Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 403–416
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-403-416
EDN: PSBLYU

О ДВУХ СПОСОБАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ η-ИНВАРИАНТОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

К. Н. Жуйков, А. Ю. Савин

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Для класса краевых задач с параметром, эллиптических в смысле Аграновича—Вишика, установлено равенство η-инварианта, определяемого в терминах регуляризации Мельроуза, и спектрального η-инварианта типа Атьи—Патоди—Зингера, определяемого при помощи аналитического продолжения спектральной η-функции оператора.

Ключевые слова: эллиптические краевые задачи с параметром, η-инварианты, спектральные инварианты, регуляризованные следы.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Первый автор является победителем конкурса «Молодая математика России» и выражает благодарность его спонсорам и жюри. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00336.

Для цитирования: *К. Н. Жуйков, А. Ю. Савин.* О двух способах определения η-инвариантов эллиптических краевых задач// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 403–416. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-403-416

Введение

Атья, Патоди и Зингер в своем знаменитом цикле работ [5–7] определили понятие η-инварианта эллиптического самосопряженного псевдодифференциального оператора A положительного порядка на гладком замкнутом многообразии. η-Инвариант является спектральным инвариантом и определяется формулой (будем считать, что оператор является обратимым)

$$\eta_{APS}(A) = \frac{1}{2}\left.\left(\sum_j (\operatorname{sgn}\lambda_j)|\lambda_j|^{-s}\right)\right|_{s=0},$$

где $\{\lambda_j\}$ — набор всех собственных значений оператора A с учетом их кратностей. Ряд сходится абсолютно при достаточно больших $\operatorname{Re} s$ и определяет голоморфную функцию, которая допускает мероморфное продолжение на комплексную плоскость, причем функция является голоморфной при $s = 0$, и поэтому определено ее значение в нуле. η-Инварианты Атьи—Патоди—Зингера операторов на замкнутом многообразии имеют многочисленные приложения в анализе, геометрии, топологии.

Отметим, что в случае, когда многообразие — это точка и оператор A — просто симметрическая матрица, то удвоенный η-инвариант равен сигнатуре квадратичной формы, определяемой матрицей A, и равен т. н. спектральной асимметрии, т. е. разности между числами положительных и отрицательных собственных значений матрицы. В случае многообразий положительной размерности эти числа, как правило, оба бесконечны, и поэтому η-инвариант можно рассматривать как регуляризацию этой спектральной асимметрии.

В работах Гилки и Смита [10,11] были определены η-инварианты типа Атьи—Патоди—Зингера и изучены их свойства для класса эллиптических краевых задач на многообразии с краем. В цитированных работах рассматриваются не обязательно самосопряженные задачи, поэтому формула для η-инварианта подходящим образом модифицируется. При этом оказывается, что соответствующая мероморфная функция может иметь полюс при $s = 0$, и поэтому η-инвариант определяется как постоянный член ряда Лорана в этой точке.

Другой подход к определению η-инвариантов дал Мельроуз [15], который рассматривал семейства $D(p)$ псевдодифференциальных операторов с параметром $p \in \mathbb{R}$ (такие семейства естественно возникают при рассмотрении эллиптических уравнений на многообразиях с цилиндрическими концами или с коническими точками, см. [1, 4]). В предположении, что семейство является эллиптическим с параметром и обратимым при всех $p \in \mathbb{R}$, η-инвариант Мельроуза определялся формулой

$$\eta(D(p)) = \frac{1}{2\pi i} \fint\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{TR}\left(D(p)^{-1}\frac{dD(p)}{dp}\right) dp,$$

где TR — специальный регуляризованный след семейства с параметром, а $\fint_{\mathbb{R}}$ — специальный регуляризованный интеграл. η-Инвариант Мельроуза использовался в формулах индекса на многообразиях с коническими точками, см. [8, 9].

Отметим, что в случае, когда многообразие — это точка и семейство $D(p)$ — просто семейство обратимых матриц, которое имеет равные пределы при $p \to \pm\infty$, η-инвариант равен числу вращения определителя этого семейства вокруг нуля. В случае многообразий положительной размерности число вращения, как правило, бесконечно, и поэтому η-инвариант Мельроуза можно рассматривать как регуляризацию этого числа вращения.

