

УДК 51-7, 519.6

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-487-497

EDN: NLALYX

ОБРАТНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЛЩИНЫ НАКИПИ В ТРУБКАХ ПАРОВОГО КОТЛА

А. Н. СОЛОВЬЕВ^{1,2}, М. А. ШЕВЧЕНКО², М. С. GERMANCHUK³

¹Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова, Симферополь, Россия

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

³Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

Аннотация. В работе рассматривается нестационарная нелинейная задача теплопроводности в трубке парового котла, на внутренней поверхности которой находится кальцинированная накипь. В обратной геометрической задаче определяется толщина этой накипи по изменению температуры на внешней границе трубки. Рассматривается три случая движения воды и пара в трубке: только вода, вода и пар и только пар. Задача решается на сечении элемента конструкции, движение воды и пара моделируется наличием распределенного отбора тепла в них, при образовании пара учитывается отбор тепла на фазовой границе, которая задается температурой кипения. В результате решения задачи методом конечных элементов для трех рассматриваемых случаев построена зависимость температуры на внешней границе от толщины слоя накипи. Эти зависимости служат основой решения обратной геометрической задачи идентификации параметров накипи.

Ключевые слова: обратная геометрическая задача теплопроводности, фазовый переход вода–пар, метод конечных элементов.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашения: № 075-02-2023-1799, № 75-02-2024-1431.

Для цитирования: А. Н. Соловьев, М. А. Шевченко, М. С. Германчук. Обратная геометрическая задача теплопроводности определения толщины накипи в трубках парового котла // Современ. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 3. С. 487–497. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-487-497>

1. ВВЕДЕНИЕ

Решению обратных задач теплопроводности посвящено огромное внимание в мировой научной литературе. Это связано с широким применением теплотехники и с тем, что повышение скорости теплопередачи теплообменного оборудования — ее актуальная тема. Основные направления этих исследований связаны с решением коэффициентных и граничных обратных задач.

Исследованию теплопередачи наножидкости, металлической пены и их комбинации посвящена обзорная работа [12]. Формулировке структуры математической модели на основе оператора интегрирования нецелого порядка для идентификации сложных тепловых систем посвящена работа [3]. В области теплопередачи обратные задачи связаны с оценкой параметров, которые трудно

измерить напрямую. Полезность обратных методов такова, что из-за тяжелых условий прямое измерение определенной переменной становится недоступным.

Целью работы [10] является выполнение обратной оценки в двух задачах. Первый случай связан с оценкой граничного условия теплового потока и термического контактного сопротивления между двумя стальными пластинами. Второй случай заключается в оценке трех тепловых сопротивлений в бортовой системе летательного аппарата, состоящей из четырех компонентов и окружающего воздуха. Результаты этой работы объединяют недорогую установку обратной оценки и свидетельствуют о возможности многомерной оценки в обратных задачах теплопередачи.

В работе [4] предложен новый метод оценки температурно-зависимых тепловых свойств с использованием решения нестационарных обратных задач теплопроводности. Для решения некорректной обратной задачи применяется метод наименьших квадратов, чтобы минимизировать разницу между расчетными и измеренными температурами. Даны обратные оценки теплоемкости, теплопроводности и температуропроводности. Зависящие от времени конвективные граничные условия на внутренней стенке являются основными причинами потока и теплопередачи, вызывающими термическую усталость в трубах с термическим расслоением.

В работе [5] была разработана трехмерная нестационарная обратная задача теплопроводности для одновременной оценки многих переменных нестационарного конвективного граничного условия. На основании расчетных результатов рассмотрено влияние объемного расхода холодной воды на коэффициент кондуктивной теплопередачи вблизи внутренней стенки рабочего участка и распределение температуры стенки трубы.

В статье [6] представлен метод оценки пространственно изменяющегося сопротивления теплового контакта, получены две граничные обратных задач теплопроводности. Используются как аналитические решения, так и метод конечных элементов. Количественная оценка неопределенности расчетного сопротивления теплового контакта демонстрируется путем добавления ошибки смещения, основанной на точности датчиков, к температурам, указанным во внутренних точках обоих материалов.

В статье [9] рассматривается неитерационное обратное определение температурно-зависимой теплопроводности в двумерной стационарной задаче теплопроводности. Метод фундаментальных решений использован для решения двумерной задачи теплопроводности. С помощью метода интегрального преобразования в работе [11] решена обратная задача нестационарной теплопроводности в тонкой конечной круглой пластине с заданным распределением температуры на внутренней поверхности, являющимся функцией времени и положения, а также определены тепловые прогибы на внешней криволинейной поверхности. Из-за эрозии жидкости и отложения нагаров в трубах внутренние дефекты трубопроводов имеют широкое распространение и серьезно угрожают безопасности промышленного производства.

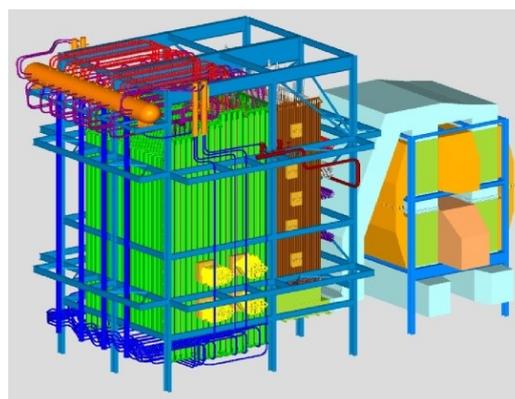
В статье [13] предлагается модель косвенной инверсии, основанная на модифицированном методе одномерной коррекции (MODCM), для выявления эрозионного утончения и отложений обростания внутренней стенки двумерной круглой трубы. Предлагаемая модель косвенной инверсии превосходит вычислительную эффективность других методов и дает способность отслеживать прерывистые границы.

