Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 441–450
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.957
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-441-450
EDN: NGIESD

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА НА ПОЛУПРЯМОЙ

Е. Ю. Панов

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. В статье исследуются автомодельные решения многофазной задачи Стефана для уравнения теплопроводности на полупрямой $x > 0$ с постоянными начальными данными и граничными условиями Дирихле или Неймана. В случае граничного условия Дирихле мы доказываем, что нелинейная алгебраическая система для определения свободных границ является градиентной, а соответствующий потенциал является явно записанной строго выпуклой и коэрцитивной функцией. Следовательно, существует единственная точка минимума потенциала, координаты этой точки определяют свободные границы и дают искомое решение. В случае граничного условия Неймана мы показываем, что задача может иметь решения с различным числом (типом) фазовых переходов. Для каждого фиксированного типа n система для определения свободных границ снова является градиентной, а соответствующий потенциал оказывается строго выпуклым и коэрцитивным, но в некоторой более широкой нефизической области. В частности, решение типа n единственно и может существовать только в том случае, если точка минимума потенциала принадлежит физической области. Мы приводим явный критерий существования решений любого типа n. Из-за довольно сложной структуры множества решений ни существование, ни единственность решения задачи Стефана—Неймана не гарантируются.

Ключевые слова: задача Стефана, уравнение теплопроводности, свободная граница.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Е. Ю. Панов.* Автомодельные решения многофазной задачи Стефана на полупрямой// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 441–450. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-441-450

1. Задача Стефана с граничным условием Дирихле

В четверти плоскости $\Pi_+ = \{ \ (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t,x > 0 \ \}$ рассматривается многофазная задача Стефана для уравнения теплопроводности

$$u_t = a_i^2 u_{xx}, \quad u_i < u < u_{i+1}, \ i = 0, \dots, m, \tag{1.1}$$

где $u_0 \leqslant u_1 < \dots < u_m < u_{m+1} = u_D$, u_i, $i = 1, \dots, m$ — температуры фазовых переходов, $a_i > 0$, $i = 0, \dots, m$ — константы диффузии. Будем изучать непрерывные кусочно-гладкие решения $u = u(t,x)$ в Π_+, удовлетворяющие (1.1) в классическом смысле в областях $u_i < u(t,x) < u_{i+1}$, $i = 0, \dots, m$, заполненных фазами. На неизвестных линиях $x = x_i(t)$ фазовых переходов, где

$u = u_i$, выполняется условие Стефана

$$d_i x_i'(t) + k_i u_x(t, x_i(t)+) - k_{i-1} u_x(t, x_i(t)-) = 0, \tag{1.2}$$

где $k_i > 0$ — теплопроводность i-й фазы, а $d_i \geqslant 0$ — число Стефана (скрытая теплоемкость) для i-го фазового перехода. В (1.2) односторонние пределы $u_x(t, x_i(t)+)$, $u_x(t, x_i(t)-)$ на прямой $x = x_i(t)$ берутся из области, соответствующей более теплой/холодной фазе, соответственно. Числа Стефана d_i должны быть положительными по физическим причинам. Мы рассмотрим еще более общий случай $d_i \geqslant 0$, полагая, что $d_1 > 0$, если $u_0 = u_1$.

В этом случае задача (1.1), (1.2) корректно поставлена для $u_0 \leqslant u \leqslant u_D$ и сводится к вырожденному нелинейному уравнению диффузии (см. [1] и [2, гл. 5])

$$\beta(u)_t - \alpha(u)_{xx} = 0, \tag{1.3}$$

где $\alpha(u)$, $\beta(u)$ — строго возрастающие функции на $[u_0, u_D]$, линейные на каждом интервале (u_i, u_{i+1}), $i = 0, \ldots, m$, с наклонами $\alpha'(u) = k_i$, $\beta'(u) = k_i/a_i^2$ и такие, что

$$\alpha(u_i+) - \alpha(u_i-) = 0, \quad \beta(u_i+) - \beta(u_i-) = d_i, \ i = 1, \ldots, m$$

(здесь полагаем $\alpha(u_1-) = \alpha(u_0)$, $\beta(u_1-) = \beta(u_0)$ в случае $u_1 = u_0$).

Будем рассматривать начально-краевую задачу с постоянными начальными и граничными условиями Дирихле

$$u(0, x) = u_0 \ \forall x > 0, \quad u(t, 0) = u_D \ \forall t > 0. \tag{1.4}$$

В силу инвариантности нашей задачи относительно группы преобразований $(t, x) \to (\lambda^2 t, \lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, естественно искать автомодельное решение задачи (1.1), (1.2), (1.4), которое имеет вид $u(t, x) = u(\xi)$, $\xi = x/\sqrt{t}$. В силу (1.4)

$$u(0) = u_D, \quad u(+\infty) \doteq \lim_{\xi \to +\infty} u(\xi) = u_0 < u_D.$$

Таким образом, естественно предположить, что функция $u(\xi)$ убывает. Случай, когда $u_D \leqslant u_0$, рассматривается аналогично. Конечно, в этом случае функция $u(\xi)$ должна возрастать.

