Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 417–427
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 51-73
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-417-427
EDN: PWKTOB

ИНДЕКС МАСЛОВА НА СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ И ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

А. С. Мищенко[1,2]

[1]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2]*Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

Посвящается памяти
Виктора Павловича Маслова,
моего учителя и друга.

Аннотация. Настоящая работа является изложением доклада на конференции «Semiclassical analysis and nonlocal elliptic problems-2023». Определение индекса Маслова лагранжева многообразия в виде класса одномерных когомологий на нем породило многочисленные работы, обобщающие понятия индекса Маслова. В работах В. И. Арнольда, В. А. Васильева и их последователей была разработана теория лагранжевых бордизмов и на ее основании построены характеристические классы лагранжевых подмногообразий. Но имеется и другой подход описания классов Маслова лагранжевых подмногообразий, изложенный в работах В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко с категорной точки зрения, который послужил источником настоящего доклада. Вдохновленные работами В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко, мы вводим понятие т. н. инфинитезимальных лагранжевых многообразий, которые позволяют, по нашему мнению, с максимальной полнотой охарактеризовать характеристические классы лагранжевых многообразий и вычислять индекс Маслова практически для любых лагранжевых многообразий. Вопрос, который нас интересует, заключается в следующем: когда индекс Маслова, заданный на индивидуальном лагранжевом многообразии как одномерный класс когомологий, является образом некоторого одномерного класса когомологий тотального пространства расслоения лагранжевых грассманианов? Дается ответ для различных классов расслоений лагранжевых грассманианов.

Ключевые слова: индекс Маслова, инфинитезимальное лагранжево многообразие, лагранжев грассманиан.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *А. С. Мищенко.* Индекс Маслова на симплектических многообразиях и инфинитезимальные лагранжевы многообразия// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 417–427. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-417-427

1. Введение

Определение индекса Маслова лагранжева многообразия в виде класса одномерных когомологий на нем породило многочисленные работы, обобщающие понятия индекса Маслова. В работах В. И. Арнольда [1, 2, 10, 11] (1980), В. А. Васильева [3, 16] (1981) и их последователей была разработана теория лагранжевых бордизмов и на ее основании построены характеристические классы лагранжевых подмногообразий.

Но имеется и другой подход описания классов Маслова лагранжевых подмногообразий, изложенный в работах В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко [7,9] (1991, 1995) с категорной точки зрения, который послужил источником настоящего доклада.

Вдохновленные работами В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко, мы вводим понятие т. н. инфинитезимальных лагранжевых многообразий, которые позволяют, по нашему мнению, с максимальной полнотой охарактеризовать характеристические классы лагранжевых многообразий и вычислять индекс Маслова практически для любых лагранжевых многообразий.

Сам индекс Маслова строится как гомологический инвариант на лагранжевом подмногообразии некоторого симплектического многообразия. В простейшем случае лагранжево многообразие Λ — это n-мерное подмногообразие в симплектическом пространстве $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, на котором симплектическая форма ω тривиальна.

В общем случае рассматривается произвольное симплектическое многообразие (W, ω) и расслоение лагранжевых грассманианов $LG(\mathbb{T}W)$, параметризованных точками симплектического многообразия W.

Вопрос, который нас интересует, заключается в следующем: когда индекс Маслова, заданный на индивидуальном лагранжевом многообразии как одномерный класс когомологий, является образом некоторого одномерного класса когомологий тотального пространства расслоения лагранжевых грассманианов? Дается ответ для различных классов расслоений лагранжевых грассманианов.

В частности, находятся гомологические условия для симплектических многообразий, при выполнении которых строятся явные формулы для вычисления индекса Маслова лагранжевых подмногообразий.

В заключение мы рассматриваем т. н. инфинитезимальные лагранжевы многообразия, которые не предполагают вложения лагранжевого многообразия в объемлющее симплектическое многообразие.

Понятие инфинитезимальных лагранжевых многообразий предполагает только наличие пары векторных расслоений: касательного расслоения $\mathbb{T}\Lambda$ лагранжевого многообразия Λ, послойно вложенного в комплексное векторное расслоение $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}\Lambda$ таким образом, что слой расслоения $\mathbb{T}\Lambda$ является лагранжевым подпространством в слое расслоения $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}\Lambda$.

Таким образом, векторное расслоение $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}\Lambda$ играет роль симплектического многообразия W, в которое вкладывается лагранжево многообразие Λ. Это упрощает в определенной степени задачу построения индекса Маслова.