В работе [2] предложен метод, сочетающий в себе метод дискретных ординат, метод конечных элементов и алгоритм Левенберга—Марквардта, для решения двумерных переходных обратно связанных задач излучения и проводимости. Во-первых, одновременно извлекаются три радиационных теплофизических параметра полупрозрачных сред. Во-вторых, параметры керамики Si_3N_4 восстанавливаются с использованием экспериментально измеренных температур в качестве обратных входных данных.

В настоящей работе рассматривается нестационарная нелинейная задача теплопроводности в трубке (рис. 1а) парового котла (рис. 1б), на внутренней поверхности которой находится кальцинированная накипь. В обратной геометрической задаче определяется толщина этой накипи по изменению температуры на внешней границе трубки. Рассматривается три случая движения воды и пара в трубке: только вода, вода и пар и только пар. Задача решается на сечении элемента конструкции, движение воды и пара моделируется наличием распределенного отбора тепла в них, при образовании пара учитывается отбор тепла на фазовой границе, которая задается температурой кипения. Источник моделируется дельта функцией Дирака, а фазовая граница связана

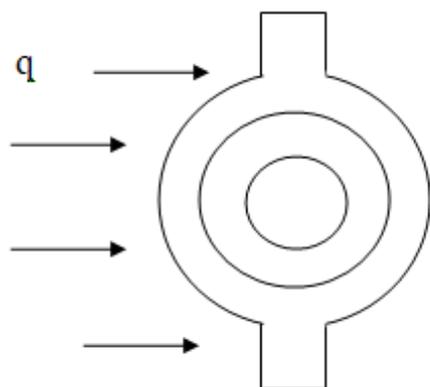


(a)

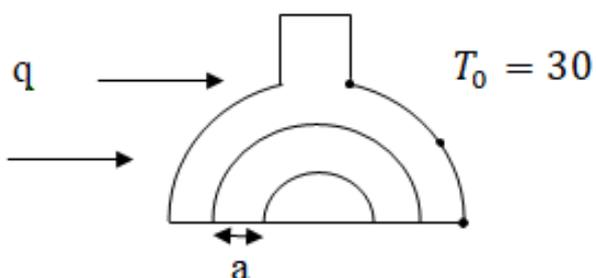


(b)

Рис. 1: Примеры конструкций (a) и модель парового котла (b)
 Fig. 1: Examples of structures (a) and a model of a steam boiler (b)



(a)



(b)

Рис. 2: Элемент конструкций (a) и расчетная модель (b)
 Fig. 2: Structural element (a) and calculation model (b)

с кусочно постоянными свойствами жидкой и газообразной сред. В результате решения задачи методом конечных элементов для трех рассматриваемых случаев построена зависимость температуры на внешней границе от толщины слоя накипи. Эти зависимости служат основой решения обратной геометрической задачи идентификации параметров накипи.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Геометрическая и физическая модель. Физическая модель представлена на рис. 1а и представляет собой периодический набор стальных цилиндрических трубок, имеющих внешний радиус R и внутренний r , соединенных стальными панелями толщины h . Для численного анализа рассматривается сечение элемента конструкции, перпендикулярное оси трубки (рис. 2а). Внешний слой выполнен из стали, внутренний круговой слой толщины a — кальцинированная накипь, внутренняя круговая область занята водой или паром, граница между которыми в явном виде не строится.

Со стороны камеры сгорания задается тепловой поток q , на внешней границе происходит теплообмен с окружающей средой заданной температуры T_0 . В силу предполагаемой симметрии процесса в рамках одного элемента рассматривается половина (верхняя) сечения (рис. 2б), при

этом на нижней и верхней границах задаются симметричные граничные условия (теплоизоляция).

2.2. Континуальная модель. Рассматривается нелинейная нестационарная задача теплопроводности относительно температуры $T(x, y, t)$ в системе координат Oxy , которая описывается [1] уравнением с переменными коэффициентами λ , ρ , c_r и источником S , зависящим от распределения температуры,

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) + W + S = \rho c_r \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

с граничными условиями:

$$S_q : -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q,$$

$$S_d \text{ и } S_t : -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad (2.2)$$

$$S_f : -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = f(T - T_0),$$

где S_q — левая граница, S_d и S_t — низ и верх, S_f — правая граница области (рис. 2b). Коэффициенты λ , ρ , c_r — постоянные в областях трубки, панели, слоя накипи, кусочно постоянны в жидкой и газообразной среде и зависят от температуры T и температуры фазового перехода от жидкости к пару T_s

$$c_r \rho = \begin{cases} C_1, & T > T_s, \\ C_2, & T \leq T_s, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_s, & T > T_s, \\ \lambda_w, & T \leq T_s, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$S = Q_w \delta(T - T_s). \quad (2.5)$$

Источник W принимается постоянным во внутренней круговой области и моделирует движение воды со скоростью, направленной по оси трубки, в результате чего в данное ее сечение постоянно прибывает среда с более низкой температурой.

