Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 428–440
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 519.6
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-428-440
EDN: PZWBRR

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЫ ПО УРАВНЕНИЯМ ПРОГРАММНЫХ СВЯЗЕЙ

Р. Г. Мухарлямов

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается задача построения системы дифференциальных уравнений по заданному набору уравнений связей и приведения к форме уравнений Лагранжа с диссипативными силами, обеспечивающими стабилизацию связей. Диссипативная функция определяется по уравнениям возмущений связей. Для представления дифференциальных уравнений в форме уравнений Лагранжа используются модифицированные условия Гельмгольца. Приводится решение задачи Бертрана об определении центральной силы, под действием которой материальная точка совершает устойчивое движение по коническому сечению.

Ключевые слова: уравнения связи, уравнение Лагранжа, диссипативная функция, условия Гельмгольца, задача Бертрана.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и г. Москва № 23-21-10065, `https://rscf.ru/project/23-21-10065/`.

Для цитирования: *Р. Г. Мухарлямов.* Построение уравнений динамики заданной структуры по уравнениям программных связей// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 428–440. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-428-440`

1. Введение

В классической механике обычно используются контактные связи, представленные уравнениями, связывающими координаты и скорости системы. При этом предполагается, что уравнения связей обязательно выполняются в начальный момент времени и в последующем движении. Соответствующие реакции связей представляют дополнительные силы, призванные обеспечить выполнение уравнений связей, и могут быть рассмотрены как управляющие воздействия. Если уравнения связей выполняются вдоль решений уравнений динамики при всех значениях времени, то их производные, используемые для определения выражений сил реакций, должны оставаться равными нулю. Обычно связи предполагаются идеальными и для вычисления сил реакций используются множители Лагранжа. При этом уравнения связей оказываются первыми интегралами уравнений динамики замкнутой системы.

В случае, когда начальные условия не соответствуют уравнениям связей вместе с их производными, дальнейшие отклонения могут возрастать с течением времени. Аналогичная проблема возникает при численном решении уравнений динамики замкнутой системы вследствие неизбежного отклонения от уравнений связей на каждом шаге численного интегрирования. Для ограничения отклонений, вызванных погрешностями задания начальных условий и численного решения уравнений динамики замкнутой системы, необходимо включение в правые части уравнений динамики дополнительных сил, относящихся к реакциям связей, что приводит к т. н. проблеме *стабилизации связей* [18].

Необходимым условием стабилизации связей является обеспечение должного поведения решений уравнений динамики по отношению к уравнениям связей при отклонении начальных условий от уравнений связей или их производных. Это возможно только тогда, когда силы реакций определяются так, чтобы уравнения связей составляли частные интегралы уравнений динамики замкнутой системы, и отклонения от уравнений связей не возрастают с течением времени. Частные интегралы системы дифференциальных уравнений, в отличие от первых интегралов, представляют такую зависимость между переменными, которая справедлива только при фиксированном значении постоянных интегрирования [3].

Так как уравнения связей соответствуют частным интегралам замкнутой системы уравнений динамики, то реакции связей должны быть определены так, чтобы возможные отклонения от уравнений связей также не возрастали с течением времени вследствие погрешности приближенного решения. Необходимым условием ограничения отклонений от уравнений связей является асимптотическая устойчивость множества траекторий, удовлетворяющих уравнениям связей [7, 11]. По существу, задача сводится к достраиванию уравнений динамики или построению уравнений динамики механической системы, решения которой обладают заданными свойствами [2]. Методы построения систем дифференциальных уравнений по известным частным интегралам изложены в [3, 4, 8].

В работе J. Baumgarte [18] для обеспечения устойчивости множества траекторий, удовлетворяющих уравнениям связей, было предложено использовать линейные комбинации уравнений связей с их производными, составляющие однородные дифференциальные уравнения относительно отклонений от уравнений связей и представляющие уравнения возмущений связей. Если уравнения возмущений связей имеют асимптотически устойчивое тривиальное решение, то могут быть использованы для определения множителей Лагранжа, соответствующих модифицированным реакциям связей.

Различные модификации метода J. Baumgarte сводились в основном к его применениям [1, 14, 21] и рекомендациям по выбору коэффициентов линейных комбинаций, обеспечивающих асимптотическую устойчивость тривиального решения уравнений возмущений связей [15–17]. На самом деле этого недостаточно для ограничения отклонений от уравнений связей при численном решении уравнений динамики замкнутой системы. Так, например, при равных корнях характеристического уравнения, соответствующего линейным уравнениям возмущений связей с постоянными коэффициентами, тривиальное решение может оказаться неустойчивым. Если изменения отклонений $y = f(x, t)$ от уравнения связи $f(x, t) = 0$ описываются линейной системой дифференциальных уравнений возмущений связей с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 y - 2\mu v, \quad \mu > 0,$$

то при $\omega = \nu$ общее решение $y = (A_0 + A_1 t)e^{-\mu t}$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ и в зависимости от коэффициентов A_{k0}, A_{k1}, определяемых по начальным значениям, может иметь значительные скачки (рис. 1), приводящие к неустойчивости численного решения замкнутой системы уравнений динамики.

В [17] предлагается использовать метод J. Baumgarte для решения задачи стабилизации связи, представленной уравнением $f(x, t) = 0$, выполнение которой обеспечивается управляющим воздействием u, приложенным к системе управления

$$\frac{d^m x}{dt^m} = X\left(x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}\right) + B(x, t)u = 0, \quad m > 2.$$

Для решения задачи стабилизации предлагается использовать линейное уравнение возмущений связи порядка m с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого имеет корень кратности m. Такой подход с ростом m может привести к более резкому отклонению решения уравнений динамики управляемой системы от уравнения связи.

