2.5). *Тогда существует (v, ν) такое, что (u, v, ν) является решением уравнения* (2.2).

Замечание 2.4. Используя терминологию выпуклого анализа, при $f \in L^2(\Omega)$ условие максимальности (2.5) можно перефразировать как дифференциальное включение.

В частности, пусть $I \colon L^2(\Omega) \to [0, +\infty]$ обозначает индикаторную функцию выпуклого множества $\mathbb{X}_\phi$, определяемую как

$$I(w) := \begin{cases} 0, & \text{если } w \in \mathbb{X}_\phi, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases}$$

и обозначим через $\partial I(w)$ его субдифференциал в $w \in L^2(\Omega)$.

Тогда вариационное неравенство (2.5) эквивалентно дифференциальному включению

$$f - \partial_t u(t,\cdot) \in \partial I(u(t,\cdot)), \qquad t \geqslant 0.$$

В дальнейшем мы будем говорить, что u удовлетворяет $f - \partial_t u \in \partial I(u(t,\cdot))$, если выполняется условие максимизации (2.5).

Вариационное неравенство (2.5) даёт обширную информацию о свойствах компоненты u решения (например, в теореме 2.1 (i)). Чтобы получить эту информацию, полезно вспомнить следующее правило вывода, доказанное в более общей постановке в [10, Lemma 4.2].

Лемма 2.1. *Пусть* $w \in L^1(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))$ *и* $\partial_t w \in L^2(]0,T[\times\Omega)$. *Тогда*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |w(t,x)|^2\,dx = \int\limits_\Omega w(t,x)\,\partial_t w(t,x)\,dx \qquad \textit{для п.в. } t \in]0,T[.$$

Единственность решения задачи (2.5) с начальными данными $u(0,\cdot) = u_0 \in \mathbb{X}_\phi$ и его монотонность по t являются следствиями следующего принципа сравнения, доказанного в [3, Lemma 3.1] или [10, Proposition 4.1] и справедливого также для источников, зависящих от времени. Поскольку этот результат важен для наших целей, мы приводим набросок его доказательства для полноты изложения.

Предложение 2.1 (принцип сравнения). *Пусть* $f_1, f_2 \in L^\infty(0,T;L^1_+(\Omega))$, $u_0^1, u_0^2 \in \mathbb{X}_\phi$, *при этом* $f_1 \geqslant f_2$ *и* $u_0^1 \geqslant u_0^2$. *Пусть также* u_i, $i = 1,2$, *являются решениями задач*

$$\begin{cases} f_i(t,\cdot) - \partial_t u_i(t,\cdot) \in \partial I(u_i(t,\cdot)) & \textit{для п.в. } t \in]0,T[, \\ u_i(0,\cdot) = u_0^i. \end{cases}$$

Тогда $u_1 \geqslant u_2$ *в* $]0,T[\times\Omega$.

Доказательство. Пусть $u^+(t,x) := \max\{u_1(t,x), u_2(t,x)\}$ и $u^-(t,x) := \min\{u_1(t,x), u_2(t,x)\}$. Заметим, что $u^+, u^- \in \mathbb{X}_\phi$. В силу оптимальности u_1 и u_2, используя соответственно u^+ и u^- в (2.5), получаем, что для п.в. $t \geqslant 0$

$$\int\limits_\Omega (f_1(t,x) - \partial_t u_1(t,x))(u^+(t,x) - u_1(t,x))\,dx \leqslant 0,$$

$$\int\limits_\Omega (f_2(t,x) - \partial_t u_2(t,x))(u^-(t,x) - u_2(t,x))\,dx \leqslant 0.$$

Так как $u^+ - u_1 = (u_2 - u_1)\chi_{\{u_1<u_2\}} = u_2 - u^-$ и $\chi_{\{u_1<u_2\}}\,\partial_t u_2 = \chi_{\{u_1<u_2\}}\,\partial_t u^+$, получаем, что

$$\int\limits_\Omega (f_2(t,x) - \partial_t u^+(t,x))(u_1(t,x) - u^+(t,x))\,dx = \int\limits_\Omega (f_2(t,x) - \partial_t u_2(t,x))(u^-(t,x) - u_2(t,x))\,dx \leqslant 0,$$

так что ввиду $f_2 \geqslant f_1$ по лемме 2.1 имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |u^+(t,x) - u_1(t,x)|^2\,dx = \int\limits_\Omega (\partial_t u^+(t,x) - \partial_t u_1(t,x))(u^+(t,x) - u_1(t,x))\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_\Omega f_2(t,x)(u^+(t,x) - u_1(t,x))\,dx - \int\limits_\Omega f_1(t,x)(u^+(t,x) - u_1(t,x))\,dx \leqslant 0$$

для п.в. $t \geqslant 0$. По замечанию 2.1, $\psi(t) := \|u^+(t) - u_1(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ — непрерывная функция с $\psi(0) = 0$, следовательно, из приведённого выше неравенства следует, что $\psi \equiv 0$, т. е. $u^+(t,\cdot) = u_1(t,\cdot)$ для любого $t \geqslant 0$. $\square$

Теорема 2.3. *Если* $f \in L^\infty(0,T;L^1_+(\Omega))$ *и* $u_0 \in \mathbb{X}_\phi$, *то решение задачи*

$$\begin{cases} f(t,\cdot) - \partial_t u(t,\cdot) \in \partial I(u(t,\cdot)) & \textit{для п.в. } t \in]0,T[, \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

единственно, а $t \mapsto u(t,\cdot)$ *— монотонная неубывающая функция в* $\mathbb{R}^+$.

Доказательство. Единственность решения является прямым следствием принципа сравнения.

Более того, фиксируя $t_0 > 0$ и применяя принцип сравнения к $f_1 = f$, $f_2 \equiv 0$ и $u_0^1 = u_0^2 = u(t_0, x)$, получаем $u(t,x) \geqslant u(t_0, x)$ для $t \geqslant t_0$. $\square$

3. Асимптотическая устойчивость профилей поверхности

Пусть (u, v, ν) — решение уравнения (2.2). Поскольку по теореме 2.2 (i), теореме 2.3 и (2.3) функция $t \mapsto u(t,\cdot)$ монотонно не убывает в $\mathbb{R}^+$ и $0 \leqslant u(t,\cdot) \leqslant u_\phi$ для любого t, то существует предел

$$u_\infty(x) := \lim_{t\to+\infty} u(t,x), \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{3.1}$$

Более того, $u_\infty \in \mathbb{X}_\phi$, ввиду того, что $u(t,\cdot)$ принадлежит $\mathbb{X}_\phi$ для любого $t \geqslant 0$, а сходимость в (3.1) равномерна в $\overline{\Omega}$.