Для уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$ автомодельное решение должно удовлетворять линейному ОДУ $a^2 u'' = -\xi u'/2$, общее решение которого выражается как

$$u = C_1 F(\xi/a) + C_2, \ C_1, C_2 = \mathrm{const}, \text{ где } F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-s^2/4} ds.$$

Это позволяет записать наше убывающее решение в виде

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i)} (F(\xi/a_i) - F(\xi_i/a_i)), \quad \xi_{i+1} < \xi < \xi_i, \quad i = 0, \ldots, m, \tag{1.5}$$

где $+\infty = \xi_0 > \xi_1 > \cdots > \xi_m > \xi_{m+1} = 0$. Считаем, что $F(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2/4} ds = 1$. Отметим, что функция $u(\xi)$ может быть постоянной на интервале $(\xi_1, +\infty)$, если $u_0 = u_1$. Параболы $\xi = \xi_i$, $i = 1, \ldots, m$, где $u = u_i$, являются свободными границами, которые определяются условиями (1.2). По переменной ξ эти условия имеют вид (см. [4, гл. XI])

$$d_i \xi_i/2 + \frac{k_i (u_{i+1} - u_i) F'(\xi_i/a_i)}{a_i (F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i))} - \frac{k_{i-1}(u_i - u_{i-1}) F'(\xi_i/a_{i-1})}{a_{i-1}(F(\xi_i/a_{i-1}) - F(\xi_{i-1}/a_{i-1}))} = 0, \tag{1.6}$$

$i = 1, \ldots, m$. Формально можно рассматривать решение (1.5) также в случае $u_m = u_{m+1}$, когда $u(\xi) \equiv u_D$ для $0 < \xi < \xi_m$, но в этом случае условие (1.6) при $i = m$ сводится к соотношению

$$d_m \xi_m/2 - \frac{k_{m-1}(u_m - u_{m-1}) F'(\xi_m/a_{m-1})}{a_{m-1}(F(\xi_m/a_{m-1}) - F(\xi_{m-1}/a_{m-1}))} = 0,$$

что невозможно, поскольку левая часть этого отношения строго положительна. Потому исключим случай $u_m = u_{m+1}$ из нашей постановки. Если $d_1 > 0$, случай $u_1 = u_0$ является корректным и не вызывает никаких проблем, поскольку в этом случае (1.6) при $i = 0$ обеспечивает соотношение

$$d_1 \xi_1/2 + \frac{k_1 (u_2 - u_1) F'(\xi_1/a_1)}{a_1 (F(\xi_2/a_1) - F(\xi_1/a_1))} = 0,$$

содержащее члены противоположного знака.

Для исследования нелинейной системы (1.6) заметим, что она является градиентной и отвечает равенству $\nabla E(\bar\xi) = 0$ с функцией

$$E(\bar\xi) = -\sum_{i=0}^{m} k_i(u_{i+1} - u_i)\ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) + \sum_{i=1}^{m} d_i\xi_i^2/4, \tag{1.7}$$
$$\bar\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Omega,$$

где открытая выпуклая область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задается неравенствами $\xi_1 > \dots > \xi_m > 0$. Заметим, что $E(\bar\xi) \in C^\infty(\Omega)$. Поскольку функция $F(\xi)$ принимает значения в интервале $(0,1)$, все члены в выражении (1.7) неотрицательны, а некоторые из них строго положительны. Следовательно, $E(\bar\xi) > 0$.

1.1. Коэрцитивность функции E и существование решения. Введем множества подуровня

$$\Omega_c = \{\ \bar\xi \in \Omega \mid E(\bar\xi) \leqslant c\ \}, \quad c > 0.$$

Предложение 1.1 (коэрцитивность)**.** *Множество Ω_c компактно для каждого $c > 0$. В частности, функция $E(\bar\xi)$ достигает своего минимального значения.*

Доказательство. Если $\bar\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Omega_c$, тогда

$$-k_i(u_{i+1} - u_i)\ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) \leqslant E(\bar\xi) \leqslant c, \quad i = 0, \dots, m; \tag{1.8}$$
$$d_i\xi_i^2/4 \leqslant E(\bar\xi) \leqslant c, \quad i = 1, \dots, m. \tag{1.9}$$

Из (1.8) при $i = m$ следует, что $F(\xi_m/a_m) \geqslant e^{-c/(k_m(u_{m+1}-u_m))}$, что даёт нижнюю границу

$$\xi_m \geqslant r_1 = a_m F^{-1}(e^{-c/(k_m(u_{m+1}-u_m))}).$$

Аналогично, из (1.8) при $i = 0$ выводим, что в случае $u_1 > u_0$

$$1 - F(\xi_1/a_0) \geqslant e^{-c/(k_0(u_1-u_0))}$$

(отметим, что $F(\xi_0/a_0) = F(+\infty) = 1$). Следовательно, $F(\xi_1/a_0) \leqslant 1 - e^{-c/(k_0(u_1-u_0))}$. Это даёт верхнюю границу $\xi_1 \leqslant a_0F^{-1}(1 - e^{-c/(k_0(u_1-u_0))})$. С другой стороны, если $u_0 = u_1$, то $d_1 > 0$, и из (1.9) при $i = 1$ следует, что $\xi_1 \leqslant (4c/d_1)^{1/2}$. Итак, в любом случае имеем

$$\xi_1 \leqslant r_2 = \begin{cases} a_0F^{-1}(1 - e^{-c/(k_0(u_1-u_0))}), & u_0 < u_1, \\ (4c/d_1)^{1/2}, & u_0 = u_1. \end{cases}$$

