Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 498–515
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.98
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-498-515
EDN: NLGGDV

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ВНУТРЕННЕЙ ФЛОТАЦИЕЙ

Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

Аннотация. Изучается задача о малых движениях системы из несмешивающихся идеальных жидкостей со свободной поверхностью, состоящей из двух областей: участка упругого льда и участка крошеного льда. Упругий лед моделируется упругой пластиной. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества. Предполагается также, что граница раздела слоев жидкости является весомой поверхностью. Используя метод ортогонального проектирования граничных условий и введения вспомогательных задач, исходную начально-краевую задачу сводим к равносильной задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы. Доказаны утверждения о структуре спектра задачи и о базисности системы собственных функций.

Ключевые слова: идеальная жидкость, свободная поверхность, раздел слоев жидкости, метод ортогонального проектирования, сильное решение, спектр.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Д. О. Цветков.* Об одной краевой задаче, связанной с внутренней флотацией// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 498–515. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-498-515

Введение

Настоящая статья является продолжением работ [8–11, 13], в которых исследовались начально-краевые задачи динамики жидкости, покрытой льдом (крошеным, упругим). Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества (см., например, [2]). Упругий лед моделируется упругой пластиной, близкая по математической постановке задача о колебаниях однородной жидкости в контейнере с упругим дном рассматривалась в монографии [12]. Исследование задач проводилось по принципу «от простого к сложному», благодаря чему задачи можно классифицировать по трем уровням сложности.

Задачам первого уровня соответствуют случаи, когда подвижная поверхность Γ есть область лишь одного типа: крошеный лед, упругий лед [8, 9].

К задачам второго уровня относятся задачи, когда на Γ соприкасаются две среды: подвижная поверхность без упругого льда и подвижная поверхность без крошеного льда [10].

Наконец, к третьему уровню отнесена наиболее общая задача, когда на Γ имеется участок чистой воды, упругого льда и крошеного льда [11, 13].

В монографии [12] рассматривалась задача о малых движениях системы однородных идеальных жидкостей со свободной поверхностью (чистая вода). Поля скоростей считались элементами векторного пространства пар функций. С учетом этого исходная задача переписывалась в виде пар соотношений для исходных объектов, далее с использованием метода ортогонального проектирования на выбранные подпространства задача сводилась к равносильной задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве, для которой устанавливалась теорема существования решений. Однако не был осуществлен переход от достаточных условий, где требуется принадлежность функций областям определения матричных операторов, к достаточным условиям, где ограничения накладываются на начальные условия и внешние силы на соответствующих границах.

В представленной работе модифицируется изложенный выше подход при изучении задачи о малых движениях и нормальных колебаниях многослойной идеальной жидкости со свободной поверхностью, состоящей из двух областей: участка крошеного льда и участка упругого льда. Предполагается также, что граница раздела слоев жидкости является весомой поверхностью (т. н. внутренняя флотация).

Интерес к таким проблемам может быть связан с тем, что при экспериментальных исследованиях распределения характеристик воды, например, в Черном море было обнаружено, что на границе раздела двух основных слоев (верхнего и нижнего) «плавают» частицы различных материалов, объемная плотность которых больше плотности верхнего слоя, но меньше нижнего. Этими материалами являются намокшее дерево, водоросли, растительные остатки, «экологический мусор» и тому подобное.

1. Эволюционная задача

1.1. Математическая формулировка задачи. Рассмотрим неподвижный сосуд, частично заполненный системой из двух идеальных несжимаемых жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми, и в силу этого действие капиллярных сил в задаче не учитывается. Обозначим через Ω_i $(i=1,2)$ область, занимаемую в состоянии покоя жидкостью плотности ρ_i $(\rho_1>\rho_2)$, соответствующий участок твердой стенки — через S_i; всем параметрам, относящимся к нижней жидкости, будем приписывать индекс 1, а к верхней — 2. Представим $\Gamma=\partial\Omega_2\setminus\overline{S_2}=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 — это нижняя и верхняя границы области Ω_2, соответственно, причем Γ_2 состоит из областей нескольких типов: $\Gamma_2=\Gamma_{21}\cup\Gamma_{22}$, где Γ_{21} — участок крошеного льда, Γ_{22} — участок упругого льда. Кроме того, будем считать, что граница раздела слоев жидкостей (граница Γ_1) является весомой поверхностью с поверхностной плотностью ρ_0.

Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на поверхности раздела Γ_1. Обозначим через $\vec{n}_i$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_i$ и направленный вне Ω_i. Рассмотрим малые движения изучаемой гидросистемы, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u}_i$ — поля скоростей в жидкостях, а $\zeta_i=\zeta_i(t,\hat{x})$, $\hat{x}\in\Gamma_i$ представляют собой отклонение свободно движущихся поверхностей жидкостей $\Gamma_i(t)$ от Γ_i по нормали $\vec{n}_i$; $p_i=p_i(t,x)$, $x\in\Omega_i$ — отклонение полей давлений от равновесных. Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\vec{f}_i=\vec{f}_i(t,x)$, $x\in\Omega_i$.

Линейная постановка начально-краевой задачи о колебаниях рассматриваемой гидросистемы выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t}=-\rho_i^{-1}\nabla p_i+\vec{f}_i\quad \operatorname{div}\vec{u}_i=0\ (\text{в }\Omega_i),\quad \vec{u}_i\cdot\vec{n}_i=0\ (\text{на }S_i),\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}=\vec{u}_1\cdot\vec{n}_1=\vec{u}_2\cdot\vec{n}_1\ (\text{на }\Gamma_1),\quad \frac{\partial\zeta_2}{\partial t}=\vec{u}_2\cdot\vec{n}_2\ (\text{на }\Gamma_2),\quad \int\limits_{\Gamma_i}\zeta_i d\Gamma_i=0,$$

$$p_1-p_2=\Delta\rho g\zeta_1+\rho_0\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2},\quad \Delta\rho:=\rho_1-\rho_2>0\ (\text{на }\Gamma_1),\tag{1.2}$$

$$p_2=g\rho_2\zeta_2+\rho_{01}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2}\ (\text{на }\Gamma_{21}),\quad p_2=K\zeta_2+\rho_{02}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2}\quad (\text{на }\Gamma_{22}),\tag{1.3}$$

$$\vec{u}_i(0,x)=\vec{u}_i^0(x),\quad \zeta_i(0,\hat{x})=\zeta_i^0(\hat{x}),\quad i=1,2.\tag{1.4}$$

Здесь линеаризованные уравнения Эйлера, описывающие движения идеальных однородных жидкостей, принимают вид первых двух уравнений (1.1) (см., например, [12]). На границе задано условие непротекания жидкости, которое в терминах вектора скорости имеет вид третьего уравнения (1.1). Если искать отклонение движущихся поверхностей $\Gamma_i(t)$ в виде $x_3 = b_i + \zeta_i$ $(i = 1, 2)$, то линеаризованные кинематические условия для частиц жидкости, находящихся на $\Gamma_i(t)$, имеют вид четвертого и пятого уравнений (1.1); шестое — условие сохранения объема.

Записав второй закон Ньютона для частиц крошеного льда и линеаризовав его, получим динамические условия (1.2) на Γ_1 и первое уравнение (1.3) на Γ_{21} (см. подробнее [2]), где ρ_0 и ρ_{01} — поверхностные плотности крошеного льда на границе раздела Γ_1 и на свободной поверхности Γ_{21}, соответственно. Вывод динамического условия на участке упругого льда (второе уравнение (1.3)) можно найти в [9].

Последние три условия (1.4) — это начальные условия, которые добавлены к задаче для полноты ее формулировки.

Замечание 1.1. Линейный дифференциальный оператор K задается дифференциальным выражением (см. подробнее [9, 10])

$$K\zeta_2 := d\triangle_2^2\zeta_2 + \rho_2 g\zeta_2$$

на области определения

$$\mathcal{D}(K) = \left\{\zeta_2 \in C^4\left(\overline{\Gamma_{22}}\right) \mid \zeta_2 = \partial\zeta_2/\partial\nu = 0 \ (\text{на}\, \gamma_2),\ M\zeta_2 = N\zeta_2 = 0 \ (\text{на}\ \partial\Gamma_{22}\setminus\gamma_2)\right\}, \tag{1.5}$$

где $d > 0$ — коэффициент жесткости льда, $\triangle_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$, ρ_{02} — поверхностная плотность упругого льда. Считаем, что на линии $\gamma_2 := \overline{\Gamma}_{22}\bigcap\overline{S}_2$ контакта упругого льда с твердой стенкой S_2 выполнены условия жесткого закрепления льда как упругой пластинки $\zeta_2 = 0$, $\partial\zeta_2/\partial\nu = 0$ (на γ_2), где $\vec{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Gamma_{22}$ (расположенный, очевидно, в плоскости Ox_1x_2). Далее, на остальной части границы $\partial\Gamma_{22}\setminus\gamma_2$ области Γ_{22}, где упругий лед соприкасается с участком крошеного льда, поперечная сила и момент силы на кромке упругого льда должны равняться нулю. Математически эти условия записываются в следующем виде:

$$M\zeta_2 = 0, \quad N\zeta_2 = 0 \quad (\text{на}\ \partial\Gamma_2\setminus\gamma_2), \quad \text{где} \quad M\zeta_2 = \sigma\triangle_2\zeta_2 + (1-\sigma)\,\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial\nu^2},$$
$$N\zeta_2 = -\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\triangle_2\zeta_2\right) + (1-\sigma)\,\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial {x_1}^2}\nu_1\nu_2 - \frac{\partial^2\zeta_2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\nu_1^2-\nu_2^2\right) - \frac{\partial^2\zeta_2}{\partial {x_2}^2}\nu_1\nu_2\right),$$

ν_i — i-я координата единичного вектора внешней нормали $\vec{\nu}$ к границе $\partial\Gamma_{22}$, $\vec{s}$ — вектор касательной к $\partial\Gamma_{21}$, а σ — т. н. постоянная Пуассона, характеризующая упругую пластинку.

Замечание 1.2. Свяжем с поверхностью $L_2(\Gamma_{22})$ гильбертово пространство (скалярных) функций $L_2(\Gamma_{22})$ со скалярным произведением

$$(\phi,\psi)_{\Gamma_2(\Gamma_{22})} = \int\limits_{\Gamma_{22}} \phi(\hat{x})\psi(\hat{x})\,d\Gamma_{22}.$$

В работе [10] установлено, что оператор $K : \mathcal{D}(K) \subset L_2(\Gamma_{22}) \to L_2(\Gamma_{22})$ (после расширения по Фридрихсу) — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром. Обратный оператор K^{-1} является компактным и положительным в $L_2(\Gamma_{22})$.

