Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 451–486
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.958, 517.956.32
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486
EDN: NKBXUW

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация. Исследуется начально-граничная задача для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка в полуполосе плоскости с постоянными коэффициентами, содержащего смешанную производную, с нулевым и ненулевым потенциалами. Данное уравнение является уравнением поперечных колебаний движущейся конечной струны. Рассматривается случай закрепленных концов (условия Дирихле). Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на вещественной оси по разные стороны от начала координат. Формулируются доказанные ранее автором теоремы о конечных формулах для обобщённого решения в случае однородной и неоднородной задач. Затем на основе этих формул доказываются теоремы о конечных формулах для классического решения или, по-другому, решения почти всюду. Во второй части статьи формулируются доказанные ранее автором теоремы об обобщённом решении начально-граничной задачи с обычным потенциалом и потенциалом общего вида. В основе этих результатов лежит идея трактовать уравнение с потенциалом, как неоднородность в уравнении без потенциала. Эта идея ранее использовалась А. П. Хромовым и В. В. Корневым в случае уравнения без смешанной производной. И, далее, на основе формул для обобщённого решения задачи с потенциалами доказываются теоремы о соответствующих формулах для классических решений для этих двух видов потенциалов.

Ключевые слова: неоднородное гиперболическое уравнение, начально-граничная задача, смешанная производная, обобщённое решение, классическое решение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *В. С. Рыхлов.* Классическое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 451–486. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486

1. Постановка задачи, история вопроса, основные обозначения и определения

Рассмотрим начально-граничную задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t), \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{1.3}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$; все функции, входящие в (1.1)–(1.3), предполагаются комплекснозначными.

Далее будут также использоваться обозначения для частных производных вида

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xt} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad \ldots$$

Рассматривается случай волнового или гиперболического уравнения (1.1), т. е. предполагается выполнение условия

$$p_1^2 - 4p_2 > 0.$$

В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$$

вещественны и различны.

Требуется найти решение начально-граничной задачи (1.1)–(1.3) в области Q при как можно более слабых условиях на параметры задачи, т. е. на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$.

Уравнение (1.1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Такие уравнения актуальны для производственных процессов, связанных с продольным движением материалов (например, бумажного полотна). Исследование таких колебаний началось около 60 лет назад [49–51].

Излагаемые в статье результаты получены с использованием резольвентного и аксиоматического методов решения начально-граничных задач для волнового уравнения в полуполосе плоскости, предложенных А. П. Хромовым и наиболее просто описанных в [43, 44]. Такой подход к решению задачи сформировался не сразу. Историю формирования и развития этого подхода, а также полученные с помощью него результаты можно найти в [1, 2, 5–7, 9, 27, 28, 30, 33, 37–42, 45–47]. Этот подход использует идеи А. Н. Крылова [8] об ускорении сходимости тригонометрического ряда, а также идеи Л. Эйлера [48] и Г. Харди [35] о расходящихся рядах.

Аналогичный подход решения начально-граничных задач в полуполосе плоскости для телеграфного уравнения при других краевых условиях используется в [10–14].

Другой подход, отличный от используемого в данной и вышеупомянутых статьях и при других постановках начально-граничных задач, в частности, в первой четверти плоскости, получил развитие в [15–20].

Рассматриваются и другие задачи для уравнения (1.1), например, задача гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны [21, 22].

В зависимости от того, как будет пониматься решение задачи (1.1)–(1.3), будут накладываться различные требования на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$.

Считаем далее, что функция $f(x,t)$ переменных $(x,t) \in Q$ есть функция класса $\mathcal{Q}$, если $f(x,t) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0,1] \times [0,T]$. Будем кратко записывать этот факт как $f(x,t) \in \mathcal{Q}$.

Определение 1.1. Задачу (1.1)–(1.3), в которой $f(x,t)$ есть функция класса $\mathcal{Q}$, $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, будем называть *классической начально-граничной задачей.*

Определение 1.2. Под *классическим решением* понимается функция $u(x,t)$ переменных $(x,t) \in Q$, которая:

а) непрерывна вместе с $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, при этом $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$ абсолютно непрерывны и по x, и по t, и почти всюду (п.в.) в Q выполняется равенство

$$u_{x,t}(x,t) = u_{tx}(x,t); \tag{1.4}$$

б) удовлетворяет условиям (1.2)–(1.3) на границе множества Q и уравнению (1.1) п.в. в Q.

Отметим, что необходимость в условии (1.4) обусловлена тем, что в случае, когда $u_{xt}(x,t)$ и $u_{tx}(x,t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [36].

Для классического решения задачи (1.1)–(1.3) по необходимости должны выполняться условия (далее ссылаемся на них, как на условия (N)):

(N_1) гладкости: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$;

(N_2) согласования: $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Определение 1.3. Задачу (1.1)–(1.3), в которой $f(x,t) \in \mathcal{Q}$, а $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$, будем называть *обобщённой начально-граничной задачей.*

Возможны только две принципиально разные ситуации:

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \tag{1.5}$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \tag{1.6}$$

В случае (1.5) соответствующая спектральная задача является регулярной по Биркгофу [23, с. 66-67], а в случае (1.6) — нерегулярной. Далее будем рассматривать только случай (1.5). Нерегулярный случай другим методом рассмотрен в [26].

В случае $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$ имеем $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, и уравнение (1.1) является классическим уравнением колебания струны

$$u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

В [44] и предыдущих работах А. П. Хромова (ссылки приведены в [44]) рассматривался именно такой случай. Как следствие, из результатов настоящей статьи вытекает полученный в [44] результат об обобщённом решении, но представленный в другом виде, не использующем продолжений функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$ на всю вещественную ось. Результаты, излагаемые в настоящей статье, относятся к общему случаю $p_1 \in \mathbb{R}$.

Обобщённое решение задачи (1.1)–(1.3) понимается аналогично соответствующему определению из [30, 33] и основывается на теореме единственности классического решения и представлении этого решения в виде ряда из контурных интегралов [29]. Для того, чтобы дать определение обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3), сформулируем эту теорему.

Предварительно введем спектральную задачу

$$L(\lambda)y = 0,$$

порожденную оператор-функцией $L(\lambda)$, определяемой дифференциальным выражением с параметром λ

$$\ell(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y$$

и краевыми условиями типа Дирихле

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y(1) = 0.$$

Пусть R_λ есть резольвента оператор-функции $L(\lambda)$, а $G(x,\xi,\lambda)$ её функция Грина. Обозначим через $R_{1\lambda}$ интегральный оператор с ядром $G_\xi(x,\xi,\lambda)$.

Теорема 1.1. *Если $u(x,t)$ есть классическое решение задачи* (1.1)–(1.3)*, выполняются условия* (N), (1.5) *и условие, что $u_{tt}(x,t)$ есть функция класса $\mathcal{Q}$, то это решение единственно и находится по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(-p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda}\varphi + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot,\tau)\, d\tau \right) d\lambda, \tag{1.7}$$

в которой ряд справа сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Отметим, что формулы, аналогичные формуле (1.7), уже встречались ранее (например, в работах [1, 3, 25] и многих других).

Из теоремы 1.1 следует, что задача (1.1)–(1.3) и ряд справа в (1.7) тесно связаны, а именно, если эта задача имеет классическое решение, то для него справедлива формула (1.7). При этом функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны удовлетворять условиям (N). Следуя методу, используемому в [43, 44], расширим понятие этой связи.

Ряд справа в (1.7) имеет смысл для любых функций $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$ и $f(x,t) \in \mathcal{Q}$, хотя теперь он может и не быть сходящимся, т. е., вообще говоря, расходящимся. Будем считать, что он является формальным решением задачи (1.1)–(1.3), но понимаемой теперь чисто формально. Эта задача (1.1)–(1.3) в случае $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ и $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$ в определении 1.3 была названа обобщённой начально-граничной задачей.

Определение 1.4. В случае $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ и $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$ будем называть ряд справа в (1.7) *обобщённым решением* задачи (1.1)–(1.3).

Найти обобщённое решение задачи (1.1)–(1.3) — значит найти «сумму» ряда справа в (1.7) («сумма» в кавычках означает, что это сумма понимается именно как сумма расходящегося ряда).

Трактуя ряд справа в формуле (1.7) изначально как расходящийся [35, 48] и соответствующим образом определяя (или, другими словами, назначая) «сумму» этого ряда, можно, как и в [43,44], значительно сократить выкладки при получении конечных формул для обобщённого решения и при этом не накладывать никаких дополнительных ограничений на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$, предполагая лишь, что $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$, а $f(x,t) \in \mathcal{Q}$.

В последующих разделах будут сформулированы полученные автором ранее теоремы о формулах для обобщённых решений частных задач вида (1.1)–(1.3) и итоговая теорема о формуле для обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3).

Далее, на основе этих формул будут получены соответствующие формулы для классических решений частных задач вида (1.1)–(1.3) и итоговая теорема о формуле для классического решения задачи (1.1)–(1.3).

Затем, как приложение результатов об обобщённом решении неоднородной задачи, будут сформулированы ранее полученные автором результаты об обобщённом решении двух начально-граничных задач с потенциалом q. Первая задача с потенциалом $q = q(x)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = q(x)u(x,t), \tag{1.8}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{1.9}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{1.10}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, функции, входящие в (1.8)–(1.10), комплекснозначные, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $q(x) \in L_1[0,1]$. Вторая задача с потенциалом $q = q(x,t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t)u(x,t), \tag{1.11}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{1.12}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{1.13}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, функции, входящие в (1.11)–(1.13), комплекснозначные, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $q(x,t) \in \mathcal{Q}$.

Как понимается обобщённое решение задач (1.8)–(1.10) и (1.11)–(1.13), будет пояснено далее.

2. Конечные формулы для обобщённого решения в случае нулевого потенциала

Решение задачи (1.1)–(1.3) ищется как суперпозиция решений трех более простых задач

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t), \tag{2.1}$$

где $u_1(x,t)$ есть решение однородной задачи

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = 0, \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{2.4}$$

$u_2(x,t)$ есть решение однородной задачи

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = 0, \tag{2.5}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2.6}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2.7}$$

а $u_3(x,t)$ есть решение неоднородной задачи

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = f(x,t), \tag{2.8}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2.9}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \tag{2.10}$$

В случае обобщённой задачи (1.1)–(1.3) конечные формулы для решения получены в [30, 33]. Для дальнейшего изложения эти результаты удобнее представить в несколько другом виде.

Будем использовать следующие обозначения:

$$\alpha(x,t) := \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}, \quad \beta(x,t) := \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}, \quad a := \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}. \tag{2.11}$$

Кроме того, полагаем:

$$\Psi(x) = \int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi, \quad F(x,t) = \int\limits_0^x f(\xi,t)\,d\xi, \tag{2.12}$$

а $[x]$ и $\{x\}$ будет обозначать, соответственно, целую и дробную части числа $x \in \mathbb{R}$.

Для обобщённого решения $u_1(x,t)$ задачи (2.2)–(2.4) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi(x) \in L_1[0,1]$ и выполняется условие* (1.5)*. Тогда обобщённым решением задачи* (2.2)–(2.4) *является функция $u_1(x,t) \in \mathcal{Q}$, определённая для п.в. $(x,t) \in Q$ формулой*

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widehat{\varphi}\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \widehat{\varphi}\big(\{\beta(x,t)\}\big)\Big), \tag{2.13}$$

где

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \omega_2\varphi\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big), & \xi \in [0,a); \\ \omega_1\varphi\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a}\Big), & \xi \in [a,1). \end{cases} \tag{2.14}$$

Для обобщённого решения $u_2(x,t)$ задачи (2.5)–(2.7) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть $\psi(x) \in L_1[0,1]$ и выполняется условие* (1.5)*. Тогда обобщённым решением задачи* (2.5)–(2.7) *является функция $u_2(x,t) \in \mathcal{Q}$, определённая для п.в. $(x,t) \in Q$ формулой*

$$u_2(x,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widetilde{\Psi}\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \widetilde{\Psi}\big(\{\beta(x,t)\}\big)\Big), \tag{2.15}$$

где

$$\widetilde{\Psi}(\xi) = \begin{cases} \Psi\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big), & \xi \in [0,a); \\ \Psi\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a}\Big), & \xi \in [a,1). \end{cases} \tag{2.16}$$

Для обобщённого решения $u_3(x,t)$ задачи (2.8)–(2.10) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ и выполняется условие* (1.5)*. Тогда обобщённым решением задачи* (2.8)–(2.10) *является функция $u_3(x,t) \in \mathcal{Q}$, определённая для п.в. $(x,t) \in Q$ формулой*

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \Big(\widetilde{F}\big(\{\alpha(x,t-\tau)\},\tau\big) - \widetilde{F}\big(\{\beta(x,t-\tau)\},\tau\big)\Big)\,d\tau, \tag{2.17}$$

где

$$\widetilde{F}(\xi,\tau) = \begin{cases} F\Big(\dfrac{\xi}{a},\tau\Big), & \xi \in [0,a); \\ F\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a},\tau\Big), & \xi \in [a,1]. \end{cases} \tag{2.18}$$

Формулу (2.17) можно записать в другом виде, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть* $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ *и выполняется условие* (1.5). *Тогда обобщённым решением задачи* (2.8)–(2.10) *является функция* $u_3(x,t) \in \mathcal{Q}$, *определённая для п.в.* $(x,t) \in Q$ *формулой*

$$u_3(x,t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} f(\xi,\tau)\, d\xi, \tag{2.19}$$

где

$$\eta(s) = \frac{\{s\}}{a}\chi\big(a - \{s\}\big) + \frac{1-\{s\}}{1-a}\chi\big(\{s\} - a\big)$$

является непрерывной кусочно-линейной функцией при $s \in (-\infty, +\infty)$ *и удовлетворяет неравенству*

$$0 \leqslant \eta(s) \leqslant 1.$$

На основе формулы (2.1) и теорем 2.1–2.3 можно сформулировать общую теорему о конечной формуле для обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3).

Теорема 2.5. *Пусть* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ *и выполняется условие* (1.5). *Тогда функция* $u(x,t)$, *определённая для п.в.* $(x,t) \in Q$ *формулой*

$$u(x,t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\Big(\widehat{\varphi}\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \widehat{\varphi}\big(\{\beta(x,t)\}\big)\Big) - \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\Big(\widetilde{\Psi}\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \widetilde{\Psi}\big(\{\beta(x,t)\}\big)\Big) -$$
$$- \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\int\limits_0^t \Big(\widetilde{F}\big(\{\alpha(x,t-\tau)\},\tau\big) - \widetilde{F}\big(\{\beta(x,t-\tau)\},\tau\big)\Big)\, d\tau,$$

является обобщённым решением задачи (1.1)–(1.3), *где* $\widehat{\varphi}(x)$ *определяется формулой* (2.14), $\widetilde{\Psi}(x)$ — *формулой* (2.16), $\widetilde{F}(x,t)$ — *формулой* (2.18).

Обозначим

$$v(x,t) := \zeta\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \zeta\big(\{\beta(x,t)\}\big), \quad \zeta(x) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\Big(\widehat{\varphi}(x) - \omega_1\omega_2\widetilde{\Psi}(x)\Big), \tag{2.20}$$

где функции $\widehat{\varphi}(x)$ и $\widetilde{\Psi}(x)$ определяются формулами (2.14) и (2.16), соответственно.

Используя эти обозначения и пользуясь теоремой 2.4 вместо 2.3 в теореме 2.5, совершенно аналогично можно сформулировать теорему об обобщённом решении задачи (1.1)–(1.3) с итоговой формулой в другом виде.