В недавней работе авторов [3] было дано определение η-инварианта типа Мельроуза для семейств псевдодифференциальных задач с параметром на многообразии с краем.

Мельроузом [15], а также Лешем и Пфлаумом [13] была установлена следующая связь между η-инвариантами Атьи—Патоди—Зингера и Мельроуза. А именно, для обратимого эллиптического самосопряженного дифференциального оператора A первого порядка на гладком замкнутом многообразии было определено семейство $p - iA$, которое является эллиптическим с параметром $p \in \mathbb{R}$, и обратимо при всех таких значений параметра, и было доказано равенство:

$$\eta_{APS}(A) = \eta(p - iA). \tag{1}$$

Цель данной работы состоит в получении формулы типа (1), в которой в левой части равенства стоит η-инвариант Гилки—Смита эллиптической краевой задачи на многообразии с краем, а в правой части равенства стоит η-инвариант из работы [3] семейства краевых задач с параметром. Нам удалось получить такое равенство для краевых задач любого нечетного порядка.

Остановимся кратко на содержании работы. В разделе 1 определяются эллиптические краевые задачи с параметром, в разделе 2 приведен краткий обзор результатов работы [10], в которой был определен η-инвариант типа Атьи—Патоди—Зингера для краевых задач как спектральный инвариант. В разделе 3 представлен иной подход к построению η-инварианта как некоторой регуляризации числа вращения, восходящий к работе Мельроуза [15]. Наконец, раздел 4 содержит основной результат работы — теорему о равенстве построенных в разделах 2 и 3 η-инвариантов.

1. Эллиптические задачи с параметром

1.1. Краевые задачи с параметром. Напомним понятие эллиптической краевой задачи с параметром из работы [1]. Пусть M — гладкое компактное многообразие размерности n с краем ∂M. Введем такие локальные координаты $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x_n)$ в окрестности края, что многообразие локально определяется условием $M = \{x_n \geqslant 0\}$, а его край — условием $\partial M = \{x_n = 0\}$, т. е. x_n — определяющая функция края, а x' — координаты на крае. Двойственные координаты обозначаются $\xi = (\xi', \xi_n)$. Семейство операторов вида

$$D(p) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} D_k p^k \colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \tag{1.2}$$

где $D_k = D_k(x, -i\partial_x)$ — дифференциальные операторы на M порядка $\leqslant m-k$ и $p \in \mathbb{R}$, будем называть *оператором порядка m с параметром на многообразии M*. Здесь и всюду далее используется обозначение $\partial_x = \partial/\partial x$.

Определение 1.1. *Краевой задачей порядка (m, b) с параметром* называется оператор вида

$$\mathcal{D}(p) = \begin{pmatrix} D(p) \\ \\ i^* B(p) \end{pmatrix} \colon C^\infty(M, E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M, F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G) \end{matrix}, \tag{1.3}$$

где E и F — комплексные векторные расслоения на M, G — комплексное векторное расслоение на ∂M, $D(p)$ и $B(p)$ — семейства с параметром порядков m и b соответственно, а

$$i^* \colon C^\infty(M, E) \to C^\infty(\partial M, E|_{\partial M})$$

— оператор сужения сечений на край, индуцированный вложением $i \colon \partial M \hookrightarrow M$.

В локальных координатах граничный оператор $i^* B(p)$ может быть записан в виде

$$C^\infty(M, E) \ni u \overset{i^* B(p)}{\longmapsto} \sum_{0 \leqslant k \leqslant b} B_k(p) (-i\partial_{x_n})^k \Big|_{x_n = 0} u \in C^\infty(\partial M, G),$$

где $B_k(p)$ — операторы с параметром порядка $\leqslant b-k$ на границе. Будем говорить, что краевая задача (1.3) имеет *тип* $d \in \mathbb{Z}_+$, если $B_k(p) = 0$ при всех $k \geqslant d$, т. е. тип равен максимальному порядку нормальной производной в краевых условиях плюс один. В частности, тип задачи Дирихле равен 1, а задачи Неймана — 2. Будем предполагать, что тип $d \leqslant \operatorname{ord} D(p)$.