Наша цель — дать явное представление u_∞. В качестве первого шага покажем, что асимптотический профиль максимален там, где источник активен.

Лемма 3.1. *Равенство* $u_\infty(x) = u_\phi(x)$ *справедливо для всех* $x \in \operatorname{supp}(f)$.

Доказательство. Предположим от противного, что существует $x_0 \in \operatorname{supp}(f) \subset \overline{\Omega}$ такое, что $u_\infty(x_0) < u_\phi(x_0)$. Пусть $\delta := (u_\phi(x_0) - u_\infty(x_0))/2$, и пусть $r > 0$ таково, что $u_\phi(x) - u_\infty(x) \geqslant \delta$ для любого $x \in B_r(x_0) \cap \Omega$. Поскольку $f \in L^1_+(\Omega)$ и $x_0 \in \operatorname{supp}(f)$, мы также имеем $\int\limits_{B_r(x_0)\cap\Omega} f\,dx > 0$.

Следовательно, для любого $t \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega f(x)\,(u_\phi(x) - u(t,x))\,dx \geqslant \int\limits_\Omega f\,(u_\phi(x) - u_\infty(x))\,dx \geqslant\\ \geqslant \int\limits_{B_r(x_0)\cap\Omega} f(x)\,(u_\phi(x) - u_\infty(x))\,dx \geqslant \delta \int\limits_{B_r(x_0)\cap\Omega} f(x)\,dx =: \rho > 0, \quad \forall t \geqslant 0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Учитывая $u_\phi \in \mathbb{X}_\phi$ в (2.5), получаем, что

$$\int\limits_\Omega (f(x) - \partial_t u(t,x))(u_\phi(x) - u(t,x))\,dx \leqslant 0.$$

Следовательно, по лемме 2.1 указанное выше неравенство и (3.2) дают

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega |u_\phi(x) - u(t,x)|^2\,dx = -\int\limits_\Omega \partial_t u(t,x)\,(u_\phi(x) - u(t,x))\,dx \leqslant\\ \leqslant -\int\limits_\Omega f(x)\,(u_\phi(x) - u(t,x))\,dx \leqslant -\rho, \quad \forall t \geqslant 0,\end{aligned}$$

что противоречит тому факту, что $t \mapsto \|u_\phi - u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ — неотрицательная непрерывная функция. $\square$

Чтобы продолжить исследование u_∞, которое окажется стационарным решением задачи (см. раздел 4), нам понадобятся некоторые определения.

Определение 3.1. Отрезок $[\![y,x]\!]$ называется *транспортным лучом*, если $y \in \partial\Omega$, $x \in \overline{\Omega}$, $u_\phi(x) = u_\phi(y) + |x - y|$ (т. е. $y \in \Pi(x)$), и $[\![y,x]\!]$ не является собственным подмножеством другого отрезка, удовлетворяющего тем же свойствам. Точки y и x называются соответственно *начальной* и *конечной* точками транспортного луча.

Обозначим через $J \subset \overline{\Omega}$ множество конечных точек транспортных лучей, определяемое соотношением

$$J := \{x \in \overline{\Omega}\colon \exists y \in \partial\Omega \text{ такое, что } [\![y,x]\!] \text{ является транспортным лучом}\}. \tag{3.3}$$

При заданной $f \in L^1_+(\Omega)$ определим функцию

$$u_f(x) := 0 \vee \sup\{u_\phi(x) - |x - z| \colon z \in \operatorname{supp}(f)\}.$$

Наконец, вспоминая определение Γ_f в (2.4), введём множество допустимых профилей, достигающих граничного значения ϕ на Γ_f

$$\mathbb{X}_f := \{u \in \mathbb{X}_\phi \colon u = \phi \text{ на } \Gamma_f\}. \tag{3.4}$$

Основные особенности функции u_f, доказанные в [9, Proposition 5.3 и Theorem 5.5], заключаются в следующем.

Теорема 3.1. *Предположим, что* $f \in L^1_+(\Omega)$, $f \not\equiv 0$. *Тогда справедливы утверждения*:

(i) $u_f \in \mathbb{X}_f$, $u_f = u_\phi$ *на* $\operatorname{supp}(f)$;

(ii) *каждая функция* $u \in \mathbb{X}_f$ *такая, что* $u = u_f$ *на* $\operatorname{supp}(f)$, *удовлетворяет условию* $u_f \leqslant u \leqslant u_\phi$ *на* $\overline{\Omega}$;

(iii) $u_f = u_\phi$ *в* $\overline{\Omega}$ *тогда и только тогда, когда* $J \subseteq \operatorname{supp}(f)$.

Теперь мы готовы доказать, что асимптотический профиль u_∞ на самом деле является u_f.

Теорема 3.2. *При предположениях* (D1)–(D3) (*единственная*) *компонента* u *решения* (2.2) *сходится монотонно и равномерно к функции* u_f *при* $t \to +\infty$.

Доказательство. По лемме 3.1 и теореме 3.1 (i) получаем, что $u_\infty = u_\phi = u_f$ на $\operatorname{supp}(f)$. Следовательно, по теореме 3.1 (ii) также имеем, что

$$u_f \leqslant u_\infty \leqslant u_\phi \text{ в } \Omega. \tag{3.5}$$

Заметим, что u_f является (стационарным) решением (2.5). В частности, поскольку $u_f = u_\phi$ на $\operatorname{supp}(f)$, имеем, что

$$\int\limits_\Omega f(w - u_f)\,dx = \int\limits_{\operatorname{supp}(f)} f(w - u_\phi)\,dx \leqslant 0 \qquad \forall w \in \mathbb{X}_\phi.$$

Следовательно, по принципу сравнения с $f_1 = f_2 = f$, $u_0^1 = u_f$, $u_0^2 = 0$, мы заключаем, что $u(t,x) \leqslant u_f(x)$, $x \in \Omega$, для любого $t \geqslant 0$, так что $u_\infty \leqslant u_f$, что вместе с (3.5) завершает доказательство. □

Замечание 3.1. Внеся небольшие изменения в доказательство, мы можем доказать, что единственное решение $u(t,\cdot)$ для (2.5) с начальными данными $u_0 \in \mathbb{X}_\phi$ сходится монотонно и равномерно к $u_\infty = u_0 \vee u_f$ при $t \to +\infty$.