Теорема 2.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.5. *Тогда функция* $u(x,t)$, *определённая для п.в.* $(x,t) \in Q$ *формулой*

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} f(\xi,\tau)\, d\xi,$$

является обобщённым решением задачи (1.1)–(1.3).

Естественно возникает вопрос, а будут ли формулы для обобщённых решений, приведенные в этом разделе, давать классические решения при соответствующих условиях на параметры задач? В следующем разделах будет получен утвердительный ответ на этот вопрос, что будет являться обоснованием полученных формул для обобщённого решения.

3. Классическое решение на основе формул для обобщённого решения в случае нулевого потенциала

Рассмотрим классическую задачу (1.1)–(1.3). Для получения конечных формул для решения $u(x,t)$ этой задачи, как и в предыдущем разделе, воспользуемся представлением (2.1), где функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $u_3(x,t)$ являются решениями классических задач (2.2)–(2.4), (2.5)–(2.7) и (2.8)–(2.10), соответственно. Рассмотрим последовательно эти три задачи.

3.1. Классическое решение в случае $\psi = 0$ и $f = 0$. Рассмотрим задачу (2.2)–(2.4) нахождения классического решения $u_1(x,t)$. В теореме 2.1 для обобщённого решения $u_1(x,t)$ получена формула (2.13). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если $u_1(x,t)$ есть классическое решение задачи* (2.2)–(2.4) *при условии* (1.5), *для которого $u_{1,tt}(x,t) \in \mathcal{Q}$, то это решение единственно и даётся формулой* (2.13).

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из теоремы 2 в [29] о единственности классического решения и формулы для него в виде ряда из контурных интегралов, определения обобщённого решения в [33, с. 101] и теоремы 2.1 о формуле (2.13) для обобщённого решения. ☐

Оказывается, справедливо и обратное утверждение. А именно, следующее достаточное условие для того, чтобы формула (2.13) давала классическое решение задачи (2.2)–(2.4).

Теорема 3.2. *Если $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и выполняется условие* (1.5), *то функция $u_1(x,t)$, определённая для всех $(x,t) \in Q$ формулой* (2.13), *является единственным классическим решением задачи* (2.2)–(2.4), *для которого выполняется условие $u_{1,tt}(x,t) \in \mathcal{Q}$.*

Доказательство. Разобьём доказательство теоремы на несколько пунктов.

1. Покажем, что функция $u_1(x,t)$, определяемая формулой (2.13), при предположениях теоремы удовлетворяет пункту a) определения 1.2 классического решения и, кроме того, является решением уравнения (2.2) в области Q. Для этого сначала установим, что $\breve{\varphi}(\xi) := \widehat{\varphi}(\{\xi\})$ есть абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A,B] \subset \mathbb{R}$. Пусть $m < \xi < m + a$, где $m \in \mathbb{Z}$. Тогда, так как $\xi - m \in (0,a)$, будем иметь по определению функции $\widehat{\varphi}(x)$

$$\breve{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\{\xi\}) = \widehat{\varphi}(\xi - m) = \omega_2\varphi\left(\frac{\xi - m}{a}\right) = \omega_2\varphi\left(\frac{\{\xi\}}{a}\right). \tag{3.1}$$

То есть $\breve{\varphi}(\xi)$ — абсолютно непрерывная функция на каждом промежутке $(m, m+a)$ при любых $m \in \mathbb{Z}$, или, записывая кратко, $\breve{\varphi}(\xi) \in AC(m, m+a)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$. Пусть $m + a < \xi < m+1$, где $m \in \mathbb{Z}$, тогда, так как $\xi - m \in (a,1)$, аналогично получим из определения функции $\widehat{\varphi}(x)$

$$\breve{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\{\xi\}) = \widehat{\varphi}(\xi - m) = \omega_1\varphi\left(\frac{m + 1 - \xi}{1 - a}\right) = \omega_1\varphi\left(\frac{1 - \{\xi\}}{1 - a}\right), \tag{3.2}$$

а это означает, что $\breve{\varphi}(\xi) \in AC(m + a, m)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$. Покажем теперь, что $\breve{\varphi}(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = m$ и $\xi = m + a$. На основании формул (3.1), (3.2), непрерывности функции $\varphi(x)$ и предположения теоремы, что $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, получим

1) в точках $\xi = m$

$$\breve{\varphi}(m + 0) = \omega_2\varphi\left(\frac{+0}{a}\right) = \omega_2\varphi(0) = 0,$$

$$\breve{\varphi}(m - 0) = \breve{\varphi}(m + 1 - 0) = \omega_1\varphi\left(\frac{+0}{1 - a}\right) = \omega_1\varphi(0) = 0,$$

а это означает, что $\breve{\varphi}(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = m$;

2) в точках $\xi = m + a$

$$\breve{\varphi}(m + a + 0) = \omega_1\varphi\left(\frac{1 - a - 0}{1 - a}\right) = \omega_1\varphi(1) = 0,$$

$$\breve{\varphi}(m + a - 0) = \omega_2\varphi\left(\frac{a - 0}{a}\right) = \omega_2\varphi(1) = 0,$$

а это означает, что $\breve{\varphi}(\xi)$ непрерывна и в точках $\xi = m + a$.

Таким образом, установлено, что $\breve{\varphi}(\xi)$ есть непрерывная кусочно-абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A,B]$. Но тогда из определения абсолютно непрерывной функции получим, что $\breve{\varphi}(\xi)$ является абсолютно непрерывной функцией и на отрезке $[A,B]$. Этот факт удобно для дальнейшего оформить в виде леммы.

Лемма 3.1. *Непрерывная кусочно-абсолютно непрерывная функция на ограниченном отрезке $[A,B] \subset \mathbb{R}$ является абсолютно непрерывной функцией на этом отрезке.*

Далее, из формул (3.1) и (3.2) следует, что производная функции $\breve{\varphi}(\xi)$ существует на каждом интервале $(m, m+a)$ и $(m+a, m+1)$ при $m \in \mathbb{Z}$, и по условию является абсолютно непрерывной функцией на этих интервалах. На интервале $(m, m+a)$ из формулы (3.1) получим

$$\breve{\varphi}'(\xi) = \frac{\omega_2}{a}\varphi'\left(\frac{\xi - m}{a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{\xi - m}{a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{\{\xi\}}{a}\right), \tag{3.3}$$

а на интервале $(m+a, m+1)$ на основании формулы (3.2) будем иметь

$$\breve{\varphi}'(\xi) = -\frac{\omega_1}{1-a}\varphi'\left(\frac{m+1-\xi}{1-a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{m+1-\xi}{1-a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{1-\{\xi\}}{1-a}\right). \tag{3.4}$$

Покажем, что $\breve{\varphi}'(\xi)$ есть абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A, B]$. Для этого достаточно показать непрерывность $\breve{\varphi}'(\xi)$ в точках $\xi = m$ и $\xi = m+a$. В точке $\xi = m$ на основании формулы (3.3) имеем

$$\breve{\varphi}'(m+0) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{+0}{a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'(0),$$

$$\breve{\varphi}'(m-0) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{+0}{1-a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'(0),$$

а это и означает, что $\breve{\varphi}'(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = m$.

В точке $\xi = m+a$ на основании формулы (3.4) имеем

$$\breve{\varphi}'(m+a+0) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{1-a-0}{1-a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'(1),$$

$$\breve{\varphi}'(m+a-0) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{a-0}{a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'(1),$$

а это и означает, что $\breve{\varphi}'(\xi)$ непрерывна и в точках $\xi = m+a$. Следовательно, функция $\breve{\varphi}'(\xi)$ есть непрерывная кусочно-абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A, B]$. Но тогда по лемме 3.1 функция $\breve{\varphi}'(\xi)$ есть абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A, B]$. А отсюда следует, на основании [24, теорема 3, с. 228], что на любом отрезке $[A, B]$ производная $\breve{\varphi}''(\xi)$ существует для п.в. $\xi \in [A, B]$ и является суммируемой функцией на этом отрезке.

Далее потребуется следующая лемма.

Лемма 3.2. *Если $g(\xi)$ и $g'(\xi)$ есть абсолютно непрерывные функции на любом отрезке $[A, B] \subset \mathbb{R}$, то функции $g(\alpha(x,t))$ и $g(\beta(x,t))$ для п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ являются решениями уравнения* (2.2). *При этом для п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ имеют место равенства*

$$\frac{\partial^2 g(\alpha(x,t))}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 g(\alpha(x,t))}{\partial t \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 g(\beta(x,t))}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 g(\beta(x,t))}{\partial t \partial x}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Докажем, например, что функция $g(\alpha(x,t))$ есть решение уравнения (2.2) для п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Так как $g'(\xi)$ есть абсолютно непрерывная функция на $[A, B]$, а функция $\alpha(x,t)$ есть монотонная функция и по x и по t, то на основании [24, теорема 3, с. 228] функция $g(\alpha(x,t)$ является абсолютно непрерывной и по x и по t для всех (x,t) из области $\{(x,t) : A \leqslant \alpha(x,t) \leqslant B\} =: \Omega_\alpha(A, B)$. Следовательно, для п.в. $(x,t) \in \Omega_\alpha(A, B)$ существуют производные

$$\frac{\partial g(\alpha(x,t))}{\partial x} = g'(\alpha(x,t))\alpha'_x(x,t), \quad \frac{\partial g(\alpha(x,t))}{\partial t} = g'(\alpha(x,t))\alpha'_t(x,t). \tag{3.6}$$

Но так как по той же теореме из [24] $g'(\alpha(x,t))$ есть абсолютно непрерывная функция и по x и по t в области $\Omega_\alpha(A, B)$, то для п.в. $(x,t) \in \Omega_\alpha(A, B)$ существуют производные, определяемые на основании (3.6) следующими формулами:

$$\frac{\partial^2 g(\alpha(x,t))}{\partial x^2} = g''(\alpha(x,t))\left(\alpha'_x(x,t)\right)^2 \qquad (\text{так как } \alpha''_{xx}(x,t) \equiv 0), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 g(\alpha(x,t))}{\partial x \partial t} = g''(\alpha(x,t))\alpha'_x(x,t)\alpha'_t(x,t) \qquad (\text{так как } \alpha''_{tx}(x,t) \equiv 0), \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 g(\alpha(x,t))}{\partial t \partial x} = g''(\alpha(x,t))\alpha'_t(x,t)\alpha'_x(x,t) \qquad (\text{так как } \alpha''_{xt}(x,t) \equiv 0), \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial^2 g(\alpha(x,t))}{\partial t^2} = g''(\alpha(x,t))\big(\alpha'_t(x,t)\big)^2 \qquad \text{(так как } \alpha''_{tt}(x,t)\equiv 0). \tag{3.10}$$

Из формул (3.8) и (3.9) следует левое равенство в (3.5). Далее, подставим полученные выражения (3.7), (3.8) и (3.10) в левую часть уравнения (2.2). В результате для п.в. $(x,t)\in\Omega_\alpha(A,B)$ получим следующую цепочку равенств с учетом того, что по теореме Виета $p_1=-(\omega_1+\omega_2)$ и $p_2=\omega_1\omega_2$:

$$\frac{\partial^2 g\big(\alpha(x,t)\big)}{\partial x^2}+p_1\frac{\partial^2 g\big(\alpha(x,t)\big)}{\partial x\partial t}+p_2\frac{\partial^2 g\big(\alpha(x,t)\big)}{\partial t^2}=$$
$$=g''\big(\alpha(x,t)\big)\Big(\big(\alpha'_x(x,t)\big)^2+p_1\alpha'_x(x,t)\alpha'_t(x,t)+p_2\big(\alpha'_t(x,t)\big)^2\Big)=$$
$$=g''\big(\alpha(x,t)\big)\left(\frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}-\frac{(\omega_1+\omega_2)\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{1}{\omega_2-\omega_1}+\frac{\omega_1\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\right)=$$
$$=g''\big(\alpha(x,t)\big)\cdot\frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\cdot\big(\omega_2^2-\omega_1\omega_2-\omega_2^2+\omega_1\omega_2\big)=0.$$

Так как A и B — произвольные числа, то функция $g(\alpha(x,t))$ будет удовлетворять уравнению (2.2) для п.в. $(x,t)\in\mathbb{R}^2$. Тем самым утверждение леммы доказано для $g(\alpha(x,t))$. Для $g(\beta(x,t))$ утверждение леммы доказывается аналогично. Таким образом, лемма 3.2 доказана. $\square$

Так как функция $\breve\varphi(\xi)$ удовлетворяет предположениям леммы 3.2, то для п.в. $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ функции $\breve\varphi(\alpha(x,t))$ и $\breve\varphi(\beta(x,t))$ для п.в. $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ являются решениями уравнения (2.2), для которых при п.в. $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ выполняются равенства

$$\frac{\partial^2\breve\varphi(\alpha(x,t))}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2\breve\varphi(\alpha(x,t))}{\partial t\partial x},\qquad \frac{\partial^2\breve\varphi(\beta(x,t))}{\partial x\partial t}=\frac{\partial^2\breve\varphi(\beta(x,t))}{\partial t\partial x}.$$

Следовательно, в силу определения $\breve\varphi(\xi)$ из предыдущего заключаем, что функция $u_1(x,t)$, выражающаяся формулой (2.13), при предположениях теоремы удовлетворяет пункту a) определения 1.2 классического решения и, кроме того, для п.в. $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ (а, значит, и в Q) удовлетворяет уравнению (2.2).

2. Далее будем рассматривать $(x,t)\in Q$. Проверим выполнение для $u_1(x,t)$ граничных условий (2.3). Из формулы (2.13) следует при всех $t\geqslant 0$

$$u_1(0,t)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widehat\varphi\big(\{\alpha(0,t)\}\big)-\widehat\varphi\big(\{\beta(0,t)\}\big)\Big)=$$
$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widehat\varphi\left(\left\{\frac{t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)-\widehat\varphi\left(\left\{\frac{t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)=0,$$

$$u_1(1,t)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widehat\varphi\big(\{\alpha(1,t)\}\big)-\widehat\varphi\big(\{\beta(1,t)\}\big)\Big)=$$
$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widehat\varphi\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)-\widehat\varphi\left(\left\{\frac{\omega_1+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widehat\varphi\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)-\widehat\varphi\left(\left\{1+\frac{\omega_1+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widehat\varphi\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)-\widehat\varphi\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)=0.$$

Таким образом, функция $u_1(x,t)$, определяемая формулой (2.13), удовлетворяет граничным условиям (2.3) в области Q.

3. Проверим для функции $u_1(x,t)$, определяемой формулой (2.13), выполнение начальных условий (2.4). В силу определения функции $\widehat\varphi(\xi)$ из формулы (2.13) следует при всех $x\in[0,1]$

$$u_1(x,0)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)-\widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\omega_2\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right)-\widehat{\varphi}\left(\left\{1+\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\omega_2\varphi(x)-\widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_2-\omega_1(1-x)}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\omega_2\varphi(x)-\omega_1\varphi\left(\frac{1}{1-a}\left(1-\frac{(\omega_2-\omega_1)+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\omega_2\varphi(x)-\omega_1\varphi\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{-\omega_1}\cdot\frac{-\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right)\right)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\big(\omega_2\varphi(x)-\omega_1\varphi(x)\big)=\varphi(x),$$

т. е. первое начальное условие (2.4) для функции $u_1(x,t)$ выполняется. Для проверки второго начального условия (2.4) нужно найти производную $u'_{1t}(x,t)$ в достаточно узкой полосе в множестве Q

$$\Pi_\delta=\big\{(x,t)\in Q: x\in[\delta,\,1-\delta],\ t\in\big[0,\,\varepsilon(\delta)\big],\ \varepsilon(\delta)=\min\{-\omega_1\delta,\omega_2\delta\}\big\},\tag{3.11}$$

примыкающей к отрезку $x\in[\delta,1-\delta]$ ($\delta>0$ и достаточно мало).