1.2. Эллиптичность с параметром. Для $s \in \mathbb{Z}_+$ через $H^s(M)$ обозначим пространство Соболева функций на M с нормой, обозначаемой $\|\cdot\|_s$. Введем семейство норм в $H^s(M)$, зависящих от параметра $p \in \mathbb{R}$:

$$|\!|\!| u |\!|\!|_s^2 = \|u\|_s^2 + |p|^{2s} \|u\|_0^2. \tag{1.4}$$

Аналогично определяются нормы с параметром в пространствах Соболева на границе. Известно, что краевая задача (1.3) определяет ограниченный оператор в пространствах Соболева

$$\mathcal{D}(p) \colon H^s(M, E) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(M, F) \\ \oplus \\ H^{s-b-1/2}(\partial M, G) \end{matrix} \tag{1.5}$$

при условии $s - d + 1/2 > 0$, где d — тип граничного оператора. При этом нормы операторов (1.5), отвечающие нормам (1.4) в пространствах $H^s(M)$, ограничены равномерно по $p \in \mathbb{R}$.

Перейдем к условиям эллиптичности задачи (1.3). Через T^*M и $T^*\partial M$ обозначим кокасательные расслоения многообразий M и ∂M, соответственно. Для оператора с параметром (1.2) гладкая функция

$$\sigma(D)(x, \xi, p) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \sigma(D_k)(x, \xi) p^k \in C^\infty\big(T^*M \times \mathbb{R}, \operatorname{Hom}(E, F)\big),$$

где $\sigma(D_k)(x, \xi)$ — главные символы дифференциальных операторов D_k, называется *внутренним символом* краевой задачи с параметром. Фиксируем точку $(x', \xi') \in T^*\partial M$. Заморозим коэффициенты операторов $D(p)$ и $B(p)$ в точке x', отбросим младшие члены (т. е. в дифференциальных операторах D_k и B_k оставим только производные старших порядков $m-k$ и $b-k$, соответственно) и выполним преобразование Фурье по касательной переменной x'. Получим семейство краевых задач

$$\begin{cases} \sigma(D)\left(x', 0, \xi', -i\partial_{x_n}, p\right) u(x_n) = 0, \quad x_n \geqslant 0, \\ \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant d-1} \sigma(B_k)(x', \xi', p) \left(-i\partial_{x_n}\right)^k u \Big|_{x_n = 0} = g \end{cases} \tag{1.6}$$

для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами на полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x_n \geqslant 0\}$. Через

$$L_+(x', \xi', p) \subset C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+, E_{x'}) \tag{1.7}$$

обозначим пространство решений первого уравнения задачи (1.6), которые стремятся к нулю при $x_n \to +\infty$. Говорят, что краевая задача с параметром (1.5) удовлетворяет *условию Шапиро—Лопатинского*, если задача (1.6) имеет единственное решение $u \in L_+(x', \xi', p)$ для любой правой части $g \in G_{x'}$.

Предложение 1.1 (см. [1, теорема 4.1])**.** *Пусть для задачи* (1.5) *выполнены условия эллиптичности с параметром* (*в смысле Аграновича—Вишика*):

1. *внутренний символ* $\sigma(D)(x, \xi, p)$ *обратим при всех* $(x, \xi, p) \in T^*M \setminus \{|\xi| + |p| = 0\}$;
2. *выполнено условие Шапиро—Лопатинского.*

Тогда оператор (1.5) *фредгольмов при всех* $p \in \mathbb{R}$ *и обратим при всех достаточно больших* p. *При этом норма обратного оператора* $\mathcal{D}(p)^{-1}$, *отвечающая семействам норм* (1.4) *в пространствах Соболева, равномерно ограничена по* p, *т. е. выполнена оценка*

$$\left|\!\left|\!\left|\mathcal{D}(p)^{-1}(f, g)\right|\!\right|\!\right|_s \leqslant C_1 |\!|\!| f |\!|\!|_{s-m} + C_2 |\!|\!| g |\!|\!|_{s-b-1/2}, \quad \text{где} \quad s - (d-1) > \frac{1}{2},$$

а константы C_1 *и* C_2 *не зависят от* f, g *и* p.