Далее, из (1.8) следует, что для всех $i = 1, \dots, m-1$

$$F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i) \geqslant \delta_1 \doteq \exp(-c/\alpha) > 0, \tag{1.10}$$

где $\alpha = \min\limits_{i=1,\dots,m-1} k_i(u_{i+1} - u_i) > 0$. Поскольку $F'(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\xi^2/4} < 1$, функция $F(\xi)$ является липшицевой с константой 1, и из (1.10) следует, что

$$(\xi_i - \xi_{i+1})/a_i \geqslant F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i) \geqslant \delta_1, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Следовательно, получаем оценки $\xi_i - \xi_{i+1} \geqslant \delta = \delta_1 \min a_i$. Таким образом, множество Ω_c содержится в компакте

$$K = \{\ \bar\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m \mid r_2 \geqslant \xi_1 \geqslant \dots \geqslant \xi_m \geqslant r_1,\ \xi_i - \xi_{i+1} \geqslant \delta\ \forall i = 1, \dots, m-1\ \}.$$

Поскольку $E(\bar\xi)$ непрерывна на K, множество Ω_c является замкнутым подмножеством K и, следовательно, компактно. При $c > N \doteq \inf E(\bar\xi)$ это множество не пусто и функция $E(\bar\xi)$ достигает на нем минимального значения, которое, очевидно, равно N. $\square$

Мы установили существование минимального значения $E(\bar\xi_0) = \min E(\bar\xi)$. В точке $\bar\xi_0$ выполняется требуемое условие $\nabla E(\bar\xi_0) = 0$, и $\bar\xi_0$ является решением системы (1.6). Координаты $\bar\xi_0$ определяют решение (1.5) рассматриваемой задачи Стефана. Таким образом, устанавливаем следующий результат существования.

Теорема 1.1. *Существует автомодельное решение* (1.5) *задачи* (1.1), (1.2), (1.4).

1.2. Выпуклость функции E и единственность решения. В этом разделе мы докажем, что функция $E(\bar\xi)$ строго выпукла. Поскольку строго выпуклая функция может иметь не более одной критической точки (и это обязательно глобальный минимум), система (1.6) имеет не более одного решения, т. е. автомодельное решение (1.5) задачи (1.1), (1.2), (1.4) единственно. Нам понадобится следующая простая лемма, доказанная в [5] (см. также [3]). Для полноты мы приводим её с доказательством.

Лемма 1.1. *Функция $P(x,y)=-\ln(F(x)-F(y))$ строго выпукла в полуплоскости $x>y$.*

Доказательство. Функция $P(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области $x>y$. Для доказательства леммы нам нужно установить, что гессиан D^2P положительно определен в каждой точке. Прямым вычислением находим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,y)=\frac{(F'(x))^2-F''(x)(F(x)-F(y))}{(F(x)-F(y))^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}P(x,y)=\frac{(F'(y))^2-F''(y)(F(y)-F(x))}{(F(x)-F(y))^2},\quad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}P(x,y)=-\frac{F'(x)F'(y)}{(F(x)-F(y))^2}.$$

Нам нужно доказать положительную определенность матрицы $Q=(F(x)-F(y))^2D^2P(x,y)$ с компонентами

$$Q_{11}=(F'(x))^2-F''(x)(F(x)-F(y)),$$

$$Q_{22}=(F'(y))^2-F''(y)(F(y)-F(x)),\quad Q_{12}=Q_{21}=-F'(x)F'(y).$$

Так как $F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4}$, то $F''(x)=-\dfrac{x}{2}F'(x)$, и диагональные элементы этой матрицы можно записать в виде

$$Q_{11}=F'(x)\Big(\frac{x}{2}(F(x)-F(y))+F'(x)\Big)=F'(x)\Big(\frac{x}{2}(F(x)-F(y))+(F'(x)-F'(y))\Big)+F'(x)F'(y),$$

$$Q_{22}=F'(y)\left(\frac{y}{2}(F(y)-F(x))+(F'(y)-F'(x))\right)+F'(x)F'(y).$$

По теореме Коши о среднем значении существует такое значение $z\in(y,x)$, что

$$\frac{F'(x)-F'(y)}{F(x)-F(y)}=\frac{F''(z)}{F'(z)}=-z/2.$$

Следовательно,

$$Q_{11}=F'(x)(F(x)-F(y))(x-z)/2+F'(x)F'(y),$$

$$Q_{22}=F'(y)(F(x)-F(y))(z-y)/2+F'(x)F'(y),$$

откуда $Q=R_1+F'(x)F'(y)R_2$, где R_1 — диагональная матрица с положительными диагональными элементами $F'(x)(F(x)-F(y))(x-z)/2$, $F'(y)(F(x)-F(y))(z-y)/2$, а $R_2=\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\-1&1\end{smallmatrix}\right)$. Поскольку $R_1>0$, $R_2\geqslant0$, имеем, что матрица $Q>0$, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 1.1. В дополнение к лемме 1.1 заметим, что функции

$$P(x,0)=-\ln F(x),\quad P(+\infty,x)=-\ln(1-F(x))$$

одной переменной x строго выпуклы на $(0,+\infty)$. Фактически, из леммы 1.1 в пределе при $y\to0$ следует, что функция $P(x,0)$ выпукла на $(0,+\infty)$. Более того,

$$(F(x))^2\frac{d^2}{dx^2}P(x,0)=F'(x)\Big(\frac{x}{2}F(x)+F'(x)\Big)=\lim_{y\to0}Q_{11}\geqslant0.$$