1.2. Об одном ортогональном разложении гильбертова пространства. Пусть задана область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Граница области $\partial\Omega = \overline{S}\cup\Gamma$, где Γ — связное множество с $\operatorname{mes}\Gamma > 0$. Введем пространство $H^1_\Gamma(\Omega)$ функций из $H^1(\Omega)$, имеющих средним значением по Γ нуль, с нормой

$$\|p\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla p|^2 d\Omega < \infty, \quad \int\limits_\Gamma p\,d\Gamma = 0. \tag{1.6}$$

Для $H^1_\Gamma(\Omega)$ имеет место ортогональное разложение (см. [12, с. 106]):

$$H^1_\Gamma(\Omega) = H^1_{h,S}(\Omega) \oplus H^1_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{1.7}$$

где $H^1_{0,\Gamma}(\Omega) = \{\, p \in H^1_\Gamma(\Omega) \mid p = 0 \text{ (на } \Gamma) \,\}$,

$$H^1_{h,S}(\Omega) = \left\{ p \in H^1_\Gamma(\Omega) \mid \Delta p = 0 \text{ (в } \Omega),\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ (на } S),\ \int\limits_\Gamma p\, d\Gamma = 0 \right\},$$

причем ортогональность в (1.7) понимается относительно скалярного произведения, соответствующего норме (1.6).

Предположим теперь, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, Γ_1 и Γ_2 — связные множества ненулевой меры, расположенные горизонтально.

Введем в рассмотрение множество

$$H^1_{\widehat{h,S}}(\Omega) := \left\{ p \in H^1_\Gamma(\Omega) \mid \Delta p = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ (на } S), \right.$$
$$\left. \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial p}{\partial n}\, d\Gamma_1 = 0, \quad \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial p}{\partial n}\, d\Gamma_2 = 0, \quad \int\limits_\Gamma p\, d\Gamma = 0 \right\}. \tag{1.8}$$

Лемма 1.1. *Справедливо ортогональное разложение*

$$H^1_{h,S}(\Omega) = H^1_{\widehat{h,S}}(\Omega) \oplus \{\alpha\, \varphi_0\}, \tag{1.9}$$

где $\{\alpha\, \varphi_0\}$ — *одномерное подпространство, а функция* φ_0 *является решением краевой задачи*

$$\Delta\varphi_0 = 0 \quad (\textit{в } \Omega), \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = 0 \quad (\textit{на } S), \tag{1.10}$$
$$\varphi_0 = \operatorname{mes}\Gamma_1 \quad (\textit{на } \Gamma_2), \quad \varphi_0 = -\operatorname{mes}\Gamma_2 \quad (\textit{на } \Gamma_1).$$

Разложение (1.9) порождает разложение подпространства потенциальных полей $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) = \vec{G}_{\widehat{h,S}}(\Omega) \oplus \{\alpha\, \nabla\varphi_0\}. \tag{1.11}$$

1.3. Метод ортогонального проектирования. Для области Ω_1 введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_1)$ в ортогональную сумму (см. [12, с. 118]):

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \tag{1.12}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_1) := \{\, \vec{u}_1 \mid \operatorname{div}\vec{u}_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1),\ \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \text{ (на } \partial\Omega_1) \,\},$$

$$\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) := \left\{ \vec{v}_1 \mid \vec{v}_1 = \nabla p_1,\ \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \text{ (на } S_1),\ \operatorname{div}\vec{v}_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1),\ \int\limits_{\Gamma_1} p_1\, d\Gamma_1 = 0 \right\},$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1) := \{\, \vec{w}_1 \mid \vec{w}_1 = \nabla\varphi_1,\ \varphi_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_1) \,\}.$$

Будем считать $\vec{u}_1(t,x)$ и $\nabla p_1(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_1)$, тогда в силу уравнений, граничных условий (1.1) и ортогонального разложения (1.12) имеем

$$\vec{u}_1(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad \nabla p_1(t,x) \in \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1).$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\vec{u}_1(t,x) = \vec{v}_1(t,x) + \nabla\Phi_1(t,x), \quad \vec{v}_1(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega_1), \quad \nabla\Phi_1(t,x) \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \tag{1.13}$$
$$\nabla p_1(t,x) = \nabla p_{1,1}(t,x) + \nabla p_{1,2}(t,x),\ \nabla p_{1,1}(x,t) \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1),\ \nabla p_{1,2}(t,x) \in \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1).$$

Обозначим через $P_{0,1}$, P_{h,S_1} и P_{0,Γ_1} ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega_1)$, $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$, соответственно. Тогда, подставляя (1.13) в первое уравнение (1.1) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = P_{0,1}\vec{f}_1, \quad \vec{0} = -\nabla p_{1,2} + \rho_1 P_{0,\Gamma_1}\vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{1.14}$$

$$\rho_1 \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi_1 = -\nabla p_{1,1} + \rho_1 P_{h,S_1}\vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1). \tag{1.15}$$

Из первого уравнения (1.14) с учетом начальных условий (1.4) сразу получаем

$$\vec{v}_1(t,x) = \int_0^t P_{0,1}\vec{f}_1(\tau,x)d\tau + P_{0,1}\vec{u}_1^0.$$

Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением соотношения (1.15), а также граничных условий и начальных данных с соответствующей заменой $p_1 \to p_{1,1}$, так как $p_1 = p_{1,1} + p_{1,2}$, где $p_{1,2} = 0$ (на Γ_1).

Для области Ω_2 введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_2)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{L}_2(\Omega_2) = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2). \tag{1.16}$$

Подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$ из (1.16) состоит из потенциальных гармонических полей с нулевой нормальной составляющей на твердой стенке S_2, для которых также выполнено условие сохранения объема по всей границе $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. В изучаемой задаче, в силу несжимаемости жидкостей, условие сохранения объема должно выполняться на каждой из границ Γ_1 и Γ_2 в отдельности. Отсюда следует, что подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$ шире, чем требуется. В связи с этим воспользуемся разложением этого подпространства в ортогональную сумму двух подпространств (см. (1.11)), естественным образом приспособленных к данной задаче.

Учитывая (1.11) и (1.16), введем ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_2) = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2) \oplus \{\alpha\,\nabla\varphi_0\} \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2), \tag{1.17}$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Введем также ортопроекторы на соответствующие подпространства: $P_{0,2}$, $P_{\widehat{h,S_2}}$, P_φ, $P_{0,\Gamma}$.

Как и прежде, в силу условия соленоидальности и условия непротекания на твердой стенке S_2 считаем, что $\vec{u}_2(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)$. Поле $\nabla p_2(t,x)$ потенциально, поэтому

$$\nabla p_2(t,x) \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2) \oplus \{\alpha\nabla\varphi_0\} \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2).$$

Представим поля $\vec{u}_2 = \vec{u}_2(t,x)$ и $\nabla p_2 = \nabla p_2(t,x)$ в виде:

$$\begin{gathered}\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \nabla\Phi_2, \qquad \vec{v}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2), \quad \nabla\Phi_2 \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2),\\ \nabla p_2 = \nabla p_{2,1} + \nabla p_{2,2} + \alpha(t)\,\nabla\varphi_0, \quad \nabla p_{2,1} \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2), \quad \nabla p_{2,2} \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2).\end{gathered} \tag{1.18}$$

Подставим эти представления в уравнение движения для идеальной жидкости из Ω_2 и применим к нему ортопроекторы, отвечающие разложению (1.17). Получим:

$$\frac{\partial\vec{v}_2}{\partial t} = P_{0,2}\vec{f}_2, \quad \alpha(t)\nabla\varphi_0 = \rho_2 P_\varphi \vec{f}_2, \quad \nabla p_{2,2} = \rho_2 P_{0,\Gamma}\vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{1.19}$$

$$\rho_2\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi_2 = -\nabla p_{2,1} + \rho_2 P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2). \tag{1.20}$$

Из первого уравнения (1.19) с учетом начальных условий (1.4) получаем

$$\vec{v}_2(t,x) = \int_0^t P_{0,2}\vec{f}_2(\tau,x)d\tau + P_{0,2}\vec{u}_2^0.$$

Из третьего уравнения (1.19) следует, что составляющая $\nabla p_{2,2}$ поля давлений ∇p_2 определяется непосредственно по полю внешних сил $\vec{f}_2$. Более того, потенциал этого поля обращается в нуль на Γ и потому в граничных условиях не участвует. Отметим также, что для элементов подпространства $\{\alpha\nabla\varphi_0\}$ выполнены условия (1.10), поэтому из второго уравнения (1.19) находятся все коэффициенты α, и тем самым составляющая $\alpha\nabla\varphi_0$.

Условимся называть решения уравнений (1.14), (1.19) *тривиальными решениями.* Итак, основные уравнения, которые будем рассматривать, это уравнения (1.15) и (1.20).

1.4. Формулировка задачи после отделения тривиальных соотношений. Введем в рассмотрение поля смещений частиц жидкостей, полагая, что

$$\nabla\Phi_i = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Psi_i, \quad \nabla\Psi_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad \nabla\Psi_2 \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2). \tag{1.21}$$

При этом отклонения ζ_i подвижных границ Γ_i в процессе движения, очевидно, равны

$$\zeta_1 = \frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial n_1} \quad (\text{на } \Gamma_1), \qquad \zeta_2 = \frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} \quad (\text{на } \Gamma_2). \tag{1.22}$$

Далее, если $P_{h,S_1}\vec{f}_1 = \nabla F_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, $P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f}_2 = \nabla F_2 \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)$, то из (1.15) и (1.20) следует

$$p_{k,1} = \rho_k\left(F_k - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi_k\right) + c_k(t) \quad (\text{в } \Omega_k, \ k = 1,2), \tag{1.23}$$

с произвольными функциями $c_k(t)$, зависящими только от временной переменной (т. н. интегралы Коши—Лагранжа).

