Современная математика. Фундаментальные направления. Том 71, № 2 (2025). С. 267–274
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-267-274
EDN: MYCMMV

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА—КИПРИЯНОВА ПОТЕНЦИАЛОМ РИССА

**Л. Н. Ляхов**[1,2,3], **В. А. Калитвин**[2,4,5], **М. Г. Лапшина**[2]

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2] *Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия*
[3] *Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия*
[4] *Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Липецкий филиал, Липецк, Россия*
[5] *Финансовый университет при Правительстве РФ, Липецкий филиал, Липецк, Россия*

**Аннотация**. В работе получено представление преобразования Радона—Киприянова классическим потенциалом Рисса. На основе применения преобразования Радона—Киприянова к сингулярному дифференциальному оператору в частных производных получена формула преобразования линейного сингулярного дифференциального оператора в частных производных в обыкновенный (не сингулярный) дифференциальный оператор.

**Ключевые слова:** преобразование Радона—Киприянова, потенциал Рисса, сингулярный дифференциальный оператор, частные производные.

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Работа поддержана фондом РНФ, проект № 24-21-00387.

**Для цитирования:** *Л. Н. Ляхов, В. А. Калитвин, М. Г. Лапшина.* О представлении преобразования Радона—Киприянова потенциалом Рисса// Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. **71**, № 2. С. 267–274. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-267-274

## 1. Введение

Преобразование Радона—Киприянова [4] позволяет существенно расширить представление об устройстве нашего мира. Как показано в работе [9], это преобразование представляет собой введение в преобразование Радона функций, определенных в дробно-размерных (псевдоевклидовых) областях, что позволяет работать с более широкими классами задач по сравнению с классическими задачами математической физики.

Эта работа продолжает исследования, начатые в [11, 15, 16]. Результатом данной работы является представление преобразования Радона—Киприянова потенциалом Рисса (классическим, в отличие от работы [9]). Рассматривается преобразование линейного сингулярного дифференциального уравнения в частных производных в обыкновенное дифференциальное уравнение (не сингулярное). Приводится новая формула (по сравнению с [9]) обращения преобразования Радона—Киприянова. При этом задействовано двойственное преобразование Радона—Киприянова, введенное в [11].

**1.1. Преобразование Радона—Киприянова.** Пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m), \gamma_i > 0$ — мультииндекс и $\mathbb{R}_n^+$ — область в евклидовом пространстве точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, $x_i > 0$.

Будем рассматривать многомерный оператор Пуассона как суперпозицию одномерных операторов

$$\mathscr{P}_x^\gamma = \prod_{i=1}^n \mathscr{P}_{x_i}^{\gamma_i},$$

где

$$\mathscr{P}_{x_i}^\gamma f(x) = C(\gamma) \int\limits_0^\pi f(x_i \cos\alpha_i,\ x^i)\ \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i\ d\alpha_i, \quad C(\gamma) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\gamma_i}{2})}.$$

Здесь для удобства мы воспользовались перестановкой координат аргумента: $x = (x_i, x^i)$, $x^i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

При $\gamma_i = 0$ одномерный оператор Пуассона не определен, а это значит, что в общем случае переменные должны разделяться на весовые и обычные. В этой работе рассмотрим наиболее принципиальный случай, когда $\gamma_i > 0,\ i = (\overline{1,n})$.

Пусть $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ — подпространство пространства пробных функций Л. Шварца $\{\varphi\}$, состоящее из функций, четных по каждой координате $x_i$ аргумента $x$. Соответствующий класс регулярных весовых распределений ${S'}_{ev}$ определяется весовой билинейной формой

$$(f, \varphi)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\ \varphi(x)\ x^\gamma dx, \quad x^\gamma dx = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i} dx, \quad \forall\varphi \in S_{ev}.$$