3. КОНЕЧНО ЭЛЕМЕНТНАЯ МОДЕЛЬ

3.1. Дискретизация. Численная реализация модели (2.1)–(2.5) осуществлена методом конечных элементов в пакете FlexPDE. Используются треугольные квадратичные конечные элементы, примеры конечно элементного разбиения представлены на рис. 3.

3.2. Сглаживание. При численном расчете кусочно-постоянные свойства заменяются сигмоидальной зависимостью; так, выражение (2.4) заменяется формулой

$$\lambda = \frac{\lambda_w - \lambda_s}{1 + e^{d(T - T_s)}} + \lambda_s, \quad (3.1)$$

где λ_w , λ_s — теплопроводности воды и пара, соответственно.

Кроме того, дельта функция в выражении (2.5) заменяется на гауссовскую кривую, заданную формулой

$$S = Q_w e^{-d(T - T_s)^2}. \quad (3.2)$$

Замечание. Соотношения (3.1) и (3.2) которые представляют собой гладкие функции, которые существенно влияют на сходимость численного расчета, кроме этого, могут моделировать размытость фазовой границы, как это было предложено в [7, 8].

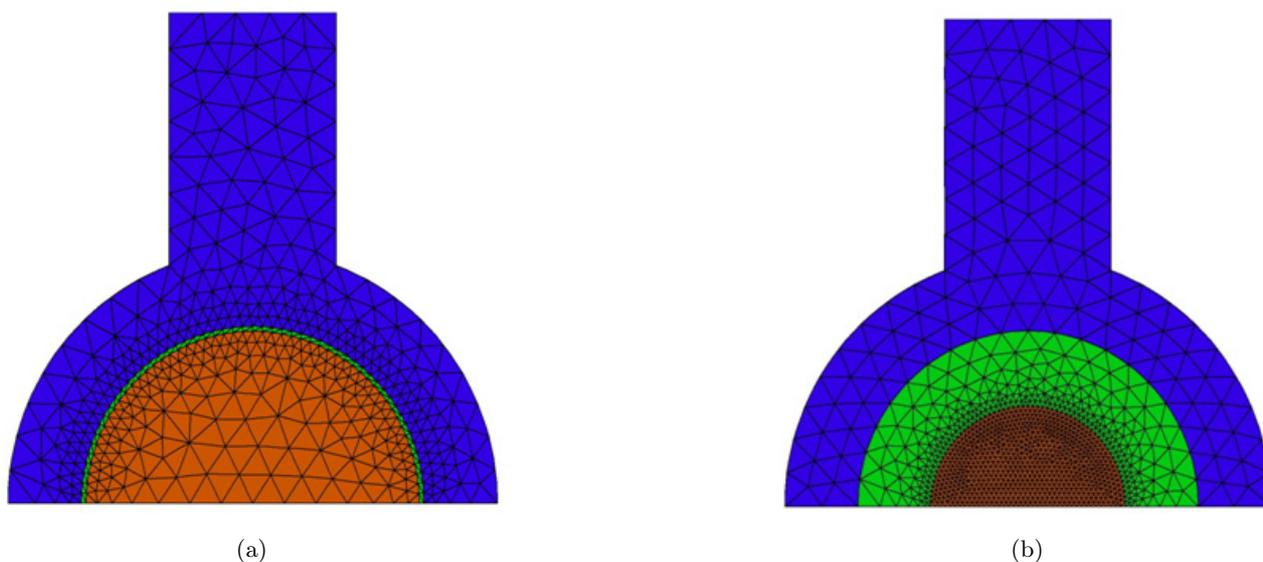


Рис. 3: Сетка конечных элементов для воды (а), для двух фаз — вода и пар (б)
 Fig. 3: Finite element mesh for water (a) and for two phases: water and steam (b)