С учетом сказанного, а также после отделения тривиальных соотношений начально-краевая задача (1.1)–(1.4) формулируется следующим образом:

$$\Delta\Psi_i = 0 \ (\text{в}\,\Omega_i), \quad \frac{\partial\Psi_i}{\partial n_i} = 0 \ (\text{на}\,S_i), \quad \int\limits_{\Gamma_i}\Psi_i d\Gamma_i = 0, \tag{1.24}$$

$$\zeta_1 = \frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial n_1} \ (\text{на}\,\Gamma_1), \quad \zeta_2 = \frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} \ (\text{на}\,\Gamma_2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_1\Psi_1 - \rho_2\Psi_2\right) + g\Delta\rho\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} + \rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = \rho_1 F_1 - \rho_2 F_2 + c_1(t) - c_2(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_1), \tag{1.25}$$

$$\rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi_2 + \rho_{01}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} + g\rho_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} = \rho_2 F_2 + c_2(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_{21}), \tag{1.26}$$

$$\rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi_2 + \rho_{02}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} + K\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} = \rho_2 F_2 + c_2(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_{22}), \tag{1.27}$$

$$\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1}d\Gamma_1 = 0, \quad \int\limits_{\Gamma_2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2}d\Gamma_2 = \int\limits_{\Gamma_{21}}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2}d\Gamma_{21} + \int\limits_{\Gamma_{22}}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2}d\Gamma_{22} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Psi_1(0,x) = P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Psi_2(0,x) = P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x), \tag{1.28}$$

$$\zeta_i(0,\hat{x}) = \zeta_i^0(\hat{x}) = \left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial n_i}\right)_{\Gamma_i}(0,\hat{x}), \quad i = 1,2.$$

1.5. Приведение системы к дифференциально-операторному уравнению. Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Вспомогательная задача I.

$$\Delta\Psi_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = 0 \ (\text{на } S_1), \quad \int\limits_{\Gamma_1}\Psi_1\,d\Gamma_1 = 0,$$

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = \eta_0 \ (\text{на } \Gamma_1), \quad \int\limits_{\Gamma_1}\eta_0\,d\Gamma_1 = 0.$$

Введем в пространстве $H_1 = L_{2,\Gamma_1} := L_2(\Gamma_1) \ominus \{1_{\Gamma_1}\}$ его оснащение в виде $H_1^+ \subset H_1 \subset H_1^-$, где

$$H_1^+ = H_1^{1/2}(\Gamma_1) \cap H_1 =: H_{\Gamma_1}^{1/2}, \quad H_1^- = \left(H_1^+\right)^* =: \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}.$$

Символом «$\widetilde{\ }$» обозначен класс функций из $H_{\Gamma_1}^{-1/2}$, продолжимых нулем на всю границу $\partial\Omega_1$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_1)$ (см. [1] и [3, с.122-123]). Если $\eta_0 \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$, то задача имеет единственное решение $\Psi_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$. Введем по решению задачи I оператор: $P_{\Gamma_1}\Psi_1|_{\Gamma_1} =: S_0\eta_0$, оператор S_0 является самосопряженным, положительным и компактным в $L_{2,\Gamma_1} = H_1$ (см., например, [3]).

Вспомогательная задача II.

$$\Delta\Psi_{2,1} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_2} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \int\limits_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} \Psi_{2,1}\, d\Gamma = 0,$$

$$\frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_2} = \eta_1 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_2} = 0 \text{ (на } \Gamma_2).$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, если $\eta_1 \in \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1}$, то задача II имеет единственное решение $\Psi_1 \in H^1_\Gamma(\Omega_2)$, при этом $P_{\Gamma_1}\Psi_{2,1} =: S_1\eta_1$, где оператор S_1 — самосопряженный, положительный и компактный в $L_{2,\Gamma_1} = H_1$.

Вспомогательная задача III.

$$\Delta\Psi_{2,2} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Psi_{2,2}}{\partial n_2} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \int\limits_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} \Psi_{2,2}\, d\Gamma = 0,$$

$$\frac{\partial\Psi_{2,2}}{\partial n_2} = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial\Psi_{2,2}}{\partial n_2} = \eta_2 \text{ (на } \Gamma_2 = \Gamma_{20}\cup\Gamma_{21}).$$

Функцию η_2 будем рассматривать как элемент пространства $H_2 = L_{2,\Gamma_2} := L_2(\Gamma_2) \ominus \{1_{\Gamma_2}\}$ и искать в виде пары функций $\eta_2 = (\eta_{2,1};\eta_{2,2})$, где $\eta_{2,1} = \eta_2|_{\Gamma_{21}}$ и $\eta_{2,2} = \eta_2|_{\Gamma_{22}}$, т. е. функций, заданных на соответствующих областях Γ_{21} и Γ_{22}.

Рассмотрим следующие подпространства пространства H_2:

$$H_{21} := \{\, (\eta_{2,1};\eta_{2,2}) \mid \eta_{2,1} \in L_2(\Gamma_{21}) \ominus \{1_{\Gamma_{21}}\},\ \eta_{2,2} \equiv 0 \,\},$$
$$H_{22} := \{\, (\eta_{2,1};\eta_{2,1}) \mid \eta_{2,2} \in L_2(\Gamma_{22}) \ominus \{1_{\Gamma_{22}}\},\ \eta_{2,1} \equiv 0 \,\}.$$

Пространство H_2 можно разложить в ортогональную сумму трех пространств (см. подробнее [11])

$$H_2 = H_{21} \oplus H_{22} \oplus \widehat{H}, \tag{1.29}$$

где $\widehat{H}$ есть одномерное подпространство пространства H_2, натянутое на вектор $\widehat{\varphi}$:

$$\widehat{H} = \{\, \widehat{v} \,|\, \widehat{v} = \alpha\widehat{\varphi},\ \forall\,\alpha \in \mathbb{C},\ \widehat{\varphi} = (\operatorname{mes}\Gamma_{22}; -\operatorname{mes}\Gamma_{21}) \,\}.$$

Введем действующие в пространстве H_2 ортопроекторы P_{21}, P_{21} и $\widehat{P}$ на подпространства H_{21}, H_{22} и $\widehat{H}$, соответственно. Они будут действовать по следующим правилам:

$$P_{21}w = (w_{2,1} - \tilde{w}_{2,1}; 0), \quad \tilde{w}_{2,1} = (\operatorname{mes}\Gamma_{21})^{-1} \int\limits_{\Gamma_{21}} w_{2,1}\, d\Gamma_{21},$$

$$P_{22}w = (0; w_{2,2} - \tilde{w}_{2,2}), \quad \tilde{w}_{2,2} = (\operatorname{mes}\Gamma_{22})^{-1} \int\limits_{\Gamma_{22}} w_{2,2}\, d\Gamma_{22},$$

$$\widehat{P}w = (I - P_{21} - P_{22})\, w = (\tilde{w}_{2,1}; \tilde{w}_{2,2}).$$

Для удобства дальнейших построений введем подпространство $\widehat{H}_2 = H_{21} \oplus \widehat{H}$, тогда (1.29) перепишем в виде: $H_2 = H_{21} \oplus \widehat{H}_2$. При этом ортопроектор $\widehat{P}_2$ на подпространство $\widehat{H}_2$ действует по закону $\widehat{P}_2 w = (\tilde{w}_{2,1}; w_{2,2})$.

Перейдем к построению потенциала $\Psi_{2,2}$ в области Ω_2, выразив его через η_2. Для получения общего вида функции $\Psi_{2,2}$, учитывающего представление η_2 в виде

$$\eta_2 = (\eta_{2,1} - \widetilde{\eta}_{2,1}; 0) + (\widetilde{\eta}_{2,1}; \eta_{2,2}) = P_{21}\eta_2 + \widehat{P}_2\eta_2, \tag{1.30}$$

рассмотрим две вспомогательные задачи.

Вспомогательная задача III.1.

$$\Delta\Psi_{2,2}^1 = 0 \ (\text{в} \ \Omega_2), \quad \frac{\partial\Psi_{2,2}^1}{\partial n_2} = 0 \ (\text{на} \ S_2), \quad \int\limits_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} \Psi_{2,2}^1 \, d\Gamma = 0,$$

$$\frac{\partial\Psi_{2,2}^1}{\partial n_2} = 0 \ (\text{на} \ \Gamma_1), \quad \frac{\partial\Psi_{2,2}^1}{\partial n_2} = \eta_{2,1} - \widetilde{\eta}_{2,1} \ (\text{на} \ \Gamma_{21}), \quad \frac{\partial\Psi_{2,2}^1}{\partial n_2} = 0 \ (\text{на} \ \Gamma_{22}).$$

Так как $H_{21} \subset H_2$, то необходимое условие разрешимости задачи III.1 выполнено, а значит, эта задача имеет единственное решение $\Psi_{2,2}^1 = \Psi_{2,2}^1(x)$ из пространства $H_\Gamma^1(\Omega_2)$.

Введем оператор T_1, который ставит в соответствие функции $P_{21}\eta_2$ решение задачи III.1:

$$\Psi_{2,2}^1 = \Psi_{2,2}^1\big|_{\Omega_2} =: T_1 P_{21}\eta_2 = T_1(\eta_{2,1} - \widetilde{\eta}_{2,1}; 0) =: T_1 w_1, \quad w_1 := P_{21}\eta_2 \in H_{21}.$$

Рассмотрим теперь значения функции $\Psi_{2,2}^1$ на границе Γ_2. Введем оператор следа на границе Γ_2, $\gamma_2\left(\Psi_{2,2}^1|_{\Omega_2}\right) := \Psi_{2,2}^1|_{\Gamma_2}$, и представим функцию $\Psi_{2,2}^1|_{\Gamma_2}$ в виде суммы ее проекций на подпространства H_{21} и $\widehat{H}_2$:

$$\Psi_{2,2}^1|_{\Gamma_2} = P_{21}\gamma_2 T_1 P_{21}\eta_2 + \widehat{P}_2\gamma_2 T_1 P_{21}\eta_2 =: C_{11}w_1 + C_{21}w_1. \tag{1.31}$$

Вспомогательная задача III.2.

$$\Delta\Psi_{2,2}^2 = 0 \ (\text{в} \ \Omega_2), \quad \frac{\partial\Psi_{2,2}^2}{\partial n_2} = 0 \ (\text{на} \ S_2), \quad \int\limits_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} \Psi_{2,2}^2 \, d\Gamma = 0,$$

$$\frac{\partial\Psi_{2,2}^1}{\partial n_2} = 0 \ (\text{на} \ \Gamma_1), \quad \frac{\partial\Psi_{2,2}^2}{\partial n_2} = \widetilde{\eta}_{2,1} \ (\text{на} \ \Gamma_{21}), \quad \frac{\partial\Psi_{2,2}^1}{\partial n_2} = \eta_{2,2} \ (\text{на} \ \Gamma_{22}).$$