Через посредство оператора Пуассона введем в пространстве распределений $S'_{ev}$ весовую обобщенную $\delta$-функцию, сосредоточенную на поверхности $P(x) = 0$, $x \in \overline{\mathbb{R}_n^+}$ (как правило, размерности $n-1$):

$$(\mathscr{P}_x \delta(P(x)), \varphi)_\gamma = C(\gamma) \int\limits_{\Gamma = \{z:\ P(z)=0\}} \widetilde{\varphi}(z)\ Z_2^{\gamma - 1}\ d\Gamma(z), \quad Z_2^{\gamma-1} = \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i - 1}, \tag{1.1}$$

где $C(\gamma)$ — константа, нормирующая многомерный оператор Пуассона,

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_{2n-1}, z_{2n}), \quad \widetilde{\varphi}(z) = \varphi\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \ldots, \sqrt{z_{2n-1}^2 + z_{2n}^2}\right),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{2i-1} = x_i \cos\alpha_i, \\ z_{2i} = x_i \sin\alpha_i, \end{array} \right. \quad \Bigg| \quad 0 < \alpha_i < \pi, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

где $-\infty < z_{2i-1} < \infty,\ \ 0 < z_{2i} < \infty$.

Переменные с четными и нечетными номерами координат вектора $z$ будем обозначать отдельно друг от друга:

$$Z_1 = (z_1, z_3, \ldots, z_{2n-1}), \quad Z_2 = (z_2, z_4, \ldots, z_{2n}).$$

Поверхность интегрирования в (1.1), полученную отображением через посредство оператора Пуассона, будем называть $\mathscr{P}(P(x) = 0)$-*поверхностью* ($\mathscr{P}$-*поверхностью*). Заметим, что если бы первоначально поверхность $P(x) = 0$ была бы $n$-полусферой $|x| - R = 0$, $x_i > 0$, то $\mathscr{P}$-сфера — уже $2n$-полусфера $|z| = R$ в $\mathbb{R}_{2n}^+ = \{z:\ z_{2i} > 0\}$.

Пусть $\langle x, \theta\rangle = \sum\limits_i x_i\theta_i$ и $p = \langle x, \theta\rangle$ — нормальная плоскость в $\mathbb{R}_n$. Тогда соответствующая $\mathscr{P}$-плоскость:

$$\{x \in \mathbb{R}_n^+ : \langle x, \theta\rangle = p\} \overset{def(1)}{\longrightarrow} \{z \in \mathbb{R}_{2n}^+ :\ \langle z, \Theta\rangle = p\}, \qquad \Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, 0, \theta_3 \ldots, 0, \theta_n, 0). \tag{1.3}$$

Мы следуем классическому определению преобразования Радона (см. например, [1, с. 16] и [14, с. 20, формула (1.3)]).

*Преобразование Радона—Киприянова* (введено в работах [4, 9]; см. также книги [10, с. 211–225] и [2, с. 483–495]) определяется следующим образом:

$$K_\gamma[f](\theta;p) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\mathscr{P}_x^\gamma \delta(p - \langle x;\theta\rangle)\ x^\gamma dx. \tag{1.4}$$

По определению (1.1) формула (1.4) примет вид

$$K_\gamma[f](\Theta;p) = C(\gamma) \int\limits_{\Gamma=\{z:\ p=\langle z,\Theta\rangle\}^+} \widetilde{f}(z)\ Z_2^{\gamma-1}\ d\Gamma(z). \tag{1.5}$$

Здесь

$$\{z : p = \langle z,\, \Theta\rangle\}^+ = \{z : p = \langle z,\, \Theta\rangle,\ z_{2i} > 0\}, \qquad \widetilde{f}(z) = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \dots, \sqrt{z_{2n-1}^2 + z_{2n}^2}\right).$$

Так как интегрирование в (1.4) и (1.5) определено по $2n$ переменным, а координаты векторов $\theta \in \mathbb{R}_n^+$ и $\Theta \in \mathbb{R}_{2n}^+$ связаны трансформацией (1.3), то определения преобразований (1.4) и (1.5) совпадают:

$$K_\gamma[f](\theta;p) = K_\gamma[f](\Theta;p). \tag{1.6}$$

Обычно определение (1.5) носит вспомогательный характер. В нашей работе это будет основное определение Радона—Киприянова.