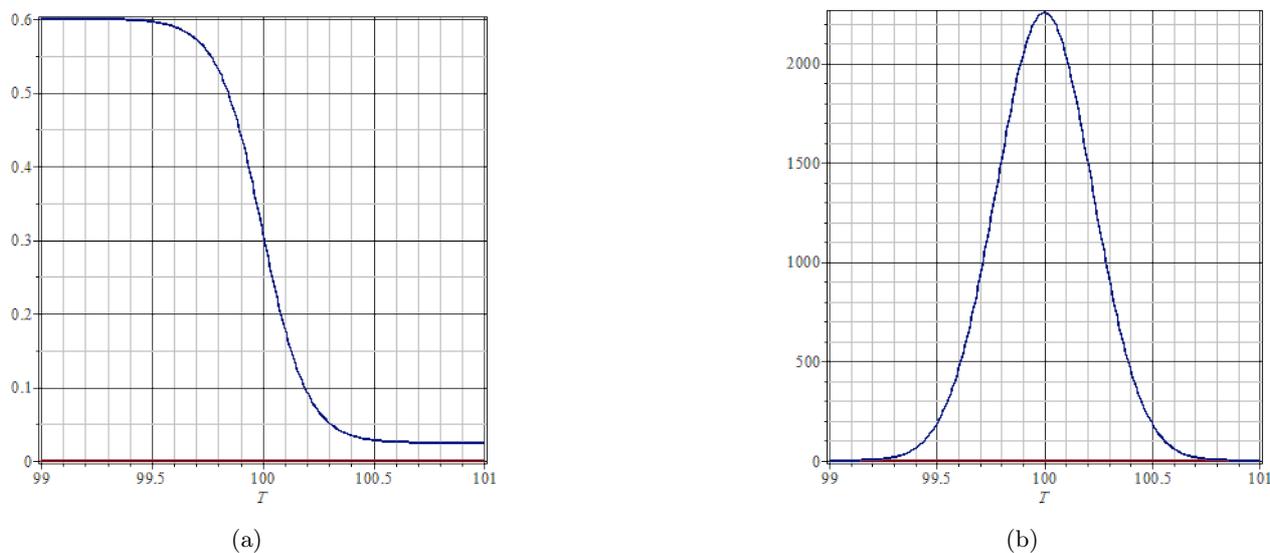


Рис. 4: Зависимости от температуры: коэффициента теплопроводности (а), источника S (б)
 Fig. 4: Dependencies on temperature: thermal conductivity coefficient (a) and source S (b)

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В численном эксперименте рассмотрено три случая заполнения трубки: в первом случае — только вода, во втором — вода и пар и в третьем — только пар. Размеры конструкции $R = 1,0$ см, $r = 0,7$ см, a изменяется в пределах от 0,02 см до 0,30 см, $d = 10$, $T_s = 100^\circ$ Цельсия, $T_0 = 30^\circ$ Цельсия (совпадает с начальной температурой конструкции), $Q_w = 2257000$ кДж/кг, $q = 600$ Вт/м², $W = -92500$ кДж/кг, $f = 5$ Вт/(м²·град), время расчета 60 сек. Конечноэлементная сетка содержала 2627 элементов и 1362 узла. Материал трубки — сталь, накипь — CaCO_3 , жидкость — вода, газ — водяной пар. В таб. 1 представлены теплофизические свойства материалов.

	λ Вт/(м·град)	ρ кг/м ³	c_r кДж/(кг·град)
Сталь	46,7	7800	0,46
Накипь	2,7	2000	0,8
Вода	0,6	1000	4,19
Водяной пар	0,024	0,6	2,1

	λ W/(m·deg)	ρ kg/m ³	c_r kJ/(kg·deg)
Steel	46.7	7800	0.46
Scale	2.7	2000	0.8
Water	0.6	1000	4.19
Water steam	0.024	0.6	2.1

Таб. 1

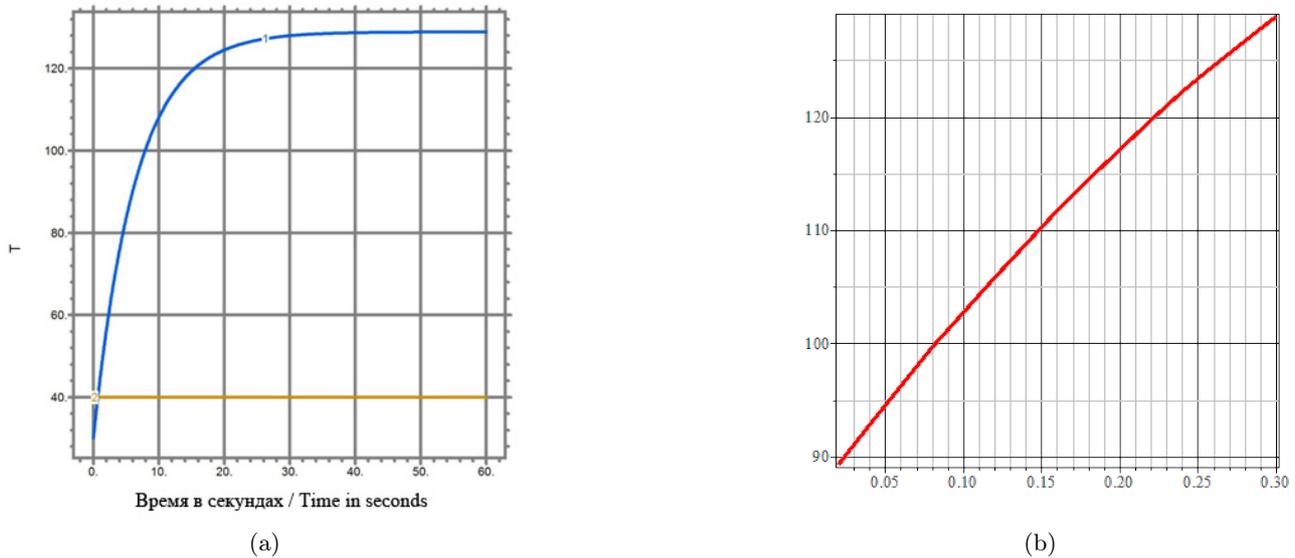


Рис. 5: Зависимости: температуры от времени (а), температуры от толщины слоя накипи (b)
 Fig. 5: Dependencies: temperature on time (a), temperature on the thickness of the scale layer (b)

4.1. Вода. В этом случае в трубке протекает вода, не превращающаяся в пар. На рис. 5а представлена зависимость температуры на внешней поверхности трубки от времени. Время выбрано с таким расчетом, что устанавливается стационарный режим теплообмена. На рис. 5б представлена зависимость температуры на внешней границе трубки от толщины слоя накипи. Эта зависимость может быть использована при решении обратной геометрической задачи.