Поскольку здесь рассматривается источник f, постоянный во времени, можно было бы предположить, что эволюция $u(t,\cdot)$ сходится к u_f за конечное время. Тем не менее, в следующих примерах мы покажем, что в общем случае это неверно.

Пример 3.1. Пусть $\Omega = B_1$ — единичный шар в $\mathbb{R}^N$ с центром в начале координат, $\phi \equiv 0$ и $f(x) = (N + \alpha)|x|^\alpha$, $\alpha > 0$. Поскольку $\operatorname{supp}(f) = \overline{\Omega}$, по теореме 3.1 (iii) и теореме 3.2 (см. также замечание 2.2), предельная функция u_∞ совпадает с функцией расстояния до границы B_1, т. е.

$$u_\infty(x) = u_\phi(x) = 1 - |x|, \qquad x \in B_1.$$

Начиная с $u_0 = 0$, за конечное время $t_\alpha = \dfrac{2^\alpha - 1}{(N+1)\alpha}$ достигаем профиля $u_1(x) = \overline{u}_1(|x|)$, при этом

$$\overline{u}_1(r) := \frac{1}{2} - \left| r - \frac{1}{2} \right|, \qquad r \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Поскольку эволюция при $t \in [0, t_\alpha]$ не существенна для нашего примера, мы опускаем соответствующие вычисления и предполагаем, что начинаем в момент времени $t = 0$ с этого начального профиля u_1. Пусть $\rho \colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ — единственное неотрицательное решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot\rho = -\dfrac{N}{2}\,\rho^\alpha, \\[2mm] \rho(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Для любого $\alpha > 0$ решение является монотонной невозрастающей функцией и сходится к 0 при $t \to +\infty$. Если $\alpha \geqslant 1$, решение строго положительно и строго убывает, а для любого $\alpha \in]0,1[$ существует $\tau_\alpha > 0$ такое, что $\rho(t) > 0$ для $t \in [0, \tau_\alpha[$ и $\rho(t) = 0$ для любого $t \geqslant \tau_\alpha$.

Мы утверждаем, что функция

$$u(t,x) := \begin{cases} 1 - 2\rho(t) + |x|, & \text{если } |x| < \rho(t), \\ 1 - |x|, & \text{если } \rho(t) \leqslant |x| \leqslant 1, \end{cases} \tag{3.8}$$

является решением (2.5) при $u(0,\cdot) = u_1$, и, следовательно, по теореме 2.2 (ii), $u(t,x)$ — это эволюция профиля стоящего слоя при $\phi \equiv 0$ и $f(x) = (N+\alpha)|x|^\alpha$. Очевидно, что $u(t,\cdot)$ сходится к u_ϕ за конечное время τ тогда и только тогда, когда $\rho(t) = 0$ для всех $t \geqslant \tau$. Следовательно, если $\alpha \geqslant 1$, то $u(t,0) < 1 = u_\phi(0)$ для всех $t \geqslant 0$, так что сходимости к u_ϕ за конечное время не наблюдается. Если же $\alpha \in]0,1[$, то источник имеет достаточно массы на каждом малом шаре с центром в начале координат, чтобы заставить решение сходиться к u_ϕ за конечное время τ_α.

Осталось доказать, что для каждого $t \geqslant 0$ и каждого $w \in \mathbb{X}_\phi$ справедливо неравенство

$$K(t) := \int\limits_{B_1} (f(x) - \partial_t u(t,x)) \cdot (w(x) - u(t,x))\, dx \leqslant 0 \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Вычисляя

$$\partial_t u(t,x) = \begin{cases} -2\dot\rho(t) = N\,\rho(t)^\alpha, & \text{если } |x| < \rho(t), \\ 0, & \text{если } \rho(t) < |x| < 1, \end{cases}$$

получаем, что

$$K(t) = \int\limits_{B_{\rho(t)}} ((N+\alpha)|x|^\alpha - N\,\rho(t)^\alpha) \cdot (w(x) - 1 + 2\rho(t) - |x|)\, dx + \int\limits_{B_1 \setminus B_{\rho(t)}} f(x)(w(x) - u_\phi(x))\, dx.$$

Так как $w \leqslant u_\phi$, интеграл в $B_1 \setminus B_{\rho(t)}$ неположителен. Для оценки первого интеграла можно воспользоваться следующим неравенством, учитывающим, что $|\nabla w| \leqslant 1$: положив $\hat x := x/|x|$ для каждого $x \neq 0$, для каждого $\rho_0 \in [0,1]$ имеем неравенство

$$\begin{cases} w(x) \geqslant \widetilde w(x) := w(\rho_0 \hat x) + |x| - \rho_0, & \text{если } 0 < |x| \leqslant \rho_0, \\ w(x) \leqslant \widetilde w(x), & \text{если } \rho_0 \leqslant |x| \leqslant 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Пусть $\rho_0(t) \in [0, \rho(t)]$ определяется как

$$\rho_0(t) := \left(\frac{N}{N+\alpha}\right)^{1/\alpha} \rho(t),$$

так что $(N+\alpha)|x|^\alpha - N\rho(t)^\alpha$ отрицательно, если $|x| < \rho_0(t)$, и положительно, если $|x| > \rho_0(t)$. Следовательно, из (3.9) мы заключаем, что

$$[(N+\alpha)|x|^\alpha - N\,\rho(t)^\alpha] w(x) \leqslant [(N+\alpha)|x|^\alpha - N\,\rho(t)^\alpha] \widetilde w(x) \quad \forall |x| < \rho(t),$$

так что

$$\begin{aligned} K(t) &\leqslant \int\limits_{B_{\rho(t)}} [(N+\alpha)|x|^\alpha - N\,\rho(t)^\alpha] \cdot [\widetilde w(x) - 1 + 2\rho(t) - |x|]\, dx = \\ &= \int\limits_{B_{\rho(t)}} [(N+\alpha)|x|^\alpha - N\,\rho(t)^\alpha] \cdot [w(\rho_0(t)\hat x) - \rho_0(t) - 1 + 2\rho(t)]\, dx = \\ &= N\omega_N [\overline w(\rho_0(t)) - \rho_0(t) - 1 + 2\rho(t)] \int\limits_0^{\rho(t)} [(N+\alpha)r^\alpha - N\,\rho(t)^\alpha]\, r^{N-1}\, dr = 0, \end{aligned}$$

где $\overline w(\rho_0) := \dfrac{1}{N\omega_N} \int\limits_{S^{N-1}} w(\rho_0\,\sigma)\, d\sigma$, что завершает доказательство нашего утверждения.