Таким образом, правая часть равенства (1.6) представляет собой *специальное весовое преобразование Радона* в $\mathbb{R}_{2n}$ (см. [4, 9]), которое представляется в классическом виде

$$K_\gamma[f](\theta;p) = C(\gamma) \int\limits_{\mathbb{R}_{2n}^+} \widetilde{f}(z)\ \delta(p - \langle z,\Theta\rangle)\ Z_2^{\gamma-1} dz = C(\gamma) \int\limits_{\{p=\langle z,\,\Theta\rangle\}^+} \widetilde{f}(z)\ Z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z). \tag{1.7}$$

Правая часть равенства (1.7) представляет собой многомерное смешанное специальное преобразование Радона (по нечетным переменным $Z_1$) и преобразование Меллина (по четным переменным $Z_2$).

Если вектор $\theta$ фиксирован, то введем обозначение

$$K_\gamma[f](\theta;p) = K_{\gamma,\theta}[f](p) \iff K_\gamma[f](\Theta;p) = K_{\gamma,\Theta}[f](p) \stackrel{(5)}{\Longrightarrow} K_{\gamma,\theta}[f](p) = K_{\gamma,\Theta}[f](p).$$

В (1.7) $n$-полуплоскость интегрирования обозначим символом $\Theta_\perp^+$, т. е.

$$\Theta_\perp^+ = \{z\colon \langle\Theta, z\rangle = p,\ z_{2i} \geqslant 0\} \in \overline{\mathbb{R}_{2n}^+}.$$

Применяя подход, рассмотренный в [14, с. 17], преобразование Радона—Киприянова можно записать в виде интеграла по $2n$-полуплоскости $\Theta_\perp^+$ в пространстве $\mathbb{R}_{2n}^+$ :

$$K_{\gamma,\Theta}[f](p) = C(\gamma) \int\limits_{\Theta_\perp^+} \widetilde{f}(p\Theta + z) Z_2^{\gamma-1}\ dz.$$

**1.2. Оператор, двойственный к преобразованию Радона—Киприянова.** Двойственный оператор по отношению к преобразованию Радона—Киприянова в $\mathbb{R}_n$ введен в [11] следующим образом: пусть $S_1^+(2n)$ — часть единичной сферы в $\mathbb{R}_{2n}^+$, и пусть $\mathbb{Z}^+ = S_1^+(2n) \times \mathbb{R}_1$ — цилиндр в $\mathbb{R}_{2n+1}^+ = \mathbb{R}_{2n}^+ \times \mathbb{R}_1$, а функция $g \in S_{ev}(\mathbb{Z}^+)$; тогда оператор, двойственный к преобразованию Радона—Киприянова, определяется выражением

$$K_\gamma^\# g(x) = \int\limits_{S_1^+(2n)} g(\Theta, \langle\Theta, x\rangle)\ \prod_{i=1}^n \Theta_{2i-1}^{\gamma_i - 1}\ dS(\Theta), \tag{1.8}$$

**1.3. Элементы B-гармонического анализа.** Б.М. Левитаном [5] введено классическое (одномерное) преобразование Фурье—Ганкеля. В работах И.А. Киприянова и его последователей (см. [3]) изучался многомерный аналог этого преобразования, называемый преобразованием Фурье—Бесселя.

Следуя Б.М. Левитану, *j-функциями Бесселя* будем называть функции

$$j_\nu(t) = 2^\nu \Gamma(\nu+1)\frac{J_\nu(t)}{t^\nu},$$

где $\nu > -\dfrac{1}{2}$ и $J_\nu$ — функция Бесселя первого рода.