Так как $F'(x)>0$, находим, что, в частности, $\dfrac{x}{2}F(x)+F'(x)\geqslant0$. Если $\dfrac{d^2}{dx^2}P(x,0)=0$ в некоторой точке $x=x_0$, то $0=\dfrac{x_0}{2}F(x_0)+F'(x_0)$ является минимумом неотрицательной функции $\dfrac{x}{2}F(x)+F'(x)$. Следовательно, её производная $\Big(\dfrac{x}{2}F+F'\Big)'(x_0)=0$. Так как $F''(x)=-\dfrac{x}{2}F'(x)$, то эта производная

$$\Big(\frac{x}{2}F+F'\Big)'(x_0)=F(x_0)/2+\frac{x_0}{2}F'(x_0)+F''(x_0)=F(x_0)/2>0.$$

Но это противоречит нашему предположению. Мы заключаем, что $\frac{d^2}{dx^2}P(x,0) > 0$ и функция $P(x,0)$ строго выпукла.

Аналогично доказывается сильная выпуклость функции $P(+\infty, x) = -\ln(1-F(x))$. Для полноты изложения рассмотрим доказательство подробно. В пределе при $x < y \to +\infty$ из леммы 1.1 следует, что функция $P(+\infty, x) = \lim\limits_{y\to+\infty} P(y,x)$ выпукла на $\mathbb{R}$ и

$$(1-F(x))^2 \frac{d^2}{dx^2}P(+\infty,x) = F'(x)\Big(\frac{x}{2}(F(x)-1)+F'(x)\Big) \geqslant 0.$$

Если $\frac{d^2}{dx^2}P(+\infty,x) = 0$ в некоторой точке $x = x_0 \in \mathbb{R}$, то x_0 является точкой минимума неотрицательной функции $\frac{x}{2}(F(x)-1)+F'(x)$. Следовательно,

$$0 = \Big(\frac{x}{2}(F(x)-1)+F'(x)\Big)'(x_0) = (F(x_0)-1)/2 + F''(x_0) + F'(x_0)x_0/2 = (F(x_0)-1)/2 < 0.$$

Из этого противоречия следует, что $\frac{d^2}{dx^2}P(+\infty,x) > 0$ для всех $x\in\mathbb{R}$ и, следовательно, функция $P(+\infty,x)$ строго выпукла (даже на всей прямой $\mathbb{R}$).

Теперь мы готовы доказать ожидаемую выпуклость $E(\bar\xi)$.

Предложение 1.2. *Функция $E(\bar\xi)$ строго выпукла на Ω.*

Доказательство. Введём функции

$$E_i(\bar\xi) = -k_i(u_{i+1}-u_i)\ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)), \quad i = 0,\dots,m.$$

По лемме 1.1 и замечанию 1.1 все эти функции выпуклые. Так как

$$E(\bar\xi) = \sum_{i=1}^m E_i(\bar\xi) + E_0(\bar\xi) + \sum_{i=1}^m d_i\xi_i^2/4$$

и все функции в этой сумме выпуклы, достаточно доказать сильную выпуклость суммы

$$\tilde E(\bar\xi) = \sum_{i=1}^m E_i(\bar\xi).$$

По лемме 1.1 и замечанию 1.1 все члены этой суммы являются выпуклыми функциями. Следовательно, функция $\tilde E$ также выпукла. Для доказательства строгой выпуклости предположим, что для некоторого вектора $\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_m)\in\mathbb{R}^m$

$$D^2\tilde E(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2\tilde E(\bar\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\zeta_i\zeta_j = 0. \tag{1.11}$$

Так как

$$0 = D^2\tilde E(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta = \sum_{i=1}^m D^2E_i(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta,$$

но все члены неотрицательны, заключаем, что

$$D^2E_i(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta = 0, \quad i = 1,\dots,m. \tag{1.12}$$

По лемме 1.1 для $i = 1,\dots,m-1$ функция $E_i(\bar\xi)$ строго выпукла как функция двух переменных ξ_i, ξ_{i+1}, и из (1.12) следует, что $\zeta_i = \zeta_{i+1} = 0$, $i = 1,\dots,m-1$. Заметим, что в случае $m = 1$ таких i нет. В этом случае применяем (1.12) при $i = m$. Учитывая замечание 1.1, получаем, что $E_m(\bar\xi)$ является строго выпуклой функцией одной переменной ξ_m, и из (1.12) следует, что $\zeta_m = 0$. В любом случае получаем, что вектор $\zeta = 0$. Таким образом, соотношение (1.11) может иметь место только при нулевом ζ, т. е. матрица $D^2\tilde E(\bar\xi)$ является (строго) положительно определенной, а функция $\tilde E(\bar\xi)$ является строго выпуклой. Это завершает доказательство. □

Предложения 1.1, 1.2 обеспечивают основной результат этого раздела.