Если $(x,t)\in\Pi_\delta$, то

$$\alpha(x,t)=\frac{\omega_2 x+t}{\omega_2-\omega_1}<\frac{\omega_2(1-\delta)+\omega_2\delta}{\omega_2-\omega_1}=\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}=a;$$

$$\alpha(x,t)=\frac{\omega_2 x+t}{\omega_2-\omega_1}>\frac{\omega_2\delta}{\omega_2-\omega_1}>0;$$

$$1+\beta(x,t)=1+\frac{\omega_1 x+t}{\omega_2-\omega_1}<1+\frac{\omega_1\delta-\omega_1\delta}{\omega_2-\omega_1}=1;$$

$$1+\beta(x,t)=1+\frac{\omega_1 x+t}{\omega_2-\omega_1}>1+\frac{\omega_1(1-\delta)}{\omega_2-\omega_1}=a-\frac{\omega_1\delta}{\omega_2-\omega_1}>a.$$

Следовательно, при $(x,t)\in\Pi_\delta$

$$u_1(x,t)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\big(\widehat{\varphi}(\alpha(x,t))-\widehat{\varphi}(1+\beta(x,t))\big)=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\omega_2\varphi\left(\frac{\omega_2 x+t}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\right)-\omega_1\varphi\left(\frac{-\omega_1 x-t}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1}{-\omega_1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\omega_2\varphi\left(x+\frac{t}{\omega_2}\right)-\omega_1\varphi\left(x+\frac{t}{\omega_1}\right)\right),$$

откуда получаем формулу для производной при $(x,t)\in\Pi_\delta$ вида

$$u'_{1,t}(x,t)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\varphi'\left(x+\frac{t}{\omega_2}\right)-\varphi'\left(x+\frac{t}{\omega_1}\right)\right).$$

В результате будем иметь при $x\in[\delta,1-\delta]$ и $t=0$

$$u'_{1,t}(x,0)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}(\varphi'(x)-\varphi'(x))=0,$$

а в силу непрерывности $u'_{1,t}(x,0)$ и произвольности $\delta>0$ получим

$$u'_{1,t}(0,0)=u'_{1,t}(1,0)=0.$$

Следовательно,

$$u'_{1,t}(x,0)\equiv 0\quad\forall x\in[0,1],$$

т. е. и второе начальное условие (2.4) для функции $u_1(x,t)$ выполнятся. Тем самым, на основании пунктов 1–3 можно заключить, что функция $u_1(x,t)$, определяемая формулой (2.13), при выполнении предположений теоремы является классическим решением задачи (2.2)–(2.4).

4. Покажем теперь, что функция $u_{1,tt}(x,t)$, где $u_1(x,t)$ определяется формулой (2.13), при выполнении предположений теоремы есть функция класса $\mathcal{Q}$.

Из определения функции $u_1(x,t)$ получим

$$u_{1,tt}(x,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\frac{\partial^2\breve{\varphi}(\alpha(x,t))}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\breve{\varphi}(\beta(x,t))}{\partial t^2}\right).$$

Отсюда, используя формулу (3.10) для второй производной, найдём

$$u_{1,tt}(x,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))(\alpha_t'(x,t))^2 - \breve{\varphi}''(\beta(x,t))(\beta_t'(x,t))^2\right). \tag{3.12}$$

В пункте 1 доказательства было установлено, что при предположениях теоремы функция $\breve{\varphi}_{tt}(x)$ является суммируемой на любом конечном отрезке $[A,B]\subset\mathbb{R}^2$, а значит, и измеримой на любом таком отрезке. Ввиду линейности функций $\alpha(x,t)$ и $\beta(x,t)$ отсюда следует, что функции $\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))$ и $\breve{\varphi}''(\beta(x,t))$ измеримы в области Q_T при любом $T>0$. Покажем, что эти функции суммируемы в любой такой области. Рассмотрим для примера функцию $\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))$. Из вышеизложенного следует, что эта функция суммируема по $x\in[0,1]$ для п.в. $t\in[0,T]$ и по $t\in[0,T]$ для п.в. $x\in[0,1]$. На основании теоремы 2 из [24, с. 335] и следствия из неё [24, с. 336] можно заключить, что для суммируемости $\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))$ в Q_T при любом $T>0$ достаточно установить неравенство

$$\int\limits_0^T dt\int\limits_0^1 \left|\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))\right| dx < +\infty. \tag{3.13}$$

Делая внутри интеграла в (3.13) замену $\alpha(x,t)=s$ и вводя число $k\in\mathbb{N}$ такое, что

$$k = \Big[(\omega_2+T)/(\omega_2\omega_1)\Big]$$

(напомним, что здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x), получим

$$\int\limits_0^T dt\int\limits_0^1 \left|\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))\right| dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^T dt \int\limits_{\frac{t}{\omega_2-\omega_1}}^{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}} \left|\breve{\varphi}''(s)\right| ds \leqslant \frac{1}{a}\int\limits_0^T dt \int\limits_0^{\frac{\omega_2+T}{\omega_2-\omega_1}} \left|\breve{\varphi}''(s)\right|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a}\int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^{k+1} \left|\widehat{\varphi}''(\{s\})\right| ds = \frac{T}{a}\sum_{j=0}^{k}\int\limits_0^1 \left|\widehat{\varphi}''(s)\right| ds =$$

$$= \frac{T(k+1)}{a}\left(\omega_2\int\limits_0^a \frac{1}{a^2}\left|\varphi''\left(\frac{s}{a}\right)\right| ds + |\omega_1|\int\limits_a^1 \frac{1}{(1-a)^2}\left|\varphi''\left(\frac{1-s}{1-a}\right)\right|\, ds\right) =$$

$$= \frac{T(k+1)}{a}\left(\frac{\omega_2}{a}\int\limits_0^1 \left|\varphi''(x)\right|\, dx + \frac{|\omega_1|}{1-a}\int\limits_0^1 \left|\varphi''(x)\right|\, d\xi\right) = \frac{2T(\omega_2-\omega_1)^2(k+1)}{\omega_2}\times$$

$$\times \|\varphi''(x)\|_{L_1[0,1]} \leqslant \frac{2T(\omega_2-\omega_1)^2}{\omega_2}\left(\left[\frac{\omega_2+T}{\omega_2-\omega_1}\right]+1\right)\|\varphi''(x)\|_{L_1[0,1]} = C(T)\|\varphi''(x)\|_{L_1[0,1]} < +\infty,$$

т. е. неравенство (3.13) установлено. Следовательно, $\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))\in\mathcal{Q}$. Совершенно аналогично доказывается, что и $\breve{\varphi}''(\beta(x,t))\in\mathcal{Q}$. Таким образом, на основании (3.12) приходим к выводу, что $u_{1,tt}(x,t)\in\mathcal{Q}$, а это доказывает единственность классического решения $u_1(x,t)$, если воспользоваться теоремой 2 из [29]. Тем самым, теорема 3.2 полностью доказана. $\square$

Из теорем 3.1 и 3.2 вытекает следующая теорема о необходимых и достаточных условиях классического решения задачи (2.2)–(2.4).

Теорема 3.3. *Для того, чтобы функция* $u_1(x,t)$, *определённая формулой* (2.13), *была единственным классическим решением задачи* (2.2)–(2.4) *при условии* (1.5), *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

3.2. Классическое решение в случае $\varphi = 0$ **и** $f = 0$**.** Рассмотрим задачу (2.5)–(2.7) нахождения классического решения $u_2(x,t)$. В теореме 2.2 для обобщённого решения $u_2(x,t)$ получена формула (2.15). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4. *Если* $u_2(x,t)$ *есть классическое решение задачи* (2.5)–(2.7) *при условии* (1.5), *для которого* $u_{2,tt}(x,t) \in \mathcal{Q}$, *то это решение единственно и даётся формулой* (2.15).

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из теоремы 2 в [29] о единственности классического решения и формулы для него в виде ряда из контурных интегралов, определения обобщённого решения в [33, с. 101] и теоремы 2.2 о формуле (2.15) для обобщённого решения. □

Оказывается справедливо и обратное утверждение, а именно, следующее достаточное условие для того, чтобы формула (2.15) давала классическое решение задачи (2.5)–(2.7).

Теорема 3.5. *Если* $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$ *и выполняется условие* (1.5), *то функция* $u_2(x,t)$, *определённая для всех* $(x,t) \in Q$ *формулой* (2.15), *является единственным классическим решением задачи* (2.5)–(2.7), *для которого выполняется условие* $u_{2,tt}(x,t) \in \mathcal{Q}$.

Доказательство. Разобьём доказательство теоремы на несколько пунктов.

1. Покажем, что $u_2(x,t)$, определяемая формулой (2.15), при предположениях теоремы удовлетворяет пункту а) определения 1.2 классического решения и, кроме того, является решением уравнения (2.5) в области Q.

Для этого сначала установим, что $\breve{\Psi}(\xi) := \widetilde{\Psi}(\{\xi\})$ есть абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A,B] \subset \mathbb{R}$.

Пусть $m < \xi < m+a$, где $m \in \mathbb{Z}$. Тогда, так как $\xi - m \in (0,a)$, будем иметь по определению функции $\widetilde{\Psi}(x)$ (см. формулу (2.16))

$$\breve{\Psi}(\xi) = \widetilde{\Psi}(\{\xi\}) = \widetilde{\Psi}(\xi - m) = \Psi\left(\frac{\xi - m}{a}\right) = \Psi\left(\frac{\{\xi\}}{a}\right). \tag{3.14}$$

То есть $\breve{\Psi}(\xi) \in AC(m, m+a)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Пусть $m + a < \xi < m+1$, где $m \in \mathbb{Z}$, тогда, так как $\xi - m \in (a,1)$, аналогично получим из определения функции $\widetilde{\Psi}(x)$

$$\breve{\Psi}(\xi) = \widetilde{\Psi}(\{\xi\}) = \widetilde{\Psi}(\xi - m) = \Psi\left(\frac{m+1-\xi}{1-a}\right) = \Psi\left(\frac{1-\{\xi\}}{1-a}\right), \tag{3.15}$$

а это означает, что $\breve{\Psi}(\xi) \in AC(m+a, m)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$. Покажем теперь, что $\breve{\Psi}(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = m$ и $\xi = m+a$. На основании формул (3.14), (3.15) и в силу непрерывности функции $\Psi(x)$ на отрезке $[0,1]$ (см. формулу (2.12)), получим:

$$\breve{\Psi}(m+0) = \Psi\left(\frac{+0}{a}\right) = \Psi(0), \quad \breve{\Psi}(m-0) = \breve{\Psi}(m+1-0) = \Psi\left(\frac{+0}{1-a}\right) = \Psi(0),$$

а это означает, что $\breve{\Psi}(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = m$;

$$\breve{\Psi}(m+a+0) = \Psi\left(\frac{1-a-0}{1-a}\right) = \Psi(1), \quad \breve{\Psi}(m+a-0) = \Psi\left(\frac{a-0}{a}\right) = \Psi(1),$$

а это означает, что $\breve{\Psi}(\xi)$ непрерывна и в точках $\xi = m+a$.

Таким образом, установлено, что $\breve{\Psi}(\xi)$ есть непрерывная кусочно-абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A,B]$. Но тогда по лемме 3.1 функция $\breve{\Psi}(\xi)$ является абсолютно непрерывной функцией на отрезке $[A,B]$.

Далее, из формул (3.14) и (3.15) следует, что производная функции $\breve{\Psi}(\xi)$ существует на каждом интервале $(m, m+a)$ и $(m+a, m+1)$ при $m \in \mathbb{Z}$ и по условию является абсолютно непрерывной функцией на этих интервалах.

На интервале $(m, m+a)$ из формулы (3.14) и определения функции $\Psi(x)$ получим

$$\breve{\Psi}'(\xi) = \frac{1}{a} \cdot \psi\left(\frac{\xi - m}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \psi\left(\frac{\{\xi\}}{a}\right), \tag{3.16}$$

а на интервале $(m+a, m+1)$ на основании формулы (3.15) аналогично будем иметь

$$\breve{\Psi}'(\xi) = -\frac{1}{1-a} \cdot \psi\left(\frac{m+1-\xi}{1-a}\right) = -\frac{1}{1-a} \cdot \psi\left(\frac{1-\{\xi\}}{1-a}\right). \tag{3.17}$$

Покажем, что $\breve{\Psi}'(\xi)$ есть абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A, B]$. Так как функция $\psi(x)$ по предположению теоремы непрерывна на $[0,1]$, то для этого достаточно показать непрерывность $\breve{\Psi}'(\xi)$ в точках $\xi = m$ и $\xi = m+a$. В точке $\xi = m$ на основании формул (3.16), (3.17) и предположений теоремы, что $\psi(0) = \psi(1) = 0$, имеем

$$\breve{\Psi}'(m+0) = \frac{1}{a} \cdot \psi\left(\frac{+0}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \psi(0) = 0,$$

$$\breve{\Psi}'(m-0) = \breve{\Psi}'(m+1-0) = -\frac{1}{1-a} \cdot \psi\left(\frac{+0}{1-a}\right) = -\frac{1}{1-a} \cdot \psi(0) = 0,$$

а это и означает, что $\breve{\Psi}'(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = m$.

В точке $\xi = m + a$ на основании формул (3.16) и (3.17) аналогично имеем

$$\breve{\Psi}'(m+a+0) = -\frac{1}{1-a} \cdot \psi\left(\frac{1-a-0}{1-a}\right) = -\frac{1}{1-a} \cdot \psi(1) = 0,$$

$$\breve{\Psi}'(m+a-0) = \frac{1}{a} \cdot \varphi'\left(\frac{a-0}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \psi(1) = 0,$$

а это и означает, что $\breve{\Psi}'(\xi)$ непрерывна и в точках $\xi = m + a$. Следовательно, функция $\breve{\Psi}'(\xi)$ есть непрерывная кусочно-абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A, B]$. Но тогда по лемме 3.1 функция $\breve{\Psi}'(\xi)$ есть абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A, B]$. Из формул (3.16) и (3.17) следует, на основании [24, теорема 3, с. 228], что на любом отрезке $[A, B]$ производная $\breve{\Psi}''(\xi)$ существует для п.в. $\xi \in [A, B]$ и является суммируемой функцией на этом отрезке. Так как функция $\breve{\Psi}(\xi)$ удовлетворяет предположениям леммы 3.2, то для п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ функции $\breve{\Psi}(\alpha(x,t))$ и $\breve{\Psi}(\beta(x,t))$ для п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ являются решениями уравнения (2.5), для которых при п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ выполняются равенства

$$\frac{\partial^2 \breve{\Psi}(\alpha(x,t))}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \breve{\Psi}(\alpha(x,t))}{\partial t \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 \breve{\Psi}(\beta(x,t))}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \breve{\Psi}(\beta(x,t))}{\partial t \partial x}.$$

Следовательно, на основании определения функции $\breve{\Psi}(\xi)$ из предыдущего заключаем, что функция $u_2(x,t)$, выражающаяся формулой (2.15), при предположениях теоремы удовлетворяет пункту a) определения 1.2 классического решения и, кроме того, для п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, а значит, и в области Q, удовлетворяет уравнению (2.5).