$j$-функции Бесселя удовлетворяют сингулярному дифференциальному уравнению Бесселя

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\,\frac{\partial}{\partial t}\right) j_\nu(t) + j_\nu(t) = 0, \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad \gamma = 2\nu+1$$

и условиям $j_\nu(0) = 1$, $j'_\nu(0) = 0$ (условие четности).

Обозначим через $F_B[f](\xi)$ многомерное прямое преобразование Фурье—Бесселя

$$F_B[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(x)\;\mathbf{j}_\nu(x\xi)\;x^\gamma dx, \quad \mathbf{j}_\nu(t) = \prod_{i=1}^n j_{\nu_i}(t),\ \nu_i = \frac{\gamma_i - 1}{2} > -\frac{1}{2},$$

и через $F_B^{-1}[g](x)$ — обратное преобразование Фурье—Бесселя

$$F_B^{-1}[g](x) = C(\gamma) F_B[g](-x), \quad C(\gamma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2^{2\nu_i}\Gamma^2(\nu_i+1)}.$$

*1.3.1. Представление B-потенциалов Рисса потенциалами Рисса.* И.А. Киприяновым введены B-потенциалы Рисса.

Ядро B-потенциала Рисса имеет вид (см. [8] и монографии [10, гл. 4] и [2, гл. 14.1])

$$k_\lambda^\gamma = \frac{A}{|x|^{n+|\gamma|-\lambda}}, \quad \lambda < n + |\gamma|,$$

где $A = A(n,\gamma) = const$. B-потенциалами Рисса функции $f$ порядка $\lambda < n + |\gamma|$ называется обобщенная свертка с ядром $k_\gamma^\lambda$ :

$$(\mathbf{U}_\gamma^\lambda f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_n^+} f(y)\;T_x^y k_\lambda^\gamma(x_1, x' - y')\;y^\gamma\,dy, \quad -\infty < \lambda < n + |\gamma|,$$

где $T^y$ — многомерный обобщенный сдвиг

$$T^y f(x) = \prod_{i=1}^n T_{x_i}^{y_i} f(x_i, x^i) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi f(\omega) \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i d\alpha_i,$$

где $\omega$ — это $n$-мерный вектор с координатами $\sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\alpha_i}$, $i = \overline{1,n}$.

Воспользовавшись антиполярным преобразованием (1.2), получим

$$U_\gamma^\lambda f(x) = I_\gamma^\lambda f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}_{2n}^+} \frac{\widetilde{f}(z)\;Z_2^{\gamma-1}\;dz}{\left(\sum\limits_{i=1}^n (z_{2i-1} - x_i)^2 + z_{2i}^2\right)^{\frac{n+\gamma-\lambda}{2}}}, \quad Z_2^{\gamma-1} = \prod_{i=1}^n z_{2i}^{\gamma_i - 1}.$$

Как видим, выражение справа представляет собой специальный потенциал Рисса с особенностью в точке на координатной гиперплоскости, определенный в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{2n}^+$, где сдвиг на вектор, принадлежащий $\mathbb{R}_n^+$, осуществляется в плоскости $Z_2 = 0$. Обращение классического потенциала Рисса осуществляется в рамках преобразования Фурье применением потенциала отрицательного порядка $\lambda$ :

$$I_\gamma^{-\lambda} I_\gamma^\lambda = f(x) \tag{1.9}$$

## 2. Представление преобразования Радона—Киприянова потенциалом Рисса

**Теорема 2.1.** *Пусть* $f = f(x) \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$. *Тогда*

$$K_\gamma^{\#}\left[K_\gamma[f](\Theta,p)\right] = |S_1(2n)|_{\gamma-1}\ \Big(|z|^{-1} * \widetilde{f}(z)\Big)_{\gamma-1}.$$

*где через* $|S_1(2n)|_{\gamma-1}$ *обозначена взвешенная площадь единичной сферы с центром в начале координат в пространстве переменных* $z \in \mathbb{R}_{2n}^+$.