Построение эволюции, представленное в примере 3.1 выше, может показаться несколько неясным. В частности, следует прояснить роль обыкновенного дифференциального уравнения (3.7). Для этого может быть полезен следующий пример, рассматривающий более общий источник.

Пример 3.2. Рассмотрим ситуацию, аналогичную описанной в примере 3.1, т. е. $\Omega = B_1 \subseteq \mathbb{R}^N$ и $\phi \equiv 0$, но для

$$f(x) = \widetilde{f}(|x|), \quad \widetilde{f}\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ непрерывна, возрастает, и } \widetilde{f}(0) = 0.$$

Предположим, что в момент времени $t = 0$ мы начинаем с профиля u_1, определённого в (3.6).

Мы хотим доказать, что функция $u(t,x)$, определённая в (3.8), является решением (2.5) при подходящем выборе функции $\rho\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$.

Для определения $\rho(t)$ (в частности, для получения обыкновенного дифференциального уравнения, заменяющего (3.7)), проведём следующее рассмотрение, основанное на феноменологии растущих песчаных насыпей: только масса, засыпанная в $B_{\rho(t)}$, будет включена в насыпь, в то время как масса, засыпанная в $B_1 \setminus B_{\rho(t)}$, свободно скатывается вниз, поскольку профиль максимален. Это приводит к дополнительному условию

$$\int\limits_{B_{\rho(t)}} \partial_t u(t,x)\,dx = \int\limits_{B_{\rho(t)}} f(x)\,dx, \qquad t \geqslant 0.$$

Поскольку $\partial_t u(t,x) = -2\dot\rho(t)$, это условие даёт

$$-2\dot\rho(t) = \frac{1}{|B_{\rho(t)}|} \int\limits_{B_{\rho(t)}} f(x)\,dx, \qquad t \geqslant 0. \tag{3.10}$$

При этом предполагается, что среднее значение источника f на шаре $B_{\rho(t)}$, стоящем справа, равно 0, если $\rho(t) = 0$. С учётом начального условия $\rho(0) = 1/2$ соответствующая задача Коши имеет единственное неотрицательное решение $\rho(t)$. Имеются две возможности: либо $\rho(t) > 0$ для всех $t \geqslant 0$, либо существует $\tau > 0$ такое, что $\rho(t) = 0$ для всех $t \geqslant \tau$. Второй случай, соответствующий сходимости за конечное время, имеет место тогда и только тогда, когда

$$\tau := \int\limits_0^{1/2} \frac{|B_\rho|}{\int\limits_{B_\rho} f(x)\,dx}\,d\rho < +\infty. \tag{3.11}$$

Теперь выберем $\rho(t)$, удовлетворяющее (3.10) и такое, что $\rho(0) = 1/2$, и покажем, как в примере 3.1, что функция u, определённая в (3.8), является решением вариационного неравенства (2.5) такого, что $u(0,\cdot) = u_1$, так что u — это профиль растущей песчаной насыпи.

Прежде всего, поскольку f является непрерывной функцией, для каждого $t \geqslant 0$ существует $\rho_0(t) \in [0, \rho(t)]$ такое, что

$$\widetilde{f}(\rho_0(t)) = \frac{1}{|B_{\rho(t)}|} \int\limits_{B_{\rho(t)}} f(x)\,dx. \tag{3.12}$$

Вследствие этого, учитывая (3.10), справедливо равенство

$$\partial_t u(t,x) = -2\dot\rho(t) = \widetilde{f}(\rho_0(t)) \qquad \forall t \geqslant 0.$$

На этом этапе мы можем завершить доказательство, как в примере 3.1: поскольку $\widetilde{f}$ возрастает, то имеем, что

$$\widetilde{f}(r) \leqslant \widetilde{f}(\rho_0(t)), \quad \forall r \in [0, \rho_0(t)], \qquad \widetilde{f}(r) \geqslant \widetilde{f}(\rho_0(t)), \quad \forall r \in [\rho_0(t), \rho(t)],$$

так что для каждого $w \in \mathbb{X}_0$ выполняется

$$\int\limits_{B_1} (f(x) - \partial_t u(t,x))(w(x) - u(t,x))\,dx \leqslant \int\limits_{B_{\rho(t)}} (\widetilde{f}(|x|) - \widetilde{f}(\rho_0(t)))(\widetilde{w}(x) - 1 + 2\rho(t) - |x|)\,dx =$$

$$= N\omega_N[\overline{w}(\rho_0(t)) - \rho_0(t) - 1 + 2\rho(t)] \int\limits_0^{\rho(t)} (\widetilde{f}(r) - \widetilde{f}(\rho_0(t)))\,r^{N-1}\,dr = 0,$$

где $\widetilde{w}$ определено в (3.9), а последнее равенство следует из (3.12).

Подводя итог, можно сказать, что эволюция $u(t,\cdot)$ в (3.8) при ρ, удовлетворяющем (3.10), и $\rho(0) = 1/2$ сходится к $u_\infty = u_\phi$ за конечное время тогда и только тогда, когда выполняется (3.11).

Главное в примерах 3.1 и 3.2 заключается в том, что за единичный промежуток времени к насыпи добавляется лишь стремящаяся к нулю доля (при $t \to +\infty$) массы из источника f, а остальная часть сбрасывается на границе стола. В примере 3.1, когда $\alpha \geqslant 1$, эта бесконечно малая доля не может заполнить максимальный профиль u_ϕ за конечное время. Это происходит из-за того, что источник слишком слаб вблизи множества конечных точек транспортных лучей $J = \{0\}$, что означает, что условие (3.11) не выполняется. В частности,

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{|B_\rho|}{\int_{B_\rho} f(x)\,dx}\,d\rho = \int\limits_0^{1/2} \rho^{-\alpha}\,d\rho = +\infty \qquad \forall \alpha \geqslant 1.$$

Эти соображения приводят нас к следующему утверждению.