2. Далее будем рассматривать $(x,t) \in Q$. Проверим выполнение для $u_2(x,t)$ граничных условий (2.6). Из формулы (2.15) для $u_2(x,t)$ следует при всех $t \geqslant 0$

$$u_2(0,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widetilde{\Psi}\big(\{\alpha(0,t)\}\big) - \widetilde{\Psi}\big(\{\beta(0,t)\}\big)\Big) =$$
$$= -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) = 0,$$

$$u_2(1,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widetilde{\Psi}\big(\{\alpha(1,t)\}\big) - \widetilde{\Psi}\big(\{\beta(1,t)\}\big)\Big) =$$
$$= -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_1+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widetilde{\Psi}\left(\left\{1+\frac{\omega_1+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) = 0.$$

Таким образом, функция $u_2(x,t)$, определяемая формулой (2.15), удовлетворяет граничным условиям (2.6) в области Q.

3. Проверим теперь для функции $u_2(x,t)$, определяемой формулой (2.15), выполнение начальных условий (2.7). Из формулы (2.15) для $u_2(x,t)$ следует в силу определения $\widetilde{\Psi}(\xi)$ (см. формулу (2.15)) при всех $x\in[0,1]$

$$u_2(x,0) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\left(\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right) - \widetilde{\Psi}\left(\left\{1+\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\Psi(x) - \widetilde{\Psi}\left(1+\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right)\right) = -\frac{\omega_1\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\Psi(x) - \Psi\left(\frac{1}{1-a}\left(\frac{-\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right)\right)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\Psi(x) - \Psi\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{-\omega_1}\cdot\frac{-\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right)\right) = -\frac{\omega_1\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\big(\Psi(x)-\Psi(x)\big) = 0,$$

т. е. первое начальное условие (2.7) для функции $u_2(x,t)$ выполнятся.

Для проверки второго начального условия (2.7) нужно найти производную $u'_{2t}(x,t)$ в полосе Π_δ отрезка $x\in[\delta,1-\delta]$, определённой в предыдущем подразделе формулой (3.11) ($\delta>0$ и достаточно мало). Тогда, как и в предыдущем случае, получим при $(x,t)\in\Pi_\delta$

$$\alpha(x,t)\in(0,a), \qquad 1+\beta(x,t)\in(a,1).$$

Следовательно, при $(x,t)\in\Pi_\delta$ получим формулу

$$u_2(x,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widetilde{\Psi}\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \widetilde{\Psi}\big(\{\beta(x,t)\}\big)\Big) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\Psi\left(\frac{\omega_2 x+t}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\right) - \Psi\left(\frac{-\omega_1 x-t}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1}{-\omega_1}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\Psi\left(x+\frac{t}{\omega_2}\right) - \Psi\left(x+\frac{t}{\omega_1}\right)\right),$$

откуда при $(x,t)\in\Pi_\delta$ найдём следующую формулу для производной:

$$u'_{2,t}(x,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\psi\left(x+\frac{t}{\omega_2}\right)\frac{1}{\omega_2} - \psi\left(x+\frac{t}{\omega_1}\right)\frac{1}{\omega_1}\right).$$

В результате будем иметь при $x\in[\delta,1-\delta]$ и $t=0$

$$u'_{2,t}(x,0) = -\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\psi(x) + \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\psi(x) = \psi(x),$$

а в силу непрерывности $u_{2,t}(x,0)$ и произвольности $\delta>0$ получим

$$u'_{2,t}(0,0) = \psi(0), \qquad u'_{2,0}(1,0) = \psi(1).$$

Следовательно,

$$u'_{2,t}(x,0) \equiv \psi(x) \qquad \forall x\in[0,1],$$

т. е. и второе начальное условие (2.7) для функции $u_2(x,t)$ выполняется. Тем самым на основании пунктов 1–3 доказано, что функция $u_2(x,t)$, определяемая формулой (2.15), при выполнении предположений теоремы является классическим решением начально-краевой задачи (2.5)–(2.7). То, что $u_{2,tt}(x,t)$ есть функция класса $\mathcal{Q}$, показывается совершенно аналогично тому, как это было сделано для $u_{1,tt}(x,t)$ в предыдущем подразделе. На основании теоремы 2 из [29] это доказывает единственность классического решения $u_2(x,t)$. Тем самым теорема 3.5 полностью доказана. □

Из теорем 3.4 и 3.5, а также теоремы 2 из [29] о единственности классического решения вытекает следующая теорема о необходимых и достаточных условиях классического решения задачи (2.5)–(2.7).

Теорема 3.6. *Для того, чтобы функция* $u_2(x,t)$, *определённая формулой* (2.15), *была единственным классическим решением задачи* (2.5)–(2.7) *при условии* (1.5), *необходимо и достаточно, чтобы* $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

3.3. Классическое решение в случае $\varphi = 0$ и $\psi = 0$. Рассмотрим задачу (2.8)–(2.10). В разделе 2 в теореме 2.3 для обобщённого решения $u_3(x,t)$ получена формула (2.17). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.7. *Если* $u_3(x,t)$ *есть классическое решение задачи* (2.8)–(2.10) *при условии* (1.5), *для которого* $u_{3,tt}(x,t) \in \mathcal{Q}$, *то это решение единственно и даётся формулой* (2.17).

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из теоремы 2 в [29] о единственности классического решения и формулы для него в виде ряда из контурных интегралов, определения обобщённого решения в [33, с. 101] и теоремы 2.3 о формуле (2.17) для обобщённого решения. □

Оказывается справедливо и обратное утверждение, а именно, следующее достаточное условие для того, чтобы формула (2.17) давала классическое решение задачи (2.8)–(2.10).

Теорема 3.8. *Если* $f(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* t *при п.в.* $x \in [0,1]$, $f'_t(x,t) \in \mathcal{Q}$ *и выполняется условие* (1.5), *то функция* $u_3(x,t)$, *определённая для всех* $(x,t) \in Q$ *формулой* (2.17), *является единственным классическим решением задачи* (2.8)–(2.10), *для которого выполняется условие* $u_{3,tt}(x,t) \in \mathcal{Q}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\breve{F}(\xi,\tau) = \widetilde{F}(\{\xi\},\tau)$. Аналогичная функция $\breve{\Psi}(\xi)$, но одной переменной, уже рассматривалась в доказательстве теоремы 3.5 (волна над функцией $\Psi(\xi)$ и функцией $F(\xi,\tau)$ по переменной ξ имеет одинаковый смысл). Используя те же рассуждения, что и для функции $\breve{\Psi}(\xi)$, можно аналогично установить, что $\breve{F}(\xi,\tau)$ есть абсолютно непрерывная функция по ξ на любом отрезке $[A,B] \subset \mathbb{R}$. Из условия теоремы следует, что и по τ эта функция абсолютно непрерывна на любом отрезке $[0,T]$, где $T > 0$. При этом для $\xi \in (m, m+a)$, где $m \in \mathbb{Z}$, имеем по определению функции $\widetilde{F}(\xi,\tau)$ (см. (2.18))

$$\breve{F}(\xi,\tau) = \widetilde{F}(\{\xi\},\tau) = \widetilde{F}(\xi - m,\tau) = F\left(\frac{\xi - m}{a},\tau\right),$$

т. е. на основании формулы (2.12) для функции $F(\xi,\tau)$ при п.в. $\xi \in (m, m+a)$ получим выражение

$$\breve{F}_\xi(\xi,\tau) = \frac{\partial}{\partial\xi} F\left(\frac{\xi - m}{a},\tau\right) = \frac{\partial}{\partial\xi} \int\limits_0^{\frac{\xi-m}{a}} f(\xi_1,\tau)\, d\xi_1 = \frac{1}{a}\cdot f\left(\frac{\xi - m}{a},\tau\right) = \frac{1}{a}\cdot f\left(\frac{\{\xi\}}{a},\tau\right). \tag{3.18}$$

В случае $\xi \in (m+a, m+1)$ аналогично получим

$$\breve{F}(\xi,\tau) = \tilde{F}(\{\xi\},\tau) = \tilde{F}(\xi - m,\tau) = F\left(\frac{m+1-\xi}{1-a},\tau\right),$$

т. е. при п.в. $\xi \in (m+a, m+1)$ будем иметь представление

$$\breve{F}_\xi(\xi,\tau) = \frac{\partial}{\partial\xi} F\left(\frac{m+1-\xi}{1-a},\tau\right) = \frac{\partial}{\partial\xi} \int\limits_0^{\frac{m+1-\xi}{1-a}} f(\xi_1,\tau)\, d\xi_1 =$$

$$= \frac{1}{a-1}\cdot f\left(\frac{m+1-\xi}{1-a},\tau\right) = \frac{1}{a-1}\cdot f\left(\frac{1-\{\xi\}}{1-a},\tau\right). \tag{3.19}$$

Так как $\alpha(x,t-\tau)$ и $\beta(x,t-\tau)$ суть линейные функции и по x, и по t (см. определение этих функций в (2.11)), то функции $\breve{F}(\alpha(x,t-\tau),\tau)$ и $\breve{F}(\beta(x,t-\tau),\tau)$ суть абсолютно непрерывные функции и по x, и по t в Q_T для всех $T>0$. С использованием функции $\breve{F}(\xi,\tau)$ формулу (2.17) можно записать в виде

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \Big(\breve{F}\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big) - \breve{F}\big(\beta(x,t-\tau),\tau\big)\Big)\,d\tau = v_1(x,t) - v_2(x,t). \tag{3.20}$$

Покажем, что функция $u_3(x,t)$, определяемая этой формулой, при условиях теоремы будет классическим решением задачи (2.8)–(2.10). Это требует достаточно длинных рассуждений, но с идейной точки зрения эти рассуждения мало отличаются от соответствующих рассуждений из [45, с. 289–293] в случае, когда $p_1=0$, т. е. когда $\omega_1=-1$ и $\omega_2=1$. Поэтому эти рассуждения проведем без излишних подробностей. Найдём первые частные производные от $v_1(x,t)$. Для производной по x будем иметь для всех $(x,t)\in Q$

$$\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^t \breve{F}\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big)\,d\tau = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big)\alpha'_x(x,t-\tau)\,d\tau, \tag{3.21}$$

где $\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big)$ понимается следующим образом:

$$\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big) = \breve{F}_\xi(\xi,\tau)\big|_{\xi=\alpha(x,t-\tau)}.$$

Если $\breve{F}_\xi(\xi,\tau)$ — непрерывная функция по ξ и τ, то формула (3.21) получается обычным дифференцированием интеграла $v_1(x,t)$ по формуле Ньютона—Лейбница. Если же функция $\breve{F}_\xi(\xi,\tau)$ не является непрерывной (а в нашем случае она, вообще говоря, суммируема по ξ), то, тем не менее, эта формула также верна (обоснование формулы (3.21) и аналогичных формул, как уже было указано выше, можно найти в [45, с. 289–293]). Из вида $\alpha(x,t-\tau)$ и формулы (3.21) получим выражение для производной по x для всех $(x,t)\in Q$

$$\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} = -\frac{\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^t \breve{F}_\xi\Big(\alpha(x,t-\tau),\tau\Big)\,d\tau. \tag{3.22}$$

Совершенно аналогично получаем выражение для производной по t для всех $(x,t)\in Q$

$$\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \breve{F}\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big)\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}\big(\alpha(x,0),t\big) - \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^t \breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big)\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}F\left(\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2},t\right) - \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^t \breve{F}_\xi(\alpha(x,t-\tau),\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x f(\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^t \breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big)\,d\tau. \tag{3.23}$$

Найдём теперь вторые частные производные от функции $v_1(x,t)$. Для этого в интегралах по переменной τ в (3.22) и (3.23) сделаем замену переменной $\alpha(x,t-\tau)=\xi$. В результате эти формулы будут иметь вид

$$\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} = -\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi,\omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi, \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x f(\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi. \tag{3.25}$$

Так как $\breve{F}_\xi(\xi,\tau)$ есть абсолютно непрерывная функция по τ, то для п.в. $(x,t)\in Q$ справедливы следующие формулы для вторых производных от функции $v_1(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi,\, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi =$$
$$= -\frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\left(\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big) - \breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big) + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\right); \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x\partial t} = -\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi =$$
$$= -\frac{\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\left(\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big) + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\right); \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial t\partial x} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot f(x,t) - \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi =$$
$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot f(x,t) - \frac{\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big) - \breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big) +$$
$$+ (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg); \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x f_t(\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi =$$
$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x f_t(\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\left(\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big) + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\right). \tag{3.29}$$

Совершенно ясно, что для производных от функции $v_2(x,t)$ будут иметь место аналогичные формулы (первые производные определены для всех $(x,t)\in Q$, а вторые производные — для п.в. $(x,t)\in Q$)

$$\frac{\partial v_2(x,t)}{\partial x} = -\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi; \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x f(\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi; \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\omega_1^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big) - \breve{F}_\xi\big(\beta(x,0),t\big) + \\ + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\, d\xi\Bigg); \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x\partial t} = -\frac{\omega_1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big) + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\, d\xi\Bigg); \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial t\partial x} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot f(x,t) - \frac{\omega_1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big) - \breve{F}_\xi\big(\beta(x,0),t\big) + \\ + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\beta(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\, d\xi\Bigg); \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x f_t(\xi,t)\, d\xi - \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big) + \\ + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\, d\xi\Bigg). \quad (3.35)$$

Учитывая представление (3.20) для функции $u_3(x,t)$ и формулы (3.24)–(3.35), получим следующие формулы для производных от функции $u_3(x,t)$ (первые производные определены для всех $(x,t)\in Q$, а вторые производные — для п.в. $(x,t)\in Q$):

$$\frac{\partial u_3(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\omega_2\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\, d\xi - \\ - \omega_1\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\, d\xi\Bigg);$$

$$\frac{\partial u_3(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\, d\xi - \\ - \int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\, d\xi\Bigg); \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\frac{\omega_2^2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big) - \frac{\omega_2^2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big) + \\ + \omega_2^2\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\, d\xi - \frac{\omega_1^2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big) +$$

$$+\frac{\omega_1^2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,0),t\big)-\omega_1^2\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_1 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg); \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x\partial t}=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big)+\\+\omega_2\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi-\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big)-\\-\omega_1\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_1 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg); \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t\partial x}=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big)-\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big)+\\+\omega_2\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi-\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big)+\\+\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi(\beta(x,0),t)-\omega_1\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_1 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg); \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2}=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big)+\\+\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big)-\\-\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_1 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg). \tag{3.40}$$

Так как на основании формулы (3.18)

$$\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big)=a\breve{F}_\xi(ax,t)=a\cdot\frac{1}{a}\cdot f(x,t)=f(x,t), \tag{3.41}$$

а на основании формулы (3.19)

$$\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,0),t\big)=(a-1)\breve{F}_\xi\left(\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1},t\right)=(a-1)\breve{F}_\xi\left(1+\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1},t\right)=\\=(a-1)\breve{F}_\xi\left(\frac{1}{1-a}\cdot\frac{-\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1},t\right)=f\left(\frac{(1-a)x}{1-a},t\right)=f(x,t), \tag{3.42}$$

то формулу (3.39) можно записать короче:

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t\partial x}=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big)+\\+\omega_2\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi-\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big)-$$

$$- \omega_1 \int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\, d\xi\bigg). \quad (3.43)$$

Сравнивая (3.38) и (3.43), получаем для п.в. $(x,t) \in Q_T$ равенство $u_{3,xt}(x,t) = u_{3,tx}(x,t)$.