1.3. Пример. В данной работе будут рассматриваться задачи с параметром, которые определяются следующим образом. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{pmatrix} A \\ \\ i^*B \end{pmatrix} : C^\infty(M, E) \longrightarrow \begin{array}{c} C^\infty(M, E) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G), \end{array} \tag{1.8}$$

где

$$A = A(x, -i\partial_x)\colon C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E) \tag{1.9}$$

— дифференциальный оператор порядка m, $B = B(x, -i\partial_x)$ — дифференциальный оператор порядка $b < m$, а E и G — комплексные векторные расслоения на M и ∂M, соответственно.

Следуя [10], будем говорить, что краевая задача (A, B) является *эллиптической по отношению к конусу*

$$\mathcal{C} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| \leqslant |\operatorname{Re} \lambda|\},$$

если $\det(\sigma(A)(x, \xi) - \lambda) \neq 0$ для всех $(x, \xi, \lambda) \in T^*M \times \mathcal{C}$ и $|\xi| + |\lambda| \neq 0$, и задача на полупрямой (ср. (1.6))

$$\begin{cases} \big(\lambda - \sigma(A)(x', 0, \xi', -i\partial_{x_n})\big)u(x_n) = 0, \quad x_n \geqslant 0, \\ \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant d-1} \sigma(B_k)(x', \xi')(-i\partial_{x_n})^k u\Big|_{x_n=0} = g \end{cases} \tag{1.10}$$

имеет единственное решение u, стремящееся к нулю при $x_n \to +\infty$, для любой правой части g для всех $(x', \xi', \lambda) \in T^*\partial M \times \mathcal{C}$ и $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$.

Задаче (1.8) сопоставим краевую задачу

$$\mathcal{D}(\mu) = \begin{pmatrix} \mu^m - iA \\ \\ i^*B \end{pmatrix} : C^\infty(M, E) \longrightarrow \begin{array}{c} C^\infty(M, E) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G) \end{array} \tag{1.11}$$

с параметром $\mu \in \mathbb{R}$. Ясно, что задача (1.11) является задачей типа (1.5). Пусть задача (1.8) является эллиптической по отношению к конусу $\mathcal{C}$. Тогда нетрудно видеть, что внутренний символ $\sigma(D)(x, \xi, \mu) = \mu^m - \sigma(A)(x, \xi)$ задачи (1.11) обратим при всех $(x, \xi, \mu) \in T^*M \setminus \{|\xi| + |\mu| = 0\}$, а задача (1.10) однозначно разрешима, т. е. задача (1.11) эллиптична с параметром.

Через A_B обозначим неограниченный оператор, равный оператору A с областью определения

$$\mathcal{D}(A_B) = \{u \in C^\infty(M, E) \mid i^*Bu = 0\}. \tag{1.12}$$

Предложение 1.2 (см. [10, Lemma 2.1, Theorem 2.2])**.**

1. *Пусть краевая задача* (A, B) *эллиптична по отношению к конусу* $\mathcal{C}$. *Тогда оператор* $\mu^m - iA_B$ *обратим при больших значениях* μ.

2. *Пусть краевая задача* (A, B) *является эллиптической по отношению к конусу* $\mathcal{C}$. *Тогда оператор* A_B *имеет дискретный спектр и каждому собственному значению соответствует конечномерное корневое подпространство. При этом не более чем конечное число собственных значений лежит внутри конуса* $\mathcal{C}$.

Наша цель — построить η-инварианты для однозначно разрешимой краевой задачи $D(\mu)$ и обратимого неограниченного оператора A_B, пользуясь подходами Мельроуза и Атьи—Патоди—Зингера, соответственно, и затем указать связь между построенными η-инвариантами.

2. Первый подход. η-Инвариант типа Атьи—Патоди—Зингера

В этом разделе напомним определение η-инварианта неограниченного оператора A_B, построенного в предыдущем разделе, в терминах его спектра. Подробности см. в [10].