Проблема применения инфинитезимальных лагранжевых многообразий к асимптотическим методам в уравнениях математической физики ожидает своего решения и может быть основана на работе М. В. Карасева и В. П. Маслова [4,13] (1983) в которой канонический оператор строится для общих симплектических многообразий при помощи покрытий симплектического многообразия картами, которые диффеоморфны простейшим симплектическим многообразиям.

2. Согласованные структуры

С каждым симплектическим многообразием W, задаваемым симплектической замкнутой (невырожденной) формой ω, можно связать дополнительные согласованные структуры:

- почти комплексную структуру J: $J : TW \longrightarrow TW$, $J^2 = -1$;
- евклидову структуру $E(u, v)$, $u, v \in \Gamma(TW)$, $E(u, u) > 0$;
- эрмитову структуру $H(u, v) = \mathbf{Re}H(u, v) + i\mathbf{Im}H(u, v) = E(u, v) + i\omega(u, v)$, которая является полуторалинейной формой.

Все эти структуры можно построить, стартуя от заданной симплектической формы ω; см., например, работу Ana Cannas da Silva [12] (2008).

3. Расслоение лагранжевых грассманианов

Расслоение лагранжевых грассманианов согласно определению строится в виде тотального пространства $LG(\mathbb{T}W)$ расслоения

$$\begin{tikzcd} LG(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\ W \end{tikzcd}$$

со слоями $\pi_{LG}^{-1}(x) = LG(\mathbb{T}W)_x$ над точками $x \in W$.

Слой $LG(\mathbb{T}W)_x$ является лагранжевыми грассманианом

$$\pi_{LG}^{-1}(x) = LG(\mathbb{T}W)_x = LG(\mathbb{T}_x W)$$

симплектического пространства $\mathbb{T}_x W$, который является многообразием, состоящим из всех лагранжевых плоскостей в касательном пространстве $\mathbb{T}_x W$:

$$LG(\mathbb{T}_x W) = \{L \subset \mathbb{T}_x W : \dim_{\mathbb{R}} L = n,\ \omega_{|L} = 0\}.$$

4. Категорное определение

Рассмотрим вложение $\Lambda \xhookrightarrow{h} W$ лагранжевого многообразия Λ в симплектическое многообразие W. Дифференциал $\mathbb{T}h$ вложения h порождает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}\Lambda \arrow[r, "\mathbb{T}h"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}\Lambda}"'] & \mathbb{T}W \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}W}"] \\ \Lambda \arrow[r, hook, "h"] & W. \end{tikzcd}$$

Лагранжево подмногообразие $h : \Lambda \longrightarrow W$ — это такое подмногообразие, для которого в каждой точке $x \in \Lambda$ подпространство $\mathbb{T}h\,(\mathbb{T}_x\Lambda) \subset \mathbb{T}_{h(x)}W$ является лагранжевым подпространством. Дифференциал $\mathbb{T}h$ порождает отображение Lh лагранжева многообразия в тотальное пространство $LG(\mathbb{T}W)$ расслоения лагранжевых грассманианов:

$$\begin{tikzcd} & LG(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\ \Lambda \arrow[ur, bend left, "Lh"] \arrow[r, hook, "h"'] & W. \end{tikzcd}$$

Получаем отображение в когомологиях:

$$H^*(LG(\mathbb{T}W)) \xrightarrow{(Lh)^*} H^*(\Lambda).$$

Категорное определение характеристических классов лагранжевого многообразия. Отображение $(Lh)^*$ задает универсальное категорное определение характеристических классов лагранжевого многообразия. А именно, если $\alpha \in H^*(LG(\mathbb{T}W))$ — класс когомологий пространства $LG(\mathbb{T}W)$, то класс когомологий

$$\alpha(\Lambda) = (Lh)^*(\alpha) \in H^*(\Lambda)$$

будем называть *характеристическим классом* лагранжева подмногообразия $\Lambda \xhookrightarrow[h]{} W$, порождаемым универсальным характеристическим классом $\alpha \in H^*(LG(\mathbb{T}W)$.

5. Классы Маслова

Имеется по крайней мере три примера характеристических классов лагранжевых многообразий.

5.1. Класс Маслова для простейшего случая $W = \mathbb{T}^*(\mathbb{C}^n)$. Один из них, простейший, это одномерный характеристический класс Маслова, значение которого на замкнутой кривой $\gamma \subset \Lambda$ совпадает с индексом Маслова кривой γ; см. книгу Трофимова и Фоменко [9].