Задача построения уравнений динамики с учетом стабилизации связей может быть рассмотрена как обратная задача динамики [2]. Это позволяет определить реакции связей по системе

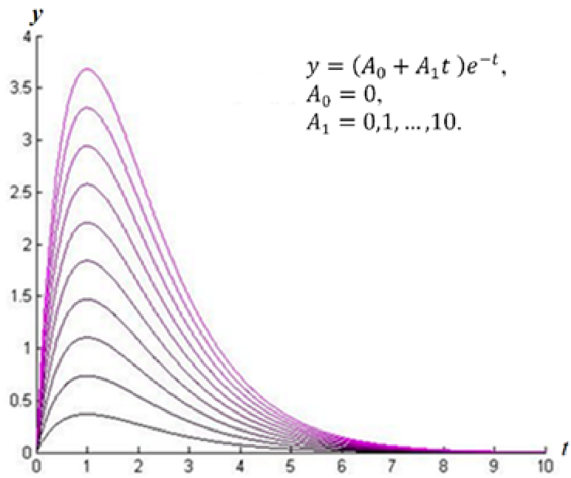

Рис. 1. Графики изменения величины отклонения от уравнения связи

Fig. 1. Graphs of changes of the deviation from the constraint equation

уравнений возмущений связей произвольного вида, имеющей асимптотически устойчивое тривиальное решение. В [6] был предложен метод непосредственного построения дифференциальных уравнений второго порядка, для которых уравнения дифференциальных связей составляют частные интегралы, и последующего приведения их к форме уравнений Лагранжа с диссипативными силами, основанного на использовании модифицированных условий Гельмгольца [22]. Было установлено, что использование линейной формы уравнений возмущений связей приводит к уравнениям Лагранжа с диссипативной функцией, представленной квадратичной формой относительно скоростей. Использование обобщенных условий Гельмгольца для приведения системы дифференциальных уравнений к форме уравнений Лагранжа со стабилизацией связей предъявляет дополнительные требования к выражению диссипативной функции.

В нелинейных системах управления актуальной представляется задача аналитического построения линейного регулятора. Вопрос об условиях использования линейных относительно скоростей диссипативных сил для стабилизации дифференциальных связей в случае нелинейных уравнений возмущений связей требует дополнительного исследования. Использование линейной системы уравнений возмущений связей с коэффициентами, зависящими от фазовых координат исследуемой системы, или нелинейной системы уравнений возмущений связей открывает большие перспективы влияния на параметры замкнутой системы и создания эффективных алгоритмов численного решения. Методы непосредственного построения систем дифференциальных уравнений и приведения их к форме уравнений Лагранжа и уравнений систем Гельмгольца оказались эффективными также для решения задач построения стохастических дифференциальных уравнений [24–26].

Уравнения связей, дополненные соответствующими уравнениями возмущений связей, составляют уравнения программных связей [9]. В [11] установлена возможность стабилизации связей модификацией динамических показателей системы.

2. Построение системы дифференциальных уравнений, допускающей заданные частные интегралы

Пусть вектор $\mathbf{q} = (q^1, \ldots, q^n)$ определяет состояние механической системы с сосредоточенными массами и динамика системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\tfrac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \quad \frac{d\dot{q}^i}{dt} = Q^i(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^n), \tag{2.1}$$

$$q^i(t_0) = q^i_0, \quad \dot{q}^i(t_0) = \dot{q}^i_0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Связи, которым должны удовлетворять координаты и скорости механической системы, обычно предполагают контактное взаимодействие тел и описываются уравнениями

$$g^{\alpha}(\mathbf{q},t)=0,\quad \alpha=1,\ldots,a, \tag{2.3}$$

$$g_i^{\beta}(\mathbf{q},t)\dot{q}^i+g^{\beta}(\mathbf{q},t)=0,\quad \beta=\alpha+1,\ldots,m,\quad m\leqslant n. \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Заметим, что уравнения голономных связей (2.3) предполагают также выполнение уравнений дифференциальных связей

$$g_i^{\alpha}(\mathbf{q},t)\dot{q}^i+g_0^{\alpha}(\mathbf{q},t)=0,\quad g_i^{\alpha}=\frac{\partial g^{\alpha}}{\partial q^i},\quad g_0^{\alpha}=\frac{\partial g^{\alpha}}{\partial t}. \tag{2.5}$$

Поэтому равенства (2.4), (2.5) следует рассматривать совместно как систему m линейных алгебраических уравнений относительно n переменных $\dot{q}^i$:

$$g_i^{\mu}(\mathbf{q},t)\,\dot{q}^i+g_0^{\mu}(\mathbf{q},t)=0,\quad \mu=1,\ldots,m,\quad m\leqslant n. \tag{2.6}$$

Ставится задача построения множества систем дифференциальных уравнений второго порядка (2.1), (2.2) или

$$\frac{dq^i}{dt}=\dot{q}^i,\quad f^i(\ddot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)=0,\quad \ddot{q}^i=\frac{d\dot{q}^i}{dt}, \tag{2.7}$$

$$q^i(t_0)=q_0^i,\quad \dot{q}^i(t_0)=\dot{q}_0^i, \tag{2.8}$$

решения которых при соответствующих начальных условиях

$$g^{\alpha}(\mathbf{q}_0,t_0)=0,\quad g_i^{\mu}(\mathbf{q}_0,t_0)\,\dot{q}_0^i+g_0^{\mu}(\mathbf{q}_0,t_0)=0$$

допускали бы в качестве частных интегралов уравнения связей (2.3), (2.6). Для построения уравнений динамики со стабилизацией связей следует ввести уравнения программных связей [9].

Определение 2.1. Связи, заданные уравнениями

$$y^{\alpha}=g^{\alpha}(\mathbf{q},t), \tag{2.9}$$

$$\dot{y}^{\mu}=g_i^{\mu}(\mathbf{q},t)\,\dot{q}^i+g_0^{\mu}(\mathbf{q},t),\quad g_i^{\alpha}=\frac{\partial g^{\alpha}}{\partial q^i},\quad g_0^{\alpha}=\frac{\partial g^{\alpha}}{\partial t}, \tag{2.10}$$

будем называть *программными связями*, если величины y^{α}, $\dot{y}^{\mu}$ определяются решением системы дифференциальных уравнений возмущений связей

$$\frac{dy^{\alpha}}{dt}=\dot{y}^{\alpha},\quad \frac{d\dot{y}^{\mu}}{dt}=Y^{\mu}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t),\quad Y^{\mu}(\mathbf{0},\mathbf{0},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)=0, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{y}=\left(y^1,\ldots,y^a\right),\quad \dot{\mathbf{y}}=\left(\dot{y}^1,\ldots,\dot{y}^m\right),\quad y_0^{\alpha}=g^{\alpha}(\mathbf{q}_0,t_0),\quad \dot{y}_0^{\mu}=g_i^{\mu}(\mathbf{q}_0,t_0)\,\dot{q}_0^i+g_0^{\mu}(\mathbf{q}_0,t_0), \tag{2.12}$$

рассматриваемых совместно с уравнениями системы (2.7).