Теорема 1.2. *Существует единственное автомодельное решение* (1.5) *задачи* (1.1), (1.2), (1.4)*, и оно соответствует минимуму строго выпуклой и коэрцитивной функции* (1.7)*.*

Замечание 1.2. В статье [3] задача Стефана (1.1), (1.2) изучалась в полуплоскости $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ с начальным условием Римана

$$u(0,x) = \begin{cases} u_+, & x > 0, \\ u_-, & x < 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Решения этой задачи имеют ту же структуру, что и (1.5), и соответствуют единственной точке минимума функции, аналогичной (1.7), с той лишь разницей, что параметры ξ_i не обязательно положительны и могут принимать произвольные действительные значения. В этом разделе мы в основном следуем схеме статьи [3].

Отметим также, что в работе [5] задача Стефана—Римана (1.1), (1.2), (1.13) изучалась в случае произвольных (возможно, отрицательных) скрытых удельных теплоемкостей d_i. Найдено необходимое и достаточное условие коэрцитивности $E(\bar{\xi})$, а также более сильное достаточное условие её строгой выпуклости. Аналогичные результаты можно получить для задачи Стефана—Дирихле (1.1), (1.2), (1.4).

2. Задача Стефана с граничным условием Неймана

Теперь рассмотрим задачу Стефана (1.1), (1.2) с постоянным начальным значением u_0 и граничным условием Неймана:

$$u(0,x) = u_0 \quad \forall x > 0, \quad u_x(t,0) = t^{-1/2} b_N \quad \forall t > 0, \tag{2.1}$$

где $b_N < 0$ — константа. Конкретный вид граничных условий Неймана связан с требованием инвариантности нашей задачи относительно растяжений $(t,x) \to (\lambda^2 t, \lambda x)$, $\lambda > 0$. Это позволяет сосредоточиться на изучении автомодельных решений $u = u(x/\sqrt{t})$ задачи (1.1), (1.2), (2.1). Для таких решений условия (2.1) сводятся к требованиям

$$u'(0) = b_N, \quad u(+\infty) = u_0. \tag{2.2}$$

Так как $b_N < 0$, будем считать, что функция $u(\xi)$ убывает. Случай $b_N > 0$ соответствует возрастанию $u(\xi)$ и может рассматриваться аналогично. Для однородной задачи Неймана $b_N = 0$ существует только постоянное решение $u \equiv u_0$. Пусть u_i, $i = 1, \ldots, m$ — температурные фазовые переходы в интервале $[u_0, +\infty)$ такие, что $u_0 \leqslant u_1 < \cdots < u_m < u_{m+1} = +\infty$. Как и в разделе 1, полагаем, что скрытая удельная теплоемкость $d_1 > 0$, если $u_1 = u_0$. Предположим, что $u = u(\xi)$ является убывающим автомодельным решением (1.1), (1.2), (2.1). Тогда $u(0) > u_0$, и существует целое число n, $0 \leqslant n \leqslant m$, такое, что $u_n < u(0) \leqslant u_{n+1}$. Назовем это число n (т. е. число фазовых переходов) типом решения u. Решение типа 0 не содержит свободных границ и может быть найдено по формуле

$$u(\xi) = u_0 + a_0 b_N \sqrt{\pi}(F(\xi/a_0) - 1). \tag{2.3}$$

Как легко проверить, $u'(0) = b_N$, $u(+\infty) = u_0$, и требование (2.2) выполнено. Несложным вычислением находим $u(0) = u_0 - a_0 b_N \sqrt{\pi}$, следовательно, необходимым и достаточным условием существования решения (2.3) является выполнение неравенства $u_0 - a_0 b_N \sqrt{\pi} \leqslant u_1$, которое можно записать в виде

$$-b_N \sqrt{\pi} \leqslant (u_1 - u_0)/a_0. \tag{2.4}$$

В частности, решение типа 0 не существует, если $u_1 = u_0$. Решение типа $n > 0$ имеет структуру, похожую на (1.5) (при $m = n$)

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i)}(F(\xi/a_i) - F(\xi_i/a_i)), \quad \xi_{i+1} < \xi < \xi_i, \ i = 0, \ldots, n-1, \tag{2.5}$$

$$u(\xi) = u_n + a_n b_N \sqrt{\pi}(F(\xi/a_n) - F(\xi_n/a_n)), \quad 0 < \xi < \xi_n. \tag{2.6}$$