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ — лагранжево подмногообразие, $h : \Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ — вложение, $Lh : \Lambda \longrightarrow LG(\mathbb{R}^{2n})$ сопоставляет каждой точке $x \in \Lambda$ касательное (лагранжево) подпространство $Lh(x) = \mathbb{T}_x(\Lambda) \in LG(\mathbb{R}^{2n})$ как точку в лагранжевом грассманиане $LG(\mathbb{R}^{2n})$ всех лагранжевых подпространств. Получаем отображение в когомологиях:

$$H^*(LG(\mathbb{R}^{2n})) \xrightarrow{(Lh)^*} H^*(\Lambda).$$

Если $\alpha \in H^*(LG(\mathbb{R}^{2n}))$ — класс когомологий пространства $LG(\mathbb{R}^{2n})$, то класс когомологий

$$\alpha(\Lambda) = (Lh)^*(\alpha) \in H^*(\Lambda)$$

— характеристический класс.

Пример универсального характеристического класса, класса Маслова, — это образующий класс когомологий $\mathbf{mas} \in H^1(LG(\mathbb{R}^{2n})) \approx \mathbb{Z}$, т. е. $\mathbf{mas}(\Lambda) \in H^1(\Lambda)$.

Вычисление класса Маслова $\mathbf{mas} \in H^1(LG(\mathbb{R}^{2n})) \approx \mathbb{Z}$ задается при помощи дифференциальной формы на многообразии $LG(\mathbb{R}^{2n})$. Многообразие $LG(\mathbb{R}^{2n})$ диффеоморфно однородному пространству $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$ при помощи диффеоморфизма

$$u : LG(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n),$$

который сопоставляет каждой лагранжевой плоскости $L \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, $\dim_R L = n$, ортонормированный вещественный базис $(e_1, \ldots, e_n) \subset L$.

Этим корректно определен класс смежности $u(L) \in \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$. В самом деле, поскольку базисные вектора $(e_1, \ldots, e_n)$ лежат в лагранжевой плоскости L, то они образуют ортонормированный комплексный базис в объемлющем пространстве $\mathbb{C}^n$, который задается унитарной матрицей. Эта матрица задается однозначно с точностью до выбора ортонормированного вещественного базиса $(e_1, \ldots, e_n) \subset L$, т. е. до умножения на ортогональную матрицу.

Композиция f отображений

$$f : LG(\mathbb{R}^{2n}) \xrightarrow{u} \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n) \xrightarrow{\det^2} \mathbb{S}^1$$

корректно задает одномерный класс когомологий, класс Маслова

$$\mathbf{mas} \in H^1(LG(\mathbb{R}^{2n})), \quad \mathbf{mas} = f^*\left(\frac{dz}{2\pi i z}\right) \in H^1(LG(\mathbb{R}^{2n})).$$

5.2. Обобщенный класс Маслова для случая $W = \mathbb{T}^*(M)$. Конструкция обобщенного класса Маслова изложена в книге Трофимова и Фоменко [9] (1995): пусть M — гладкое многообразие, а ω — каноническая симплектическая структура на тотальном пространстве $\mathbb{T}^*M$.

Выбор римановой метрики на M индуцирует положительно определенное скалярное произведение на $\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M)$, позволяющее отождествить $LG(\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M))$ с $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$. Это отождествление неоднозначно, но позволяет корректно определить дифференциальную форму $(\det^2)^*(dz/2\pi i z)$ на тотальном пространстве расслоения $LG(\mathbb{T}^*M)$ над $\mathbb{T}^*M$, у которого слой над точкой $z \in \mathbb{T}^*M$ состоит из всех лагранжевых подпространств в $\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M)$.

Аккуратное доказательства корректности определения обобщенного класса Маслова для тотального пространства кокасательного расслоения произвольного многообразия было дополнительно любезно предоставлено А. Т. Фоменко (см. в работе Мищенко [5, 14] (2022)).

5.3. Класс Маслова—Трофимова. Теорема 1. Наиболее общая конструкция категорных характеристических классов лагранжевых подмногообразий была представлена В. В. Трофимовым [8] (1994).

Если линейная связность ∇ на многообразии W согласована с симплектической формой ω, то операция параллельного перенесения задает действие группы голономии $\pi^h_\nabla(x_0, W)$ на лагранжевом грассманиане в отмеченной точке x_0.