Определение 2.2. Уравнения (2.11), (2.12) составляют *систему уравнений возмущений связей.*

Определение 2.3. Программные связи называются *устойчивыми программными связями*, если для любого ε существует такое δ, что при всех $y^{\alpha},\dot{y}^{\mu}$, удовлетворяющих неравенствам $\sup(\|\mathbf{y}_0\|,\|\dot{\mathbf{y}}_0\|)\leqslant\delta$, для любого $t\geqslant t_0$ будут выполняться неравенства $\sup(\|\mathbf{y}\|,\|\dot{\mathbf{y}}\|)\leqslant\varepsilon$.

Определение 2.4. Программные связи называются *асимптотически устойчивыми программными связями*, если они устойчивы и справедливы равенства

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{y}(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\dot{\mathbf{y}}(t)=0.$$

Для построения системы дифференциальных уравнений (2.7), допускающей частные интегралы (2.3), (2.6), используются условия (2.11):

$$\frac{dy^{\alpha}}{dt}=\dot{y}^{\alpha},\quad g_i^{\mu}(\mathbf{q},t)\,\ddot{q}^i=Y^{\mu}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)-\left(\frac{\partial g_i^{\mu}}{\partial q^s}\dot{q}^i\dot{q}^s+\frac{\partial g_i^{\mu}}{\partial t}\dot{q}^i+\frac{\partial g_0^{\mu}}{\partial q^i}\dot{q}^i+\frac{\partial g_0^{\mu}}{\partial t}\right),\quad i,s=1,\ldots,n. \tag{2.13}$$

Уравнения (2.13) представляют систему m линейных алгебраических уравнений относительно $n \geqslant m$ величин $\ddot{q}^l$. Если строки матрицы (g_i^μ) линейно независимы при всех значениях переменных $\mathbf{q}, t$, то общее решение системы (2.13) складывается из двух слагаемых [11]:

$$\ddot{q}^i = c_0 w_\tau^i + w_\nu^i,$$

где c_0 — произвольная величина, $w_\tau^i = \mathbf{e}^i \mathbf{g}^1 \ldots \mathbf{g}^m \mathbf{c}^{m+1} \ldots \mathbf{c}^{n-1}$ представляет скалярное произведение единичного вектора $\mathbf{e}^l$ с результатом векторного произведения $\mathbf{w}^\tau = \left[\mathbf{g}^1 \ldots \mathbf{g}^m \mathbf{c}^{m+1} \ldots \mathbf{c}^{n-1}\right]$ и вычисляется как определитель, строки которого заполнены координатами векторов $\mathbf{e}^i = \left(\delta_1^i, \ldots, \delta_n^i\right)$, $\mathbf{g}^\mu = \left(g_1^\mu(\mathbf{q}, t), \ldots, g_n^\mu(\mathbf{q}, t)\right)$ и произвольных векторов $\mathbf{c}^{m+1}(\mathbf{q}, t), \ldots, \mathbf{c}^{n-1}(\mathbf{q}, t)$ (см. [13]),

$$w_\nu^i = \delta^{ij} g_j^\kappa \omega_{\kappa\mu} \left(Y^\mu(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) - \left(\frac{\partial g_i^\mu}{\partial q^s} \dot{q}^i \dot{q}^s + \frac{\partial g_i^\mu}{\partial t} \dot{q}^i + \frac{\partial g_0^\mu}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial g_0^\mu}{\partial t} \right) \right),$$

$$\delta^{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad \delta^{ii} = 1, \quad \omega^{\mu\kappa} = g_j^\mu \delta^{ji} g_i^\kappa, \quad \omega^{\kappa\mu} \omega_{\mu\sigma} = \delta_\sigma^\kappa,$$

$$\delta_\sigma^\kappa = 0, \quad \kappa \neq \sigma, \quad \delta_\sigma^\sigma = 1, \quad \kappa, \mu, \sigma = 1, \ldots, m, \quad i, j, s = 1, \ldots, n.$$

В итоге получается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \quad \dfrac{d\dot{q}^i}{dt} = Q^i(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + k_\mu^i(\mathbf{q}, t) Y^\mu(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \\ Q^i = c_0 \{\mathbf{e}^i \mathbf{g}^1 \ldots \mathbf{g}^m \mathbf{c}^{m+1} \ldots \mathbf{c}^{n-1}\} - k_\mu^i \left(\dfrac{\partial g_l^\mu}{\partial q^s} \dot{q}^l \dot{q}^s + \dfrac{\partial g_l^\mu}{\partial t} \dot{q}^l + \dfrac{\partial g_0^\mu}{\partial q^l} \dot{q}^l + \dfrac{\partial g_0^\mu}{\partial t} \right), \\ k_\mu^i = \delta^{ij} g_j^\kappa \omega_{\kappa\mu}, \quad i, j, l, s = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{2.14}$$

соответствующая уравнениям программных связей (2.9), (2.10). Система (2.14) содержит произвольный множитель c_0, произвольные векторы $\mathbf{c}^{m+1}, \ldots, \mathbf{c}^{n-1}$ и функции $Y^\mu = Y^\mu(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, удовлетворяющие условиям $Y^\mu(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = 0$.