Определение 2.1. *Спектральная η-функция* оператора A_B определяется формулой

$$\eta_{A_B}(s) = \sum_{\operatorname{Re}\mu>0} \mu^{-s} - \sum_{\operatorname{Re}\mu<0} (-\mu)^{-s}, \tag{2.1}$$

где числа $\mu \in \mathbb{C}$ пробегают все собственные значения оператора A_B, взятые с учетом кратности. Здесь и ниже $\mu^{-s} \overset{\text{def}}{=} e^{-s\ln\mu}$, и ветвь логарифма выбирается таким образом, что $\ln\mu \in \mathbb{R}$ при $\mu > 0$.

Предложение 2.1 (см. [10, Theorem 2.7])**.** *Пусть краевая задача* (A, B) *является эллиптической по отношению к конусу* $\mathcal{C}$. *Тогда ряд* (2.1) *абсолютно сходится при* $\operatorname{Re} s > n/m$ *и определяет в этой области аналитическую функцию, которая имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость с изолированными простыми полюсами в точках* $s = (n-k)/m$, *где* $k = 0, 1, 2, \dots$. *Вычеты в этих точках можно явно вычислить.*

Этот результат позволяет определить η-инвариант краевой задачи (A, B) (точнее, неограниченного оператора A_B).

Определение 2.2. *η-Инвариантом Гилки—Смита* краевой задачи (A, B) называется число

$$\eta_{GS}(A_B) = \frac{\operatorname{Reg}(\eta_{A_B})(0)}{2} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\eta_{A_B}(s) - \frac{1}{s}\operatorname{Res}_0(\eta_{A_B})(s)\right)\Bigg|_{s=0}, \tag{2.2}$$

где Reg обозначает постоянный член в ряде Лорана.

3. Второй подход. η-Инвариант типа Мельроуза

Напомним определение η-инварианта типа Мельроуза эллиптической краевой задачи $\mathcal{D}(\mu)$ с вещественным параметром из работы [3].

3.1. Алгебра задач с параметром. Фиксируем числа m_0, b_0 и d_0. Через $\Psi_p(M)$ обозначим алгебру операторов с параметром

$$\mathcal{D}(p)\colon \begin{matrix} C^\infty(M, F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M, F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G), \end{matrix}$$

мультипликативно порожденную композициями вида $\mathcal{D}_1(p)\mathcal{D}_0(p)^{-1}$, где множители — краевые задачи с параметром

$$\mathcal{D}_0(p), \mathcal{D}_1(p)\colon C^\infty(M, E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M, F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G), \end{matrix}$$

причем задача $\mathcal{D}_0(p)$ имеет порядки (m_0, b_0) и тип d_0 и является эллиптической и однозначно разрешимой при всех $p \in \mathbb{R}$, а задача $\mathcal{D}_1(p)$ имеет порядки (m_1, b_1) и тип d_1, подчиненные неравенствам

$$m_1 \leqslant m_0, \quad b_1 \leqslant b_0, \quad d_1 \leqslant d_0.$$

Из этого определения следует, что алгебра $\Psi_p(M)$ состоит из линейных комбинаций произведений вида

$$\prod_{j=1}^{N} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1}, \tag{3.1}$$

где порядки и тип операторов с параметром $\mathcal{D}_j$ удовлетворяют неравенствам

$$m_j \leqslant m_0, \quad b_j \leqslant b_0, \quad d_j \leqslant d_0 \qquad \forall j \geqslant 1, \tag{3.2}$$

а задачи $\mathcal{D}_{0j}$ являются эллиптическими с параметром и имеют порядки (m_0, b_0) и тип d_0.

Предложение 3.1 (см. [3, теорема 2.1])**.** *Пусть для произведения*

$$\mathcal{D}(p) = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{D}_j(p) \mathcal{D}_{0j}(p)^{-1}$$

выполнены неравенства (3.2) *и неравенства*

$$m_1 - m_0 + k < -\dim M, \quad b_1 - b_0 + k < -\dim M + 1, \quad \textit{где} \quad k = \sum_{j=2}^{N} \max(m_j - m_0, b_j - b_0). \tag{3.3}$$

Тогда семейство $\mathcal{D}(p)$ *состоит из ядерных операторов* (*т. е. операторов, для которых существует след*) *и для следа семейства существует асимптотическое разложение при* $p \to \pm\infty$ *вида*

$$\operatorname{tr} \mathcal{D}(p) \sim p^{\ell} \sum_{j \leqslant 0} c_j^{\pm} p^j, \quad \textit{где} \quad \ell = \max(m_1 - m_0 + k + \dim M,\ b_1 - b_0 + k + \dim M - 1),$$

причем разложение можно дифференцировать по параметру любое число раз.