Это действие позволяет определить т. н. приведенный лагранжев грассманиан

$$\pi LG(\mathbb{T}_{x_0}W) = LG(\mathbb{T}_{x_0}W)/\pi^h_\nabla(x_0, W),$$

а значит, и отображение лагранжева подмногообразия $N^n \subset W^{2n}$

$$par : N^n \longrightarrow \pi LG(\mathbb{T}_{x_0}W),$$

которое задает гомоморфизм в когомологиях

$$(par)^* : H^*(\pi LG(\mathbb{T}_{x_0}W)) \longrightarrow H^*(N^n),$$

т. е. характеристический класс Маслова—Трофимова

$$\alpha(N^n) = (par)^*(\alpha) \in H^*(N^n), \quad \alpha \in H^*(\pi LG(\mathbb{T}_{x_0}W)).$$

Теорема 1. *Класс Маслова—Трофимова является частным случаем категорного характеристического класса лагранжева многообразия.*

6. Построение индекса Маслова

Задача заключается в том, чтобы найти условия на симплектическое многообразие W, при которых индекс Маслова можно построить на всем симплектическом многообразии W, т. е. когда функция $\det^2_\alpha$ не зависит от выбора карты U_α.

Если функции склейки касательного расслоения $\mathbb{T}W$ принимают значения в ортогональной подгруппе, $\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(w) \in \mathbb{O}(n)$, то в каждом слое расслоения $LG(\mathbb{T}^*M)$ функция $\det^2_\alpha$ не зависит от выбора тривиализации:

$$\det{}^2_\beta(\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(x)\cdot A) = \det{}^2(\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(x))\cdot\det{}^2(A) = \det{}^2_\alpha(A).$$

На самом деле для того, чтобы определение $\det^2_\alpha$ не зависело от тривиализации, требование $\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(w) \in \mathbb{O}(n)$ является слишком обременительным. Достаточно предполагать, что структурная группа $\mathbb{U}(n)$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{SU}(n) \subset \mathbb{U}(n)$. Конечно, подгруппа $\mathbb{O}(n) \not\subset \mathbb{SU}(n)$ немного выползает из подгруппы $\mathbb{SU}(n)$. Но это легко поправить: рассмотрев гомоморфизм групп

$$\det : \mathbb{U}(n) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{U}(1)$$

и конечную подгруппу $\mathbb{H} \subset \mathbb{S}^1$, задающую точную последовательность

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^{\mathbb{H}} \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Положим

$$\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) = \det{}^{-1}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{U}(n).$$

В случае $\mathbb{H} = \mathbf{1}$ получаем $\mathbb{S}^{\mathbb{H}} = \mathbb{S}^1$. В случае $\mathbb{H} = \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2$ получаем подгруппу $\mathbb{S}^{Z_2}\mathbb{U}(n) \supset \mathbb{O}(n)$. Поэтому задача о построении функции $\det^2_\alpha$, не зависящей от выбора тривиализации, сводится к следующей теореме.

Теорема 2. *Функция $\det^{2k}_\alpha$ корректно определена на тотальном пространстве расслоения лагранжевых грассманианов, т. е. не зависит от выбора карты U_α, когда структурная группа комплексного касательного расслоения $\mathbb{T}W$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) \subset \mathbb{U}(n)$, где $\mathbb{H} \subset \mathbb{U}(1)$ — конечная подгруппа порядка k.*

Когда структурная группа $\mathbb{U}(n)$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) = \det^{-1}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{U}(n)$? Ответ на этот вопрос звучит следующим образом.

Теорема 3. *Структурная группа $\mathbb{U}(n)$ комплексного касательного расслоения $\mathbb{T}W$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) = \det^{-1}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{U}(n)$, когда первый класс Чженя $c_1(TW) \in H^2(W, \mathbb{Z})$ имеет конечный порядок $k = \#(\mathbb{H})$.*

7. Инфинитезимальный подход

Замена симплектического многообразия на меньшее симплектическое многообразие. Рассмотрим вложение $h : \Lambda \longrightarrow W$ многообразия Λ в симплектическое многообразие W как лагранжево подмногообразие. Такое вложение будем называть *лагранжевым вложением.* Напомним, что дифференциал $\mathbb{T}h$ порождает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}\Lambda \arrow[r, "\mathbb{T}h"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}\Lambda}"'] & \mathbb{T}W \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}W}"] \\ \Lambda \arrow[r, hook, "h"] & W, \end{tikzcd}$$

которая, в свою очередь, порождает послойное отображение Lh лагранжева многообразия Λ в тотальное пространство $LG(\mathbb{T}W)$ расслоения лагранжевых грассманианов:

$$\begin{tikzcd} & LG(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\ \Lambda \arrow[ur, bend left, "Lh"] \arrow[r, hook, "h"'] & W. \end{tikzcd}$$

Получаем морфизм когомологий:

$$H^*(LG(\mathbb{T}W)) \xrightarrow{(Lh)^*} H^*(\Lambda).$$

Этот категорный подход позволяет использовать метод В. В. Трофимова еще раз; см. [6, 15] (2023). Судя по своей работе [8] (1994), В. В. Трофимов не был удовлетворен своим обобщением классов Маслова, поскольку при большой группе голономии теряются классы Маслова. Мы предлагаем и здесь сформулировать задачу на категорном языке. Объектом служит пара $h : \Lambda \subset W$, лагранжево подмногообразие Λ в симплектическом многообразии W.