*Доказательство.* Преобразование Радона—Киприянова и оператор, двойственный к нему, определены соответственно следующими равенствами:

$$K_\gamma[f](p,\Theta) = C(\gamma)\int\limits_{\Theta_\perp^+} \widetilde{f}(p\Theta+y)\ Y_2^{\gamma-1}\ dy, \qquad K_\gamma^{\#} g(z) = \int\limits_{S_1^+(2n)} g(\Theta,\langle\Theta,z\rangle)\ \prod_{i=1}^n \Theta_{2i-1}^{\gamma_i-1}\ dS(\Theta).$$

Поэтому

$$K_\gamma^{\#}\left[K_{\gamma,\Theta}[f](p)\right](z) = \int\limits_{S_1^+(2n)} K_{\gamma,\Theta}[f](p)\prod_{i=1}^n \Theta_{2i-1}^{\gamma_i-1}\ dS(\Theta) =$$

$$= \int\limits_{S_1^+(2n)}\int\limits_{\Theta_\perp^+} \widetilde{f}(p\Theta+y)\ Y_2^{\gamma-1}dy\ \prod_{i=1}^n \Theta_{2i-1}^{\gamma_i-1}\ dS(\Theta) = \int\limits_{S_1^+(2n)}\int\limits_{\Theta_\perp^+} \widetilde{f}(\langle z,\Theta\rangle\Theta+y)\ Y_2^{\gamma-1}\prod_{i=1}^n \Theta_{2i-1}^{\gamma_i-1}\ dS(\Theta).$$

Учтем, что для любого фиксированного вектора $\Theta$ и $y$, удовлетворяющего уравнению плоскости $\langle y,\Theta\rangle = p$, точка $p\Theta$ есть проекция начала координат на плоскость. Поэтому вектор (с координатами начала и конца, соответственно, $p\Theta$ и $y$) принадлежит этой плоскости: $\langle z,\Theta\rangle\Theta - y \in \Theta_\perp^+$. При этом, очевидно, выполняется равенство

$$dy = d(\langle z,\Theta\rangle\Theta - z + y).$$

Произведя соответствующую замену координат, получим

$$K_\gamma^{\#}\left[K_{\gamma,\Theta}[f](z)\right] = \int\limits_{S_1^+(2n)}\int\limits_{\Theta_\perp^+} \widetilde{f}(z+y)\ Y_2^{\gamma-1}\ dy\prod_{i=1}^n \Theta_{2i-1}^{\gamma_i-1}\ dS(\Theta).$$

В плоскости $\Theta_\perp^+$ введем локальные координаты с центром в точке $p\Theta$ и введем на плоскости сферические координаты $y = r\omega$, $|\omega| = 1$, $\omega \in \mathbb{R}_{n-1}^+$. Учитывая принадлежность функции $f$ пространству Л. Шварца, можем поменять порядки интегрирования сферических интегралов по $\omega$ и $\Theta$. Тогда

$$K_\gamma^{\#}\left[K_{\gamma,\Theta}[\,\widetilde{f}\,]\right](z) = |S_1^+(2n-1)|_{\gamma-1}\int\limits_{\mathbb{R}_{2n}^+} f(z+y)\ |y|^{-1}Y_{2i}^{\gamma-1}\ dy.$$

Отсюда

$$K_\gamma^{\#}\left[K_{\gamma,\Theta}[f](z)\right] = |S_1^+(2n-1)|_{\gamma-1}\int\limits_{\mathbb{R}_{2n}^+} \widetilde{f}(y)\ |z-y|^{-1}Y_{2i}^{\gamma-1}\ dy.$$

□

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Гельфанд И. М., Граев И. М., Виленкин Н. Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: ГИФМЛ, 1952.
2. *Катрахов В. В., Катрахова А. А., Ляхов Л. Н., Муравник А. Б., Ситник С. М., Хе Кан Чер.* Сингулярные краевые задачи. — Воронеж: Научная книга, 2024.
3. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
4. *Киприянов И. А., Ляхов Л. Н.* О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона// Докл. АН СССР. — 1998. — *360*, № 2. — С. 157–160.
5. *Левитан Б. М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя// Усп. мат. наук. — 1951. — *6*, № 2. — С. 102–143.