На рис. 6 представлено распределение температуры в стационарном режиме при толщине слоя накипи: 0,02 см (рис. 6а), 0,3 см (рис. 6б).

4.2. Вода—пар. В этом случае в трубке протекает вода, и при достижении температуры кипения она превращается в пар. На рис. 7а представлено распределение температуры в стационарном режиме при толщине слоя накипи 0,3 см. Между водой и внутренней поверхностью накипи образуется слой пара. На рис. 7б представлена зависимость температуры на внешней границе трубки от толщины слоя накипи. Эта зависимость отличается от аналогичной для случая одной воды (рис. 6б), но также может быть использована при решении обратной геометрической задачи.

4.3. Пар. В последнем случае трубка заполнена паром. На рис. 8а представлено распределение температуры, в виде тепловой поверхности, при толщине слоя накипи 0,3 см. Векторное поле

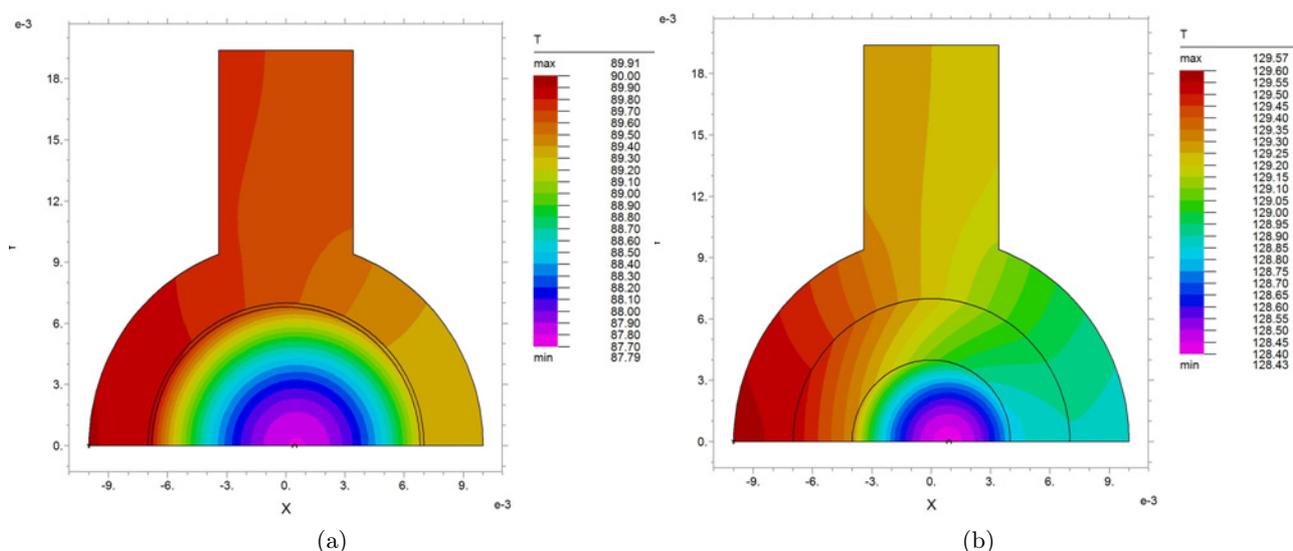


Рис. 6: Распределение температуры при толщине слоя накипи: 0,02 см (а), 0,3 см (б)

Fig. 6: Temperature distribution at scale layer thickness: 0.02 cm (a), 0.3 cm (b)