Предлагается заменить симплектическое многообразие W на меньшее симплектическое подмногообразие W', которое содержит лагранжево подмногообразие Λ: $h' : \Lambda \subset W'$, $i : W' \subset W$, $h = i \circ h'$. Получим более широкое множество характеристических классов, к которому старые классы сводятся.

В самом деле, послойные отображения Lh и Lh' лагранжева многообразия Λ в тотальные пространства $LG(\mathbb{T}W)$ и $LG(\mathbb{T}W')$ расслоений лагранжевых грассманианов образуют коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & LG(\mathbb{T}W') \arrow[r, "(\mathbb{T}i)_{LG}"] \arrow[d, "\pi'_{LG}"] & LG(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\ \Lambda \arrow[ur, bend left, "Lh'"] \arrow[urr, bend left=50, "Lh"] \arrow[r, hook, "h'"'] \arrow[rr, hook, bend right, "h=i\circ h'"'] & W' \arrow[r, "i"'] & W. \end{tikzcd}$$

Эта коммутативная диаграмма продолжается до предельного пространства

$$\Lambda = \bigcap_{W \supset \Lambda} W,$$

которое имеет следующий вид:

$$\begin{tikzcd}
 & LG(T^{U(n)}\Lambda) \arrow[r, "(\mathbb{T}h')_{LG}"] \arrow[d] & LG(\mathbb{T}W') \arrow[r, "(\mathbb{T}i)_{LG}"] \arrow[d, "\pi'_{LG}"] & LG(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\
\Lambda \arrow[r, equal] \arrow[ur, bend left, "L"'] \arrow[urr, bend left, "Lh'"] \arrow[urrr, bend left, "Lh"] & \Lambda \arrow[r, hook, "h'"'] \arrow[rr, hook, bend right, "h=i\circ h'"'] & W' \arrow[r, "i"'] & W,
\end{tikzcd}$$

где $\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda = \bigcap\limits_{W\supset\Lambda} \mathbb{T}W$. Отображение L строится как предельное отображение, поскольку тотальные пространства $LG(\mathbb{T}W)$ расслоений лагранжевых многообразий вкладываются друг в друга:

$$\begin{tikzcd}
LG(\mathbb{T}W') \arrow[r, hook, "(\mathbb{T}i)_{LG}"] \arrow[d, "\pi'_{LG}"] & LG(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\
W' \arrow[r, hook, "i"'] & W.
\end{tikzcd}$$

Значит,

$$LG(\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda) = \bigcap_{W\supset\Lambda} LG(\mathbb{T}W),$$

и поскольку отображение $(\mathbb{T}h)_{LG}$ является мономорфизмом, то отображение L однозначно определяется условием:

$$(\mathbb{T}h)_{LG} \circ L = (\mathbb{T}i)_{LG} \circ (\mathbb{T}h')_{LG} \circ L = Lh.$$

Эта неявная конструкция отображения L лагранжева многообразия Λ в тотальное пространство $LG(\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda)$ расслоения лагранжевых грассманианов над базой Λ не зависит от выбора достаточно малой окрестности лагранжевого многообразия Λ в симплектическом многообразии W, но существенно зависит от выбора двух локальных инвариантов лагранжева многообразия Λ:

1. касательного расслоения $\mathbb{T}\Lambda$ лагранжева многообразия Λ (со структурной группой $\mathbb{O}(n)$);
2. ограничения $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)$ касательного расслоения $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(W)$ над симплектическим многообразием W, на котором индуцирована комплексная структура со структурной группой $\mathbb{U}(n)$, порожденная симплектической структурой симплектического многообразия W;
3. и, наконец, послойного вложения расслоений $\varphi : \mathbb{T}(\Lambda) \to \mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)$, линейного относительно поля вещественных чисел.

Скажем, что многообразие с оснащением $\{\Lambda, \varphi : \mathbb{T}(\Lambda) \to \mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)\}$ является *инфинитезимальным лагранжевым многообразием*, если в каждой точке $x \in \Lambda$ слой $\mathbb{T}_x(\Lambda) \subset \mathbb{T}_x^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)$ является лагранжевым подпространством в симплектическом пространстве $\mathbb{T}_x^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)$.