3.2. Регуляризованный след и регуляризованный интеграл. Введем пространство $S_{as}(\mathbb{R})$, состоящее из функций $f(p) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, имеющих асимптотическое разложение

$$f(p) \sim \sum_{i \leqslant N} c_i^{\pm} p^i + \sum_{0 \leqslant j \leqslant N} d_j^{\pm} p^j \ln|p| \quad \text{при } p \to \pm\infty,$$

где $N > 0$ — некоторое целое число, а $c_j^{\pm}, d_j^{\pm} \in \mathbb{C}$. Причем это разложение можно дифференцировать произвольное число раз. Через $\mathcal{P} \subset S_{as}(\mathbb{R})$ обозначим подпространство многочленов.

Рассмотрим семейство $\mathcal{D} \in \Psi_p(M)$. Оно является линейной комбинацией произведений вида (3.1). Для краткости будем считать, что

$$\mathcal{D} = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1}. \tag{3.4}$$

Это произведение, вообще говоря, не имеет следа, поскольку для него неравенства (3.3) могут быть не выполнены. При дифференцировании порядок семейства (3.4) будет падать, как минимум, на единицу. Отсюда и из предложения 3.1 следует, что при

$$\ell \geqslant \max(m_1 - m_0 + k + \dim M + 1,\ b_1 - b_0 + k + \dim M) \tag{3.5}$$

семейство $\partial_p^{\ell} \mathcal{D}(p)$ будет иметь след. Теперь можно дать определение регуляризованного следа.

Определение 3.1. *Регуляризованным следом* будем называть функционал

$$\mathrm{TR}\colon \Psi_p(M) \longrightarrow S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P},$$

$$(\mathrm{TR}\, \mathcal{D})(p) = \int_0^p \int_0^{q_{\ell-1}} \cdots \int_0^{q_1} \operatorname{tr}\bigl(\partial_q^{\ell} \mathcal{D}(q)\bigr) dq dq_1 \ldots dq_{\ell-1},$$

где ℓ определяется из (3.5).

Из предложения 3.1 следует, что это определение корректно, т. е. регуляризованный след действительно попадает в пространство $S_{as}(\mathbb{R})$, а выбор другого числа ℓ меняет регуляризованный след на многочлен. Регуляризованный след является следом, т. е. выполнено равенство

$$\mathrm{TR}\big(\mathcal{D}_1(p)\mathcal{D}_2(p)\big) = \mathrm{TR}\big(\mathcal{D}_2(p)\mathcal{D}_1(p)\big) \quad \forall\, \mathcal{D}_1(p), \mathcal{D}_2(p) \in \Psi_p(M).$$

Определим *регуляризованный интеграл*

$$⨍_{\mathbb{R}} : S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad ⨍_{\mathbb{R}} f(p)dp \overset{\mathrm{def}}{=} c_0, \tag{3.6}$$

где c_0 — постоянный член в асимптотическом разложении интеграла

$$\int_{-T}^{T} f(p)dp \sim \sum_{j \leqslant N} c_j T^j + \sum_{0 \leqslant j \leqslant N} d_j T^j \ln T \quad \text{при} \quad T \to +\infty,$$

где $N > 0$ — некоторое целое число, а $c_j, d_j \in \mathbb{C}$. Отметим, что регуляризованный интеграл нечетных функций равен нулю.

Для краткости введем следующее обозначение для композиции регуляризованных следа и интеграла:

$$\mathrm{Tr} \overset{\mathrm{def}}{=} ⨍_{\mathbb{R}} \circ \mathrm{TR}\,.$$

3.3. Определение η-инварианта краевой задачи. Пусть $\mathcal{D}(p)$ — однозначно разрешимая эллиптическая краевая задача с параметром вида (1.5), которая является эллиптической и однозначно разрешимой при всех $p \in \mathbb{R}$.