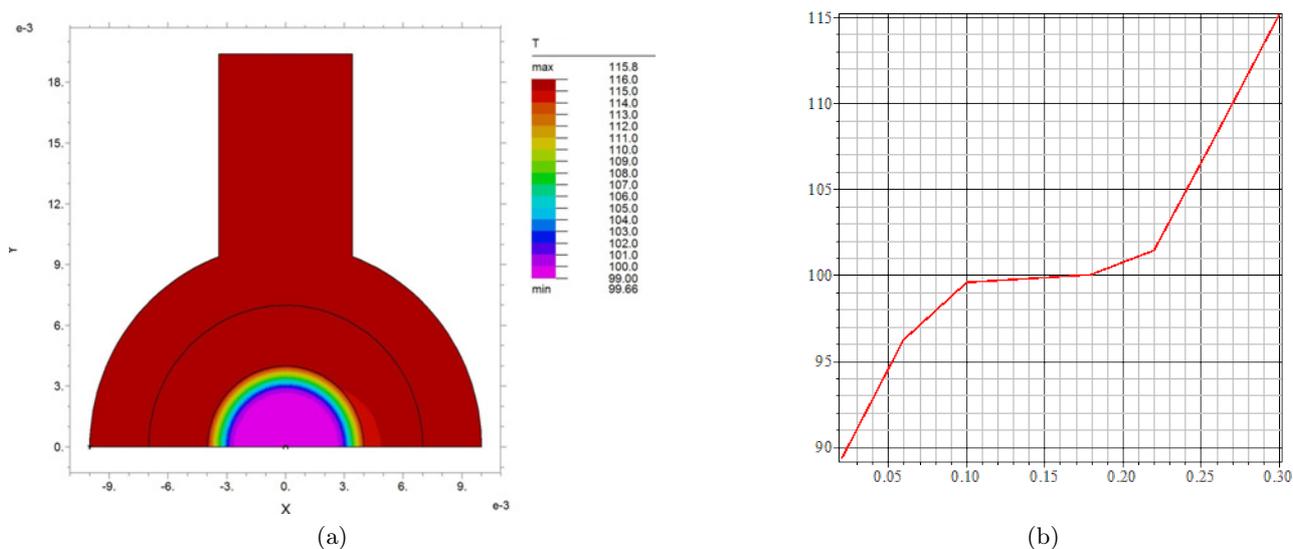


Рис. 7: Распределение температуры: толщина слоя накипи 0,3 см (а), зависимость температуры от толщины слоя накипи (б)

Fig. 7: Temperature distribution: at scale layer thickness 0.3 cm (a), temperature dependence on scale layer thickness (b)

теплового потока представлено на рис. 8b. Можно видеть, что наиболее интенсивный тепловой поток в верхней части трубки.

На рис. 9а представлена зависимость температуры на нижней поверхности расчетной модели. Можно заметить, что температура становится симметричной относительно центра, т. е. можно применить осесимметричный ее расчет. На рис. 9б представлена зависимость температуры на внешней границе трубки от толщины слоя накипи. Эта зависимость качественно совпадает с графиком на рис. 5б и также может быть использована при решении обратной геометрической задачи.

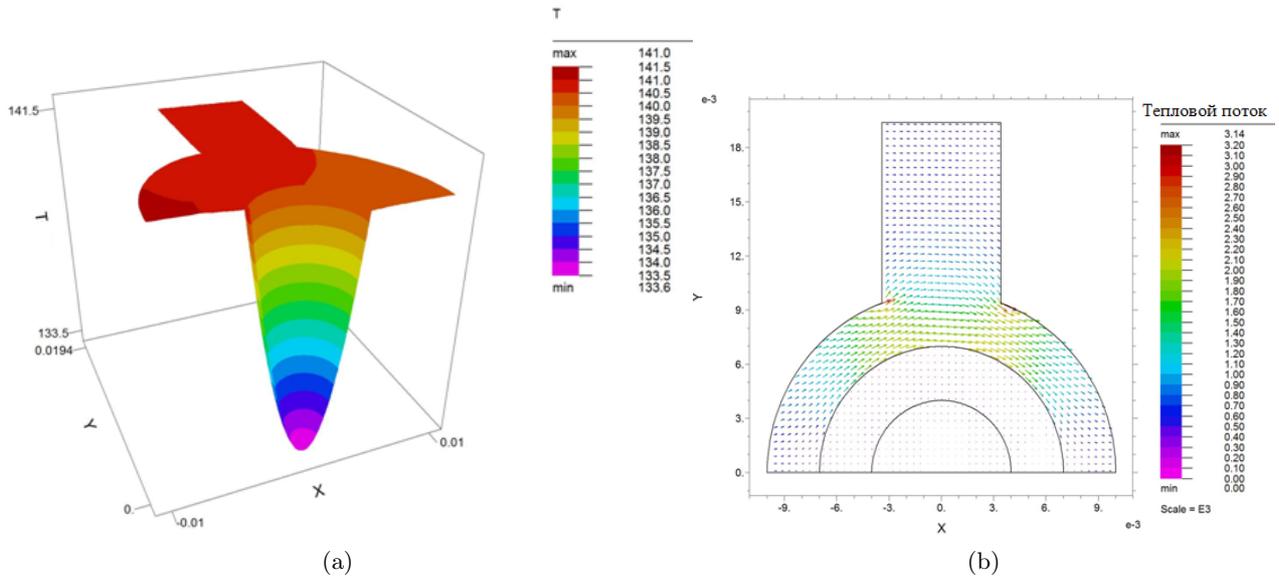


Рис. 8: Распределение температуры при толщине слоя накипи 0,3 см (а), векторное поле теплового потока (б)

Fig. 8: Temperature distribution at a scale layer thickness of 0.3 cm (a), heat flux vector field (b)