Это оснащение называется *лагранжевым оснащением.* Таким образом, получаем теорему.

Теорема 4. *Любое лагранжево подмногообразие в симплектическом многообразии $\Lambda \subset W$ наделяется лагранжевым оснащением, т. е. структурой инфинитезимального лагранжева многообразия. Верно и обратное: всякое инфинитезимальное лагранжево многообразие, т. е. многообразие Λ с лагранжевым оснащением $\{\Lambda, \varphi : \mathbb{T}(\Lambda) \to \mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)\}$, реализуется как лагранжево подмногообразие в некотором многообразии W, допускающем почти симплектическую структуру.*

Иными словами, существуют почти симплектическое многообразие W и лагранжево вложение $h : \Lambda \longrightarrow W$, для которого лагранжево оснащение $\{\Lambda, \varphi : \mathbb{T}(\Lambda) \to \mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)\}$ строится как обратный образ $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda) = h^*(\mathbb{T}W)$ комплексного расслоения $\mathbb{T}W$, причем дифференциал $\mathbb{T}h : \mathbb{T}\Lambda \longrightarrow \mathbb{T}W$ отображения h разлагается в композицию

$$\mathbb{T}h : \mathbb{T}\Lambda \xrightarrow{\varphi} \mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda) = h^*(\mathbb{T}W) \xrightarrow{h^*} \mathbb{T}W.$$

Заметим, что если почти симплектическое многообразие существует, то достаточно малая трубчатая окрестность лагранжева подмногообразия $\Lambda \subset W'$ диффеоморфна тотальному пространству нормального расслоения ν с базой Λ, а ограничение касательного расслоения $(\mathbb{T}W)_{|\Lambda} = h^*(\mathbb{T}W) = \mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)$ разлагается в прямую сумму двух расслоений $\mathbb{T}\Lambda$ и ν:

$$\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda) = \mathbb{T}\Lambda \oplus \nu.$$

Поэтому нормальное расслоение можно построить при помощи послойного оператора I в расслоении $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)$:

$$\nu = I(\mathbb{T}\Lambda).$$

Значит, построение нормального расслоения ν не требует информации о вложении h лагранжева многообразия Λ в окрестность W'. $\square$

Таким образом, каждой точке $x \in \Lambda$ сопоставим касательное пространство $\mathbb{T}_x\Lambda$ как подпространство $\mathbb{T}_x\Lambda \subset \mathbb{T}_x(W')$, как лагранжеву плоскость в $\mathbb{T}_x(W')$, т. е. точку $L(x)$ в слое $LG_x(\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda)$.

В когомологиях получаем отображение:

$$H^*(\Lambda) \xleftarrow{\quad H(L) \quad} H^*(LG(\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda)) \xleftarrow{H((\mathbb{T}h)_{LG})} H^*(LG(\mathbb{T}W)).$$

Это значит, что категорные характеристические классы на лагранжевом многообразии Λ, вложенном в любое симплектическое многообразие, можно построить при помощи оснащения комплексным векторным расслоением $\mathbb{T}^{U(n)}$ и задать посредством универсального характеристического класса из когомологий $H^*(LG(\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda))$ тотального пространства расслоения $LG(\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda)$.

Заметим, что при определении характеристических классов мы используем только структуру касательного расслоения $\mathbb{T}(W)$ к симплектическому многообразию W. Возникает естественная идея заменить пару $h : \Lambda \subset W$ на само лагранжево многообразие Λ, которое оснащено структурой лагранжевости при помощи лагранжева оснащения.