Предположение 3.1. *Пусть $f \in L^1_+(\Omega)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{y\in J} \int\limits_0^1 \frac{|B_\rho|}{\int\limits_{B_\rho(y)\cap\Omega} f(x)\,dx}\,d\rho < +\infty. \tag{3.13}$$

Тогда $u(t,\cdot)$ сходится к u_ϕ за конечное время.

Условие сильнее, чем (3.13), но, возможно, проще на практике: существуют $\alpha \in [0,1[$ и константа $c > 0$ такие, что

$$\liminf_{r\searrow 0} \frac{1}{r^{N+\alpha}} \int\limits_{B_r(y)\cap\Omega} f(x)\,dx \geqslant c \qquad \forall y \in J. \tag{3.14}$$

Очевидно, оба условия можно сформулировать и в случае $f \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. Например, (3.14) требует, чтобы нижняя $(N+\alpha)$-мерная плотность меры f, ограниченной на J, была ограничена снизу положительной константой.

Заметим, что если $y \in J$ не принадлежит носителю f, то подынтегральное выражение в (3.13) стремится к $+\infty$ при достаточно малых ρ, следовательно, из (3.13) следует, в частности, что $J \subset \operatorname{supp}(f)$. Согласно теоремам 3.2 и 3.1 (iii), это вложение необходимо и достаточно для сходимости $u(t,\cdot)$ к u_ϕ при $t \to +\infty$.

В следующей теореме мы доказываем достаточное условие сходимости к u_ϕ за конечное время (см. также в [3, Theorem 3.3] аналогичное условие в случае $\phi \equiv 0$). Отметим, что в условиях теоремы 3.3 ниже, условие (3.14) выполняется при $\alpha = 0$ и $c = \varepsilon$.

Теорема 3.3 (сходимость за конечное время)**.** *Пусть $J \subset \overline{\Omega}$ — множество конечных точек транспортных лучей, определённых в* (3.3). *Предположим, что существуют $r > 0$ и $\varepsilon \in]0,r]$ такие, что*

$$f(x) \geqslant \varepsilon \qquad \forall x \in \Omega \cap \bigcup_{y\in J} B_r(y).$$

Тогда $u(t,\cdot)$ сходится к u_ϕ за конечное время.

Доказательство. Пусть $y \in J \cap \Omega$ и $B_r(y) \subset \Omega$. Рассмотрим зависящий от времени источник

$$f_2(t,x) = \begin{cases} \varepsilon(0 \vee (r - |x-y|)), & \text{если } t \in [0, r/\varepsilon], \\ \varepsilon\, \chi_{B_r(y)}, & \text{если } t > r/\varepsilon, \end{cases}$$

а u_2 — решение (2.5), где $f = f_2$ и $u_2(0,\cdot) = 0$. Определим

$$\alpha(t) := u_2(t,y), \quad \underline{u}(t,x) := 0 \vee (\alpha(t) - |x-y|), \qquad x \in \Omega,\ t \geqslant 0.$$

По теореме 2.3, α — непрерывная и неубывающая функция. Пусть $\overline{t} \geqslant r/\varepsilon$ — первый момент времени, такой что $\overline{B}_{\alpha(t)}(y) \cap \partial\Omega \neq \varnothing$. Для $t \in [0, \overline{t}]$ можно проверить, что $u_2(t,x) = \underline{u}(t,x)$ и

$$\alpha(t) = \begin{cases} \varepsilon\, t, & \text{если } t \in [0, r/\varepsilon], \\ \overline{\alpha}(t), & \text{если } t \in [r/\varepsilon, \overline{t}], \end{cases} \tag{3.15}$$

при этом

$$\overline{\alpha}(t) := \left[r^{N+1} + (N+1)\varepsilon r^N \left(t - \frac{r}{\varepsilon}\right)\right]^{\frac{1}{N+1}}, \qquad t \geqslant 0 \tag{3.16}$$

(см. подробное доказательство теоремы 3.3 в [3]). В частности, представление (3.16), если принять как данность, что $u_2 = \underline{u}$ при $t \in [0, \overline{t}]$, можно получить следующим образом. Высоту $\alpha(t)$ конуса можно вычислить, учитывая, что ни одна песчинка не может упасть со стола до момента времени $\overline{t}$, так что должен выполняться следующий баланс масс:

$$\int\limits_{\Omega} f_2(t,x)\, dx = \int\limits_{\Omega} \partial_t u_2(t,x)\, dx. \tag{3.17}$$

Простой расчёт даёт

$$\int\limits_{\Omega} f_2(t,x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{\omega_N \varepsilon\, r^N}{N+1}, & \text{если } t \in [0, r/\varepsilon], \\ \omega_N \varepsilon\, r^N & \text{если } t \in [r/\varepsilon, \overline{t}], \end{cases} \qquad \int\limits_{\Omega} \partial_t u_2(t,x)\, dx = \begin{cases} \dfrac{\omega_N r^N\, \dot{\alpha}(t)}{N+1}, & \text{если } t \in [0, r/\varepsilon], \\ \omega_N \alpha(t)^N\, \dot{\alpha}(t), & \text{если } t \in [r/\varepsilon, \overline{t}], \end{cases}$$

так что (3.15) следует из того, что функция $\overline{\alpha}$, определённая в (3.16), является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\overline{\alpha}(t) = \dfrac{\varepsilon\, r^N}{\alpha(t)^N}, & t \geqslant 0, \\ \overline{\alpha}(r/\varepsilon) = r. \end{cases} \tag{3.18}$$

Для достаточно большого $T > \overline{t}$ пусть $\nu \in L^\infty(0,T; \mathcal{M}^+(\partial\Omega))$ будет мерой, связанной с u_2 посредством теоремы 2.2 (ii), и пусть

$$T(y) := \sup\{t \geqslant \overline{t} \colon \nu_t = 0\}.$$

В силу [10, Theorem 5.4] имеем, что $u_2(t,x) = \underline{u}(t,x)$ при $t \in [0, T(y)]$. (Точнее, теорема 5.4 в [10] была доказана для случая источника f_2, являющегося δ-функцией Дирака относительно y, но при $t \leqslant T(y)$ это решение совпадает с u_2.) В частности, существует $z \in \partial\Omega$ такое, что $\alpha(T(y)) - |z-y| = \phi(z)$. Определим

$$A(t) := \{x \in \Omega \colon \alpha(t) - |x-y| > 0\} \subseteq B_{\alpha(t)}(y), \qquad t \geqslant 0.$$

Поскольку баланс масс (3.17) сохраняется также для $t \in [\overline{t}, T(y)]$, мы заключаем, что

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\omega_N \varepsilon\, r^N}{|A(t)|}, \qquad t \in [r/\varepsilon, T(y)].$$

Заметив, что $|A(t)| \leqslant |B_{\alpha(t)}| = \omega_N \alpha(t)^N$, путём сравнения с решением $\overline{\alpha}$ уравнения (3.18) заключаем, что

$$\alpha(t) \geqslant \overline{\alpha}(t), \qquad \forall t \in [r/\varepsilon, T(y)].$$

Мы утверждаем, что $u_2(T(y), y) = u_\phi(y)$. А именно,

$$u_2(T(y), y) = \alpha(T(y)) = \phi(z) + |z-y| \geqslant u_\phi(y),$$

так что утверждение следует из максимальности u_ϕ.