Необходимое (но не достаточное, как мы вскоре поймем) условие $u(0) \leqslant u_{n+1}$ имеет вид

$$-b_N \sqrt{\pi} F(\xi_n/a_n) \leqslant (u_{n+1} - u_n)/a_n \tag{2.7}$$

(если $n = m$, то оно всегда выполняется, так как $u_{m+1} = +\infty$). На линиях фазового перехода $\xi = \xi_i$ условие Стефана имеет вид

$$d_i\xi_i/2 + k_i\frac{(u_{i+1} - u_i)F'(\xi_i/a_i)}{a_i(F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i))} - k_{i-1}\frac{(u_i - u_{i-1})F'(\xi_i/a_{i-1})}{a_{i-1}(F(\xi_i/a_{i-1}) - F(\xi_{i-1}/a_{i-1}))} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{2.8}$$

$$d_n\xi_n/2 + k_n b_N\sqrt{\pi}F'(\xi_n/a_n) - k_{n-1}\frac{(u_n - u_{n-1})F'(\xi_n/a_{n-1})}{a_{n-1}(F(\xi_n/a_{n-1}) - F(\xi_{n-1}/a_{n-1}))} = 0, \quad i = n. \tag{2.9}$$

Как и в случае граничного условия Дирихле, эта система оказывается градиентной, она совпадает с равенством $\nabla E = 0$ с функцией

$$E(\bar\xi) = -\sum_{i=0}^{n-1} k_i(u_{i+1} - u_i)\ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) + \\ + k_n a_n b_N\sqrt{\pi}F(\xi_n/a_n) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} d_i\xi_i^2, \quad \bar\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Omega, \tag{2.10}$$

где Ω — открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$, состоящий из векторов со строго убывающими положительными координатами. Заметим, что $F''(s) = -s/2F'(s) < 0$ для всех $s > 0$. Поскольку $b_N < 0$, это означает, что член $k_n a_n b_N\sqrt{\pi}F(\xi_n/a_n)$ — строго выпуклая функция одной переменной ξ_n на интервале $[0, +\infty)$. Как и в доказательстве предложения 1.2, мы находим, что функция

$$\tilde E(\bar\xi) = -\sum_{i=0}^{n-1} k_i(u_{i+1} - u_i)\ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} d_i\xi_i^2$$

строго выпукла на конусе

$$\bar\Omega = \{\ \bar\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \xi_1 > \dots > \xi_n \geqslant 0\ \} \supset \Omega,$$

состоящем из точек со строго убывающими неотрицательными координатами. Так как

$$E(\bar\xi) = \tilde E(\bar\xi) + k_n a_n b_N\sqrt{\pi}F(\xi_n/a_n),$$

функция $E(\bar\xi)$ также строго выпукла на $\bar\Omega$. Покажем, что эта функция коэрцитивна на $\bar\Omega$.

Предложение 2.1. *Для всех $c \in \mathbb{R}$ множество $\bar\Omega_c = \{\ \bar\xi \in \bar\Omega \mid E(\bar\xi) \leqslant c\ \}$ является компактным.*

Доказательство. Пусть $\bar\xi \in \bar\Omega$, $E(\bar\xi) \leqslant c$. Тогда

$$\tilde E(\bar\xi) \doteq -\sum_{i=0}^{n-1} k_i(u_{i+1} - u_i)\ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) + \\ + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} d_i\xi_i^2 = E(\bar\xi) - k_n a_n b_N\sqrt{\pi}F(\xi_n/a_n) \leqslant c_1 \doteq c - k_n a_n b_N\sqrt{\pi}.$$

Поскольку все члены левой части этого неравенства неотрицательны, получаем соотношения

$$-k_i(u_{i+1} - u_i)\ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) \leqslant c_1,\ i = 0, \dots, n-1, \tag{2.11}$$

$$d_i\xi_i^2/4 \leqslant c_1,\ i = 1, \dots, n, \tag{2.12}$$

подобные неравенствам (1.8), (1.9). Как следует из (2.11), (2.12), множество $\bar\Omega_c = \varnothing$, если $c_1 < 0$. Потому мы можем (и будем) предполагать, что $c_1 \geqslant 0$. Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 1.1, выводим из (2.11), (2.12) границы

$$\xi_1 \leqslant r_2 = \begin{cases} a_0F^{-1}(1 - e^{-c_1/(k_0(u_1 - u_0))}), & u_0 < u_1, \\ (4c_1/d_1)^{1/2}, & u_0 = u_1, \end{cases}$$

$$(\xi_i - \xi_{i+1})/a_i \geqslant \delta = \exp(-c_1/\alpha) > 0, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

где $\alpha = \min\limits_{i=1,\dots,n-1} k_i(u_{i+1} - u_i) > 0$. Таким образом, множество $\bar\Omega_c$ содержится в компакте

$$K = \{\ \bar\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid r_2 \geqslant \xi_1 \geqslant \dots \geqslant \xi_n \geqslant 0,\ \xi_i - \xi_{i+1} \geqslant \delta a_i\ \forall i = 1, \dots, n-1\ \}.$$

Поскольку $E(\bar{\xi})$ непрерывно на K, множество $\bar{\Omega}_c$ является замкнутым подмножеством K и, следовательно, компактно. Это завершает доказательство. $\square$

Из предложения 2.1 и строгой выпуклости функции E следует, что существует точка $\bar{\xi}^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0) \in \bar{\Omega}$ глобального минимума E, и она является единственным локальным минимумом этой функции. Возможны два случая:

A) $\bar{\xi}^0 \in \Omega$, т. е. $\xi_n^0 > 0$. Если, кроме того, выполняется условие (2.7), то существует единственное решение (2.5), (2.6) типа n с $\xi_i = \xi_i^0$, $i = 1, \ldots, n$.