Следовательно, функция $u_3(x,t)$, определённая для всех $(x,t) \in Q$ формулой (2.17), удовлетворяет пункту а) определения 1.2 классического решения. Покажем, что $u_3(x,t)$ удовлетворяет и пункту б) определения классического решения. Для этого нужно проверить выполнение условий (2.9) и (2.10) всюду на границе области Q, а также то, что функция $u_3(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.8) п.в. в Q. Из формулы (2.17) следует для всех $t \geqslant 0$

$$u_3(0,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \Big(\widetilde{F}\big(\{\alpha(0,t-\tau)\},\tau\big) - \widetilde{F}\big(\{\beta(0,t-\tau)\},\tau\big)\Big)\, d\tau =$$

$$- \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \left(\widetilde{F}\left(\left\{\frac{t-\tau}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right) - \widetilde{F}\left(\left\{\frac{t-\tau}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)\right) d\tau = 0,$$

$$u_3(1,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \Big(\widetilde{F}\big(\{\alpha(1,t-\tau)\},\tau\big) - \widetilde{F}\big(\{\beta(1,t-\tau)\},\tau\big)\Big)\, d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \left(\tilde{F}\left(\left\{\frac{\omega_2+t-\tau}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right) - \tilde{F}\left(\left\{1+\frac{\omega_1+t-\tau}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)\right) d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \left(\tilde{F}\left(\left\{\frac{\omega_2+t-\tau}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right) - \tilde{F}\left(\left\{\frac{\omega_2+t-\tau}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)\right) d\tau = 0$$

ввиду 1-периодичности функции $\widetilde{F}\big(\{x\}\},\tau\big)$ по x, т. е. краевые условия (2.9) для функции $u_3(x,t)$ выполняются. Далее, в соответствии с формулой (2.17) получим

$$u_3(x,0) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^0 \Big(\widetilde{F}\big(\{\alpha(x,0)\},\tau\big) - \widetilde{F}\big(\{\beta(x,0)\},\tau\big)\Big)\, d\tau = 0 \quad \forall x \in [0,1],$$

а на основании формулы (3.36) будем иметь

$$u_{3,t}(x,0) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,0)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_2 x - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\, d\xi -$$

$$- \int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,0)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_1 x - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\, d\xi\Bigg) = 0 \quad \forall x \in [0,1],$$

т. е. функция $u_3(x,t)$ удовлетворяет также и начальным условиям (2.10). Покажем теперь, что рассматриваемая функция $u_3(x,t)$ при предположениях теоремы для п.в. $(x,t) \in Q$ удовлетворяет уравнению (2.8). Используя формулы (3.37), (3.38) и (3.40) в левой части уравнения (2.8), получим для п.в. $(x,t) \in Q$

$$u_{3,xx}(x,t) + p_1 u_{3,xt}(x,t) + p_2 u_{3,tt}(x,t) = \frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big) - \frac{\omega_1^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,0),t\big). \quad (3.44)$$

Принимая во внимание формулы (3.41)-(3.42), для правой части (3.44) получим представление

$$\frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big)-\frac{\omega_1^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,0),t\big)=\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\cdot f(x,t)-\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\cdot f(x,t)=f(x,t). \tag{3.45}$$

Из (3.44)–(3.45) видно, что функция $u_3(x,t)$, которая определена при всех $(x,t)\in Q$ формулой (2.17), является решением уравнения (2.8) для п.в. $(x,t)\in Q$. Таким образом, доказано, что функция $u_3(x,t)$ является классическим решением неоднородной начально-граничной задачи (2.8)–(2.10) в случае (1.5). Осталось доказать единственность этого решения. Для доказательства единственности решения $u_3(x,t)$ в соответствии с [29, теорема 2] нужно установить, что $u_{3,tt}(x,t)\in\mathcal{Q}$. Из формулы (3.40) видно, что для этого достаточно установить

$$\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big),\ \breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big)\in\mathcal{Q}; \tag{3.46}$$

$$\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi,\quad \int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_1x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\in\mathcal{Q}. \tag{3.47}$$

Справедливость (3.46) устанавливается совершенно аналогично тому, как это было сделано для $u_{1,tt}(x,t)$ в подразделе 3.1. Покажем, что справедливо и (3.47). Так как доказательства этого свойства для первого и второго интегралов идентичны, то установим это свойство, например, для первого интеграла. Нужно доказать, что при любом $T>0$

$$\iint\limits_{Q_T}\left|\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\right|dx\,dt<+\infty.$$

А для этого на основании теоремы 2 из [24, с. 335] и следствия из неё [24, с. 336] достаточно показать

$$\iint\limits_{Q_T}\left(\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\left|\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\right|d\xi\right)dx\,dt<+\infty. \tag{3.48}$$

В силу того, что функция $\left|\breve{F}_{\xi\tau}(\xi,\tau)\right|$ измерима в Q_T при любом $T>0$, будет измерима и функция $\left|\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\right|$ и по ξ, и по x, и по t в силу линейности второго аргумента по этим переменным. Поэтому будет измеримой в Q_T и функция

$$A(x,t):=\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\left|\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\right|d\xi.$$

С учетом этого обозначения, чтобы установить (3.48), достаточно получить при любом фиксированном $T>0$ оценку

$$\int\limits_0^T dt\int\limits_0^1 A(x,t)\,dx<+\infty. \tag{3.49}$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$I(t):=\int\limits_0^1 A(x,t)\,dx=\int\limits_0^1\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\left|\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\right|d\xi\,dx. \tag{3.50}$$

В этом интеграле интегрирование проводится по параллелограмму

$$R_t=\left\{(x,\xi):0\leqslant x\leqslant 1,\ \frac{\omega_2x}{\omega_2-\omega_1}\leqslant\xi\leqslant\frac{\omega_2x+1}{\omega_2-\omega_1}\right\}.$$

Сделаем в интеграле (3.50) замену переменных

$$\xi=\xi_1,\quad x=\frac{x_1-t+(\omega_2-\omega_1)\xi_1}{\omega_2}. \tag{3.51}$$

Для якобиана выполняется условие

$$\frac{D(\xi,x)}{D(\xi_1,x_1)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial x}{\partial\xi_1} \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x}{\partial x_1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2} \\ 0 & \dfrac{1}{\omega_2} \end{vmatrix}=\frac{1}{\omega_2}\neq 0,$$

т. е. замена переменных (3.51) является гомеоморфизмом.

В результате этой замены для $I(t)$ получим представление

$$I(t):=\frac{1}{\omega_2}\iint\limits_{S_t}\left|\breve F_{\xi\tau}(\xi_1,x_1)\right|d\xi_1\,dx_1,$$

где область интегрирования S_t есть параллелограмм

$$S_t=\left\{(x_1,\xi_1):0\leqslant x_1\leqslant t,\frac{-x_1+t}{\omega_2-\omega_1}\leqslant\xi_1\leqslant\frac{-x_1+t+\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\right\}.$$

Так как функция $\breve F_{\xi\tau}(\xi_1,x_1)$ измерима на множестве S_t при любом $t>0$ и справедливы неравенства

$$I(t)=\frac{1}{\omega_2}\int\limits_0^t dx_1\int\limits_{\frac{-x_1}{\omega_2-\omega_1}}^{\frac{-x_1+t+\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}\left|\breve F_{\xi\tau}(\xi_1,x_1)\right|d\xi_1\leqslant\frac{1}{\omega_2}\int\limits_0^T dx_1\int\limits_0^{\frac{T+\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}\left|\breve F_{\xi\tau}(\xi_1,x_1)\right|d\xi_1<C_T<+\infty,$$

то по теореме 2 из [24, с. 335] и следствия из неё [24, с. 336] получим, что $I(t)$ есть суммируемая функция на $[0,T]$, а следовательно, выполняется (3.49). Таким образом, неравенство (3.48) установлено и, тем самым, доказано первое свойство в (3.47). Как уже отмечалось, второе свойство в (3.47) доказывается аналогично. Тем самым установлено, что $u_{3,tt}(x,t)\in\mathcal{Q}$, откуда на основании [29, теоремы 2] следует единственность классического решения $u_3(x,t)$. Следовательно, теорема 3.8 полностью доказана. $\square$

На основании теоремы 2.4 для обобщённого решения $u_3(x,t)$, а следовательно, и для классического решения $u_3(x,t)$ на самом деле справедлива и другая эквивалентная формула, а именно, формула (2.19). Учитывая это, теорему 3.8 можно переформулировать в следующем виде.

Теорема 3.9. *Если $f(x,t)$ абсолютно непрерывна по t при п.в. $x\in[0,1]$, $f'_t(x,t)\in\mathcal{Q}$ и выполняется условие* (1.5), *то функция $u_3(x,t)$, определённая для всех $(x,t)\in Q$ формулой* (2.19), *является единственным классическим решением задачи* (2.8)–(2.10), *для которого выполняется условие $u_{3,tt}(x,t)\in\mathcal{Q}$.*

Возвращаясь теперь к представлению (2.1) классического решения задачи (1.1)–(1.3), и учитывая уже доказанные теоремы 3.3, 3.6, 3.9 о классических решениях $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ на основе формул для обобщённых решений, пользуясь обозначением (2.20), получаем следующий итоговый результат о классическом решении задачи (1.1)–(1.3).

Теорема 3.10. *Если $\varphi(x)\in W_1^2[0,1]$, $\psi(x)\in W_1^1[0,1]$, выполняются условия $\varphi(0)=\varphi(1)=\psi(0)=\psi(1)=0$, $f(x,t)$ абсолютно непрерывна по t при п.в. $x\in[0,1]$, $f'_t(x,t)\in\mathcal{Q}$ и выполняется условие* (1.5), *то функция*

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)}f(\xi,\tau)\,d\xi,$$

где функция $v(x,t)$ определяется формулой (2.20), *является единственным классическим решением задачи* (1.1)–(1.3).

Отметим, что функция $v(x,t)$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения (1.1) ($f=0$). Чтобы подчеркнуть, что это именно классическое решение, далее для краткости будем обозначать его как $v^\circ(x,t)$.

4. Обобщённое решение начально-граничной задачи в случае ненулевого потенциала

4.1. Обобщённое решение в случае ненулевого потенциала $q(x)$. Рассмотрим начально-граничную задачу (1.8)–(1.10). Применим к решению этой задачи подход, предложенный для потенциала $q = q(x)$ в [43, 44] (в случае $p_1 = 0$) и в [30, 31] (в случае $p_1 \neq 0$). Так же, как и в [30,31,43,44], будем считать правую часть $q(x)u(x,t)$ в уравнении (1.8) как возмущение в уравнении (1.1) задачи (1.1)–(1.3). Тогда по теореме 2.6 от задачи (1.8)–(1.10) приходим к интегральному уравнению:

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi)u(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{4.1}$$

Таким образом, задача (1.8)–(1.10) и интегральное уравнение (4.1) тесно связаны. Но в интегральном уравнении (4.1) функции $v(x,t)$ и $q(x)$ могут быть самого общего вида. А именно, $v(x,t)$ может быть функцией класса $\mathcal{Q}$, что верно при самых общих предположениях на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а именно: $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, а функция $q(x)$ также может быть самого общего вида, т. е. $q(x) \in L_1[0,1]$, но при условии, что произведение $q(x)u(x,t)) \in \mathcal{Q}$. Естественно дать следующее определение.

Определение 4.1. Будем называть решение $u(x,t)$ интегрального уравнения (4.1), в котором $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(x) \in L_1[0,1]$, но при этом $q(x)u(x,t) \in \mathcal{Q}$, *обобщённым решением* начально-граничной задачи (1.8)–(1.10), а саму задачу — *обобщённой начально-граничной задачей.*

Введем оператор

$$(\mathcal{B}f)(x,t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi)f(\xi,\tau)\,d\xi,$$

отображающий свою область определения $D(\mathcal{B}) \subset L_1(Q_T)$ в $C(Q_T)$.

Очевидно, оператор $\mathcal{B}$ есть линейный оператор. Сужение этого оператора на пространство $C(Q_T)$ обозначим как оператор B.

С использованием этого оператора уравнение (4.1) кратко можно записать в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + (\mathcal{B}u)(x,t).$$

Введем чисто формально функцию

$$w(x,t) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau))} q(\xi)v(\xi,\tau)\,d\xi \ \left(=: (\mathcal{B}v)(x,t)\right). \tag{4.2}$$

Ввиду специальной структуры функции $w(x,t)$ аналогично [30, лемма 4.2] можно утверждать, что если $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(x) \in L_1[0,1]$, то $w(x,t)$ является функцией из пространства $C(Q_T)$ при любом $T > 0$, т. е. на самом деле уже не формально $w(x,t) = \big(Bv\big)(x,t)$. Следовательно, можно образовать ряд

$$W(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (B^n w)(x,t). \tag{4.3}$$

.

Определение 4.2. Будем говорить, что числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *сходится не медленнее γ-экспоненциального ряда* ($\gamma > 0$), если при некоторой константе $C > 0$ и при всех n будет $|a_n| \leqslant C^n/(n!)^{\gamma}$. 1-Экспоненциальный ряд — это обычный экспоненциальный ряд.

Справедлива следующая теорема из [30].

Теорема 4.1. *Если* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(x) \in L_1[0,1]$ *и выполняется условие* (1.5), *то ряд* (4.3) *сходится абсолютно и равномерно в пространстве* $C(Q_T)$ *к непрерывной функции* $W(x,t)$, *при этом сходимость ряда не медленнее экспоненциального, и функция*

$$u(x,t) = v(x,t) + W(x,t) \tag{4.4}$$

является единственным обобщённым решением задачи (1.8)–(1.10).

4.2. Обобщённое решение в случае ненулевого потенциала $q(x,t)$**.** Рассмотрим начально-граничную задачу (1.11)–(1.13). Применим к решению этой задачи подход, предложенный для потенциала $q = q(x,t)$ в [7] (в случае $p_1 = 0$) и в [32,34] (в случае $p_1 \neq 0$). Так же, как и в [7], будем рассматривать правую часть $q(x,t)u(x,t)$ в уравнении (1.11) как возмущение в уравнении (1.1) задачи (1.1)–(1.3). Тогда по теореме 2.6 от задачи (1.11)–(1.13) приходим к интегральному уравнению

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\big(\alpha(x,t-\tau)\big)}^{\eta\big(\beta(x,t-\tau)\big)} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{4.5}$$

Таким образом, задача (1.11)–(1.13) и интегральное уравнение (4.5) тесно связаны. Но в интегральном уравнении (4.5) функции $v(x,t)$ и $q(x,t)$ могут быть самого общего вида. А именно, $v(x,t)$ может быть функцией класса $\mathcal{Q}$, что верно при самых общих предположениях относительно параметров задачи $\varphi(x)$, $\psi(x)$, а именно: $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, и функция $q(x,t)$ также может быть функцией класса $\mathcal{Q}$, но при условии, что произведение $q(x,t)u(x,t)) \in \mathcal{Q}$. Естественно дать следующее определение по аналогии с определением 4.1.

Определение 4.3. Будем называть решение $u(x,t)$ интегрального уравнения (4.5), в котором $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $q(x,t) \in \mathcal{Q}$, но при этом $q(x,t)u(x,t) \in \mathcal{Q}$, *обобщённым решением* начально-граничной задачи (1.11)–(1.13), а саму задачу — *обобщённой начально-граничной задачей.*

Введем оператор

$$(\mathcal{D}f)(x,t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\big(\alpha(x,t-\tau)\big)}^{\eta\big(\beta(x,t-\tau)\big)} q(\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi,$$

отображающий свою область определения $D(\mathcal{D}) \subset L_1(Q_T)$ в $C(Q_T)$.

Очевидно, оператор $\mathcal{D}$ есть линейный оператор. Сужение этого оператора на пространство $C(Q_T)$ обозначим как оператор D.