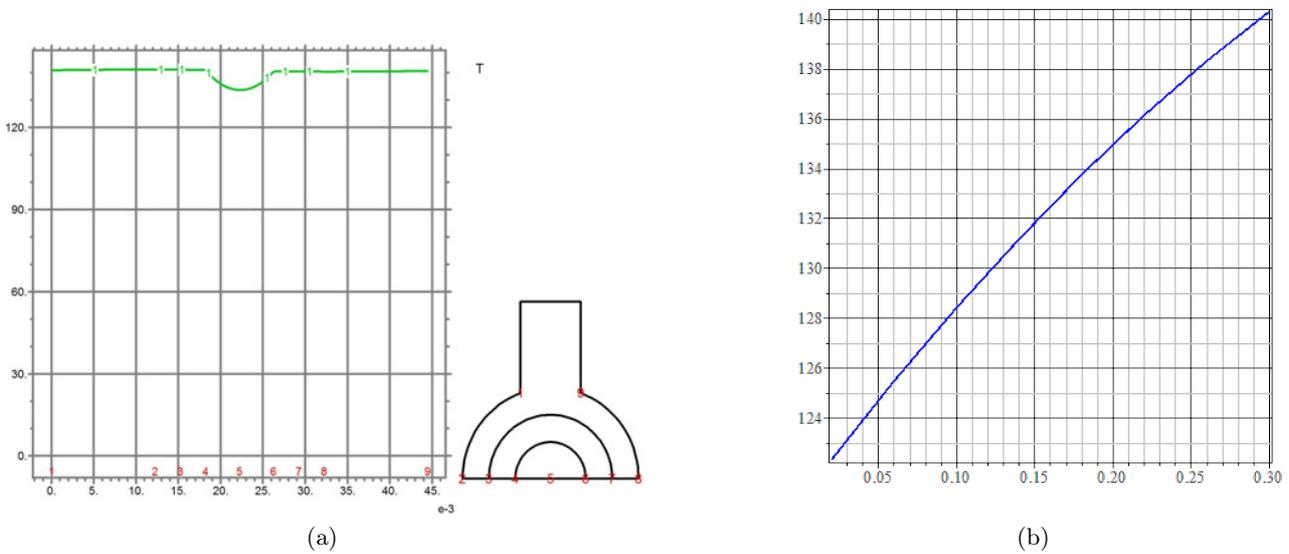


Рис. 9: Распределение температуры при толщине слоя накипи 0,3 см (а), векторное поле теплового потока (б)

Fig. 9: Temperature distribution at a scale layer thickness of 0.3 cm (a), heat flux vector field (b)

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена математическая модель теплопередачи в элементе парового котла с учетом образования накипи на внутренних поверхностях, осуществлена ее численная компьютерная реализация методом конечных элементов. Особенностью предложенной модели является реализация фазового перехода жидкости в пар при нагревании. В результате расчетов в пакете FlexPDE решена серия нестационарных задач разогрева элемента конструкции. Построены зависимости

температуры на внешней границе конструкции, на которой может быть помещен датчик температуры, в зависимости от толщины слоя накипи. Эти зависимости представляют собой монотонно возрастающие функции, что позволяет однозначно решить обратную геометрическую задачу идентификации толщины накипи внутри трубок котла. Разработанная программа может найти применение на производстве для мониторинга элементов тепловых котлов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. — М.: Машиностроение, 1988.
2. Bai Y., Zhang C., He Z., Cui M., Sun D. Inverse solution to two-dimensional transient coupled radiation and conduction problems and the application in recovering radiative thermo-physical properties of Si₃N₄ ceramics// Int. J. Thermal Sci. — 2023. — 190. — 108303.
3. Battaglia J.-L. Linear and nonlinear thermal system identification based on the integral of noninteger order — Application to solve inverse heat conduction linear and nonlinear problems// Int. J. Thermal Sci. — 2024. — 197. — 108840.
4. Cui M., Gao X., Zhang J. A new approach for the estimation of temperature-dependent thermal properties by solving transient inverse heat conduction problems// Int. J. Thermal Sci. — 2012. — 58. — С. 113–119.
5. Han W. W., Chen H. B., Lu T. Estimation of the time-dependent convective boundary condition in a horizontal pipe with thermal stratification based on inverse heat conduction problem// Int. J. Heat and Mass Transfer. — 2019. — 132. — С. 723–730.
6. Kanjanakijkasem W. Estimation of spatially varying thermal contact resistance from finite element solutions of boundary inverse heat conduction problems split along material interface// Appl. Thermal Engin. — 2016. — 106. — С. 731–742.
7. Matrosov A., Soloviev A., Ponomareva E., Meskhi B., Rudoy D., Olshevskaya A., Serebryanaya I., Nizhnik D., Pustovalova O., Maltseva T. Finite element modeling of crystallization with temperature jump to improve cryopreservation of fish germ cells// Processes. — 2024. — 12, № 2. — 413.
8. Matrosov A., Soloviev A., Serebryanaya I., Pustovalova O., Nizhnik D. Modelling of phase transitions in the process of cryopreservation of biological material// В сб.: «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications PHENMA 2023». — 2024. — 41, №12. — С. 114–121.
9. Mierzwiczak M., Kolodziej J. A. The determination temperature-dependent thermal conductivity as inverse steady heat conduction problem// Int. J. Heat Mass Transfer. — 2011. — 54, № 4. — С. 790–796.
10. Resende L., Silva R., Magalhaes E., Machado H. Applying multivariate inverse heat conduction problem to determine thermal contact resistance in aircraft embedded systems// Int. Commun. Heat Mass Transfer. — 2023. — 149. — 107163.
11. Tikhe A. K., Deshmukh K. C. Inverse heat conduction problem in a thin circular plate and its thermal deflection// Appl. Math. Model. — 2006. — 30, № 6. — С. 554–560.
12. Xu H. J., Xing Z. B., Wang F. Q., Cheng Z. M. Review on heat conduction, heat convection, thermal radiation and phase change heat transfer of nanofluids in porous media: Fundamentals and applications// Chem. Engin. Sci. — 2019. — 195. — С. 462–483.
13. Zhang J., Lu T., Deng J., Ding Sh., Xiong P. Rapid identification of erosion thinning and scaling thickening of inner wall of circular tube based on inverse heat conduction problem method// Thermal Sci. Engin. Prog. — 2024. — 47. — 102263.