Из соотношения

$$u_\phi(y) = \alpha(T(y)) \geqslant \overline{\alpha}(T(y))$$

мы приходим к выводу, что

$$T(y) \leqslant \frac{u_\phi(y)^{N+1} + N\,r^{N+1}}{(N+1)\varepsilon\, r^N} \leqslant \tau := \frac{[\min\limits_{\partial\Omega} \phi + \operatorname{diam}(\Omega)]^{N+1} + N\,r^{N+1}}{(N+1)\varepsilon\, r^N}.$$

Наконец, поскольку $f \geqslant \varepsilon$ в трубчатой окрестности J, то $f \geqslant f_2$ и, следовательно, по принципу сравнения и тому факту, что $u(T(y), y) = u_\phi(y)$, получаем, что $u(t, y) = u_\phi(y)$ для любого $t \geqslant \tau$.

Если $y \in J$, но $B_r(y)$ не содержится в Ω, то можно модифицировать приведенное выше доказательство, учитывая, что Ω удовлетворяет равномерному внутреннему условию конуса. Это означает, что существует положительная константа γ такая, что $|B_r(y) \cap \Omega| \geqslant \gamma |B_r(y)|$ для любого $y \in \overline{\Omega}$, и можно доказать, что $\alpha(t) := u_2(t, y) \geqslant \gamma\, \overline{\alpha}(t)$ для $t \in [r/\varepsilon, T(y)]$, так что мы можем получить равномерную оценку сверху для времени $T(y)$, определённого выше.

Следовательно, существует время $\tau' \geqslant \tau$ такое, что $u(t, y) = u_\phi(y)$ для любого $t \geqslant \tau'$ и для любого $y \in J$, так что заключение следует из [9, Theorem 5.5]. $\square$

4. Стационарные решения

В этом разделе мы изучаем стационарные решения (2.2), т. е. решения задачи

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(v\,\nabla u) = f - \nu & \text{в } \mathbb{R}^N, \\ |\nabla u| \leqslant 1,\ v \geqslant 0,\ (1 - |\nabla u|)v = 0 & \text{п.в. в } \Omega, \\ 0 \leqslant u \leqslant \phi & \text{на } \partial\Omega, \\ u(x) = \phi(x) & \text{для } \nu\text{-п.в. } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $f \in L^1_+(\Omega)$ и $\phi\colon \partial\Omega \to [0, +\infty[$ — такие же, как и в предыдущих разделах. Точнее, (u, v, ν) называется *стационарным решением* (4.1), если $u \in \mathbb{X}_\phi$, $v \in L^1_+(\Omega)$, $\nu \in \mathcal{M}^+(\partial\Omega)$ удовлетворяют условиям $(1 - |\nabla u|)v = 0$ п.в. в Ω, $u = \phi$ ν-п.в. на $\partial\Omega$, и

$$\int\limits_\Omega v\,\nabla u \cdot \nabla\psi\,dx = \int\limits_\Omega f\,\psi\,dx - \int\limits_{\partial\Omega} \psi\,d\nu, \qquad \forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{4.2}$$

Сначала напомним стационарную версию теоремы 2.2, доказанную в [10, Theorem 3.2].

Теорема 4.1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *Если* $(u, v, \nu) \in \mathbb{X}_\phi \times L^1_+(\Omega) \times \mathcal{M}^+(\partial\Omega)$ *является решением задачи* (4.1), *то*

$$\int\limits_\Omega f(x)\,(w(x) - u(x))\;dx \leqslant 0 \qquad \forall w \in \mathbb{X}_\phi. \tag{4.3}$$

(ii) *Если* $u \in \mathbb{X}_\phi$ *удовлетворяет условию максимальности* (4.3), *то существует* $(v, \nu) \in L^1_+(\Omega) \times \mathcal{M}^+(\partial\Omega)$ *такое, что* (u, v, ν) *является решением задачи* (4.1).

Теперь докажем, что задачу (4.1) можно переформулировать без какой-либо ссылки на меру $\nu \in \mathcal{M}^+(\partial\Omega)$.

Теорема 4.2 (эквивалентная формулировка для стационарных решений)**.** *Пусть* Ω, ϕ, f *удовлетворяют условиям* (D1), (D2), (D3), *пусть* $\Gamma_f \subset \partial\Omega$ — *множество, определённое в* (2.4), *и пусть* $\mathbb{X}_f \subset W^{1,\infty}(\Omega)$ — *множество, определённое в* (3.4). *Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

(i) *Если* $(u, v, \nu) \in \mathbb{X}_\phi \times L^1_+(\Omega) \times \mathcal{M}^+(\partial\Omega)$ *является решением задачи* (4.1), *то* (u, v) *является решением задачи*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(v\,\nabla u) = f & \textit{в } \Omega, \\ |\nabla u| \leqslant 1,\ v \geqslant 0,\ (1 - |\nabla u|)v = 0 & \textit{п.в. в } \Omega, \\ 0 \leqslant u \leqslant \phi & \textit{на } \partial\Omega, \\ u(x) = \phi(x) & \textit{на } \Gamma_f, \end{cases} \tag{4.4}$$

т. е. $(u,v)\in\mathbb{X}_f\times L^1_+(\Omega)$ *удовлетворяет* $(1-|\nabla u|)v=0$ *п.в. в* Ω *и*

$$\int\limits_\Omega v\,\nabla u\cdot\nabla\psi\,dx=\int\limits_\Omega f\psi\,dx\qquad\forall\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\Gamma_f).\tag{4.5}$$

(ii) *Если* $(u,v)\in\mathbb{X}_f\times L^1_+(\Omega)$ *является решением задачи* (4.4)*, то существует мера* $\nu\in\mathcal{M}^+(\partial\Omega)$ *такая, что* (u,v,ν) *является решением задачи* (4.1).