С использованием этого оператора уравнение (4.5) кратко можно записать в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + (\mathcal{D}u)(x,t).$$

Далее будут фигурировать два предположения относительно потенциала $q(x,t)$ для п.в. $(x,t) \in Q_T$ при любом фиксированном $T > 0$:

$$(i) \quad |q(x,t)| \leqslant q_T(x) \in L_1[0,1]; \qquad (ii) \quad |q(x,t)| \leqslant \check{q}(t) \in L_p[0,T],\ p > 1. \tag{4.6}$$

Введем чисто формально функцию

$$\mathsf{w}(x,t) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau))} q(\xi,\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi =: (\mathcal{D}v)(x,t). \tag{4.7}$$

Ввиду специальной структуры функции $\mathsf{w}(x,t)$, на основании [34, лемма 1] можно утверждать, что если $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, функция $q(x,t)$ класса $\mathcal{Q}$ и для неё выполняется условие (i) или (ii) в (4.6), то $\mathsf{w}(x,t)$ является функцией из пространства $C(Q_T)$ при любом $T > 0$, т. е. на самом деле уже не формально $\mathsf{w}(x,t) = \big(Dv\big)(x,t)$. Следовательно, можно образовать ряд

$$\mathcal{W}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (D^n \mathsf{w})(x,t). \tag{4.8}$$

Справедлива следующая теорема [34, теорема 3].

Теорема 4.2. *Предположим, что* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, *выполняется условие* (1.5), $q(x,t) \in \mathcal{Q}$ *и удовлетворяет условиям* (i) *или* (ii). *Тогда ряд* (4.8) *сходится абсолютно и равномерно в пространстве* $C(Q_T)$ *к непрерывной функции* $\mathcal{W}(x,t)$, *при этом сходимость ряда в случае* (i) *не медленнее экспоненциального ряда, а в случае* (ii) *не медленнее* $1/p'$-*экспоненциального, и функция*

$$u(x,t) = v(x,t) + \mathcal{W}(x,t) \tag{4.9}$$

является единственным обобщённым решением задачи (1.11)–(1.13).

5. Классическое решение начально-граничной задачи в случае ненулевого потенциала на основе обобщённого решения

5.1. Классическое решение в случае ненулевого потенциала $q(x)$**.** Рассмотрим обобщённую начально-граничную задачу (1.8)–(1.10) с потенциалом $q = q(x)$. В разделе 4 сформулирована теорема 4.1 об обобщённом решении этой задачи, которое определяется формулой (4.4). Естественно возникает вопрос: будет ли формула (4.4) давать классическое решение начально-граничной задачи (1.8)–(1.10) и при каких условиях на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $p(x)$? Если ответ положительный (а это так и окажется), то можно сделать вывод, что метод получения обобщённого решения является регулярным. Этот вывод будет являться оправданием метода получения обобщённого решения.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Если* $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, *выполняются условия* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $q(x) \in L_1[0,1]$ *и предположение* (1.5), *то единственным классическим решением задачи* (1.8)–(1.10) *является функция*

$$u^\circ(x,t) = v^\circ(x,t) + W^\circ(x,t), \tag{5.1}$$

где $W^\circ(x,t)$ *определяется формулой* (4.3) (*ряд справа в* (4.3) *сходится абсолютно и равномерно в* $C(Q_T)$, $T > 0$, *при самых общих предположениях на параметры* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, *а именно*: $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$), *функция* $w^\circ(x,t)$ *определяется формулой* (4.2), *в которой вместо* $v(x,t)$ *стоит* $v^\circ(x,t)$ — *классическое решение задачи* (1.1)–(1.3) *с однородным уравнением* (1.1).

Доказательство. Из определения $W^\circ(x,t)$ видно, что справедливо представление

$$W^\circ(x,t) = w^\circ(x,t) + \left(B\left(\sum_{n=0}^{\infty}(B^n w^\circ)\right)\right)(x,t) = (Bv^\circ)(x,t) + \Big(B\big(W^\circ\big)\Big)(x,t) =$$

$$= \Big(B\big(v^\circ + W^\circ\big)\Big)(x,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi)\big(v^\circ(\xi,\tau) + W^\circ(\xi,\tau)\big)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau))} h(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{5.2}$$

где обозначено

$$h(\xi,\tau) = q(\xi)\big(v^\circ(\xi,\tau) + W^\circ(\xi,\tau)\big) =: q(\xi)u^\circ(\xi,\tau). \tag{5.3}$$

Функция $u^\circ(\xi,\tau)$ выражается формулой (5.1) и является вполне определённой функцией из $\mathcal{Q}$. На основании теоремы 2.4 и представления (5.2) можно заключить, что для функции $W^\circ(x,t)$ имеет место и другое представление, более удобное для дальнейших рассуждений, а именно:

$$W^\circ(x,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \Big(\widetilde{H}\big(\{\alpha(x,t-\tau)\},\tau\big) - \widetilde{H}\big(\{\beta(x,t-\tau)\},\tau\big)\Big)\,d\tau, \tag{5.4}$$

где $\widetilde{H}(\xi,\tau)$ определяется формулой (см. (2.18))

$$\widetilde{H}(\xi,\tau)=\begin{cases} H\left(\dfrac{\xi}{a},\tau\right), & \xi\in[0,a),\\ H\left(\dfrac{1-\xi}{1-a},\tau\right), & \xi\in(a,1),\end{cases}$$

здесь $H(x,t)=\int\limits_0^x h(\xi,t)\,d\xi$.

В теореме 3.8 установлено, что если $h(x,t)$ есть абсолютно непрерывная функция по $t\geqslant 0$ при п.в. $x\in[0,1]$ и $h_t(x,t)\in\mathcal{Q}$, то функция $W^\circ(x,t)$, определённая формулой (5.4), является единственным классическим решением начально-граничной задачи

$$u_{xx}+p_1u_{xt}+p_2u_{tt}=h(x,t), \tag{5.5}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0, \tag{5.6}$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0. \tag{5.7}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5.1. *Если выполняются условия теоремы* 5.1 *и* $h_t(x,t)\in\mathcal{Q}$, *то функция* $u^\circ(x,t)$, *определяемая формулой* (5.1), *является единственным классическим решением начально-граничной задачи* (1.8)–(1.10).

Доказательство. Так как $v^\circ(x,t)$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения, $W^\circ(x,t)$ есть решение задачи (5.5)–(5.7) и выполняется (5.3), то

$$u^\circ_{tt}+p_1u^\circ_{xt}+p_2u^\circ_{tt}=(v^\circ_{tt}+p_1v^\circ_{xt}+p_2v^\circ_{tt})+(W^\circ_{xx}+p_1W^\circ_{xt}+p_2W^\circ_{tt})=$$
$$=0+h(x,t)=q(x)\big(v^\circ(x,t)+W^\circ(x,t)\big)=q(x)u^\circ(x,t).$$

Таким образом, $u^\circ(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.8) для п.в. $(x,t)\in Q$.

Далее, при всех $t\geqslant 0$

$$u^\circ(0,t)=v^\circ(0,t)+W^\circ(0,t)=0+0=0,\quad u^\circ(1,t)=v^\circ(1,t)+W^\circ(1,t)=0+0=0,$$

т. е. $u^\circ(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (1.9).

При $x\in[0,1]$ имеют место равенства

$$u^\circ(x,0)=v^\circ(x,0)+W^\circ(x,0)=\varphi(x)+0=\varphi(x),$$

$$u^\circ_t(x,0)=v^\circ_t(x,0)+W^\circ_t(x,0)=\psi(x)+0=\psi(x),$$

т. е. u° удовлетворяет и начальным условиям (1.13). Таким образом, функция $u^\circ(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.8)–(1.10). Единственность решения $u^\circ(x,t)$ вытекает из того факта, что $v^\circ(x,t)$ есть единственное классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения, а $W^\circ(x,t)$ есть единственное классическое решение задачи (5.5)–(5.7), так как $h_t(x,t)\in\mathcal{Q}$ по предположению леммы. Тем самым лемма 5.1 доказана. $\square$

Следовательно, для завершения доказательства теоремы 5.1 осталось установить, что на самом деле $h_t(x,t)\in\mathcal{Q}$. В соответствии с (5.3) имеем

$$h_t(x,t)=q(x)v^\circ_t(x,t)+q(x)W^\circ_t(x,t). \tag{5.8}$$

Так как $v^\circ(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения, то $v^\circ_t(x,t)\in C(Q_T)$ для любого $T>0$ и, следовательно, $q(x)v^\circ_t(x,t)\in\mathcal{Q}$. Таким образом, из (5.8) видно, что всё свелось к доказательству следующего свойства:

$$q(x)W^\circ_t(x,t)\in\mathcal{Q}. \tag{5.9}$$

Установим, что $W_t^\circ(x,t) \in C(Q_T)$ при любом $T > 0$. Тогда, так как $q(x) \in L_1[0,1]$, свойство (5.9) будет доказано. Воспользуемся формулой (5.4) и установленной ранее формулой (3.36). Получим

$$W_t^\circ(x,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{H}_\xi\bigl(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\bigr)\,d\xi - \int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{H}_\xi\bigl(\xi, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\bigr)\,d\xi\right) = \\ = J_1(x,t) + J_2(x,t), \quad (5.10)$$

где обозначено $\breve{H}(\xi,\tau) = \widetilde{H}\bigl(\{\xi\},\tau\bigr)$. Далее рассмотрим, например, слагаемое $J_1(x,t)$. Слагаемое $J_2(x,t)$ рассматривается совершенно аналогично. Для производной $\breve{H}_\xi(\xi,\tau)$ воспользуемся формулами (3.18) и (3.19)

$$\breve{H}_\xi(\xi,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\cdot h\left(\dfrac{\{\xi\}}{a},\tau\right), & \{\xi\}\in(0,a), \\ \dfrac{1}{a-1}\cdot h\left(\dfrac{1-\{\xi\}}{1-a},\tau\right), & \{\xi\}\in(a,1) \end{cases} = \\ = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\cdot q\left(\dfrac{\{\xi\}}{a}\right)u^\circ\left(\dfrac{\{\xi\}}{a},\tau\right), & \{\xi\}\in(0,a), \\ \dfrac{1}{a-1}\cdot q\left(\dfrac{1-\{\xi\}}{1-a}\right)u^\circ\left(\dfrac{1-\{\xi\}}{1-a},\tau\right), & \{\xi\}\in(a,1). \end{cases} \quad (5.11)$$

Определим аналогично $\widetilde{F}(\xi,\tau)$ (см. (2.18) или (2.16)) функцию

$$\widetilde{u}^\circ(\xi,\tau) := \begin{cases} u^\circ\left(\dfrac{\xi}{a},\tau\right), & \xi\in[0,a), \\ u^\circ\left(\dfrac{1-\xi}{1-a},\tau\right), & \xi\in[a,1), \end{cases} \qquad \breve{u}^\circ(\xi,\tau) := \widetilde{u}^\circ\bigl(\{\xi\},\tau\bigr). \quad (5.12)$$

Совершенно так же, как это было сделано для функции $\breve{F}(\xi.\tau)$ в подразделе 3.3, можно установить, что $\breve{u}^\circ(\xi,\tau)$ есть непрерывная функция по $\xi\in\mathbb{R}$ и $\tau \geqslant 0$.

Кроме того, определим функцию

$$\mathsf{q}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\cdot q\left(\dfrac{\xi}{a}\right), & \xi\in[0,a), \\ \dfrac{1}{a-1}\cdot q\left(\dfrac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi\in[a,1), \end{cases} \qquad \breve{\mathsf{q}}(\xi) = \mathsf{q}\bigl(\{\xi\}\bigr). \quad (5.13)$$

Так как по предположению теоремы $q(x)\in L_1[0,1]$, то совершенно ясно, что функция $\breve{\mathsf{q}}(\xi)$ будет суммируемой на любом конечном отрезке. Из (5.11)–(5.13) следует представление

$$\breve{H}(\xi,\tau) = \breve{\mathsf{q}}(\xi)\breve{u}^\circ(\xi,\tau).$$

Следовательно, для $J_1(x,t)$ справедлива формула

$$J_1(x,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{\mathsf{q}}(\xi)\breve{u}^\circ\bigl(\xi,\omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\bigr)\,d\xi.$$

Так как функция $\breve{\mathsf{q}}(\xi)$ суммируема на каждом конечном интервале, $\breve{u}^\circ(\xi,\tau)$ непрерывна по $\xi\in\mathbb{R}$ и $\tau\geqslant 0$, функции $\omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi$, $\alpha(x,0)$ и $\alpha(x,t)$ непрерывны по своим аргументам, то по свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега [4, теорема 5, с. 301] функция $J_1(x,t)$ есть непрерывная функция в Q_T при любом $T > 0$. Совершенно аналогично показывается непрерывность второго слагаемого $J_2(x,t)$ в соотношении (5.10). Следовательно, непрерывность функции $W_t^\circ(x,t)$ в Q_T при любом $T > 0$ установлена, а тем самым установлено, что $h_t(x,t)\in\mathcal{Q}$. Таким образом, на основании леммы 5.1 получаем утверждение доказываемой теоремы. Теорема 5.1 полностью доказана. $\square$

5.2. Классическое решение в случае ненулевого потенциала $q(x,t)$. Рассмотрим обобщённую начально-граничную задачу (1.11)–(1.13) с потенциалом $q = q(x,t)$. В разделе 4 сформулирована теорема 4.2 об обобщённом решении этой задачи, которое определяется формулой (4.9). Естественно возникает вопрос: будет ли формула (4.9) давать классическое решение задачи (1.11)–(1.13) и при каких условиях на параметры $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(x,t)$? Если ответ положительный (а это так и окажется), то можно сделать вывод, что метод получения обобщённого решения является регулярным. Этот вывод будет являться оправданием метода получения обобщённого решения.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Если $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, выполняются условия $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $q(x,t) = q_1(x)q_2(x,t)$, $q_1(x) \in L_1[0,1]$, $q_2(x,t)$ и $q_{2,t}(x,t) \in C(Q_T)$ при любом $T > 0$, а также предположение* (1.5)*, то единственным классическим решением задачи* (1.11)–(1.13) *является функция*

$$\mathsf{u}^\circ(x,t) = v^\circ(x,t) + \mathcal{W}^\circ(x,t), \tag{5.14}$$

где $\mathcal{W}^\circ(x,t)$ определяется формулой (4.8) (*ряд справа в* (4.8) *сходится абсолютно и равномерно в $C(Q_T)$, $T > 0$, при самых общих предположениях: $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$*)*, функция $\mathsf{w}^\circ(x,t)$ определяется формулой* (4.7)*, в которой вместо $v(x,t)$ стоит $v^\circ(x,t)$ — классическое решение задачи* (1.1)–(1.3) *с однородным уравнением* (1.1).