А. Н. Соловьев

Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова, Симферополь, Россия

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: solovievarc@gmail.com

М. А. Шевченко

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: msh@sfedu.ru

М. С. Германчук

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

E-mail: germanchukms@cfuv.ru

UDC 51-7, 519.6

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-487-497

EDN: NLALYX

The inverse geometric problem of thermal conductivity for determining the thickness of scale in steam boiler pipes

A. N. Soloviev^{1,2}, M. A. Shevchenko², and M. S. Germanchuk³

¹Crimean Engineering and Pedagogical University the name Fevzi Yakubov, Simferopol, Russia

²Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

³V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

Abstract. The paper considers a nonstationary nonlinear problem of thermal conductivity in a steam boiler pipe, on the inner surface of which there is calcined scale. In the inverse geometric problem, the thickness of this scale is determined by the temperature change at the outer surface of the tube. Three cases of movement of water and steam in a tube are considered: only water, water and steam, and only steam. The problem is solved on the cross section of the structural element, the movement of water and steam is modeled by the presence of distributed heat extraction in them, when steam is formed, heat extraction at the phase boundary is taken into account, which is set by the boiling point. As a result of solving the problem by the finite element method, for the three cases under consideration, the dependence of the temperature at the outer boundary on the thickness of the scale layer is constructed. These dependencies serve as the basis for solving the inverse geometric problem of identifying scale parameters.

Keywords: inverse geometric problem of thermal conductivity, water–steam phase transition, finite element method.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, projects No. 075-02-2023-1799 and No. 075-02-2024-1431.

For citation: A. N. Soloviev, M. A. Shevchenko, M. S. Germanchuk, “The inverse geometric problem of thermal conductivity for determining the thickness of scale in steam boiler pipes,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 487–497. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-487-497>

REFERENCES

1. O. M. Alifanov, *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse Heat Transfer Problems], Mashinostroenie, Moscow, 1988 (in Russian).
2. Y. Bai, C. Zhang, Z. He, M. Cui, and D. Sun, “Inverse solution to two-dimensional transient coupled radiation and conduction problems and the application in recovering radiative thermo-physical properties of Si₃N₄ ceramics,” *Int. J. Thermal Sci.*, 2023, **190**, 108303.
3. J.-L. Battaglia, “Linear and nonlinear thermal system identification based on the integral of noninteger order — Application to solve inverse heat conduction linear and nonlinear problems,” *Int. J. Thermal Sci.*, 2024, **197**, 108840.
4. M. Cui, X. Gao, and J. Zhang, “A new approach for the estimation of temperature-dependent thermal properties by solving transient inverse heat conduction problems,” *Int. J. Thermal Sci.*, 2012, **58**, 113–119.



5. W. W. Han, H. B. Chen, and T. Lu, “Estimation of the time-dependent convective boundary condition in a horizontal pipe with thermal stratification based on inverse heat conduction problem,” *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 2019, **132**, 723–730.
6. W. Kanjanakijkasem, “Estimation of spatially varying thermal contact resistance from finite element solutions of boundary inverse heat conduction problems split along material interface,” *Appl. Thermal Engin.*, 2016, **106**, 731–742.
7. A. Matrosov, A. Soloviev, E. Ponomareva, B. Meskhi, D. Rudoy, A. Olshevskaya, I. Serebryanaya, D. Nizhnik, O. Pustovalova, and T. Maltseva, “Finite element modeling of crystallization with temperature jump to improve cryopreservation of fish germ cells,” *Processes*, 2024, **12**, No. 2, 413.
8. A. Matrosov, A. Soloviev, I. Serebryanaya, O. Pustovalova, and D. Nizhnik, “Modelling of phase transitions in the process of cryopreservation of biological material,” In: *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications PHENMA 2023*, 2024, **41**, No. 12, 114–121.
9. M. Mierzwiczak and J. A. Kolodziej, “The determination temperature-dependent thermal conductivity as inverse steady heat conduction problem,” *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2011, **54**, No. 4, 790–796.
10. L. Resende, R. Silva, E. Magalhaes, and H. Machado, “Applying multivariate inverse heat conduction problem to determine thermal contact resistance in aircraft embedded systems,” *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 2023, **149**, 107163.
11. A. K. Tikhe and K. C. Deshmukh, “Inverse heat conduction problem in a thin circular plate and its thermal deflection,” *Appl. Math. Model.*, 2006, **30**, No. 6, 554–560.
12. H. J. Xu, Z. B. Xing, F. Q. Wang, and Z. M. Cheng, “Review on heat conduction, heat convection, thermal radiation and phase change heat transfer of nanofluids in porous media: Fundamentals and applications,” *Chem. Engin. Sci.*, 2019, **195**, 462–483.
13. J. Zhang, T. Lu, J. Deng, Sh. Ding, and P. Xiong, “Rapid identification of erosion thinning and scaling thickening of inner wall of circular tube based on inverse heat conduction problem method,” *Thermal Sci. Engin. Prog.*, 2024, **47**, 102263.

A. N. Soloviev

Crimean Engineering and Pedagogical University the Name Fevzi Yakubov, Simferopol, Russia

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: solovievarc@gmail.com

M. A. Shevchenko

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: msh@sfedu.ru

M. S. Germanchuk

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

E-mail: germanchukms@cfuv.ru