Вспомогательная задача III.2 имеет единственное решение $\Psi_{2,2}^2 = \Psi_{2,2}^2(x) \in H_\Gamma^1(\Omega_2)$. Введем оператор T_2, который ставит в соответствие функции $\widehat{P}_2\eta_2$ решение задачи III.2:

$$\Psi_{2,2}^2 = \Psi_{2,2}^2\big|_{\Omega_2} =: T_2\widehat{P}_2\eta_2 = T_2(\widetilde{\eta}_{2,1}; \eta_{2,2}) =: T_2 w_2, \quad w_2 = \widehat{P}_2\eta_2 \in \widehat{H}_2.$$

Рассмотрим значения функции $\Psi_{2,2}^2$ на границе Γ_2 и представим функцию $\Psi_{2,2}^2|_{\Gamma_2}$ в виде суммы проекций этой функции на подпространства H_{22} и $\widehat{H}_2$:

$$\Psi_{2,2}^2|_{\Gamma_2} = P_{21}\gamma_2 T_2\widehat{P}_2\eta_2 + \widehat{P}_2\gamma_2 T_2\widehat{P}_2\eta_2 =: C_{12}w_2 + C_{22}w_2. \tag{1.32}$$

Замечание 1.3. В силу принадлежности $\nabla\Psi_2$ пространству $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)$ и определения пространства $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)$ потенциал Ψ_2 с помощью решений вспомогательных задач можно представить в виде:

$$\Psi_2 = \Psi_{2,1} + \Psi_{2,2}, \tag{1.33}$$

при этом считаем

$$\eta_1 = \frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_2} = -\frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_1} = -\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = -\eta_0 = -\zeta_1 \quad (\text{на} \ \Gamma_1),$$

$$\eta_2 = \frac{\partial\Psi_{2,2}}{\partial n_2} = \zeta_2 \quad (\text{на} \ \Gamma_2).$$

Исходя из сказанного, разложим пространство $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)$ в виде следующей прямой суммы:

$$\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2) = \vec{G}_1(\Omega_2) \dotplus \vec{G}_2(\Omega_2), \tag{1.34}$$

$$\vec{G}_1(\Omega_2) := \left\{\nabla p \,|\, \Delta p = 0 \, (\text{в} \ \Omega_2), \ \frac{\partial p}{\partial n_2} = 0 \, (\text{на} \ S_2), \ \frac{\partial p}{\partial n_2} = 0 \, (\text{на} \ \Gamma_2), \ \int\limits_\Gamma p \, d\Gamma = 0\right\},$$

$$\vec{G}_2(\Omega_2) := \left\{\nabla p \,|\, \Delta p = 0 \, (\text{в} \ \Omega_2), \ \frac{\partial p}{\partial n_2} = 0 \, (\text{на} \ S_2), \ \frac{\partial p}{\partial n_2} = 0 \, (\text{на} \ \Gamma_1), \ \int\limits_\Gamma p \, d\Gamma = 0\right\}.$$

В дальнейшем все функции, зависящие от t, будем считать функциями переменной t со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве; в связи с этим в уравнениях задачи заменим $\partial/\partial t$ на d/dt.

С учетом (1.33) перепишем соотношения (1.25)–(1.27) в виде

$$\begin{gathered}
\frac{d^2}{dt^2}\left(-\rho_1\Psi_1+\rho_2\Psi_{2,1}+\rho_2\Psi_{2,2}\right)-g\Delta\rho\eta_0-\rho_0\frac{d^2\eta_0}{dt^2}=(\rho_2F_2-\rho_1F_1)+c_2(t)-c_1(t)\quad (\text{на } \Gamma_1);\\
\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Psi_{2,1}+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Psi_{2,2}+\rho_{01}\frac{d^2\eta_2}{dt^2}+g\rho_2\eta_2=\rho_2F_2+c_2(t)\quad (\text{на } \Gamma_{21});\\
\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Psi_{2,1}+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Psi_{2,2}+\rho_{02}\frac{d^2\eta_2}{dt^2}+K\eta_2=\rho_2F_2+c_2(t)\quad (\text{на } \Gamma_{22}).
\end{gathered}\tag{1.35}$$

Проектируя обе части первого уравнения (1.35) на пространство H_1, используя введенные операторы вспомогательных задач I и II, приходим к следующему уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big((\rho_1S_0+\rho_2S_1+\rho_0I_1)\eta_0-\rho_2S_3\eta_2\Big)+g\Delta\rho\eta_0=G_1,\tag{1.36}$$

где $G_1:=P_{\Gamma_1}(\rho_1F_1|_{\Gamma_1}-\rho_2F_2|_{\Gamma_1})$, $S_3\eta_2=P_{\Gamma_1}\Psi_{2,2}$, I_1 — единичный оператор в H_1.

Спроектируем теперь второе и третье уравнения (1.35) на подпространства H_{21} и $\widehat{H}_2$. Для этого предварительно выделим явно элемент из подпространства H_{21}:

$$\begin{gathered}
\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{\Psi}_{2,1}|_{\Gamma_{21}}+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Big(\Psi_{2,1}|_{\Gamma_{21}}-\widetilde{\Psi}_{2,1}|_{\Gamma_{21}}\Big)+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{\Psi}_{2,2}|_{\Gamma_{21}}+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Big(\Psi_{2,2}|_{\Gamma_{21}}-\widetilde{\Psi}_{2,2}|_{\Gamma_{21}}\Big)+\\
+\rho_{01}\frac{d^2\widetilde{\eta}_{2,1}}{dt^2}+\rho_{01}\frac{d^2(\eta_{2,1}-\widetilde{\eta}_{2,1})}{dt^2}+g\rho_2\widetilde{\eta}_{2,1}+g\rho_2(\eta_{2,1}-\widetilde{\eta}_{2,1})=\rho_2\widetilde{F}_2+\rho_2(F_2-\widetilde{F}_2)+c_2(t)\quad (\text{на } \Gamma_{21});\\
\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Psi_{2,1}|_{\Gamma_{22}}+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Psi_{2,2}|_{\Gamma_{22}}+\rho_{02}\frac{d^2\eta_{2,2}}{dt^2}+K\eta_{2,2}=\rho_2F_2+c_2(t)\quad (\text{на } \Gamma_{22}).
\end{gathered}$$

Отметим, что элементы $\rho_{01}d^2/dt^2w_1=\rho_{01}d^2/dt^2\left((\eta_{2,1}-\widetilde{\eta}_{2,1});0\right)$ и $g\rho_2w_1=g\rho_2\left((\eta_{2,1}-\widetilde{\eta}_{2,1});0\right)$ являются функциями переменной t со значениями в H_{21}.

Элемент $\left(\rho_{01}\,d^2\widetilde{\eta}_{2,1}/dt^2;\rho_{02}\,d^2\eta_{2,2}/dt^2\right)$ принадлежит подпространству $\widehat{H}_2\oplus\{1_{\Gamma_2}\}$ (при $\rho_{01}=\rho_{02}$ этот элемент принадлежит $\widehat{H}_2$). Значит, проекцию на $\widehat{H}_2$ можно представить в следующем виде:

$$M_1w_2=M_1\left(\widetilde{\eta}_{2,1};\eta_{2,2}\right):=\widehat{P}_2\left(\rho_{01}\,\widetilde{\eta}_{2,1};\rho_{02}\,\eta_{2,2}\right)=\left(\rho_{01}\,\widetilde{\eta}_{2,1}-c_1;\rho_{02}\,\eta_{2,2}-c_1\right).\tag{1.37}$$

Из условия ортогональности функции 1_{Γ_2} следует формула для константы c_1:

$$c_1=\frac{\operatorname{mes}\Gamma_{21}}{\operatorname{mes}\Gamma_{21}+\operatorname{mes}\Gamma_{22}}\;\rho_{01}\,\widetilde{\eta}_{2,1}+\frac{\operatorname{mes}\Gamma_{22}}{\operatorname{mes}\Gamma_{21}+\operatorname{mes}\Gamma_{22}}\;\rho_{02}\,\widetilde{\eta}_{2,2}.$$

Аналогично поступаем с элементом $(g\rho_2\widetilde{\eta}_{2,1};K\eta_{2,2})$:

$$\begin{gathered}
M_2w_2=M_2\left(\widetilde{\eta}_{2,1};\eta_{2,2}\right):=\widehat{P}_2\left(g\rho_2\widetilde{\eta}_{2,1};K\eta_{2,2}\right)=\left(g\rho_2\widetilde{\eta}_{2,1}-c_2;K\eta_{2,2}-c_2\right),\\
c_2=\frac{\operatorname{mes}\Gamma_{21}}{\operatorname{mes}\Gamma_{21}+\operatorname{mes}\Gamma_{22}}\;g\rho_2\widetilde{\eta}_{2,1}+\frac{\operatorname{mes}\Gamma_{22}}{\operatorname{mes}\Gamma_{21}+\operatorname{mes}\Gamma_{22}}\;\left(\widetilde{K\eta_{2,2}}\right).
\end{gathered}\tag{1.38}$$

Итак, после проектирования второго и третьего уравнения (1.35), получаем

$$\rho_2\frac{d^2}{dt^2}(\Psi_{2,1}|_{\Gamma_{21}}-\widetilde{\Psi}_{2,1}|_{\Gamma_{21}};0)+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}(\Psi_{2,2}|_{\Gamma_{21}}-\widetilde{\Psi}_{2,2}|_{\Gamma_{21}};0)+\rho_{01}\frac{d^2w_1}{dt^2}+g\rho_2w_1=f_1,\tag{1.39}$$

$$\rho_2\frac{d^2}{dt^2}(\widetilde{\Psi}_{2,1}|_{\Gamma_{21}};\Psi_{2,1}|_{\Gamma_{22}})+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}(\widetilde{\Psi}_{2,2}|_{\Gamma_{21}};\Psi_{2,2}|_{\Gamma_{22}})+\frac{d^2}{dt^2}M_1w_2+M_2w_2=f_2,\tag{1.40}$$

$$f_1:=\rho_2(F_2|_{\Gamma_{21}}-\widetilde{F}_2|_{\Gamma_{21}};0),\quad f_2:=(\widetilde{F}_2|_{\Gamma_{21}};F_2|_{\Gamma_{22}}).$$