Прежде чем доказывать теорему 4.2, напомним, что задача существования и единственности решений уравнения (4.4) была подробно проанализирована в [9] в более общем случае выпуклого ограничения на ∇u и для невыпуклой области Ω.

Основные результаты [9], относящиеся к нашей задаче, можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема 4.3. *В условиях теоремы* 4.2 *справедливы утверждения*:

(i) [существование] *Существует единственная* $v_f\in L^1_+(\Omega)$ *такая, что* (u_ϕ,v_f) *является решением задачи* (4.4);

(ii) [единственность v и характеристика u] *Пара* $(u,v)\in\mathbb{X}_f\times L^1_+(\Omega)$ *является решением задачи* (4.4) *тогда и только тогда, когда* $v=v_f$ *и* $u_f\leqslant u\leqslant u_\phi$;

(iii) [единственность] (u_ϕ,v_f) *является единственным решением задачи* (4.4) *тогда и только тогда, когда* $J\subseteq\operatorname{supp}(f)$*, где* $J\subset\overline{\Omega}$ *— множество конечных точек транспортных лучей, определённых в* (3.3).

Доказательство теоремы 4.2.

(i) По теореме 2.1 мы уже знаем, что $\operatorname{supp}(\nu)\subseteq\Gamma_f$, следовательно, $\int\limits_{\partial\Omega}\psi\,d\nu=0$ для любого $\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\Gamma_f)$, так что (4.5) легко следует из (4.2). Осталось доказать, что $u=\phi$ на Γ_f. Поскольку (u,v,ν) является решением (4.1), функция u удовлетворяет условию $\int\limits_\Omega f(w-u)\,dx\leqslant 0$ для любого $w\in\mathbb{X}_\phi$. Выбрав $w=u_\phi$, мы заключаем, что $u=u_\phi$ на $\operatorname{supp}(f)$. Пусть $y\in\Gamma_f$. По определению (2.4) функции Γ_f, существует $x\in\operatorname{supp}(f)$ такой, что $u_\phi(x)=u(x)=\phi(y)+|x-y|$, следовательно, $u(y)\geqslant u(x)-|x-y|\geqslant\phi(y)$. Поскольку $u\leqslant\phi$ на $\partial\Omega$, мы заключаем, что $u(y)=\phi(y)$.

(ii) Пусть $(u,v)\in\mathbb{X}_f\times L^1_+(\Omega)$ удовлетворяет (4.5) и $(1-|\nabla u|)v=0$ п.в. в Ω. По теореме 4.3 (ii) получаем, что $v=v_f$ и $u_f\leqslant u\leqslant u_\phi$. По теореме 3.1 (i) мы также знаем, что $u=u_\phi$ на $\operatorname{supp}(f)$, следовательно,

$$\int\limits_\Omega f(w-u)\,dx=\int\limits_{\operatorname{supp}(f)}f(w-u_\phi)\,dx\leqslant 0\qquad\forall w\in\mathbb{X}_\phi,$$

так что (4.3) выполняется, и заключение следует из теоремы 4.1 (ii). $\square$

Сравнивая информацию об эволюции, предоставленную теоремой 2.1, с информацией о стационарных решениях, предоставленной теоремой 4.3, можно заметить, что в процессе эволюции динамика стоящего слоя единственна, в то время как скатывающийся слой может принимать различные конфигурации. Для стационарных конфигураций стоящий слой может меняться (сохраняя память об исходной конфигурации насыпи), в то время как скатывающийся слой остается фиксированным.

5. Заключение

Мы рассмотрели систему (2.2), описывающую эволюцию насыпи песка в вертикальном бункере под действием внешнего вертикального источника песка, постоянного во времени. В теореме 3.2 мы доказали, что профиль насыпи песка сходится к стационарному решению задачи. В примерах 3.1 и 3.2 мы показали, что, вообще говоря, сходимости за конечное время ожидать не следует. Тем не менее, на основе анализа этих примеров мы сформулировали предположение 3.1 и доказали в теореме 3.3 достаточное условие на источник, гарантирующее сходимость профиля за конечное время. Наконец, в теореме 4.2 мы установили эквивалентную формулировку для стационарных решений, не зависящую от граничной меры ν, встречающейся в исходной формулировке, а в теореме 4.3 мы охарактеризовали все возможные стационарные конфигурации задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bouchitté G., Buttazzo G.* Characterization of optimal shapes and masses through Monge–Kantorovich equation// J. Eur. Math. Soc. — 2001. — *3*. — С. 139–168. — DOI: 10.1007/s100970000027.
2. *Cannarsa P., Cardaliaguet P., Crasta G., Giorgieri E.* A boundary value problem for a PDE model in mass transfer theory: representation of solutions and applications// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2005. — *24*, № 4. — С. 431–457. — DOI: 10.1007/s00526-005-0328-7.
3. *Cannarsa P., Cardaliaguet P., Sinestrari C.* On a differential model for growing sandpiles with non-regular sources// Commun. Part. Differ. Equ. — 2009. — *34*, № 7–9. — С. 656–675. — DOI: 10.1080/03605300902909966.
4. *Crasta G., Finzi Vita S.* An existence result for the sandpile problem on flat tables with walls// Netw. Heterog. Media. — 2008. — *3*, № 4. — С. 815–830. — DOI: 10.3934/nhm.2008.3.815.
5. *Crasta G., Malusa A.* The distance function from the boundary in a Minkowski space// Trans. Am. Math. Soc. — 2007. — *359*, № 12. — С. 5725–5759. — DOI: 10.2307/20161843.
6. *Crasta G., Malusa A.* On a system of partial differential equations of Monge–Kantorovich type// J. Differ. Equ. — 2007. — *235*, № 2. — С. 484–509. — DOI: 10.1016/j.jde.2007.01.010.
7. *Crasta G., Malusa A.* A variational approach to the macroscopic electrodynamics of anisotropic hard superconductors// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2009. — *192*, № 1. — С. 87–115. — DOI: 10.1007/s00205-008-0125-5.
8. *Crasta G., Malusa A.* A nonhomogeneous boundary value problem in mass transfer theory// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2012. — *44*, № 1-2. — С. 61–80. — DOI: 10.1007/s00526-011-0426-7.
9. *Crasta G., Malusa A.* Existence and uniqueness of solutions for a boundary value problem arising from granular matter theory// J. Differ. Equ. — 2015. — *259*, № 8. — С. 3656–3682. — DOI: 10.1016/j.jde.2015.04.032.
10. *De Pascale L., Jimenez C.* Duality theory and optimal transport for sand piles growing in a silos// Adv. Differ. Equ. — 2015. — *20*, № 9-10. — С. 859–886. — DOI: 10.57262/ade/1435064516.
11. *De Pascale L., Pratelli A.* Regularity properties for Monge transport density and for solutions of some shape optimization problem// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2002. — *14*, № 3. — С. 249–274. — DOI: 10.1007/s005260100086.
12. *Prigozhin L.* Variational model of sandpile growth// Eur. J. Appl. Math. — 1996. — *7*. — С. 225–235. — DOI: 10.1017/S0956792500002321.
13. *Salsa S.* Partial differential equations in action. — Milano: Springer, 2009.
14. *Santambrogio F.* Absolute continuity and summability of transport densities: simpler proofs and new estimates// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2009. — *36*, № 3. — С. 343–354. — DOI: 10.1007/s00526-009-0231-8.