6. *Ляхов Л. Н.* Об одном классе гиперсингулярных интегралов// Докл. АН СССР. — 1990. — *315*, № 2. — С. 466–469.
7. *Ляхов Л. Н.* Обращение B-потенциалов// Докл. РАН. — 1991. — *321*, № 3. — С. 466–469.
8. *Ляхов Л. Н.* Пространство B-потенциалов Рисса// Докл. РАН. — 1994. — *334*, № 3. — С. 278–280.
9. *Ляхов Л. Н.* Преобразование Киприянова—Радона// Тр. МИАН. — 2005. — *248*. — С. 153–163.
10. *Ляхов Л. Н.* B-гиперсингулярные интегралы и их применение к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с B-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
11. *Ляхов Л. Н., Калитвин В. А., Лапшина М. Г.* О преобразовании, двойственном к преобразованию Радона—Киприянова// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2024. — *232*. — С. 70–77.
12. *Ляхов Л. Н., Санина Е. Л.* Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха// Мат. заметки. — 2023. — *113*, № 4. — С. 517–528.
13. *Ляхов Л. Н., Шишкина Э. Л.* Обращение общих B-потенциалов Рисса с однородной характеристикой в весовых классах функций// Докл. РАН. — 2009. — *426*, № 4. — С. 443–447.
14. *Наттерер Ф.* Математические основы компьютерной томографии. — М.: Мир, 1990.
15. *Kalitvin V. A., Lapshina M. G.* Radon–Kipriyanov transform of Laplace series by weight spherical functions// Lobachevskii J. Math. — 2023. — *44*, № 8. — С. 3323–3330.
16. *Kalitvin V. A., Lapshina M. G.* Radon–Kipriyanov transform of finite functions// Lobachevskii J. Math. — 2024. — *45*, № 11. — С. 5537–5545.

Л. Н. Ляхов

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия

E-mail: `levnlya@mail.ru`

В. А. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Липецкий филиал, Липецк, Россия

Финансовый университет при Правительстве РФ, Липецкий филиал, Липецк, Россия

E-mail: `kalitvinv@yandex.ru`

М. Г. Лапшина

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

E-mail: `marina.lapsh@ya.ru`

UDC 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-267-274
EDN: MYCMMV

## On the representation of the Radon—Kipriyanov transform by the Riesz potential

**L. N. Lyakhov**[1,2,3], **V. A. Kalitvin**[2,4,5], **and M. G. Lapshina**[2]

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia*
[3] *Bunin Yelets State University, Yelets, Russia*
[4] *Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Lipetsk Branch, Lipetsk, Russia*
[5] *Financial University under the Government of the Russian Federation, Lipetsk Branch, Lipetsk, Russia*

**Abstract**. In this paper, a representation of the Radon–Kipriyanov transform by the classical Riesz potential is obtained. Based on the application of the Radon–Kipriyanov transform to a singular partial differential operator, a formula for transformation of a linear singular partial differential operator into an ordinary (nonsingular) differential operator is obtained.

**Keywords**: Radon–Kipriyanov transform, Riesz potential, singular differential operator, partial derivatives.

**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 24-21-00387).

**For citation:** L. N. Lyakhov, V. A. Kalitvin, M. G. Lapshina, "On the representation of the Radon—Kipriyanov transform by the Riesz potential," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 2, 267–274. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-267-274`