Доказательство. Из определения $\mathcal{W}^\circ(x,t)$ видно, что справедливо представление

$$\mathcal{W}^\circ(x,t) = \mathsf{w}^\circ(x,t) + \left(D\left(\sum_{n=0}^{\infty}(D^n\mathsf{w}^\circ)\right)\right)(x,t) = (Dv^\circ)(x,t) + \Big(D\big(\mathcal{W}^\circ\big)\Big)(x,t) =$$

$$= \Big(D\big(v^\circ + \mathcal{W}^\circ\big)\Big)(x,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi,\tau)\big(v^\circ(\xi,\tau) + \mathcal{W}^\circ(\xi,\tau)\big)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau))} \mathsf{h}(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{5.15}$$

где обозначено

$$\mathsf{h}(\xi,\tau) := q(\xi,\tau)\big(v^\circ(\xi,\tau) + \mathcal{W}^\circ(\xi,\tau)\big) = q(\xi,\tau)\mathsf{u}^\circ(\xi,\tau). \tag{5.16}$$

С учетом предположений теоремы имеем представление

$$\mathsf{h}(\xi,\tau) = q_1(\xi)q_2(\xi,\tau)\big(v^\circ(\xi,\tau) + \mathcal{W}^\circ(\xi,\tau)\big) =: q_1(\xi)\mathsf{h}^\circ(\xi,\tau), \tag{5.17}$$

где функция $\mathsf{h}^\circ(\xi,\tau) := q_2(\xi,\tau)\big(v^\circ(\xi,\tau) + \mathcal{W}^\circ(\xi,\tau)\big)$ является вполне определённой функцией класса $\mathcal{Q}$. На основании теоремы 2.4 и представления (5.15) можно заключить, что для функции $W^\circ(x,t)$ имеет место и другое представление, более удобное для дальнейших рассуждений, а именно:

$$\mathcal{W}^\circ(x,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \Big(\widetilde{\mathsf{H}}\big(\{\alpha(x,t-\tau)\},\tau\big) - \widetilde{\mathsf{H}}\big(\{\beta(x,t-\tau)\},\tau\big)\Big)\,d\tau, \tag{5.18}$$

где $\widetilde{\mathsf{H}}(\xi,\tau)$ определяется формулой (2.18), а именно:

$$\widetilde{\mathsf{H}}(\xi,\tau) = \begin{cases} \mathsf{H}\left(\dfrac{\xi}{a},\tau\right), & \xi \in [0,a), \\ \mathsf{H}\left(\dfrac{1-\xi}{1-a},\tau\right), & \xi \in (a,1), \end{cases}$$

здесь $\mathsf{H}(x,t) = \int\limits_0^x \mathsf{h}(\xi,t)\,d\xi$.

В теореме 3.8 установлено, что если $\mathsf{h}(x,t)$ есть абсолютно непрерывная функция по $t \geqslant 0$ при п.в. $x \in [0,1]$ и $\mathsf{h}_t(x,t) \in \mathcal{Q}$, то функция $\mathcal{W}^\circ(x,t)$, определённая формулой (5.18), является единственным классическим решением начально-граничной задачи

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = \mathsf{h}(x,t), \tag{5.19}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{5.20}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \tag{5.21}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5.2. *Если выполняются условия теоремы* 5.2 *и* $\mathsf{h}_t(x,t) \in \mathcal{Q}$, *то функция* $\mathsf{u}^\circ(x,t)$, *определяемая формулой* (5.14), *является единственным классическим решением начально-граничной задачи* (1.11)–(1.13).

Доказательство. Так как $v^\circ(x,t)$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения, $\mathcal{W}^\circ(x,t)$ есть решение задачи (5.19)–(5.21) и выполняется (5.16), то

$$u^\circ_{tt} + p_1 u^\circ_{xt} + p_2 u^\circ_{tt} = (v^\circ_{tt} + p_1 v^\circ_{xt} + p_2 v^\circ_{tt}) + (\mathcal{W}^\circ_{xx} + p_1 \mathcal{W}^\circ_{xt} + p_2 \mathcal{W}^\circ_{tt}) = 0 + \mathsf{h}(x,t) = q(x,t)\mathsf{u}^\circ(x,t).$$

Таким образом, $u^\circ(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.11) для п.в. $(x,t) \in Q$.

Далее, при всех $t \geqslant 0$

$$\mathsf{u}^\circ(0,t) = v^\circ(0,t) + \mathcal{W}^\circ(0,t) = 0 + 0 = 0, \quad \mathsf{u}^\circ(1,t) = v^\circ(1,t) + \mathcal{W}^\circ(1,t) = 0 + 0 = 0,$$

т. е. $\mathsf{u}^\circ(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (1.12).

При $x \in [0,1]$ имеют место равенства

$$\mathsf{u}^\circ(x,0) = v^\circ(x,0) + \mathcal{W}^\circ(x,0) = \varphi(x) + 0 = \varphi(x),$$

$$\mathsf{u}^\circ_t(x,0) = v^\circ_t(x,0) + \mathcal{W}^\circ_t(x,0) = \psi(x) + 0 = \psi(x),$$

т. е. $\mathsf{u}^\circ(x,t)$ удовлетворяет и начальным условиям (1.10). Таким образом, функция $\mathsf{u}^\circ(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.11)–(1.13). Единственность решения $\mathsf{u}^\circ(x,t)$ вытекает из того факта, что $v^\circ(x,t)$ есть единственное классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения, а $\mathcal{W}^\circ(x,t)$ есть единственное классическое решение задачи (5.19)–(5.21), так как $\mathsf{h}_t(x,t) \in \mathcal{Q}$ по предположению леммы. Тем самым лемма 5.2 доказана. □

Следовательно, для завершения доказательства теоремы 5.2 осталось установить, что на самом деле $\mathsf{h}_t(x,t) \in \mathcal{Q}$. В соответствии с (5.17) имеем

$$\mathsf{h}_t(\xi,\tau) = q_1(x)\mathsf{h}^\circ_t(x,t) = q_1(x)\Big(q_{2t}(x,t)\big(v^\circ(x,t) + \mathcal{W}^\circ(x,t)\big) + q_2(x,t)\big(v^\circ_t(x,t) + \mathcal{W}^\circ_t(x,t)\big)\Big). \tag{5.22}$$

Так как по условию теоремы $q_1(x) \in L_1[0,1]$, $q_2(x,t)$, $q_{2t}(x,t) \in C(Q_T)$ для любого $T > 0$, $v^\circ(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения и, следовательно, $v^\circ_t(x,t) \in C(Q_T)$ для любого $T > 0$, а $\mathcal{W}^\circ(x,t) \in C(Q_T)$ при любом $T > 0$ на основании теоремы 4.2, то функции $q_1(x)q_{2t}(x,t)v^\circ(x,t)$, $q_1(x)q_{2t}(x,t)\mathcal{W}^\circ(x,t)$ и $q_1(x)q_2(x,t)v^\circ_t(x,t)$ принадлежат классу $\mathcal{Q}$. Следовательно, из (5.22) видно, что для доказательства того факта, что $\mathsf{h}_t(x,t) \in \mathcal{Q}$, достаточно доказать, что $q_1(x)q_2(x,t)\mathcal{W}^\circ_t(x,t) \in \mathcal{Q}$. Но так как $q_2(x,t) \in C(Q_T)$, то всё сводится к необходимости доказать, что $q_1(x)\mathcal{W}^\circ_t(x,t) \in \mathcal{Q}$. Это свойство устанавливается совершенно аналогично свойству (5.9). Следовательно, установлено, что $\mathsf{h}_t(x,t) \in \mathcal{Q}$. Таким образом, на основании леммы 5.2 получаем утверждение доказываемой теоремы. Теорема 5.2 полностью доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье// Докл. РАН. — 2014. — *458*, № 2. — С. 138–140. — DOI: 10.7868/S0869565214260041.
2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения// Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 2015. — *55*, № 2. — С. 229–241. — DOI: 10.7868/S0044466915020052.
3. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Рост. унив., 1994.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.

5. *Корнев В. В.* О применении расходящихся рядов в смешанных задачах, не имеющих классического решения// В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конференции: Воронеж. весенняя матем. школа “Понтрягинские чтения-XXXIII”». — Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 132–137.
6. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. — 2019. — *172.* — С. 119–133. — DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-119-133.
7. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Использование резольвентного подхода и расходящихся рядов при решении смешанных задач// В сб.: «Математика. Механика. Вып. 23». — Саратов: Сарат. унив., 2021. — С. 18–24.
8. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
9. *Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2020. — *20*, № 4. — С. 444–456. — DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456.
10. *Ломов И. С.* Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. и киберн. — 2021. — № 4. — С. 37–42.
11. *Ломов И. С.* Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. — 2021. — *172.* — С. 66–79. — DOI: 10.36535/0233-6723-2021-199-66-79.
12. *Ломов И. С.* Эффективное применение метода Фурье к решению смешанной задачи для телеграфного уравнения// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Сарат. унив., 2022. — С. 178–180.
13. *Ломов И. С.* Новый метод построения обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. и киберн. — 2022. — № 3. — С. 33–40.
14. *Ломов И. С.* Построение обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы// Дифф. уравн. — 2022. — *58*, № 11. — С. 1471–1483. — DOI: 10.31857/S0374064122110048.
15. *Ломовцев Ф. Е.* Метод корректировки пробных решений волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости для минимальной гладкости правой части// Журн. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2017. — *3.* — С. 38–52.
16. *Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. Н.* Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения в полуполосе плоскости при нестационарных нехарактеристических вторых производных// Весн. МДУ ім. А. А. Куляшова. Сер. В. Мат. Фіз. Біял. — 2021. — № 2. — С. 28–55.
17. *Ломовцев Ф. Е.* Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости// Весн. ГрДУ ім. Я. Купалы. Сер. 2. Мат. Фіз. Інф, выліч. тэх. і кірав. — 2021. — *11*, № 1. — С. 68–82.
18. *Ломовцев Ф. Е.* Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой// Журн. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2021. — *1.* — С. 18–38.
19. *Ломовцев Ф. Е.* Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке// Пробл. физ., мат. и техн. — 2022. — № 1. — С. 62–73. — DOI: 10.54341/20778708_2022_1_50_62.
20. *Моисеев Е. И., Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н.* Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной факторизованной второй косой производной в граничном условии// Докл. РАН. — 2014. — *459*, № 5. — С. 544–549. — DOI: 10.7868/S0869565214350072.
21. *Муравей Л. А., Петров В. М., Романенков А. М.* О задаче гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны// Вестн. Мордовского ун-та. — 2018. — *28*, № 4. — С. 472–485. — DOI: 1015507/0236-2910.028.201804.472-485.
22. *Муравей Л. А., Романенков А. М.* Численные методы гашения колебаний движущегося бумажного полотна// В сб.: «Дифф. уравн., мат. моделир. и вычисл. алгоритмы: сборн. матер. межд. конф. Белгород, 25–29 окт. 2021 г.» — Белгород: ИД БелГУ НИУ БелГУ, 2021. — С. 194–196.
23. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
24. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
25. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964.
26. *Рыхлов В. С.* Разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения с распадающимися краевыми условиями при отсутствии полноты собственных функций// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. — 2022. — *204.* — С. 124–134. — DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-124-134.

27. *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной// В сб.: «Соврем. методы теории краевых задач: материалы Межд. конф. “Понтрягинские чтения-XXXIII”». — Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 237–240.
28. *Рыхлов В. С.* Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Сарат. унив., 2022. — С. 252–255. — URL: `https://sgu.ru/node/184778`.
29. *Рыхлов В. С.* Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2023. — *23*, № 2. — С. 183–194. — DOI: 10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194.
30. *Рыхлов В. С.* Обобщённая начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 2. — С. 342–363. — DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363.
31. *Рыхлов В. С.* Обобщённое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и ненулевым потенциалом// В сб.: «Соврем. методы теории краевых задач: матер. Межд. конф.: Воронеж. весен. матем. школа (3–9 мая 2023 г.)». — Воронеж: ВГУ, 2023. — С. 343–345.
32. *Рыхлов В. С.* Обобщённое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом общего вида// В сб.: «XXXIV Крымская осенняя математическая школа-симпозиум Н. Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам». — Симферополь: ИТ АРИАЛ, 2023. — С. 17–19.
33. *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной// Итоги науки и техники. Сер. Совр. мат. и ее прил. — 2023. — *226*. — С. 89–107. — DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-89-107.
34. *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом общего вида// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: Вып. 22: материалы 22-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Сарат. унив., 2024. — С. 238–242.
35. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М.: Иностр. лит., 1951.
36. *Толстов Г. П.* О второй смешанной производной// Мат. сб. — 1949. — *24*, № 1. — С. 27–51.
37. *Хромов А. П.* Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2016. — *56*, № 2. — С. 239–251. — DOI: 10.7868/S0044466916020149.
38. *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2019. — *19*, № 3. — С. 280–288. — DOI: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288.
39. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения// В сб.: «Математика. Механика. Вып. 21». — Саратов: Сарат. унив., 2019. — С. 62–67.
40. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии// В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конференции: Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения-XXX”». — Воронеж: ВГУ, 2019. — С. 291–300.
41. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Научная книга, 2020. — С. 433–439.
42. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача// В сб.: «Математика. Механика. Вып. 23». — Саратов: Сарат. унив., 2021. — С. 63–67.
43. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Саратов. унив., 2022. — С. 319–324. — URL: `https://sgu.ru/node/184778`.
44. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2022. — *22*, № 3. — С. 322–331. — DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331.
45. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщённое решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения// Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 2019. — *59*, № 2. — С. 286–300. — DOI: 10.1134/S0044466919020091.
46. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения// Тр. ИММ УрО РАН. — 2021. — *27*, № 4. — С. 215–238. — DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238.
47. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача, не допускающая разделения переменных// Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2021. — *60*. — С. 325–328.

48. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1949.
49. *Archibald F. R., Emslie A. G.* The vibration of a string having a uniform motion along its length// J. Appl. Mech. — 1958. — *25*, № 1. — С. 347-348.
50. *Mahalingam S.* Transverse vibrations of power transmission chains// British J. Appl. Phys. — 1957. — *8*, № 4. — С. 145–148. — URL: `http://iopscience.iop.org/article/ 10.1088/0508-3443/8/4/303/pdf`.
51. *Sack R. A.* Transverse oscillations in traveling strings// British J. Appl. Phys. — 1954. — *5*, № 6. — С. 224–226. — DOI: 10.1088/0508-3443/5/6/307.

В. С. Рыхлов
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия
E-mail: `RykhlovVS@yandex.ru`

UDC 517.958, 517.956.32
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486
EDN: NKBXUW

Classical solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with mixed derivative

V. S. Rykhlov

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. In this paper, we study the initial-boundary value problem for a second-order nonhomogeneous hyperbolic equation in a half-strip of the plane with constant coefficients, containing a mixed derivative, with zero and nonzero potentials. This equation is the equation of transverse oscillations of a moving finite string. We consider the case of fixed ends (Dirichlet conditions). We assume that the roots of the characteristic equation are simple and lie on the real axis on different sides of the origin. We formulate our previously proven theorems on finite formulas for a generalized solution in the case of homogeneous and nonhomogeneous problems. Then, based on these formulas, we prove theorems on finite formulas for a classical solution or, in other words, a solution almost everywhere. In the second part of the paper, we formulate theorems on generalized solution of the initial-boundary value problem with ordinary potential and potential of general type, which we had proved earlier. These results are based on the idea of treating an equation with a potential as an inhomogeneity in an equation without a potential. This idea was previously used by A. P. Khromov and V. V. Kornev in the case of equation without mixed derivative. Further, on the basis of formulas for generalized solution to the problem with potentials, we prove theorems on the corresponding formulas for classical solutions for these two types of potentials.