3. Устойчивость программных связей

Необходимым условием стабилизации связей является асимптотическая устойчивость программных связей, которая определяется поведением решения системы уравнений возмущений связей (2.11). Для суждения об устойчивости представим уравнения (2.11), (2.14), в сокращенном виде:

$$\frac{dz^\gamma}{dt} = Z^\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t), \quad Z^\gamma(\mathbf{0}, \mathbf{x}, t) = 0, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dx^I}{dt} = X^I(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t), \\ &z^\gamma(t_0) = z_0^\gamma, \quad x^I(t_0) = x_0^l, \\ &\gamma = 1, \ldots, a+m, \quad I = 1, \ldots, 2n, \\ &\mathbf{z} = \left(z^1, \ldots, z^{a+m}\right), \quad z^\alpha = y^\alpha, \quad z^{a+\mu} = \dot{y}^\mu, \\ &\mathbf{x} = \left(x^1, \ldots, x^{2n}\right), \quad x^i = q^i, \quad x^{n+i} = \dot{q}^i. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Условия устойчивости тривиального решения $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ системы (3.1) устанавливаются методом функций Ляпунова [7, 11]. На основании теоремы об асимптотической устойчивости интегрального многообразия можно утверждать, что если для системы уравнений (3.1), (3.2) существует положительно определенная функция $V = V(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t)$, которая допускает бесконечно малый высший предел, а ее производная

$$\dot{V}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial z^\gamma} Z^\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial x^I} X^I(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial t},$$

составленная в силу уравнений (3.1), (3.2), является отрицательно определенной, то тривиальное решение $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ системы (3.1) устойчиво асимптотически. Так, например, функции Ляпунова V

в виде положительно определенной квадратичной формы с постоянными коэффициентами $2V = c_{\gamma\eta} z^\gamma z^\eta$, $\gamma, \eta = 1, \ldots, a+m$, и линейным уравнениям возмущений связей

$$\frac{dz^\gamma}{dt} = p^\gamma_\eta\left(\mathbf{x}, t\right) z^\eta \tag{3.3}$$

соответствует производная функции Ляпунова

$$\dot{V} = p_{\gamma\eta}(\mathbf{x}, t)\, z^\gamma z^\eta, p_{\gamma\eta} = c_{\gamma\rho} p^\rho_\eta, \quad \gamma, \rho, \eta = 1, \ldots, a+m \tag{3.4}$$

Если квадратичная форма (3.4) является отрицательно определенной, то тривиальное решение системы (3.1) устойчиво асимптотически, что может быть достигнуто выбором коэффициентов уравнений системы (3.3).

4. Условия приводимости системы уравнений с программными связями к форме уравнений Лагранжа

Произвольные функции, содержащиеся в правых частях уравнений (2.14), можно использовать также для приведения системы к требуемой структуре. Задача представления системы дифференциальных уравнений второго порядка в форме уравнений Лагранжа со стабилизацией связей с использованием условий Гельмгольца [23] исследована в [10]. В [6] определены условия приведения системы (2.7) к форме уравнений Лагранжа с предварительным решением уравнений дифференциальных связей (2.6) относительно обобщенных скоростей и представлением уравнения возмущений связей линейной системой. Решение задачи получено с использованием модифицированных условий Гельмгольца [22]:

$$\frac{\partial f^i}{\partial \ddot{q}^k} = \frac{\partial f^k}{\partial \ddot{q}^i}, \tag{4.1}$$

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial f^k}{\partial \dot{q}^i}\right) = 2\frac{d}{dt}\frac{\partial f^i}{\partial \ddot{q}^k} + 2s^i_k\left(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right), \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial f^i}{\partial q^k} - \frac{\partial f^k}{\partial q^i} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial f^k}{\partial \dot{q}^i}\right) = r^i_k\left(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right), \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial \ddot{q}^j \partial \ddot{q}^k} = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial s^i_j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial s^i_k}{\partial \dot{q}^j}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial r^i_j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial s^i_k}{\partial q^j} - \frac{\partial s^j_k}{\partial q^i}, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial r^i_j}{\partial q^k} + \frac{\partial r^j_k}{\partial q^i} + \frac{\partial r^k_i}{\partial q^j} = 0, \tag{4.7}$$

$$s^i_j = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \quad r^i_j = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}, \quad i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{4.8}$$

Произвольные функции, содержащиеся в правых частях уравнений системы общего вида (2.14), позволяют выделить уравнения, которые могут быть представлены в форме уравнений Лагранжа с лагранжианом L и диссипативной функцией D. Учитывая выражения дифференциальных связей (2.10) и структуру уравнений системы (2.14), представим правые части уравнений возмущений связей (2.11) многочленами не выше второй степени относительно $\dot{y}^\mu$:

$$Y^\mu = -a^\mu_{0\alpha}\left(\mathbf{q}, t\right) y^\alpha - a^\mu_{1\kappa}\left(\mathbf{q}, t\right) \dot{y}^\kappa - a^\mu_{2\kappa\sigma}\left(\mathbf{q}, t\right) \dot{y}^\kappa \dot{y}^\sigma, \tag{4.9}$$

$$a^\mu_{2\kappa\sigma} = a^\mu_{2\sigma\kappa}, \quad \mu, \kappa, \sigma = 1, \ldots, m.$$