### REFERENCES

1. I. M. Gel'fand, I. M. Graev, and N. Ya. Vilenkin, *Integral'naya geometriya i svyazannye s ney voprosy teorii predstavleniy* [Integral Geometry and Related Topics in Representation Theory], GIFML, Moscow, 1952 (in Russian).
2. V. V. Katrakhov, A. A. Katrakhova, L. N. Lyakhov, A. B. Muravnik, S. M. Sitnik, and Khe Kan Cher, *Singulyarnye kraevye zadachi* [Singular Boundary-Value Problems], Nauchnaya kniga, Voronezh, 2024 (in Russian).
3. I. A. Kipriyanov, *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1997 (in Russian).
4. I. A. Kipriyanov and L. N. Lyakhov, "O preobrazovaniyakh Fur'e, Fur'e—Besselya i Radona" [On the Fourier, Fourier–Bessel, and Radon transforms], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1998, **360**, No. 2, 157–160 (in Russian).
5. B. M. Levitan, "Razlozhenie v ryady i integraly Fur'e po funktsiyam Besselya" [Expansion into series and Fourier integrals in Bessel functions], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1951, **6**, No. 2, 102–143 (in Russian).
6. L. N. Lyakhov, "Ob odnom klasse gipersingulyarnykh integralov" [On a class of hypersingular integrals], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **315**, No. 2, 466–469 (in Russian).
7. L. N. Lyakhov, "Obrashchenie V-potentsialov" [Inversion of B-potentials], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1991, **321**, No. 3, 466–469 (in Russian).

8. L. N. Lyakhov, “Prostranstvo V-potentsialov Rissa” [Riesz B-potentials space], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **334**, No. 3, 278–280 (in Russian).
9. L. N. Lyakhov, “Preobrazovanie Kipriyanova—Radona” [Kipriyanov–Radon transform], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **248**, 153–163 (in Russian).
10. L. N. Lyakhov, *V-gipersingulyarnye integraly i ikh primenenie k opisaniyu funktsional’nykh klassov Kipriyanova i k integral’nym uravneniyam s V-potentsial’nymi yadrami* [B-hypersingular Integrals and Their Application to the Description of Kipriyanov Functional Classes and to Integral Equations with B-Potential Kernels], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
11. L. N. Lyakhov, V. A. Kalitvin, and M. G. Lapshina, “O preobrazovanii, dvoystvennom k preobrazovaniyu Radona—Kipriyanova” [On the transform dual to the Radon–Kipriyanov transform], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2024, **232**, 70–77 (in Russian).
12. L. N. Lyakhov and E. L. Sanina, “Differentsial’nye i integral’nye operatsii v skrytoy sfericheskoy simmetrii i razmernost’ krivoy Kokha” [Differential and integral operations in hidden spherical symmetry and the dimension of the Koch curve], *Mat. zametki* [Math. Digest], 2023, **113**, No. 4, 517–528 (in Russian).
13. L. N. Lyakhov and E. L. Shishkina, “Obrashchenie obshchikh B-potentsialov Rissa s odnorodnoy kharakteristikoy v vesovykh klassakh funktsiy” [Inversion of general Riesz B-potentials with homogeneous characteristic in weighted classes of functions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **426**, No. 4, 443–447 (in Russian).
14. F. Natterer, *Matematicheskie osnovy komp’yuternoy tomografii* [The Mathematics of Computerized Tomography], Mir, Moscow, 1990 (Russian translation).
15. V. A. Kalitvin and M. G. Lapshina, “Radon–Kipriyanov transform of Laplace series by weight spherical functions,” *Lobachevskii J. Math.*, 2023, **44**, No. 8, 3323–3330.
16. V. A. Kalitvin and M. G. Lapshina, “Radon–Kipriyanov transform of finite functions,” *Lobachevskii J. Math.*, 2024, **45**, No. 11, 5537–5545.

L. N. Lyakhov
Voronezh State University, Voronezh, Russia
Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia
Bunin Yelets State University, Yelets, Russia
E-mail: levnlya@mail.ru

V. A. Kalitvin
Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia
Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Lipetsk Branch, Lipetsk, Russia
Financial University under the Government of the Russian Federation, Lipetsk Branch, Lipetsk, Russia
E-mail: kalitvinv@yandex.ru

M. G. Lapshina
Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia
E-mail: marina.lapsh@ya.ru