В соответствии с разложением (1.30) представим решение задачи III в виде суммы решений двух вспомогательных задач: $\Psi_{2,2}=\Psi_{2,2}^1+\Psi_{2,2}^2$, тогда (см. подробнее (1.31), (1.32))

$$\begin{pmatrix}\left(\Psi_{2,2}|_{\Gamma_{21}}-\widetilde{\Psi}_{2,2}|_{\Gamma_{21}};0\right)\\ \left(\widetilde{\Psi}_{2,2}|_{\Gamma_{21}};\Psi_{2,2}|_{\Gamma_{22}}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}\\ C_{21}&C_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\end{pmatrix}=:\mathcal{C}\eta_2.\tag{1.41}$$

Перепишем (1.39), (1.40) в виде одного уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(-\rho_2 S_2\eta_0 + (\rho_2\mathcal{C} + \mathcal{N}_1)\eta_2\Big) + \mathcal{N}_2\eta_2 = G_2, \tag{1.42}$$

$$\mathcal{N}_1 := \mathrm{diag}(\rho_{01}I_{21}; M_1), \quad \mathcal{N}_2 := \mathrm{diag}(g\rho_2; M_2), \quad G_2 = \mathrm{diag}(f_1; f_2)$$

$$-S_2\eta_0 = S_2\eta_1 := P_{\Gamma_2}\Psi_{2,1} = \begin{pmatrix} \Big(\Psi_{2,1}|_{\Gamma_{21}} - \widetilde{\Psi}_{2,1}|_{\Gamma_{21}}; 0\Big) \\ \Big(\widetilde{\Psi}_{2,1}|_{\Gamma_{21}}; \Psi_{2,1}|_{\Gamma_{22}}\Big) \end{pmatrix}.$$

С учетом (1.36) и (1.42) запишем задачу (1.24)–(1.28) в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{A}\eta + \mathcal{B}\eta = \mathcal{G}, \quad \eta(0) = \eta^0, \quad \eta'(0) = \eta^1, \tag{1.43}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 := \begin{pmatrix} \rho_1 S_0 + \rho_2 S_1 & -\rho_2 S_3 \\ -\rho_2 S_2 & \rho_2\mathcal{C} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_0 I_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} g\Delta\rho & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_2 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix},$$

$$\eta^0 = (\eta_0(0); \eta_2(0)) = (\zeta_1^0; \zeta_2^0), \quad \eta'(0) = (\eta_0^1(0); \eta_2^1(0)), \quad \eta_0^1(0) = (P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x)\cdot\vec{n}_1)|_{\Gamma_1},$$

$$\eta_2^1(0) = (\eta_{2,1}^1(0); \eta_{2,2}^1(0)), \quad \eta_{2,1}^1(0) = P_{21}\left(P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x)\cdot\vec{n}_2\right), \quad \eta_{2,2}^1(0) = \widehat{P}_2\left(P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x)\cdot\vec{n}_2\right).$$

Причем для начальных данных в силу разложения (1.34) должно выполняться следующее кинематическое условие:

$$\gamma_1 P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x) = -\gamma_2\Pi_1 P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x) \quad (\text{на } \Gamma_1). \tag{1.44}$$

Здесь через Π_1 обозначен проектор на подпространство $\vec{G}_1(\Omega_2)$, через символы γ_i — операция взятия нормального следа на Γ_1 для полей, заданных в области Ω_i $(i = 1, 2)$.

Теорема 1.1. *Начально-краевая задача* (1.24)–(1.28) *равносильна задаче Коши* (1.43) *для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве*

$$\mathcal{H} := H_1 \oplus H_2, \quad H_2 = H_{21} \oplus \widehat{H}_2.$$

Рассмотрим свойства операторных блоков из (1.43).

Лемма 1.2. *Оператор* $\mathcal{C}$ *(см.* (1.41)*) — самосопряженный компактный и положительный оператор, действующий в пространстве* $H_2 = H_{21} \oplus \widehat{H}_2$.

Доказательство. Все операторы C_{ij} $(i, j = 1, 2)$, из которых состоит оператор $\mathcal{C}$, являются произведением ограниченных операторов ортогонального проектирования на компактный оператор $\gamma_2 T_j$ (см., например, [9]). Следовательно, все C_{ij} $(i, j = 1, 2)$ являются компактными операторами, а значит, и оператор $\mathcal{C}$ является компактным.

Докажем, что оператор $\mathcal{C}$ является самосопряженным. Обозначим через Φ решение вспомогательной задачи III при $\eta_2 = w = (w_1; w_2)$. Для любых w и v из H_2 имеем:

$$(\mathcal{C}w, v)_{H_2} = \left(\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{21}v \\ \widehat{P}_2 v \end{pmatrix}\right) = \Big[(C_{11}w_1, P_{21}v) + \Big(C_{21}w_1, \widehat{P}_2 v\Big)\Big] +$$

$$+ \Big[(C_{12}w_2, P_{21}v) + \Big(C_{22}w_2, \widehat{P}_2 v\Big)\Big] = \big(\Phi_1|_{\Gamma_2}, v\big)_{H_2} + \big(\Phi_2|_{\Gamma_2}, v\big)_{H_2}.$$

Обозначим через Ψ решение вспомогательной задачи III при $\eta_2 = v$, тогда

$$(\mathcal{C}w, v)_{H_2} = \int\limits_{\Gamma_2}\Phi_1\, v\, d\Gamma_2 + \int\limits_{\Gamma_2}\Phi_2\, v\, d\Gamma_2 = \int\limits_{\Gamma_2}\Phi\, v\, d\Gamma_2 = \int\limits_{\Gamma_2}\Phi\,\frac{\partial\Psi}{\partial n_2}\, d\Gamma_2 = \int\limits_{\Gamma_2}\Phi\,\frac{\partial\Psi}{\partial n_2}\, d\Gamma_2 +$$

$$+ \int\limits_{S_2}\Phi\,\frac{\partial\Psi}{\partial n_2}\, dS_2 = \int\limits_{\partial\Omega_2}\Phi\,\frac{\partial\Psi}{\partial n_2}\, dS_2 = \int\limits_{\Omega_2}(\Phi\,\Delta\Psi + \nabla\Phi\,\nabla\Psi)\, d\,\Omega_2 = \int\limits_{\Omega_2}\nabla\Phi\,\nabla\Psi\, d\,\Omega_2 = \ldots = (w, \mathcal{C}v)_{H_2}.$$

Так как оператор $\mathcal{C}$ является ограниченным, то из полученного выражения следует, что оператор $\mathcal{C}$ — самосопряженный.

Рассмотрим теперь форму оператора $\mathcal{C}$:

$$(\mathcal{C}u, u)_{H_2} = \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Phi|^2 \, d\,\Omega_2 \geqslant 0.$$

Если $(\mathcal{C}u, u)_{H_2} = 0$, то $\Phi = \mathrm{const}$, тогда из условия нормировки функции Φ получаем, что $\Phi \equiv 0$, а следовательно, и $u = 0$. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{C}$ положительный. $\square$

Лемма 1.3. *Оператор $\mathcal{N}_2$ (см. (1.42)) на области определения*

$$\mathcal{D}(\mathcal{N}_2) = H_{21} \oplus \mathcal{D}(M_2), \quad \mathcal{D}(M_2) = \{(\widetilde{\psi}_1; \psi_2) \in \widehat{H}_2 \,|\, \psi_2 \in \mathcal{D}(K)\}, \tag{1.45}$$

является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором.

Доказательство. Исследуем оператор M_2 из (1.38). Для произвольных $u, v \in \mathcal{D}(M_2) \subset \widehat{H}_2$, $u = (\widetilde{u}_1; u_2)$, $v = (\widetilde{v}_1; v_2)$, в силу самосопряженности оператора ортогонального проектирования $\widehat{P}_2$ и оператора K имеем:

$$\begin{aligned}(M_2 u, v) &= \Big(\widehat{P}_2\,(\rho_0 g\widetilde{u}_1; Ku_2)\,; (\widetilde{v}_1; v_2)\Big) = \Big((\rho_0 g\widetilde{u}_1; Ku_2)\,; \widehat{P}_2\,(\widetilde{v}_1; v_2)\Big) = ((\rho_0 g\widetilde{u}_1; Ku_2)\,; (\widetilde{v}_1; v_2)) = \\ &= (\rho_0 g\widetilde{u}_1; \widetilde{v}_1)_{\widehat{H}} + (Ku_2; v_2)_{H_2} = (\widetilde{u}_1; \rho_0 g\widetilde{v}_1)_{\widehat{H}} + (u_2; Kv_2)_{H_2} = ((\widetilde{u}_1; u_2)\,; (\rho_0 g\widetilde{v}_1; Kv_2)) = \\ &= \Big(\widehat{P}_2\,(\widetilde{u}_1; u_2)\,; (\rho_0 g\widetilde{v}_1; Kv_2)\Big) = \Big((\widetilde{u}_1; u_2)\,; \widehat{P}_2\,(\rho_0 g\widetilde{v}_1; Kv_2)\Big) = (u; M_2 v),\end{aligned}$$

откуда следует, что оператор M_2 — самосопряженный.

Далее имеем:

$$(M_2 u, u) = (\rho_0 g\widetilde{u}_1; \widetilde{u}_1)_{\widehat{H}} + (Ku_2; u_2)_{H_2} \geqslant \min(c; \rho_0 g)\, \|u\|^2_{\widehat{H}_2}, \tag{1.46}$$

где $(Ku_2, u_2)_{H_2} \geqslant c\,\|u_2\|^2_{H_2}$ (см. замечание 1.2), а значит, M_2 — положительно определенный оператор в $\widehat{H}_2$. Тогда и для оператора $\mathcal{N}_2 = \mathrm{diag}(\rho_0 g I_1; M_2)$ эти свойства сохранятся, т. е. оператор $\mathcal{N}_2$ — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, и следовательно, ограниченно обратим. Обратный $\mathcal{N}_2^{-1}$ при этом является положительным оператором.

Заметим в заключение, что так как M_2 положительно определен, то обратный M_2^{-1} является ограниченным. Докажем, что он является компактным. Для этого достаточно показать, что H_{M_2} (энергетическое пространство оператора M_2) компактно вложено в $\widehat{H}_2$. Выберем произвольное ограниченное множество E из $H_{M_2} \subset \widehat{H}_2$. Элементы $\eta_2 \in E$ имеют вид $\eta_2 = (\widetilde{\eta}_{2,1}; \eta_{2,2})$, где $\eta_{2,2} \in \mathcal{D}(K^{1/2}) \subset L_2(\Gamma_{22})$ (см. подробнее теорему 1 из работы [8]). Рассмотрим компоненты E из подпространства $L_2(\Gamma_{22})$.