B) $\bar{\xi}^0 \notin \Omega$, т. е. $\xi_n^0 = 0$. Тогда решения типа n не существует.

Разберем последний случай более подробно. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы точка $\bar{\xi}^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_{n-1}^0, 0)$ была точкой минимума $E(\bar{\xi})$, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} E(\bar{\xi}^0) = 0, \ i = 1, \ldots, n-1, \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_n} E(\bar{\xi}^0) \geqslant 0, \tag{2.14}$$

где условие (2.13) появляется только при $n > 1$. Отметим, что для таких n

$$E(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0) = -\sum_{i=0}^{n-1} k_i (u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1} d_i \xi_i^2,$$
$$\xi_n = 0, \ (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \Omega',$$

где $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — конус, состоящий из точек со строго убывающими положительными координатами. Заметим, что $E(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$ совпадает с функцией (1.7) при $m = n-1$, соответствующей задаче Стефана—Дирихле (1.1), (1.2), (1.4) при $u_D = u_n$. Соотношение (2.13) означает, что $\nabla E(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0) = 0$, т. е. $(\xi_1^0, \ldots, \xi_{n-1}^0) \in \Omega'$ — единственная точка минимума $E(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$. Согласно теореме 1.2, координаты ξ_i^0, $i = 1, \ldots, n-1$, совпадают с параметрами фазового перехода ξ_i единственного решения (1.5) задачи (1.1), (1.2), (1.4) при $u_D = u_n$ (в частности, они не зависят от условий Неймана b_N и от параметров a_i, k_i, d_i при $i \geqslant n$). Нетрудно заметить, что условие (2.14) имеет вид

$$\frac{k_{n-1}(u_n - u_{n-1})}{\sqrt{\pi} a_{n-1} F(\xi_{n-1}^0/a_{n-1})} + k_n b_N \geqslant 0. \tag{2.15}$$

Эта формула остается справедливой и для $n = 1$. В этом случае положим $\xi_{n-1}^0 = \xi_0 = +\infty$ таким, что $F(\xi_{n-1}^0/a_{n-1}) = F(+\infty) = 1$. При требовании (2.15) реализуется случай B), так что решение типа n не существует. Заметим, что ξ_{n-1}^0 не зависит от параметров k_i, $i \geqslant n$. Это наблюдение позволяет контролировать существование решения типа n выбором параметра k_n. Точнее, справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.1.

(i) *Если* $n \geqslant 1$ *и* $0 < k_n \leqslant \bar{k}_n = -\dfrac{k_{n-1}(u_n - u_{n-1})}{\sqrt{\pi} a_{n-1} b_N F(\xi_{n-1}^0/a_{n-1})}$, *то решение* (2.5), (2.6) *типа* n *задачи* (1.1), (1.2), (2.1) *не существует.*

(ii) *Если* $k_n > \bar{k}_n$ *и* $k_n - \bar{k}_n$ *достаточно мало, то решение* (2.5), (2.6) *типа* n *задачи* (1.1), (1.2), (2.1) *существует.*

Доказательство. Если $k_n \leqslant \bar{k}_n$, то выполняется соотношение (2.15), и следует первое утверждение. Для доказательства (ii) заметим, что в силу строгой выпуклости функции (2.10) точка её минимума $\bar{\xi}^0$ непрерывно зависит от параметра k_n. В частности, последняя координата $\xi_n^0 = \xi_n^0(k_n)$ является непрерывной функцией от k_n. Поскольку $\xi_n^0(\bar{k}_n) = 0$, то при достаточно малых $k_n - \bar{k}_n > 0$, левую часть соотношения (2.7) можно сделать настолько малой, что это соотношение будет выполняться, а условие (2.15) будет нарушено. Мы приходим к выводу, что существует единственное решение (2.5), (2.6) типа n с $\xi_i = \xi_i^0(k_n)$, $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Теперь мы готовы доказать следующий окончательный результат.

Теорема 2.1. *Пусть $I \subset \{0, 1, \dots, m\}$ — произвольный набор типов, и $0 \notin I$, если $u_0 = u_1$. Тогда можно выбрать такие значения параметров a_0, $k_1, \dots, k_m$, что набор типов n решений* (2.5)*,* (2.6) *задачи Стефана—Неймана* (1.1)*,* (1.2)*,* (2.1) *совпадет с I.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что решение типа 0 не существует, если $u_1 = u_0$. В противном случае всегда можно выбрать такое значение параметра a_0, что условие (2.4) выполняется, если $0 \in I$, и нарушается, если $0 \notin I$. Далее, применяя лемму 2.1, мы можем последовательно выбрать параметры k_n, $n = 1, \dots, m$, таким образом, что решение типа n существует тогда и только тогда, когда $n \in I$. □

Пусть $I = \varnothing$. Тогда теорема 2.1 дает задачу Стефана—Неймана (1.1), (1.2), (2.1), которая не имеет решения. В случае, когда множество допустимых типов I содержит более одного элемента, мы получаем задачу, которая имеет много различных решений. Очевидно, что максимальное число таких решений совпадает с числом $m + 1$ (m, если $u_1 = u_0$) всех возможных типов.