В результате система дифференциальных уравнений (2.7) записывается в следующем виде:

$$\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \quad f^i \equiv \ddot{q}^i + \frac{1}{2} b^i_{jl}\left(\mathbf{q}, t\right) \dot{q}^j \dot{q}^l + b^i_j(\mathbf{q}, t)\, \dot{q}^j + b^i_0\left(\mathbf{q}, t\right) = 0, \tag{4.10}$$

$$b^i_{jl} = b^i_{lj} = k^i_\mu h^\mu_{jl},$$

$$
\begin{gathered}
b^i_j = k^i_\mu h^\mu_j,\\
b^i_0 = k^i_\mu h^\mu_0 - c_0\{\mathbf{e}^l, \mathbf{g}^1, \ldots, \mathbf{g}^m, \mathbf{c}^{m+1}, \ldots, \mathbf{c}^{n-1}\},\\
h^\mu_{jl} = h^\mu_{lj} = \frac{\partial g^\mu_j}{\partial q^l} + \frac{\partial g^\mu_l}{\partial q^j} + a^\mu_{2\kappa\sigma}\left(g^\kappa_j g^\sigma_l + g^\kappa_l g^\sigma_j\right),\\
h^\mu_j = \frac{\partial g^\mu_j}{\partial t} + \frac{\partial g^\mu_0}{\partial q^j} + a^\mu_{1\kappa} g^\kappa_j + a^\mu_{2\kappa\sigma}\left(g^\kappa_j g^\sigma_0 + g^\sigma_j g^\kappa_0\right),\\
h^\mu_0 = \frac{\partial g^\mu_0}{\partial t} + a^\mu_{0\alpha} g^\alpha + a^\mu_{1\kappa} g^\kappa_0 + a^\mu_{2\kappa\sigma} g^\kappa_0 g^\sigma_0,\\
i, j, k, l = 1, \ldots, n, \quad \kappa, \mu, \sigma = 1, \ldots, m.
\end{gathered}
$$

Очевидно, что уравнения (4.10) удовлетворяют условиям (4.1), (4.4):

$$
\frac{\partial f^i}{\partial \ddot q^k} = \frac{\partial f^k}{\partial \ddot q^i} = \delta^{ik}, \quad \frac{\partial^2 f^i}{\partial \ddot q^j \partial \ddot q^k} = 0.
$$

Условия (4.8) означают, что должны выполняться равенства

$$
s^i_j = s^j_i, \quad r^i_j = -r^j_i, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{4.11}
$$

Остается проверить выполнение условий (4.2), (4.3), (4.5)–(4.7). Для проверки соответствия уравнений (4.10) условиям (4.2) достаточно определить выражения левых частей, что приводит к равенству

$$
2s^i_k = \left(b^i_{kj} + b^k_{ij}\right)\dot q^j + \left(b^i_k + b^k_i\right).
$$

Далее, из условия (4.2) следуют равенства

$$
b^k_{ij} = b^j_{ik} = b^j_{ki} = b^i_{kj}, \quad s^i_k = b^i_{kj}\dot q^j + \frac{1}{2}\left(b^i_k + b^k_i\right). \tag{4.12}
$$

Условие (4.3) приводит к выражению

$$
r^i_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b^i_{sp}}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_{sp}}{\partial q^i}\right)\dot q^p \dot q^s + \left(\frac{\partial b^i_s}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_s}{\partial q^i}\right)\dot q^s + \frac{\partial b^i_0}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_0}{\partial q^i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b^i_j}{\partial q^s} - \frac{\partial b^j_i}{\partial q^s}\right)\dot q^s - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b^i_j}{\partial t} - \frac{\partial b^j_i}{\partial t}\right),
$$

из которого определяется левая часть равенства (4.6):

$$
\frac{\partial r^i_j}{\partial \dot q^k} = \left(\frac{\partial b^i_{kp}}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_{kp}}{\partial q^i}\right)\dot q^p + \left(\frac{\partial b^i_k}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_k}{\partial q^i} + \frac{\partial b^j_i}{\partial q^k} - \frac{\partial b^i_j}{\partial q^k}\right). \tag{4.13}
$$

Значение правой части равенства (4.6) получается с учетом выражения (4.12):

$$
\frac{\partial s^i_k}{\partial q^j} - \frac{\partial s^j_k}{\partial q^i} = \left(\frac{\partial b^i_{kp}}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_{kp}}{\partial q^i}\right)\dot q^p + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b^i_k}{\partial q^j} + \frac{\partial b^k_i}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_k}{\partial q^i} - \frac{\partial b^k_j}{\partial q^i}\right). \tag{4.14}
$$

Сравнение правых частей выражений (4.12), (4.13) приводит к заключению о выполнении условия (4.6) при выполнении равенства

$$
\frac{\partial}{\partial q^k}\left(b^i_j - b^j_i\right) + \frac{\partial}{\partial q^i}\left(b^j_k - b^k_j\right) + \frac{\partial}{\partial q^i}\left(b^k_j - b^j_k\right) = 0. \tag{4.15}
$$

Легко видеть, что

$$
\frac{\partial r^i_j}{\partial q^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b^i_{ps}}{\partial q^j \partial q^k} - \frac{\partial^2 b^j_{ps}}{\partial q^k \partial q^i}\right)\dot q^p \dot q^s + \left(\frac{\partial^2 b^i_p}{\partial q^j \partial q^k} - \frac{\partial^2 b^j_p}{\partial q^k \partial q^i}\right)\dot q^p + \left(\frac{\partial^2 b^i_0}{\partial q^j \partial q^k} - \frac{\partial^2 b^j_0}{\partial q^k \partial q^i}\right),
$$

и условие (4.7) также выполняется.

5. О задаче Бертрана

Задача М. Ж. Бертрана состоит в определении силы, зависящей от положения точки при её движении по коническому сечению [19]. Постановка задачи относится к обратным задачам динамики и начинается от работы И. Ньютона [12] об определении сил, под действием которых небесные тела совершают движения в соответствии с законами Кеплера. В работах М. Ж. Дарбу [20] и В. Г. Имшенецкого [5] было установлено, что действующая на точку сила является центральной и представляет силу тяготения. Необходимым условием численной реализации решения задачи Бертрана является асимптотическая устойчивость траектории. Можно показать, что используя уравнения программных связей, при постоянной секторной скорости асимптотическую устойчивость траектории точки можно обеспечить центральной силой.