Обозначим это множество E_1. Из (1.46) следует, что

$$(M_2\eta_2, \eta_2) := \|\eta_2\|^2_{M_2} \geqslant (K\eta_{2,2}, \eta_{2,2})_{H_2} := \|\eta_{2,2}\|^2_K.$$

Таким образом, E_1 будет являться ограниченным множеством в H_k (энергетическое пространство оператора K), которое в свою очередь компактно вложено в $L_2(\Gamma_{22})$ (см. подробнее [8]). Следовательно, E_1 будет компактно в $L_2(\Gamma_{22})$. В силу вида подпространства H_{22} и того, что $\widehat{H}$ конечномерно, получаем, что E будет компактным множеством в $\widehat{H}_2$. Таким образом, любое ограниченное множество в H_{M_2} компактно в $\widehat{H}_2$, значит, оператор M_2^{-1} — компактный оператор. $\square$

Изучим свойства оператора $\mathcal{N}_1$, который имеет вид (см. (1.42), (1.37)):

$$\mathcal{N}_1 = \mathrm{diag}(\rho_{01} I_1, M_1), \quad M_1 w_2 = (\rho_{01}\widetilde{\psi}_1 - c_1; \rho_{02}\psi_2 - c_1), \tag{1.47}$$

$$c_1 = \alpha_1\,\rho_{01}\,\widetilde{\psi}_1 + \alpha_2\,\rho_{02}\,\widetilde{\psi}_2, \quad \alpha_1 = \frac{\mathrm{mes}\,\Gamma_{21}}{\mathrm{mes}\,\Gamma_{21} + \mathrm{mes}\,\Gamma_{22}}, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_1.$$

Опираясь на представления оператора M_1, учитывая связь между $\widetilde{\psi}_1$ и $\widetilde{\psi}_2$:

$$\widetilde{\psi}_1\ \mathrm{mes}\,\Gamma_{21} + \widetilde{\psi}_2\ \mathrm{mes}\,\Gamma_{22} = 0,$$

имеем:

$$(M_1 w_2, w_2)_{\widehat{H}_2} = \Big((\rho_{01}\widetilde{\psi}_1 - c_1; \rho_{02}\psi_2 - c_1), (\widetilde{\psi}_1; \psi_2)\Big)_{\widehat{H}_2} = \Big(\rho_{01}\widetilde{\psi}_1 - c_1; \widetilde{\psi}_1\Big)_{\widehat{H}} + (\rho_{02}\psi_2 - c_1; \psi_2)_{H_{22}} =$$

$$= \rho_{01}|\widetilde{\psi}_1|^2 \operatorname{mes}\Gamma_{21} - \Big((1-\alpha_2)\,\rho_{01}\,\widetilde{\psi}_1 + \alpha_2\,\rho_{02}\,\widetilde{\psi}_2\Big)\,\widetilde{\psi_1}\,\operatorname{mes}\Gamma_{21} + \rho_{02}\int\limits_{\Gamma_{22}} |\psi_2|^2 d\Gamma_{22} -$$

$$-\Big((1-\alpha_2)\,\rho_{01}\,\widetilde{\psi}_1 + \alpha_2\,\rho_{02}\,\widetilde{\psi}_2\Big)\,\widetilde{\psi_2}\,\operatorname{mes}\Gamma_{22} = \rho_{02}\|\psi_2\|^2_{H_{22}} + \rho_{01}|\widetilde{\psi}_1|^2 \operatorname{mes}\Gamma_{21}.$$

Таким образом,

$$(M_1 w_2, w_2)_{\widehat{H}_2} \geqslant k_1 \cdot \Big(\|\psi_2\|^2_{H_{22}} + |\widetilde{\psi}_1|^2 \operatorname{mes}\Gamma_{21}\Big) = k_1 \cdot \|w_2\|_{\widehat{H}_2}, \quad k_1 := \min(\rho_{01}, \rho_{02}) > 0.$$

Из полученного результата следует лемма.

Лемма 1.4. *Для M_1 и $\mathcal{N}_1$ из (1.47) справедливы оценки*

$$k_1\,\widehat{I} \leqslant M_1 \leqslant k_2\,\widehat{I}, \quad k_1\,I \leqslant \mathcal{N}_1 \leqslant k_2\,I, \quad k_2 := max(\rho_{01}, \rho_{02}) \geqslant k_1,$$

где $\widehat{I}$ и I — единичные операторы в $\widehat{H}_2$ и H_2, соответственно.

Лемма 1.5. *Оператор $\mathcal{A}_1$ (см. (1.43)) ограничен, самосопряжен и положителен.*

Доказательство. Свойство ограниченности следует из того, что ограничены все операторные коэффициенты матрицы $\mathcal{A}_1$.

Найдем квадратичную форму оператора $\mathcal{A}_1$. Для любого $\eta \in \mathcal{H}$ имеем

$$(\mathcal{A}_1\eta, \eta) = \left(\begin{pmatrix} (\rho_1 S_0 + \rho_2 S_1)\eta_0 - \rho_2 S_3 \eta_2 \\ -\rho_2 S_2 \eta_0 + \rho_2 \mathcal{C}\eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_2 \end{pmatrix}\right) = \rho_1\,(S_0\eta_0, \eta_0) + (\rho_2 S_1 \eta_0 - \rho_2 S_3 \eta_2, \eta_0) +$$

$$+ (-\rho_2 S_2 \eta_0 + \rho_2 \mathcal{C}\eta_2, \eta_2) = \rho_1\,(S_0\eta_0, \eta_0) + \rho_2\,(-P_{\Gamma_1}\Psi_2, \eta_0) + \rho_2\,(P_{\Gamma_2}\Psi_2, \eta_2) =$$

$$= \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Psi_1|^2\, d\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Psi_2|^2\, d\Omega_2. \tag{1.48}$$

Так как

$$(S_0\eta_0, \eta_0) = \left(P_{\Gamma_1}\Psi_1, \frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1}\right) = \int\limits_{\Gamma_1} P_{\Gamma_1}\Psi_1\, \frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1}\, d\Gamma_1 = \int\limits_{\partial\Omega_1} P_{\Gamma_1}\Psi_1\, \frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1}\, dS_1 =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_1} \Psi_1 \cdot (\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_1)\, dS_1 = \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Psi_1\, d\Omega_1 = \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Psi_1|^2\, d\Omega_1;$$

$$-\,(P_{\Gamma_1}\Psi_2, \eta_0) + (P_{\Gamma_2}\Psi_2, \eta_2) = \int\limits_{\Gamma_1} P_{\Gamma_1}\Psi_2\, \frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_2}\, d\Gamma_1 + \int\limits_{\Gamma_2} P_{\Gamma_2}\Psi_2\, \frac{\partial\Psi_{2,2}}{\partial n_2}\, d\Gamma_2 =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_2} \Psi_2\, \left(\frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_2} + \frac{\partial\Psi_{2,2}}{\partial n_2}\right)\, dS_2 = \int\limits_{\partial\Omega_2} \Psi_2\, \frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2}\, dS_2 = \int\limits_{\partial\Omega_2} \Psi_2 \cdot (\nabla\Psi_2 \cdot \vec{n}_2)\, dS_2 =$$

$$= \int\limits_{\Omega_2} \nabla\Psi_2 \cdot \nabla\Psi_2\, d\Omega_2 = \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Psi_2|^2\, d\Omega_2.$$

С учетом ограниченности оператора $\mathcal{A}_1$ из (1.48) можно установить, что он самосопряжен и положителен. □

1.6. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка следующего вида:

$$A^{1/2}\frac{d^2}{dt^2}\left(A^{1/2}u\right) + Bu = f\,(t)\,, \quad u\,(0) = u^0, \quad u'\,(0) = u^1, \tag{1.49}$$

где операторные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$0 < A = A^* \in \mathcal{L}\,(H)\,, \quad B = B^* \gg 0. \tag{1.50}$$

Здесь $\mathcal{L}(H)$ — пространство ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве H. В частности, операторы A^{-1} и B могут быть неограниченными самосопряженными операторами, заданными на плотных в H областях определения $\mathcal{D}\left(A^{-1}\right)$ и $\mathcal{D}(B)$.

Приведенные ниже результаты изложены в [4, с. 44–47], которые в свою очередь являются обоснованием соответствующих утверждений из [12, с. 57–62], а также [5, с. 38–76, 158–170].

Определение 1.1. Будем говорить, что функция $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является *сильным решением задачи Коши* (1.49) со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2}) \subset H$, если выполнены следующие условия:

$$u(t) \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad Bu(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})), \quad A^{1/2}u(t) \in C^2([0,T];H),$$

выполнено уравнение и начальные условия (1.49).

Теорема 1.2. *Если выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{1.51}$$

то задача Коши (1.49) *имеет единственное сильное решение* (*со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$) *на отрезке* $[0,T]$.

Замечание 1.4. Так как оператор $0 < A = A^* \in \mathcal{L}(H)$, то оператор $A^{1/2}$ можно внести под знак производной d^2/dt^2, а следовательно, условия теоремы 1.2 достаточны и для существования сильного решения уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2}(Au) + Bu = f(t). \tag{1.52}$$

Замечание 1.5. В случае, когда оператор $A \gg 0$, обратный оператор A^{-1} является ограниченным, а значит, $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$. Следовательно, условия (1.51) сильной разрешимости задачи Коши (1.49) эквивалентны условиям

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T];H). \tag{1.53}$$

1.7. Теорема существования сильного решения. С учетом лемм 1.4 и 1.5 имеем, что оператор $\mathcal{A} \gg 0$ (см. определение (1.43)), и следовательно, он ограниченно обратим. Тогда, как следствие теоремы 1.2 и замечания 1.5, получим следующую теорему.

Теорема 1.3. *Если выполнены условия*

$$\eta^0 \in \mathcal{D}(B), \quad \eta^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad \mathcal{G} \in C^1([0,T];\mathcal{H}), \tag{1.54}$$

то существует единственное сильное решение задачи (1.43) (*в смысле определения* 1.1).

Опишем достаточное условие сильной разрешимости в терминах исходного оператора K. Предварительно дадим (согласованные между собой) определения сильных по переменной t решений задач (1.1)–(1.4), (1.24)–(1.28).