Грациано Краста
Sapienza Università di Roma, Рим, Италия
E-mail: `graziano.crasta@uniroma1.it`, ResearcherID: B-4831-2008, Scopus: 6701399771, ORCID: 0000-0003-3673-6549

Аннализа Малуса
Sapienza Università di Roma, Рим, Италия
E-mail: `annalisa.malusa@uniroma1.it`, ResearcherID: G-8227-2012, Scopus: 8931165700, ORCID: 0000-0002-5692-1904

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4-626-641
EDN: MEOFVV

UDC 517.9
Research article

On the differential model of sandpiles growing in a silo

G. Crasta and A. Malusa

Sapienza Università di Roma, Roma, Italy

Abstract. We discuss some features of a boundary value problem for a system of PDEs that describes the growth of a sandpile in a container under the action of a vertical source. In particular, we characterize the long-term behavior of the profiles, and we provide a sufficient condition on the vertical source that guarantees the convergence to the equilibrium in a finite time. We show by counterexamples that a stable configuration may not be reached in a finite time, in general, even if the source is time-independent. Finally, we provide a complete characterization of the equilibrium profiles.

Keywords: system of partial differential equations, evolutionary problem, sandpile, surface profile, stationary solution, convergence in a finite time.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors have been partially supported by the Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni (GNAMPA) of the Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM). G. C. has been partially supported by Sapienza–Ateneo 2023 Project "Long time dynamics of nonlinear systems in non uniform environments".

For citation: G. Crasta, A. Malusa, "On the differential model of sandpiles growing in a silo," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. **71**, No. 4, 626–641, DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4-626-641.

REFERENCES

1. G. Bouchitté and G. Buttazzo, "Characterization of optimal shapes and masses through Monge–Kantorovich equation," *J. Eur. Math. Soc.*, 2001, **3**, 139–168, DOI: 10.1007/s100970000027.
2. P. Cannarsa, P. Cardaliaguet, G. Crasta, and E. Giorgieri, "A boundary value problem for a PDE model in mass transfer theory: representation of solutions and applications," *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2005, **24**, No. 4, 431–457, DOI: 10.1007/s00526-005-0328-7.
3. P. Cannarsa, P. Cardaliaguet, and C. Sinestrari, "On a differential model for growing sandpiles with non-regular sources," *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2009, **34**, No. 7–9, 656–675, DOI: 10.1080/03605300902909966.
4. G. Crasta and S. Finzi Vita, "An existence result for the sandpile problem on flat tables with walls," *Netw. Heterog. Media*, 2008, **3**, No. 4, 815–830, DOI: 10.3934/nhm.2008.3.815.
5. G. Crasta and A. Malusa, "The distance function from the boundary in a Minkowski space," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2007, **359**, No. 12, 5725–5759, DOI: 10.2307/20161843.
6. G. Crasta and A. Malusa, "On a system of partial differential equations of Monge–Kantorovich type," *J. Differ. Equ.*, 2007, **235**, No. 2, 484–509, DOI: 10.1016/j.jde.2007.01.010.
7. G. Crasta and A. Malusa, "A variational approach to the macroscopic electrodynamics of anisotropic hard superconductors," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2009, **192**, No. 1, 87–115, DOI: 10.1007/s00205-008-0125-5.
8. G. Crasta and A. Malusa, "A nonhomogeneous boundary value problem in mass transfer theory," *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2012, **44**, No. 1-2, 61–80, DOI: 10.1007/s00526-011-0426-7.
9. G. Crasta and A. Malusa, "Existence and uniqueness of solutions for a boundary value problem arising from granular matter theory," *J. Differ. Equ.*, 2015, **259**, No. 8, 3656–3682, DOI: 10.1016/j.jde.2015.04.032.

10. L. De Pascale and C. Jimenez, "Duality theory and optimal transport for sand piles growing in a silos," *Adv. Differ. Equ.*, 2015, **20**, No. 9-10, 859–886, DOI: 10.57262/ade/1435064516.
11. L. De Pascale and A. Pratelli, "Regularity properties for Monge transport density and for solutions of some shape optimization problem," *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2002, **14**, No. 3, 249–274, DOI: 10.1007/s005260100086.
12. L. Prigozhin, "Variational model of sandpile growth," *Eur. J. Appl. Math.*, 1996, **7**, 225–235, DOI: 10.1017/S0956792500002321.
13. S. Salsa, *Partial differential equations in action*, Springer, Milano, 2009.
14. F. Santambrogio, "Absolute continuity and summability of transport densities: simpler proofs and new estimates," *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2009, **36**, No. 3, 343–354, DOI: 10.1007/s00526-009-0231-8.

Graziano Crasta
Sapienza Università di Roma, Roma, Italy
E-mail: graziano.crasta@uniroma1.it, ResearcherID: B-4831-2008, Scopus: 6701399771, ORCID: 0000-0003-3673-6549

Annalisa Malusa
Sapienza Università di Roma, Roma, Italy
E-mail: annalisa.malusa@uniroma1.it, ResearcherID: G-8227-2012, Scopus: 8931165700, ORCID: 0000-0002-5692-1904