8. Заключительные замечания

1. Каждое инфинитезимальное лагранжево многообразие может быть реализовано как лагранжево подмногообразие некоторого почти симплектического многообразия, структурная группа которого редуцируется к подгруппе $\mathbb{O}(n)$. Этого достаточно, чтобы описать одномерные классы Маслова для инфинитезимального лагранжева многообразия.
2. В частности, на инфинитезимальном лагранжевом многообразии справедливы теоремы 2 и 3 о редукции структурной группы $\mathbb{U}(n)$.
3. Почти симплектическое многообразие из первого пункта можно выбрать как тотальное пространство кокасательного расслоения некоторого n-мерного многообразия. Однако неясно, можно ли вложить инфинитезимальное лагранжево многообразие в компактное симплектическое многообразие.
4. Проблема применения инфинитезимальных лагранжевых многообразий к асимптотическим методам в уравнениях математической физики ожидает своего решения. Мы предполагаем, что при помощи инфинитезимальных лагранжевых многообразий можно обобщить методы работы М. И. Карасева и В. П. Маслова [4] (1983) на более широкий класс канонических операторов в асимптотических методах.
5. Представляет также интерес описать группу голономий в смысле работы В. В. Трофимова [8] (1994).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. I// Функц. анализ и его прилож. — 1980. — *14*, № 3. — С. 1–13.
2. *Арнольд В. И.* Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. II// Функц. анализ и его прилож. — 1980. — *14*, № 4. — С. 8–17.
3. *Васильев В. А.* Характеристические классы лагранжевых и лежандровых многообразий, двойственные к особенностям каустик и волновых фронтов// Функц. анализ и его прилож. — 1981. — *15*, № 3. — С. 10–22.
4. *Карасёв М. В., Маслов В. П.* Псевдодифференциальные операторы и канонический оператор в общих симплектических многообразиях// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1983. — *47*, № 5. — С. 999–1029.

5. *Мищенко А. С.* Индекс Маслова на симплектических многообразиях. С дополнением А. Т. Фоменко «Построение обобщенного класса Маслова для тотального пространства $W = T^*(M)$ кокасательного расслоения»// Мат. заметки. — 2022. — *112*, № 5. — С. 718–732.
6. *Мищенко А. С.* Заметки о категорном определении классов Маслова лагранжева многообразия// Мат. заметки. — 2023. — *114*, № 3. — С. 474–476.
7. *Трофимов В. В.* Группа голономии и обобщенные классы Маслова подмногообразий в пространствах аффинной связности// Мат. заметки. — 1991. — *49*, № 2. — С. 113–123.
8. *Трофимов В. В.* Обобщенные классы Маслова на пространстве путей симплектического многообразия// Тр. МИАН. — 1994. — *205*. — С. 172–199.
9. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. — М.: Факториал, 1995.
10. *Arnol'd V. I.* Lagrange and Legendre cobordisms. I// Funct. Anal. Appl. — 1980. — *14*, № 3. — С. 167–177.
11. *Arnol'd V. I.* Lagrange and Legendre cobordisms. II// Funct. Anal. Appl. — 1980. — *14*, № 4. — С. 252–260.
12. *Cannas da Silva A.* Lectures on Symplectic Geometry. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2008.
13. *Karasev M. V., Maslov V. P.* Pseudodifferential operators and a canonical operator in general symplectic manifolds// Izv. Math. — 1984. — *23*, № 2. — С. 277–305.
14. *Mishchenko A. S.* Maslov index on symplectic manifolds. With supplement by A. T. Fomenko "Constructing the generalized Maslov class for the total space $W = T^*(M)$ of the cotangent bundle"// Math. Notes. — 2022. — *112*, № 5. — С. 697–708.
15. *Mishchenko A. S.* Notes on a Category-theoretic definition of Maslov classes of a Lagrangian manifold// Math. Notes. — 2023. — *114*, № 3. — С. 412–414.
16. *Vassiliev V. A.* Characteristic classes of Lagrangian and Legendre manifolds dual to singularities of caustics and wave fronts// Funct. Anal. Appl. — 1981. — *15*, № 3. — С. 164–173.

А. С. Мищенко
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: `asmish-prof@yandex.ru`

UDC 51-73
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-417-427
EDN: PWKTOB

Maslov index on symplectic manifolds infinitesimal Lagrangian manifolds

A. S. Mishchenko[1,2]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[2] *Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Dedicated to the memory
of Viktor Pavlovich Maslov,
my teacher and friend.

Abstract. This paper is a summary of the report at the conference "Semiclassical analysis and nonlocal elliptic problems-2023". The definition of the Maslov index of a Lagrangian manifold as a class of one-dimensional cohomologies on it gave rise to numerous works generalizing the concepts of the Maslov index. In the works by V. I. Arnold, V. A. Vassiliev and their followers, the theory of Lagrangian bordisms was developed and characteristic classes of Lagrangian submanifolds were constructed on its basis. But there is another approach to describing the Maslov classes of Lagrangian submanifolds, presented in the works by V. V. Trofimov and A. T. Fomenko from a categorical point of view, which served as the source of this report. Inspired by the works by V. V. Trofimov and A. T. Fomenko, we introduce the concept of the so-called infinitesimal Lagrangian manifolds, which, in our opinion, allow us to describe the characteristic classes of Lagrangian manifolds with maximum completeness and calculate the Maslov index for almost any Lagrangian manifold. The question that interests us is the following: when does the Maslov index defined on an individual Lagrangian manifold as a one-dimensional cohomology class become the image of some one-dimensional cohomology class of the total space of the bundle of Lagrangian Grassmannians? An answer is given for various classes of bundles of Lagrangian Grassmannians.