Определение 1.2. *Сильным* (по переменной t) *решением* задачи (1.1)–(1.4) на промежутке $[0,T]$ назовем набор функций $\vec{u}_i(t,x)$, $p_i(t,x)$ и $\zeta_i(t,\hat{x})$ $(i=1,2)$, для которых выполнены следующие условия:

1. $\vec{u}_i(t) \in C^1([0,T];\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i))$, $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i) := \vec{J}_0(\Omega_i) \oplus \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i)$, $\nabla p_i(t,x) \in C([0,T];\vec{G}(\Omega_i))$, $\vec{G}(\Omega_i) := \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i)$ $(i=1,2)$ (см. (1.12), (1.17)),
   и при любом $t \in [0,T]$ справедливо первое уравнение (1.1);
2. $\zeta_1 \in C^1([0,T];L_2(\Gamma_1))$, $\zeta_2 \in C^1([0,T];L_2(\Gamma_2))$, $\int\limits_{\Gamma_i} \zeta_i d\Gamma_i = 0$ $(i=1,2)$;
3. выполнены граничные условия на Γ_1 и Γ_2:
   $$p_1 - p_2 = \Delta\rho g\zeta_1 + \rho_0\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} \in C([0,T];L_2(\Gamma_1)),$$
   $$p_2 = g\rho_2\zeta_2 + \rho_{01}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2} \in C([0,T];L_2(\Gamma_{21})), \quad p_2 = K\zeta_2 + \rho_{02}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2} \in C([0,T];L_2(\Gamma_{22})),$$
   где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в соответствующих пространствах;
4. выполнены начальные условия (1.4).

Определение 1.3. *Сильным* (по переменной t) *решением* задачи (1.24)–(1.28) на промежутке $[0,T]$ назовем такой набор функций $\Psi_i\,(t,x),\ \zeta_i(t,\hat{x})\ \ (i=1,2)$ для которых выполнены следующие условия:

1. $\nabla\Psi_1\in C^1([0,T];\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)),\quad \nabla\Psi_2\in C^1([0,T];\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)),$ где $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)=\vec{G}_1(\Omega_2)\dotplus\vec{G}_2(\Omega_2)$ (см. подробнее (1.34));
2. для $\Psi_i(t,x)$ и $\zeta_i(t,\hat{x})$ выполнены кинематические условия
$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1}=\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2}=\zeta_1\in C^1([0,T];L_2(\Gamma_1)),\qquad \frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2}=\zeta_2\in C^1([0,T];L_2(\Gamma_2));$$
3. выполнены граничные условия (1.25)–(1.27), где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в соответствующих пространствах;
4. выполнены начальные условия (1.28).

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия*

1. $\vec{u}_1^0\in\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1):=\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1),\ \vec{u}_2^0\in\vec{J}_{\widehat{0,S_2}}(\Omega_2):=\vec{J}_0(\Omega_2)\oplus\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)$ (*см.* (1.12), (1.17)), *причем* $\gamma_1P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x)=-\gamma_2\Pi_1P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x)$ (*на* Γ_1) (*см.* (1.44));
2. $\zeta_1^0\in L_2(\Gamma_1),\ \zeta_2^0\in L_2(\Gamma_2),\ \int_{\Gamma_i}\zeta_i^0d\Gamma_i=0\ \ (i=1,2),\ \zeta_2^0|_{\Gamma_{22}}\in\mathcal{D}(K)$ (*см.* (1.5));
3. $\zeta_1^1=[(P_{h,S_1}\vec{u_1}^0(x))\cdot\vec{n_1}]_{\Gamma_1}\in L_2(\Gamma_1),\ \zeta_2^1=[(P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u_2}^0(x))\cdot\vec{n_2}]_{\Gamma_2}\in L_2(\Gamma_2),\ \int_{\Gamma_i}\zeta_i^1d\Gamma_i=0\ \ (i=1,2),$ *при этом* $\zeta_2^1|_{\Gamma_{22}}\in\mathcal{D}(K^{1/2})$;
4. $\vec{f}_i\,(t)\in C^1\left([0,T]\,;\vec{L}_2\,(\Omega_i)\right)$.

Тогда каждая из задач (1.1)–(1.4), (1.24)–(1.28), (1.43) *имеет единственное сильное по* t *решение.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что если выполнены условия теоремы 1.4, то выполнены и условия (1.54), а значит, задача Коши (1.43) имеет единственное сильное по t решение. Дальнейшее доказательство основано на обратном переходе от задачи Коши (1.43) к начально-краевой задаче (1.24)–(1.28), а затем к задаче (1.1)–(1.4). ☐

Замечание 1.6. Вспоминая вид оператора K и его область определения до расширения (см. (1.5)), можно записать в теореме 1.4 более простые достаточные условия на функцию ζ_2^0:
$$\zeta_2^0\in C^1(\overline{\Gamma_2}),\quad \zeta_2^0\in C^4(\overline{\Gamma}_2),\quad \int\limits_{\Gamma_2}\zeta_2^0\,d\Gamma_2=0,$$
$$\zeta_2^0=\frac{\partial\zeta_2^0}{\partial\nu}=0\ (\text{на } \gamma_{22}),\quad M\zeta_2^0=N\zeta_2^0=0\ (\text{на } \partial\Gamma_{22}\setminus\gamma_{22}).$$
Для функции ζ_2^1 накладывается условие принадлежности области определения оператора $K^{1/2}$. В этом случае главные условия (см., например, [6, с. 82]) сохраняются, а естественные условия снимаются (см. подробнее [10]), и потому достаточно потребовать, чтобы
$$\zeta_2^1\in C^2(\overline{\Gamma_2}),\quad \int\limits_{\Gamma_2}\zeta_2^1\,d\Gamma_2=0,\quad \zeta_2^1=\frac{\partial\zeta_2^1}{\partial\nu}=0\ (\text{на } \gamma_{22}).$$

2. Собственные колебания

В случае отсутствия внешних сил (кроме гравитационного поля), т. е. при $\mathcal{G}\equiv0$, рассмотрим собственные колебания — решения задачи (1.43), зависящие от времени по закону $\exp(i\omega t)$: $\eta(t,x)=e^{i\omega t}\eta(x)$. Для амплитудных элементов $\eta(x)$ приходим к спектральной задаче
$$\lambda\mathcal{A}\eta=\mathcal{B}\eta,\quad \lambda:=\omega^2. \tag{2.1}$$
При $\lambda=0$ получаем $\eta=0$. Значит, $\lambda=0$ не является собственным значением для спектральной задачи (2.1). Разделим обе части на λ и переобозначим:
$$\mathcal{A}\eta=\mu\mathcal{B}\eta,\quad \mu:=1/\lambda. \tag{2.2}$$

Из определения оператора $\mathcal{B} = \mathrm{diag}(g\Delta\rho; \mathcal{N}_2)$ и леммы 1.3 следует его обратимость, причем обратный оператор $\mathcal{B}^{-1}$ — ограниченный и положительный. Значит, существует оператор $\mathcal{B}^{-1/2}$. Введем обозначение:

$$\mathcal{B}^{1/2}\eta =: \psi. \tag{2.3}$$

Подставим (2.3) в уравнение (2.2), подействуем на обе части уравнения ограниченным оператором $\mathcal{B}^{-1/2}$ и получим:

$$\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1/2}\eta = \mu\eta. \tag{2.4}$$

Получили задачу на собственные значения для оператора (см. подробнее (1.43))

$$J := \mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1/2} = \mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_1\mathcal{B}^{-1/2} + \mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2},$$
$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 S_0 + \rho_2 S_1 & -\rho_2 S_3 \\ -\rho_2 S_2 & \rho_2 \mathcal{C} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \rho_0 I_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_1 = \begin{pmatrix} \rho_{01} I_{21} & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{A}_1$ ограничен, самосопряжен и положителен (лемма 1.5). Более того, он является компактным оператором, компактность оператора $\mathcal{C}$ следует из леммы 1.2, а операторы S_i компактны по построению (см. вспомогательные задачи). Таким образом, оператор $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_1\mathcal{B}^{-1/2}$ является компактным как произведение компактного оператора на ограниченные. Оператор $\mathcal{A}_2$ ограничен и положительно определен (лемма 1.4), следовательно, оператор J является самосопряженным ограниченным положительно определенным оператором, а значит, спектр задачи (2.4) будет вещественным и положительным. Далее, к оператору J применима теорема Вейля, а значит, предельный спектр этого оператора совпадает с предельным спектром оператора $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2}$ ($\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_1\mathcal{B}^{-1/2}$ есть компактное возмущение оператора $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2}$). Напомним, что *предельным спектром* оператора называется совокупность точек непрерывного спектра, предельных точек точечного спектра и собственных значений бесконечной кратности.

Исследуем предельный спектр оператора $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2}$. Из вида операторов $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{B}$ имеем, что

$$\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2} = \begin{pmatrix} (g\Delta\rho)^{-1/2} & 0 \\ 0 & N_2^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 I_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g\Delta\rho)^{-1/2} & 0 \\ 0 & N_2^{-1/2} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \rho_0/(g\Delta\rho) & 0 \\ 0 & N_2^{-1/2}N_1N_2^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad N_2^{-1/2}N_1N_2^{-1/2} = \begin{pmatrix} \rho_{01}/(g\rho_2) & 0 \\ 0 & M_2^{-1/2}M_1M_2^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Оператор M_1 — ограниченный (лемма 1.4), а оператор $M_2^{-1/2}$ — компактный (конец леммы 1.3), следовательно, оператор $M_2^{-1/2}M_1M_2^{-1/2}$ — компактный, и предельный спектр оператора $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2}$ состоит из точек

$$\sigma(\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2}) = \Big\{0; \rho_0/(g\Delta\rho); \rho_{01}/(g\rho_2)\Big\}.$$

Проверим, что данные точки предельного спектра оператора $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2}$ являются пределами ветвей собственных значений, а не собственными значениями бесконечной кратности.

Оператор $\mathcal{A}$ положительно определен, а следовательно, обратим. Тогда для $\mu = 0$ $(\lambda = \infty)$, решая уравнение (2.2), получаем, что $\eta = 0$. Таким образом, точка $\mu = 0$ не является собственным значением оператора J.