Keywords: nonhomogeneous hyperbolic equation, initial-boundary value problem, mixed derivative, generalized solution, classical solution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: V. S. Rykhlov, "Classical solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with mixed derivative," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 451–486. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486`

REFERENCES

1. M. Sh. Burlutskaya and A. P. Khromov, “Rezol’ventnyy podkhod v metode Fur’e” [Resolvent approach in the Fourier method], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **458**, No. 2, 138–140, DOI: 10.7868/S0869565214260041 (in Russian).
2. M. Sh. Burlutskaya and A. P. Khromov, “Rezol’ventnyy podkhod dlya volnovogo uravneniya” [Resolvent approach for the wave equation], *Zhurn. vychisl. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2015, **55**, No. 2, 229–241, DOI: 10.7868/S0044466915020052 (in Russian).
3. A. I. Vagabov, *Vvedenie v spektral’nuyu teoriyu differentsial’nykh operatorov* [Introduction to the Spectral Theory of Differential Operators], Rostov Univ., Rostov-na-Donu, 1994 (in Russian).
4. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional’nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
5. V. V. Kornev, “O primenenii raskhodyashchikhsya ryadov v smeshannykh zadachakh, ne imeyushchikh klassicheskogo resheniya” [On the application of divergent series in mixed problems that do not have a classical solution], In: *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhd. konferentsii: Voronezh. vesennyaya matem. shkola “Pontryaginskie chteniya-XXXIII”* [Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems: Proc. of the Int. Conf.: Voronezh. Spring Math. School “Pontryagin Readings-XXXIII”], VGU, Voronezh, 2022, pp. 132–137 (in Russian).
6. V. V. Kornev and A. P. Khromov, “Klassicheskoe reshenie smeshannoy zadachi dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s zakreplennymi kontsami” [Classical solution of the mixed problem for the homogeneous wave equation with fixed ends], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2019, **172**, 119–133, DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-119-133 (in Russian).
7. V. V. Kornev and A. P. Khromov, “Ispol’zovanie rezol’ventnogo podkhoda i raskhodyashchikhsya ryadov pri reshenii smeshannykh zadach” [Using the resolvent approach and divergent series in solving mixed problems], In: *Matematika. Mekhanika. Vyp. 23* [Math. Mech. Iss. 23], Saratov Univ., Saratov, 2021, pp. 18–24 (in Russian).
8. A. N. Krylov, *O nekotorykh differentsial’nykh uravneniyakh matematicheskoy fiziki, imeyushchikh prilozheniya v tekhnicheskikh voprosakh* [On Some Differential Equations of Mathematical Physics that Have Applications in Technical Matters], GITTL, Moscow–Leningrad, 1950 (in Russian).
9. V. P. Kurdyumov, A. P. Khromov, and V. A. Khalova, “Smeshannaya zadacha dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s nenulevoy nachal’noy skorost’yu s summiruemym potentsialom” [Mixed problem for a homogeneous wave equation with nonzero initial velocity and summable potential], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2020, **20**, No. 4, 444–456, DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456 (in Russian).
10. I. S. Lomov, “Effektivnoe primenenie metoda Fur’e dlya postroeniya resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya” [Effective application of the Fourier method for constructing a solution to a mixed problem for the telegraph equation], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 15. Vychisl. mat. i kibern.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 15. Numer. Math. Cybern.], 2021, No. 4, 37–42 (in Russian).
11. I. S. Lomov, “Obobshchennaya formula Dalambera dlya telegrafnogo uravneniya” [Generalized D’Alembert formula for the telegraph equation], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2021, **172**, 66–79, DOI: 10.36535/0233-6723-2021-199-66-79(in Russian).
12. I. S. Lomov, “Effektivnoe primenenie metoda Fur’e k resheniyu smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya” [Efficient application of the Fourier method to solving a mixed problem for the telegraph equation], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 21-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 21st Int. Saratov Winter School], Saratov univ., Saratov, 2022, pp. 178–180 (in Russian).
13. I. S. Lomov, “Novyy metod postroeniya obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya” [A new method for constructing a generalized solution to a mixed problem for the telegraph equation], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 15. Vychisl. mat. i kibern.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 15. Numer. Math. Cybern.], 2022, No. 3, 33–40 (in Russian).
14. I. S. Lomov, “Postroenie obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya: sekventsial’nyy i aksiomaticheskiy podkhody” [Construction of a generalized solution of a mixed problem for the telegraph equation: sequential and axiomatic approaches], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **58**, No. 11, 1471–1483, DOI: 10.31857/S0374064122110048 (in Russian).
15. F. E. Lomovtsev, “Metod korrektirovki probnykh resheniy volnovogo uravneniya v krivolineynoy pervoy chetverti ploskosti dlya minimal’noy gladkosti pravoy chasti” [Method of correction of test solutions of the wave equation in the curvilinear first quarter of the plane for minimal smoothness of the right-hand side], *Zhurn. Belorus. gos. un-ta. Mat. Inf.* [J. Belorus State Univ. Math. Inf.], 2017, **3**, 38–52 (in Russian).

16. F. E. Lomovtsev and V. N. Lysenko, “Smeshannaya zadacha dlya obshchego odnomernogo volnovogo uravneniya v polupolose ploskosti pri nestatsionarnykh nekharakteristicheskikh vtorykh proizvodnykh” [Mixed problem for the general one-dimensional wave equation in a half-strip of the plane with nonstationary noncharacteristic second derivatives], *Vesn. MDU im. A. A. Kulyashova. Ser. B. Mat. Fiz. Biyal.* [Bull. A. A. Kulyashov MDU. Ser. B. Math. Phys. Biol.], 2021, No. 2, 28–55 (in Russian).
17. F. E. Lomovtsev, “Global’naya teorema korrektnosti po Adamaru pervoy smeshannoy zadachi dlya volnovogo uravneniya v polupolose ploskosti” [Global Hadamard correctness theorem for the first mixed problem for the wave equation in a half-strip of the plane], *Vesn. GrDU im. Ya. Kupaly. Ser. 2. Mat. Fiz. Inf, vylich. tekh. i kirav.* [Bull. Ya. Kupala GrDU Ser. 2. Math. Phys. Inf. Comp. Tech. Kirav.], 2021, **11**, No. 1, 68–82 (in Russian).
18. F. E. Lomovtsev, “Pervaya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na polupryamoy” [The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the semiaxis], *Zhurn. Belorus. gos. un-ta. Mat. Inf.* [J. Belorus State Univ. Math. Inf.], 2021, **1**, 18–38 (in Russian).
19. F. E. Lomovtsev, “Global’naya teorema korrektnosti pervoy smeshannoy zadachi dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na otrezke” [Global correctness theorem for the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on a segment], *Probl. fiz., mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2022, No. 1, 62–73, DOI: 10.54341/20778708_2022_1_50_62 (in Russian).
20. E. I. Moiseev, F. E. Lomovtsev, and E. N. Novikov, “Neodnorodnoe faktorizovannoe giperbolicheskoe uravnenie vtorogo poryadka v chetverti ploskosti pri polunestatsionarnoy faktorizovannoy vtoroy kosoy proizvodnoy v granichnom uslovii” [Nonhomogeneous factorized second-order hyperbolic equation in a quarter plane with a seminonstationary factorized second oblique derivative in the boundary condition], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **459**, No. 5, 544–549, DOI: 10.7868/S0869565214350072 (in Russian).
21. L. A. Muravey, V. M. Petrov, and A. M. Romanenkov, “O zadache gasheniya poperechnykh kolebaniy prodol’no dvizhushcheysya struny” [On the problem of damping transverse oscillations of a longitudinally moving string], *Vestn. Mordovskogo un-ta* [Bull. Mordova Univ.], 2018, **28**, No. 4, 472–485, DOI: 1015507/0236-2910.028.201804.472-485 (in Russian).
22. L. A. Muravey and A. M. Romanenkov, “Chislennye metody gasheniya kolebaniy dvizhushchegosya bumazhnogo polotna” [Numerical methods for damping oscillations of a moving paper canvas], In: *Diff. uravn., mat. modelir. i vychisl. algoritmy: sborn. mater. mezhd. konf. Belgorod, 25–29 okt. 2021 g.* [Differ. Equ., Math. Model., and Comput. Algorithms: Collected Mater. Int. Conf. Belgorod, 25–29 October 2021], ID BelGU NIU BelGU, Belgorod, 2021, pp. 194–196 (in Russian).
23. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial’nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (Russian translation).
24. I. P. Natanson, *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of a Real Variable], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
25. M. L. Rasulov, *Metod konturnogo integrala i ego primenenie k issledovaniyu zadach dlya differentsial’nykh uravneniy* [The Method of Contour Integral and Its Application to the Study of Problems for Differential Equations], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
26. V. S. Rykhlov, “Razreshimost’ smeshannoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s raspadayushchimisya kraevymi usloviyami pri otsutstvii polnoty sobstvennykh funktsiy” [Solvability of a mixed problem for a hyperbolic equation with decaying boundary conditions in the absence of completeness of eigenfunctions], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2022, **204**, 124–134, DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-124-134 (in Russian).
27. V. S. Rykhlov, “O reshenii nachal’no-granichnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [On the solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative], In: *Sovrem. metody teorii kraevykh zadach: materialy Mezhd. konf. “Pontryaginskie chteniya-XXXIII”* [Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems: Proc. Int. Conf.: Voronezh. Spring Math. School “Pontryagin Readings-XXXIII”], VGU, Voronezh, 2022, pp. 237–240 (in Russian).
28. V. S. Rykhlov, “Reshenie nachal’no-granichnoy zadachi dlya uravneniya giperbolicheskogo tipa so smeshannoy proizvodnoy” [Solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 21-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 21st Int. Saratov Winter School], Saratov Univ., Saratov, 2022, pp. 252–255 (in Russian), URL: `https://sgu.ru/node/184778`.

29. V. S. Rykhlov, "Edinstvennost' resheniya nachal'no-granichnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy i formula dlya resheniya" [Uniqueness of the solution of the initial!boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative and a formula for the solution], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2023, **23**, No. 2, 183–194, DOI: 10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194 (in Russian).
30. V. S. Rykhlov, "Obobshchennaya nachal'no-granichnaya zadacha dlya volnovogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy" [Generalized initial-boundary value problem for the wave equation with mixed derivative], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 2, 342–363, DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363 (in Russian).
31. V. S. Rykhlov, "Obobshchennoe reshenie nachal'no-granichnoy zadachi dlya volnovogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy i nenulevym potentsialom" [Generalized solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with mixed derivative and nonzero potential], In: *Sovrem. metody teorii kraevykh zadach: mater. Mezhd. konf.: Voronezh. vesen. matem. shkola (3–9 maya 2023 g.)* [Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems: Proc. of the Int. Conf.: Voronezh. Spring Math. School (3–9 May, 2023)], VGU, Voronezh, 2023, pp. 343–345 (in Russian).
32. V. S. Rykhlov, "Obobshchennoe reshenie nachal'no-granichnoy zadachi dlya volnovogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy i potentsialom obshchego vida" [Generalized solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with a mixed derivative and a general potential], In: *XXXIV Krymskaya osennyaya matematicheskaya shkola-simpozium N. D. Kopachevskogo po spektral'nym i evolyutsionnym zadacham* [N. D. Kopachevsky's XXXIV Crimean Autumn Math. School-Symposium on Spectral and Evolution Problems], IT ARIAL, Simferopol', 2023, pp. 17–19 (in Russian).
33. V. S. Rykhlov, "O reshenii nachal'no-granichnoy zadachi v polupolose dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy" [On the solution of the initial-boundary value problem in a half-strip for a hyperbolic equation with a mixed derivative], *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovr. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2023, **226**, 89–107, DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-89-107 (in Russian).
34. V. S. Rykhlov, "O reshenii nachal'no-granichnoy zadachi dlya volnovogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy i potentsialom obshchego vida" [On the solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with a mixed derivative and a general potential], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: Vyp. 22: materialy 22-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 22nd Int. Saratov Winter School], Saratov Univ., Saratov, 2024, pp. 238–242 (in Russian).
35. G. Hardy, *Raskhodyashchiesya ryady* [Divergent Series], Inostr. Lit., Moscow, 1951 (Russian translation).
36. G. P. Tolstov, "O vtoroy smeshannoy proizvodnoy" [On the second mixed derivative], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1949, **24**, No. 1, 27–51 (in Russian).
37. A. P. Khromov, "Povedenie formal'nogo resheniya smeshannoy zadachi dlya volnovogo uravneniya" [Behavior of the formal solution of the mixed problem for the wave equation], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2016, **56**, No. 2, 239–251, DOI: 10.7868/S0044466916020149 (in Russian).
38. A. P. Khromov, "O klassicheskom reshenii smeshannoy zadachi dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s zakreplennymi kontsami i nulevoy nachal'noy skorost'yu" [On the classical solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation with fixed ends and zero initial velocity], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2019, **19**, No. 3, 280–288, DOI: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288 (in Russian).
39. A. P. Khromov, "Raskhodyashchiesya ryady i smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya" [Divergent series and mixed problem for the wave equation], In: *Matematika. Mekhanika. Vyp. 21* [Mathematics. Mechanics. Iss. 21], Saratov Univ., Saratov, 2019, pp. 62–67 (in Russian).
40. A. P. Khromov, "Raskhodyashchiesya ryady i funktsional'nye uravneniya, svyazannye s analogami geometricheskoy progressii" [Divergent series and functional equations associated with analogs of geometric progression], In: *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhd. konferentsii: Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola "Pontryaginskie chteniya-XXX"* [Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems: Proc. of the Int. Conf.: Voronezh. Spring Math. School "Pontryagin Readings-XXX"], VGU, Voronezh, 2019, pp. 291–300 (in Russian).
41. A. P. Khromov, "Raskhodyashchiesya ryady i metod Fur'e dlya volnovogo uravneniya" [Divergent series and the Fourier method for the wave equation], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 20-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 20th Int. Saratov Winter School], Nauchnaya kniga, Saratov, 2020, pp. 433–439 (in Russian).

42. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha” [Divergent series and generalized mixed problem], In: *Matematika. Mekhanika. Vyp. 23* [Mathematics. Mechanics. Iss. 23], Sarat. univ., Saratov, 2021, pp. 63–67 (in Russian).
43. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and generalized mixed problem for the wave equation], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 21-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 21st Int. Saratov Winter School], Saratov Univ., Saratov, 2022, pp. 319–324 (in Russian), URL: `https://sgu.ru/node/184778`.
44. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya prosteyshego vida” [Divergent series and generalized mixed problem for the wave equation of the simplest form], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2022, **22**, No. 3, 322–331, DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331 (in Russian).
45. A. P. Khromov and V. V. Kornev, “Klassicheskoe i obobshchennoe resheniya smeshannoy zadachi dlya neodnorodnogo volnovogo uravneniya” [Classical and generalized solutions of a mixed problem for a nonhomogeneous wave equation], *Zhurn. vychisl. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2019, **59**, No. 2, 286–300, DOI: 10.1134/S0044466919020091 (in Russian).
46. A. P. Khromov and V. V. Kornev, “Raskhodyashchiesya ryady v metode Fur’e dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series in the Fourier method for the wave equation], *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Brach RAS], 2021, **27**, No. 4, 215–238, DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238 (in Russian).
47. A. P. Khromov and V. V. Kornev, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha, ne dopuskayushchaya razdeleniya peremennykh” [Divergent series and generalized mixed problem that does not allow separation of variables], *Tr. Mat. tsentra im. N. I. Lobachevskogo* [Proc. Lobachevskii Math. Center], 2021, **60**, 325–328 (in Russian).
48. L. Euler, *Differentsial’noe ischislenie* [Foundations of Differential Calculus], GITTL, Moscow–Leningrad, 1949 (Russian translation).
49. F. R. Archibald and A. G. Emslie, “The vibration of a string having a uniform motion along its length,” *J. Appl. Mech.*, 1958, **25**, No. 1, 347-348.
50. S. Mahalingam, “Transverse vibrations of power transmission chains,” *British J. Appl. Phys.*, 1957, **8**, No. 4, 145–148, URL: `http://iopscience.iop.org/article/ 10.1088/0508-3443/8/4/303/pdf`.
51. R. A. Sack, “Transverse oscillations in traveling strings,” *British J. Appl. Phys.*, 1954, **5**, No. 6, 224–226, DOI: 10.1088/0508-3443/5/6/307.

V. S. Rykhlov
Saratov State University, Saratov, Russia
E-mail: `RykhlovVS@yandex.ru`