Keywords: Maslov index, infinitesimal Lagrangian manifold, Lagrangian Grassmannian.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: A. S. Mishchenko, "Maslov index on symplectic manifolds infinitesimal Lagrangian manifolds," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 417–427. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-417-427

REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, "Lagranzhevy i lezhandrovy kobordizmy. I" [Lagrange and Legendre cobordisms. I], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1980, **14**, No. 3, 1–13 (in Russian).
2. V. I. Arnol'd, "Lagranzhevy i lezhandrovy kobordizmy. II" [Lagrange and Legendre cobordisms. II], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1980, **14**, No. 4, 8–17 (in Russian).
3. V. A. Vassiliev, "Kharakteristicheskie klassy lagranzhevykh i lezhandrovykh mnogoobraziy, dvoystvennye k osobennostyam kaustik i volnovykh frontov" [Characteristic classes of Lagrange and Legendre manifolds, that are dual to singularities of caustics and wave fronts], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1981, **15**, No. 3, 10–22 (in Russian).
4. M. V. Karasev and V. P. Maslov, "Psevdodifferentsial'nye operatory i kanonicheskiy operator v obshchikh simplekticheskikh mnogoobraziyakh" [Pseudodifferential operators and the canonical operator in general

symplectic manifolds], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1983, **47**, No. 5, 999–1029 (in Russian).
5. A. S. Mishchenko, "Indeks Maslova na simplekticheskikh mnogoobraziyakh. S dopolneniem A. T. Fomenko «Postroenie obobshchennogo klassa Maslova dlya total'nogo prostranstva $W = T^*(M)$ kokasatel'nogo rassloeniya»" [Maslov index on symplectic manifolds. With supplement by A. T. Fomenko "Constructing the generalized Maslov class for the total space $W = T^*(M)$ of the cotangent bundle"], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2022, **112**, No. 5, 718–732 (in Russian).
6. A. S. Mishchenko, "Zametki o kategornom opredelenii klassov Maslova lagranzheva mnogoobraziya" [Notes on a category-theoretic definition of Maslov classes of a Lagrangian manifold], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **114**, No. 3, 474–476 (in Russian).
7. V. V. Trofimov, "Gruppa golonomii i obobshchennye klassy Maslova podmnogoobraziy v prostranstvakh affinnoy svyaznosti" [Holonomy group and generalized Maslov classes of submanifolds in spaces with affine connection], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1991, **49**, No. 2, 113–123 (in Russian).
8. V. V. Trofimov, "Obobshchennye klassy Maslova na prostranstve putey simplekticheskogo mnogoobraziya" [Generalized Maslov classes on the path space of a symplectic manifold], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1994, **205**, 172–199 (in Russian).
9. V. V. Trofimov and A. T. Fomenko, *Algebra i geometriya integriruemykh gamil'tonovykh differentsial'nykh uravneniy* [Algebra and Geometry of Integrable Hamiltonian Differential Equations], Faktorial, Moscow, 1995 (in Russian).
10. V. I. Arnol'd, "Lagrange and Legendre cobordisms. I," *Funct. Anal. Appl.*, 1980, **14**, No. 3, 167–177.
11. V. I. Arnol'd, "Lagrange and Legendre cobordisms. II," *Funct. Anal. Appl.*, 1980, **14**, No. 4, 252–260.
12. A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2008.
13. M. V. Karasev and V. P. Maslov, "Pseudodifferential operators and a canonical operator in general symplectic manifolds," *Izv. Math.*, 1984, **23**, No. 2, 277–305.
14. A. S. Mishchenko, "Maslov index on symplectic manifolds. With supplement by A. T. Fomenko "Constructing the generalized Maslov class for the total space $W = T^*(M)$ of the cotangent bundle"," *Math. Notes*, 2022, **112**, No. 5, 697–708.
15. A. S. Mishchenko, "Notes on a Category-theoretic definition of Maslov classes of a Lagrangian manifold," *Math. Notes*, 2023, **114**, No. 3, 412–414.
16. V. A. Vassiliev, "Characteristic classes of Lagrangian and Legendre manifolds dual to singularities of caustics and wave fronts," *Funct. Anal. Appl.*, 1981, **15**, No. 3, 164–173.

A. S. Mishchenko
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: `asmish-prof@yandex.ru`