Для исследования точки $\rho_{01}/(g\rho_2)$ запишем уравнение (2.2) в виде системы:

$$\begin{cases} (\rho_1 S_0 + \rho_2 S_1 + \rho_0 I_1)\,\eta_0 - \rho_2 S_{31} w_1 - \rho_2 S_{32} w_2 = \mu \cdot g\Delta\rho\eta_0 = \rho_{01}\,(\Delta\rho/\rho_2)\,\eta_0, \\ -\rho_2 S_{21}\eta_0 + \rho_2 C_{11} w_1 + \rho_2 C_{12} w_2 + \rho_{01} w_1 = \mu \cdot g\rho_2 w_1 = \rho_{01} w_1, \\ -\rho_2 S_{22}\eta_0 + \rho_2 C_{21} w_1 + \rho_2 C_{22} w_2 + M_1 w_2 = \mu \cdot M_2 w_2 = \rho_{01}/(g\rho_2)\, M_2 w_2, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $w_1 = P_{21}\eta_2$, $w_2 = \widehat{P}\eta_2$, $S_{21}\eta_0 = P_{21}S_2\eta_0$, $S_{22}\eta_0 = \widehat{P}S_2\eta_0$, $S_{31}w_1 = S_3P_{21}\eta_2$, $S_{32}w_2 = S_3\widehat{P}_2\eta_2$.

Согласно результату, полученному в работе [13, теорема 4], оператор C_{11}^{-1} ограниченно действует из пространства $H_{21}^{1/2}$ в пространство $H_{21}^{-1/2}$. Таким образом, из второго уравнения можно выразить w_1:

$$-\rho_2 S_{21}\eta_0 + \rho_2 C_{12} w_2 = -\rho_2 C_{11} w_1, \quad w_1 = C_{11}^{-1}(S_{21}\eta_0 - C_{12}w_2).$$

Подставляя полученное выражение в (2.5), приходим к системе

$$\begin{cases}\mathcal{P}\eta_0 := \Big(\rho_1 S_0 + \rho_2 S_1 - \rho_2 S_{31} C_{11}^{-1} S_{21} + (\rho_0 - \rho_{01}\,\Delta\rho/\rho_2)\Big)\eta_0 = \rho_2(S_{32} - S_{31} C_{11}^{-1} C_{12}) w_2,\\ -\rho_2\Big(S_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} S_{21}\Big)\eta_0 + \rho_2\Big(C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12} + M_1\Big) w_2 = \rho_{01}/(g\rho_2)\, M_2 w_2.\end{cases}$$

Оператор S_0 — положительный как оператор первой вспомогательной задачи. Кроме того, повторяя рассуждения леммы 1.5, имеем

$$((\rho_1 S_0 + \rho_2 S_1 - \rho_2 S_{31} C_{11}^{-1} S_{21})\eta_0, \eta_0) = \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Psi_1|^2 d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Psi_{2,1}|^2 d\Omega_2 \geqslant 0.$$

Таким образом, при условии $\rho_0 - \rho_{01}\,\Delta\rho/\rho_2 > 0$ оператор $\mathcal{P}$ положительно определен, а значит, имеет ограниченный обратный. Выражая из первого уравнения

$$\eta_0 = \rho_2 \mathcal{P}^{-1}(S_{32} - S_{31} C_{11}^{-1} C_{12}) w_2$$

и подставляя результат во второе уравнение, приходим к задаче

$$\mathcal{P}_0 w_2 := \Big(-\rho_2^2 (S_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} S_{21}) \mathcal{P}^{-1} (S_{32} - S_{31} C_{11}^{-1} C_{12}) + \\ + \rho_2 (C_{22} - C_{21} C_{11}^{-1} C_{12} + M_1)\Big) w_2 = \rho_{01}/(g\rho_2)\, M_2 w_2. \quad (2.6)$$

Здесь оператор M_2 — положительно определенный (лемма 1.3), поэтому можно сделать замену $M_2^{1/2} w_2 = z$. Тогда уравнение (2.6) преобразуется в следующее:

$$M_2^{-1/2} \mathcal{P}_0 M_2^{-1/2} z = \rho_{01}/(g\rho_2)\, z.$$

Оператор $\mathcal{P}_0$ является ограниченным, а оператор $M_2^{-1/2}$ является компактным (см. подробнее доказательство леммы 1.3), поэтому весь целиком оператор, стоящий слева, также является компактным. Значит, собственное значение $\rho_{01}/(g\rho_2)$ может быть лишь собственным значением конечной кратности. Аналогично проверяется соответствующие утверждение для значения $\rho_0/(g\Delta\rho)$.

Итак, предельный спектр оператора $J = \mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1/2}$ из (2.4) состоит из трех точек: 0, $\rho_{01}/(g\rho_2)$ и $\rho_0/(g\Delta\rho)$, причем к каждой точке сходится ветвь собственных значений оператора J. Тогда для квадратов собственных частот колебаний ω_k получаем предельный спектр, состоящий из $+\infty$ и точек $g\rho_2/\rho_{01}$, $g\Delta\rho/\rho_0$ $(g\rho_2/\rho_{01} > g\Delta\rho/\rho_0 > 0)$, причем существуют соответствующие ветви собственных значений, сходящиеся к данным значениям. Так как все собственные значения самосопряженного оператора J конечнократные, то объединение собственных элементов $\{\eta_k\}_{k=1}^{+\infty}$ оператора J образует ортогональный базис пространства $\mathcal{H}$ (см. [7, с. 411]). На основании выше изложенного окончательно можно сформулировать спектральную теорему для задачи (2.1).

Теорема 2.1. *Задача* (2.1) *имеет дискретный положительный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *с предельными точками на бесконечности и* $\lambda_0 = g\rho_2/\rho_{01} > 0$, $\lambda_1 = g\Delta\rho/\rho_0 > 0$. *Совокупность всех собственных элементов* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *задачи* (2.1) *образует ортогональный базис в пространстве* $\mathcal{H}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5. — С. 3–78.
2. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Математические задачи динамики флотирующей жидкости// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1990. — *28*. — С. 3–86.
3. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: Форма, 2016.
4. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтера в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций. — Симферополь: Форма, 2016.
5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1967.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5. — М.: Физматлит, 1969.

8. *Цветков Д. О.* Нормальные колебания идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2017. — *3.* — С. 79–93.
9. *Цветков Д. О.* Малые движения идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом// Сиб. электрон. мат. изв. — 2018. — *15.* — С. 422–435.
10. *Цветков Д. О.* Малые движения идеальной стратифицированной жидкости, частично покрытой упругим льдом// Вестн. Удмуртск. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2018. — *28*, № 3. — С. 328–347.
11. *Цветков Д. О.* Колебания стратифицированной жидкости, частично покрытой льдом (общий случай)// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 1. — С. 130–144.
12. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2001.
13. *Tsvetkov D. O.* Oscillations of a liquid partially covered with ice// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 5. — С. 1078–1093.

Д. О. Цветков
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: tsvetdo@gmail.com

UDC 517.98
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-498-515
EDN: NLGGDV

On one boundary-value problem related to internal flotation

D. O. Tsvetkov

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

Abstract. We study the problem of small motions of a system of immiscible ideal fluids with a free surface consisting of two domains: a domain of elastic ice and a domain of crushed ice. Elastic ice is modeled by an elastic plate. By crushed ice we mean weighty particles of some substance floating on the free surface. We also assume that the interface between the fluid layers is a weighty surface. Using the method of orthogonal projection of boundary conditions and the introduction of auxiliary problems, we reduce the original initial-boundary value problem to an equivalent Cauchy problem for a second-order differential equation in a Hilbert space. We obtain the conditions under which there is a strong-in-time solution of the initial-boundary value problem describing the evolution of this hydraulic system. We prove statements about the structure of the spectrum of the problem and about the basis property of the system of eigenfunctions.

Keywords: ideal fluid, free surface, separation of fluid layers, orthogonal projection method, strong solution, spectrum.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: D. O. Tsvetkov, “On one boundary-value problem related to internal flotation,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 498–515. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-498-515

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, “Spektral’nye zadachi dlya sil’no ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka v oblastyakh s gladkoy i negladkoy granitsey” [Spectral problems for strongly elliptic second-order systems in domains with smooth and nonsmooth boundaries], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 5, 3–78 (in Russian).
2. C. A. Gabov and A. G. Sveshnikov, “Matematicheskie zadachi dinamiki flotiruyushchey zhidkosti” [Mathematical problems of the dynamics of floating liquid], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1990, **28**, 3–86 (in Russian).
3. N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green’s Formula and Some of Its Applications], Forma, Simferopol’, 2016 (in Russian).
4. N. D. Kopachevsky, *Integrodifferentsial’nye uravneniya Vol’tera v gil’bertovom prostranstve: spetsial’nyy kurs lektsiy* [Volterra Integrodifferential Equations in Hilbert Space: Special Course of Lectures], Forma, Simferopol’, 2016 (in Russian).
5. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial’nye uravneniya v banakhovykh prostranstvakh* [Linear Differential Equations in Banach Spaces], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
6. S. G. Mikhlin, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
7. V. I. Smirnov, *Kurs vysshey matematiki. T. 5* [Course of Higher Mathematics. Vol. 5], Fizmatlit, Moscow, 1969 (in Russian).
8. D. O. Tsvetkov, “Normal’nye kolebaniya ideal’noy stratifitsirovannoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost’yu, polnost’yu pokrytoy uprugim l’dom” [Normal oscillations of an ideal stratified fluid with a free surface completely covered with elastic ice], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2017, **3**, 79–93 (in Russian).
9. D. O. Tsvetkov, “Malye dvizheniya ideal’noy stratifitsirovannoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost’yu, polnost’yu pokrytoy uprugim l’dom” [Small motions of an ideal stratified fluid with a free surface completely covered with elastic ice], *Sib. elektron. mat. izv.* [Siberian Electron. Math. Bull.], 2018, **15**, 422–435 (in Russian).
10. D. O. Tsvetkov, “Malye dvizheniya ideal’noy stratifitsirovannoy zhidkosti, chastichno pokrytoy uprugim l’dom” [Small motions of an ideal stratified fluid partially covered with elastic ice], *Vestn. Udmurtsk. un-ta. Mat. Mekh. Komp’yut. nauki* [Bull. Udmurtia Univ. Math. Mech. Comp. Sci.], 2018, **28**, No. 3, 328–347 (in Russian).
11. D. O. Tsvetkov, “Kolebaniya stratifitsirovannoy zhidkosti, chastichno pokrytoy l’dom (obshchiy sluchay)” [Oscillations of a stratified fluid partially covered with ice (general case)], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 1, 130–144 (in Russian).
12. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2001.
13. D. O. Tsvetkov, “Oscillations of a liquid partially covered with ice,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 1078–1093.

D. O. Tsvetkov

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

E-mail: tsvetdo@gmail.com