Полагая, что начало координат прямоугольной системы совпадает с одним из фокусов конического сечения, а ось абсцисс направлена по оси симметрии, запишем уравнение траектории точки

$$r - ex - p = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2. \tag{5.1}$$

Здесь e — эксцентриситет конического сечения (фокальный параметр). Задача состоит в определении правых частей системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = X\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}\right), \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = Y\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}\right), \tag{5.2}$$

решение которой при начальных условиях

$$x\left(t_0\right) = x_0, \quad y\left(t_0\right) = y_0, \quad \dot{x}\left(t_0\right) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}\left(t_0\right) = \dot{y}_0, \tag{5.3}$$

соответствующих равенствам

$$r_0 - ex_0 - p = 0, \quad \left(x_0 - er_0\right)\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 = 0, \tag{5.4}$$

описывает движение точки по кривой (5.1) с секторной скоростью

$$x\dot{y} - y\dot{x} - c_0 = 0, \quad c_0 = x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0. \tag{5.5}$$

Введем уравнения программных связей

$$r - ex - p = \alpha, \quad x\dot{y} - y\dot{x} - c = \dot{\beta}, \tag{5.6}$$

где отклонения от (5.4), (5.5) удовлетворяют уравнениям возмущений связей:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}, \\
&\frac{d\dot{\alpha}}{dt} = A\left(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right), \quad \frac{d\dot{\beta}}{dt} = B\left(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right), \\
&A\left(0, 0, 0, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right) = 0, \quad B\left(0, 0, 0, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Из равенств (5.6) следуют кинематические соотношения, учитывающие отклонения начальных условий (5.3) от значений, соответствующих равенствам (5.4), (5.5):

$$\dot{r} - e\dot{x} = \dot{\alpha}, \quad x\dot{y} - y\dot{x} - c_0 = \dot{\beta}. \tag{5.8}$$

Дифференцирование выражений (5.8) с учетом равенств (5.7) приводит к системе дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{r} - e\ddot{x} = A, \quad x\ddot{y} - y\ddot{x} = B, \quad \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}. \tag{5.9}$$

Учитывая равенства (5.6) и выражения

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}, \quad r\ddot{r} + \dot{r}^2 = x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2,$$

представим систему уравнений (5.9) в виде, разрешенном относительно старших производных:

$$\ddot{x} = \frac{x}{p + \alpha}\left(A - \frac{c^2}{r^3}\right) - \frac{y}{(p + \alpha)\, r}B, \quad \ddot{y} = \frac{y}{p + \alpha}\left(A - \frac{c^2}{r^3}\right) + \frac{(x - er)}{(p + \alpha)\, r}B, \quad c = c_0 + \dot{\beta}. \tag{5.10}$$

При $\alpha = \dot{\alpha} = 0$, $\dot{\beta} = \text{const}$ из (5.10) следуют известные уравнения движения точки под действием центральной силы:

$$\ddot{x} = -\frac{c^2 x}{pr^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{c^2 y}{pr^3}.$$

Пусть $B \equiv 0$ и величины отклонений α, $\dot{\alpha}$ от траектории малы. Представим функцию A и величину $(p+\alpha)^{-1}$ разложениями в степенные ряды

$$A = -a_0\alpha - a_1\dot{\alpha} + A^{(2)}, \quad a_0 = \text{const}, \quad a_1 = \text{const}, \quad \frac{1}{p+\alpha} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\alpha}{p} + P^{(2)}\right)$$

с ограниченными остаточными членами $A^{(2)}, P^{(2)}$: $\left|A^{(2)}\right| < L, \left|P^{(2)}\right| < M$, и перепишем уравнения системы (5.10):

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{x}{p} Q\left(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right), \quad \ddot{y} = -\dfrac{y}{p} Q\left(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right), \\ Q\left(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right) = \dfrac{c^2}{r^3}\left(1 - \dfrac{\alpha}{p}\right) - a_0\alpha - a_1\dot{\alpha} + Q^{(2)}, \\ Q^{(2)} = \dfrac{c^2}{r^3} P^{(2)} - A^{(2)} - \left(\dfrac{\alpha}{p} + P^{(2)}\right) A. \end{cases} \tag{5.11}$$

Если остаточный член $Q^{(2)}$ в разложении функции $Q\left(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right)$ по степеням $\alpha, \dot{\alpha}$ ограничен, то асимптотическая устойчивость тривиального решения $\alpha = 0$, $\dot{\alpha} = 0$ уравнений возмущений связей (5.7) обеспечивается соответствующими ограничениями $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ величин коэффициентов уравнений первого приближения

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}, \quad \frac{d\dot{\alpha}}{dt} = -a_0\alpha - a_1\dot{\alpha}.$$

Поэтому, полагая $Q^{(2)} = 0$, с учетом равенств

$$\alpha = r - ex - p, \quad r\dot{\alpha} = (x - er)\,\dot{x} + y\dot{y}$$

можно ограничиться уравнениями движения точки, составленных с учетом линейных уравнений возмущений связей. В этом случае система уравнений (5.11) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} &f^x \equiv\ p\ddot{x} + xR\,(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0, \\ &f^y \equiv\ p\ddot{y} + yR\,(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0, \\ &R = R_0 + a_1\left(\left(\frac{x}{r} - e\right)\dot{x} + \left(\frac{y}{r}\right)\dot{y}\right), \quad R_0 = \frac{c^2}{r^3} + \left(a_0 - \frac{c^2}{pr^3}\right)(r - ex - p)\,. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Полагая $q^1 = x$, $q^2 = y$, нетрудно проверить соответствие уравнений (5.12) модифицированным условиям Гельмгольца (2.4), (2.10). Условия (4.2), (4.3) приводят к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} &s_x^x = a_1 x\left(\frac{x}{r} - e\right), \quad s_y^y = a_1 y\left(\frac{y}{r}\right), \\ &s_y^x = a_1 y\left(\frac{x}{r} - \frac{1}{2}e\right), \\ &r_x^x = r_y^y = 0, \quad r_y^x = x\frac{\partial R_0}{\partial y} - y\frac{\partial R_0}{\partial x} + a_1\frac{1}{r}\left(-y\dot{x} + x\dot{y}\right) - \frac{1}{2}a_1 e\dot{y}. \end{aligned}$$

Вычислив значения производных функции $R_0 = R_0\,(x, y)$, легко убедиться в выполнении равенства

$$x\frac{\partial R_0}{\partial y} - y\frac{\partial R_0}{\partial x} = -a_0 e y.$$