Определение 3.2. *η-Инвариантом* задачи $\mathcal{D}(p)$ с параметром называется число

$$\eta\big(\mathcal{D}(p)\big) = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}\big(\partial_p \mathcal{D}(p)\mathcal{D}(p)^{-1}\big) \in \mathbb{C}. \tag{3.7}$$

4. Связь η-инвариантов

4.1. Основной результат. Рассмотрим краевую задачу (A, B) (см. (1.8)), эллиптическую по отношению к конусу $\mathcal{C}$. С одной стороны, этой краевой задаче сопоставим неограниченный оператор A_B, равный оператору A с областью определения (1.12). С другой стороны, этой задаче сопоставим эллиптическую краевую задачу с параметром $\mathcal{D}(\mu)$, см. (1.11). Будем предполагать, что оператор A_B имеет тривиальное ядро. Тогда задача с параметром $D(\mu)$ будет однозначно разрешимой при всех $\mu \in \mathbb{R}$, и будут определены η-инвариантны и для оператора A_B, и для задачи $D(\mu)$. Следующая теорема устанавливает связь между этими η-инвариантами, построенными в разделе 2 (см. (2.2)) и разделе 3 (см. (3.7)).

Теорема 4.1. *Пусть оператор A имеет нечетный порядок. Тогда имеет место равенство*

$$\eta_{GS}(A_B) = \eta\big(\mathcal{D}(\mu)\big). \tag{4.1}$$

Следствие 4.1. *η-Инвариант $\eta\big(\mathcal{D}(\mu)\big)$ является спектральным инвариантом операторного пучка $\mathcal{D}(\mu)$.*

Замечание 4.1. В случае оператора A четного порядка равенство (4.1), вообще говоря, не имеет места, поскольку правая часть равна нулю. Действительно, семейство $D(\mu)$ является четной функцией параметра μ. Поэтому функционал Tr от нечетной функции $\partial_p \mathcal{D}(p)\mathcal{D}(p)^{-1}$ равен нулю.

4.2. Вспомогательные результаты из [12, § 2.1]. В цитируемой работе построено обобщение регуляризованного интеграла (3.6) на следующий класс функций.

Определение 4.1. Говорят, что функция $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ является log-*однородной*, если она имеет асимптотическое разложение

$$f(x) \sim \sum_{j \geqslant 0} \sum_{l=0}^{k_j} c_{jl} x^{m_j} \ln^l |x| \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

где $m > m_j \searrow -\infty$, и аналогичное разложение при $x \to 0$ (в этом случае показатели m_j в формуле монотонно стремятся к $+\infty$).

Определение 4.2. *Регуляризованным интегралом* log-однородной функции на положительной полупрямой называется число

$$\fint_{\mathbb{R}_+} f(x)dx \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Reg-}\lim_{a\to 0}\int_a^1 f(x)dx + \operatorname{Reg-}\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx,$$

где $\operatorname{Reg-}\lim\limits_{\alpha\to\beta}$ — постоянный член в log-однородном разложении при $\alpha \to \beta$ (т. е. c_{j0} при $m_j = 0$).

При этом для гладкой четной log-однородной функции f на $\mathbb{R}$ имеем

$$2\fint_{\mathbb{R}_+} f(x)dx = \fint_{\mathbb{R}} f(x)dx, \tag{4.2}$$

где в правой части стоит регуляризованный интеграл (3.6).

Определение 4.3. Пусть f — log-однородная функция на $\mathbb{R}_+$. *Регуляризованное преобразование Меллина* функции f при всех $s \in \mathbb{C}$ определяется формулой

$$(\widetilde{\mathcal{M}}f)(s) \overset{\text{def}}{=} \fint_{\mathbb{R}_+} x^{s-1}f(x)dx. \tag{4.3}$$

Далее, существует такое дискретное подмножество $\Sigma \subset \mathbb{C}$, что функция $(\widetilde{\mathcal{M}}f)|_{\mathbb{C}\setminus\Sigma}$ продолжается до мероморфной функции $\mathcal{M}f$ на $\mathbb{C}$. При этом для каждого $s \in \mathbb{C}$ имеем

$$(\widetilde{\mathcal{M}}f)(s) = \operatorname{Reg}(\mathcal{M}f)(s), \tag{4.4}$$

где Reg обозначает постоянный член в ряде Лорана. В частности, для регулярной точки s справедливо равенство $(\widetilde{\mathcal{M}}f)(s) = (\mathcal{M}f)(s)$.