В случае $m = 1$, $u_1 > u_0$, критерии существования решений типов $n = 0, 1$ особенно просты и совпадают с соответствующими неравенствами

$$-\sqrt{\pi} a_0 b_N \leqslant u_1 - u_0, \quad -\sqrt{\pi} a_0 b_N > k_0(u_1 - u_0)/k_1.$$

В частности, если

$$k_0(u_1 - u_0)/k_1 < -\sqrt{\pi} a_0 b_N \leqslant u_1 - u_0,$$

то существует два решения типов $0, 1$, а если

$$u_1 - u_0 < -\sqrt{\pi} a_0 b_N \leqslant k_0(u_1 - u_0)/k_1,$$

то решений нет.

Замечание 2.1. Ввиду теоремы 2.1, условие Неймана (2.1) не является «хорошим» и требует пересмотра. Как было недавно установлено в [6], корректное условие Неймана

$$\alpha(u)_x(t, 0) = t^{-1/2} b_N, \tag{2.16}$$

где $\alpha(u)$ — функция диффузии в уравнении (1.3). Поскольку $\alpha'(u)$ — теплопроводность соответствующей фазы u, то $\alpha(u)_x$ — это в точности поток тепла через границу $x = 0$, и условие (2.16) кажется более подходящим, чем (2.1) с физической точки зрения. В [6] было показано, что задача (1.1), (1.2), (2.16) имеет единственное решение (т. е. реализуется ровно один тип n).

В заключение подчеркнем, что аналогичное исследование может быть проведено и для автомодельных слабых решений нелинейного и, возможно, вырожденного уравнения диффузии с кусочно-постоянным коэффициентом диффузии. Случай задачи Римана был рассмотрен ранее в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каменомостская С. Л.* О задаче Стефана// Мат. сб. — 1961. — *53*, № 4. — С. 489–514.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1962.
3. *Панов Е. Ю.* О структуре слабых решений задачи Римана для вырождающегося нелинейного уравнения диффузии// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 4. — С. 676–684.
4. *Carslaw H. S., Jaeger J. C.* Conduction of heat in solids. — Oxford: Oxford University Press, 1959.
5. *Panov E. Yu.* Solutions of an ill-posed Stefan problem// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2023. — *274*, № 4. — С. 534–543.
6. *Panov E. Yu.* On self-similar solutions of a multi-phase Stefan problem in the half-line// ArXiv. — 2024. — 2404.03672v2 [Math.AP].

Евгений Юрьевич Панов
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: evpanov@yandex.ru

UDC 517.957
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-441-450
EDN: NGIESD

Self-similar solutions of a multi-phase Stefan problem on the half-line

E. Yu. Panov

St. Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics of the RAS, St. Petersburg, Russia

Abstract. In this paper, we study self-similar solutions of the multiphase Stefan problem for the heat equation on the half-line $x > 0$ with constant initial data and Dirichlet or Neumann boundary conditions. In the case of the Dirichlet boundary condition, we prove that the nonlinear algebraic system for determining the free boundaries is a gradient system, and the corresponding potential is an explicitly written strictly convex and coercive function. Consequently, there exists a unique minimum point of the potential, the coordinates of which determine the free boundaries and give the desired solution. In the case of the Neumann boundary condition, we show that the problem can have solutions with different numbers (types) of phase transitions. For each fixed type n, the system for determining the free boundaries is again a gradient system, and the corresponding potential turns out to be strictly convex and coercive, but in some wider nonphysical domain. In particular, a solution of type n is unique and can exist only if the minimum point of the potential belongs to the physical domain. We give an explicit criterion for the existence of solutions of any type n. Due to the rather complicated structure of the set of solutions, neither the existence nor the uniqueness of a solution to the Stefan–Neumann problem is guaranteed.

Keywords: Stefan problem, heat equation, free boundary.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: E. Yu. Panov, “Self-similar solutions of a multi-phase Stefan problem on the half-line,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 441–450. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-441-450

REFERENCES

1. S. L. Kamenomostskaya, “O zadache Stefana” [On the Stefan problem], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1961, **53**, No. 4, 489–514 (in Russian).
2. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural’tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1962 (in Russian).
3. E. Yu. Panov, “O strukture slabykh resheniy zadachi Rimana dlya vyrozhdayushchegosya nelineynogo uravneniya diffuzii” [On the structure of weak solutions of the Riemann problem for a degenerate nonlinear diffusion equation], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 4, 676–684 (in Russian).
4. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Oxford University Press, Oxford, 1959.
5. E. Yu. Panov, “Solutions of an ill-posed Stefan problem,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2023, **274**, No. 4, 534–543.
6. E. Yu. Panov, “On self-similar solutions of a multi-phase Stefan problem in the half-line,” *ArXiv*, 2024, 2404.03672v2 [Math.AP].

Evgeniy Yurievich Panov
St. Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics of the RAS, St. Petersburg, Russia
E-mail: evpanov@yandex.ru