Условиям (4.6) соответствуют равенства:

$$\frac{\partial r_x^x}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial r_x^x}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial r_y^y}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial r_y^y}{\partial \dot{y}} = 0,$$

$$\frac{\partial r_y^x}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial s_x^x}{\partial y} - \frac{\partial s_y^x}{\partial x} = -a_1\frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial r_y^x}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial s_y^x}{\partial y} - \frac{\partial s_y^y}{\partial x} = a_1 \left(\frac{x}{r} - \frac{1}{2} e \right).$$

Из равенств

$$r_x^x = r_y^y = 0, \quad r_y^x = -r_x^y$$

следует выполнение условий (4.7). С учетом проведенных вычислений из условий (4.8) следует выражение функции

$$2D = a_1 x \left(\frac{x}{r} - e \right) \dot{x}^2 + 2a_1 y \left(\frac{x}{r} - \frac{1}{2} e \right) \dot{x}\dot{y} + a_1 y \left(\frac{y}{r} \right) \dot{y}^2 + h\,(x, y)\,,$$

определяемой с точностью до произвольной функции $h\,(x, y)$.

6. Заключение

Введение уравнений программных связей позволило решить задачу непосредственного построения множества систем дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих заданные частные интегралы, и выделить системы, решения которых обладают заданными свойствами. Определены условия асимптотической устойчивости интегрального многообразия, заданного уравнениями связей. Произвольные функции, содержащиеся в дифференциальных уравнениях, используются для приведения уравнений системы к форме уравнений Лагранжа. Предложено решение задачи определения центральной силы, обеспечивающей устойчивость движения материальной точки по коническому сечению. Установлена возможность представления уравнений движения точки в форме уравнений Лагранжа в соответствии с модифицированными условиями Гельмгольца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Витенбург Й.* Динамика систем твердых тел. — М.: Мир, 1980.
2. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986.
3. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую// Прикл. мат. мех. — 1952. — *21*, № 6. — С. 659–670.
4. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1979.
5. *Имшенецкий В. Г.* Определение силы, движущей по коническому сечению материальную точку, в функции ее координат// Сообщ. Харьков. мат. об-ва. — 1879. — № 1. — С. 5–15.
6. *Каспирович И. Е., Мухарлямов Р. Г.* О методах построения уравнений динамики с учетом стабилизации связей// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2019. — № 3. — С. 124–135.
7. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию// Дифф. уравн. — 1969. — *5*, № 4. — С. 688–699.
8. *Мухарлямов Р. Г.* О построении дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию// Дифф. уравн. — 1971. — *7*, № 10. — С. 1825–1834.
9. *Мухарлямов Р. Г.* Управление программным движением адаптивной оптической системы// Вестн. РУДН. Сер. Прикладн. мат. и инф. — 1994. — № 1. — С. 22–40.
10. *Мухарлямов Р. Г.* Приведение к заданной структуре уравнений динамики систем со связями// Изв. РАН. Прикл. мат. мех. — 2007. — *71*, № 3. — С. 401–410.
11. *Мухарлямов Р. Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2015. — № 1. — С. 15–28.
12. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. — М.: Наука, 1989.
13. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. — М.: Наука, 1966.
14. *Amirouche F.* Fundamentals of Multibody Dynamics: Theory and Applications. — Boston: Birkhäuser, 2006.
15. *Ascher U.* Stabilization of invariant of discretized differential systems// Numer. Algorithms.— 1997. — *14*, № 1. — С. 1–24.
16. *Ascher U. M., Chin H., Petzold L. R., Reich S.* Stabilization of constrained mechanical systems with DAEs and invariant manifolds// Mech. Struct. Machines. — 1995. — *23*, № 2. — С. 135–158.
17. *Ascher U. M., Chin H., Reich S.* Stabilization of DAEs and invariant manifolds// Numer. Math. — 1994. — *67*. — С. 131–149.
18. *Baumgarte J.* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems// Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 1972. — *1*, № 1. — С. 1–16. — Doi: 10.1016/0045-7825(72)90018-7.

19. *Bertrand M. G.* Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe// Comp. Rend. — 1873.— *77*, № 16. — C. 849–853.
20. *Darboux M. G.* Recherche de la loi que dois suivre une force centrale pour que la trajectoire quellle determine soit toujour une conique// Comp. Rend. — 1877. — *76*, № 16. — C. 760–762.
21. *Gonzales F., Kovecses J.* Use of penalty formulation in dynamic simulation and analysis of redundantly constrained multibody systems// Mult. Sys. Dyn. — 2012. — *29*. — C. 57–76.
22. *Kielau G., Maisser P.* A generalization of the Helmholtz conditions for the existence of a first-order Lagrangian// Z. Angew. Math. Mech. — 2006. — *86*. — C. 722–735.
23. *Santilli R. M.* Foundations of Theoretical Mechanics I. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics. — New York, etc.: Springer, 1978.
24. *Tleubergenov M. I., Ibraeva G. T.* On the closure of stochastic differential equations of motion// Eurasian Math. J. — 2021. — *12*, № 2. — C. 82–89.
25. *Tleubergenov M. I., Vassilina G. K., Abdrakhmanova A. A.* Representing a second-order Ito equation as an equation with a given force structure// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2023. — № 4. — C. 119–129.
26. *Tleubergenov M. I., Vassilina G. K., Azhymbaev D. T.* Construction of the differential equations system of the program motion in Lagrangian variables in the presence of random perturbations// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2022. — № 1. — C. 118–126.

Р. Г. Мухарлямов
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: robgar@mail.ru

UDC 519.6
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-428-440
EDN: PZWBRR

Construction of equations of dynamics of a given structure based on equations of program constraints

R. G. Mukharlyamov

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. We consider the problem of constructing a system of differential equations from a given set of constraint equations and reducing them to the form of Lagrange equations with dissipative forces that ensure stabilization of the constraints. We determine the dissipative function from the equations of constraint disturbances. We use modified Helmholtz conditions to represent differential equations in the form of Lagrange equations. We give the solution of the Bertrand problem of determining the central force under the action of which a material point performs stable motion along a conic section.

Keywords: constraint equations, Lagrange equation, dissipative function, Helmholtz conditions, Bertrand problem.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation and the city of Moscow No. 23-21-10065, https://rscf.ru/project/23-21-10065/.

For citation: R. G. Mukharlyamov, "Construction of equations of dynamics of a given structure based on equations of program constraints," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 428–440. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-428-440

REFERENCES

1. Y. Vitenburg, *Dinamika sistem tverdykh tel* [Dinamika sistem tverdykh tel], Mir, M., 1980 (in Russian).
2. A. S. Galiullin, *Metody resheniya obratnykh zadach dinamiki* [Metody resheniya obratnykh zadach dinamiki], Nauka, M., 1986 (in Russian).
3. N. P. Erugin, "Postroenie vsego mnozhestva sistem differentsial'nykh uravneniy, imeyushchikh zadannuyu integral'nuyu krivuyu" [Construction of the entire set of systems of differential equations having a given integral curve], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1952, **21**, No. 6, 659–670 (in Russian).
4. N. P. Erugin, *Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differentsial'nykh uravneniy* [Reading book for the general course of differential equations], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1979 (in Russian).
5. V. G. Imshenetskiy, "Opredelenie sily, dvizhushchey po konicheskomu secheniyu material'nuyu tochku, v funktsii ee koordinat" [Determination of the force moving a material point along a conic section as a function of its coordinates], *Soobshch. Khar'kov. mat. ob-va* [Messages Kharkov Math. Soc.], 1879, No. 1, 5–15 (in Russian).
6. I. E. Kaspirovich and R. G. Mukharlyamov, "O metodakh postroeniya uravneniy dinamiki s uchetom stabilizatsii svyazey" [On methods of constructing dynamic equations taking into account the stabilization of constraints], *Izv. RAN. Mekh. tv. tela* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Solid Mech.], 2019, No. 3, 124–135 (in Russian).
7. R. G. Mukharlyamov, "O postroenii mnozhestva sistem differentsial'nykh uravneniy ustoychivogo dvizheniya po integral'nomu mnogoobraziyu" [On the construction of a set of systems of differential equations of stable motion on an integral manifold], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1969, **5**, No. 4, 688–699 (in Russian).
8. R. G. Mukharlyamov, "O postroenii differentsial'nykh uravneniy optimal'nogo dvizheniya po zadannomu mnogoobraziyu" [On the construction of differential equations of optimal motion along a given manifold], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1971, **7**, No. 10, 1825–1834 (in Russian).
9. R. G. Mukharlyamov, "Upravlenie programmnym dvizheniem adaptivnoy opticheskoy sistemy" [Programmed motion control of adaptive optical system], *Vestn. RUDN. Ser. Prikladn. mat. i inf.* [Bull. PFUR. Ser. Appl. Math. Inf.], 1994, No. 1, 22–40 (in Russian).
10. R. G. Mukharlyamov, "Privedenie k zadannoy strukture uravneniy dinamiki sistem so svyazyami" [Reduction to a given structure of the equations of dynamics of systems with constraints], *Izv. RAN. Prikl. mat. mekh.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Appl. Math. Mech.], 2007, **71**, No. 3, 401–410 (in Russian).
11. R. G. Mukharlyamov, "Modelirovanie protsessov upravleniya, ustoychivost' i stabilizatsiya sistem s programmnymi svyazyami" [Modeling of control processes, stability and stabilization of systems with program constraints], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Sys.], 2015, No. 1, 15–28 (in Russian).
12. I. Newton, *Matematicheskie nachala natural'noy filosofii* [Philosophiae Naturalis Principia Mathematica], Nauka, Moscow, 1989 (Russian translation).
13. B. A. Rosenfeld, *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces], Nauka, Moscow, 1966 (Russian translation).
14. F. Amirouche, *Fundamentals of Multibody Dynamics: Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston, 2006.
15. U. Ascher, "Stabilization of invariant of discretized differential systems," *Numer. Algorithms*, 1997, **14**, No. 1, 1–24.
16. U. M. Ascher, H. Chin, L. R. Petzold, and S. Reich, "Stabilization of constrained mechanical systems with DAEs and invariant manifolds," *Mech. Struct. Machines*, 1995, **23**, No. 2, 135–158.
17. U. M. Ascher, H. Chin, and S. Reich, "Stabilization of DAEs and invariant manifolds," *Numer. Math.*, 1994, **67**, 131–149.
18. J. Baumgarte, "Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1972, **1**, No. 1, 1–16. — Doi: 10.1016/0045-7825(72)90018-7.
19. M. G. Bertrand, "Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe," *Comp. Rend.*, 1873, **77**, No. 16, 849–853.
20. M. G. Darboux, "Recherche de la loi que dois suivre une force centrale pour que la trajectoire quellle determine soit toujour une conique," *Comp. Rend.*, 1877, **76**, No. 16, 760–762.
21. F. Gonzales and J. Kovecses, "Use of penalty formulation in dynamic simulation and analysis of redundantly constrained multibody systems," *Mult. Sys. Dyn.*, 2012, **29**, 57–76.
22. G. Kielau and P. Maisser, "A generalization of the Helmholtz conditions for the existence of a first-order Lagrangian," *Z. Angew. Math. Mech.*, 2006, **86**, 722–735.
23. R. M. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics I. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics*, Springer, New York, etc., 1978.
24. M. I. Tleubergenov and G. T. Ibraeva, "On the closure of stochastic differential equations of motion," *Eurasian Math. J.*, 2021, **12**, No. 2, 82–89.

25. M. I. Tleubergenov, G. K. Vassilina, and A. A. Abdrakhmanova, “Representing a second-order Ito equation as an equation with a given force structure,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2023, No. 4, 119–129.
26. M. I. Tleubergenov, G. K. Vassilina, and D. T. Azhymbaev, “Construction of the differential equations system of the program motion in Lagrangian variables in the presence of random perturbations,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2022, No. 1, 118–126.

R. G. Mukharlyamov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: robgar@mail.ru