4.3. Доказательство основного результата. Вернемся к доказательству теоремы 4.1. Преобразуем правую часть формулы (4.1). Имеем соотношения

$$\operatorname{TR}\big(\partial_\mu\mathcal{D}(\mu)\mathcal{D}(\mu)^{-1}\big) = \operatorname{TR}\left(\begin{pmatrix} m\mu^{m-1} \\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & C\end{pmatrix}\right) = \operatorname{TR}(m\mu^{m-1}R),$$

где Rf — решение u задачи $\mathcal{D}(\mu)u = (f,0)^t$, а Ch — решение u задачи $\mathcal{D}(\mu)u = (0,h)^t$. Ясно, что $R = (\mu^m - iA_B)^{-1}$. Отсюда, пользуясь определением η-инварианта (3.7), получаем

$$\eta\big(\mathcal{D}(\mu)\big) = \frac{1}{2\pi i}\fint_{\mathbb{R}} \operatorname{TR}(\mu^m - iA_B)^{-1}d\mu^m. \tag{4.5}$$

Далее воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4.1. *Краевая задача*

$$\begin{cases} (A^2+\mu^{2m})u = f, \\ i^*Bu = g_1, \quad i^*BAu = g_2, \quad g_1, g_2 \in C^\infty(\partial M, G), \end{cases} \tag{4.6}$$

является эллиптической с параметром и однозначно разрешимой для всех $\mu \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для краткости будем обозначать главный символ $\sigma(A)(x,\xi)$ оператора $A(x,-i\partial_x)$ в точке x через $a(\xi)$.

1. Сначала докажем эллиптичность с параметром задачи (4.6). Эллиптичность оператора A по отношению к конусу $\mathcal{C} = \{|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant |\operatorname{Re}\lambda|\}$ эквивалентна обратимости матрицы $\mu^m - ia(\xi)$ в конусе

$$i\mathcal{C} = \{|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant |\operatorname{Re}\lambda|\}.$$

Следовательно, собственные значения символа $a^2(\xi)$ лежат в правой полуплоскости $\{\operatorname{Re}\lambda > 0\}$. Отсюда и из равенства $a^2(\xi)u = -\mu^{2m}u$ получаем, что $u = 0$, откуда следует эллиптичность с параметром оператора $A^2 + \mu^{2m}$ для $\mu \in \mathbb{R}$.

Проверим выполнение условия Шапиро—Лопатинского для задачи (4.6). Исходная задача $\mathcal{D}(\mu)$ удовлетворяет условию Шапиро—Лопатинского по условию теоремы. Соответствующая задача на полупрямой имеет вид

$$\begin{cases} \bigl(\mu^m - ia(\xi', -i\partial_{x_n})\bigr)u(x_n) = 0, \\ \qquad j^*bu(x_n) = h_1 \in G_{x'}, \end{cases} \tag{4.7}$$

где оператор b отвечает оператору B после замораживания коэффициентов, а $j\colon \{0\} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — вложение.

Введем подпространство $L^+_{\mu^m - ia}(x', \xi', \mu)$ решений первого уравнения системы (4.7) (см. (1.7)), которые стремятся к нулю при $x_n \to +\infty$. Выполнение условия Шапиро—Лопатинского задачи (1.11) означает, что отображение

$$j^*b\colon L^+_{\mu^m - ia}(x', \xi', \mu) \longrightarrow G_{x'}$$

осуществляет изоморфизм.

Теперь рассмотрим оператор $A^2 + \mu^{2m} = (\mu^m - iA)(\mu^m + iA)$. Соответствующая задача на полупрямой имеет вид

$$\begin{cases} \bigl(\mu^m - ia(\xi', -i\partial_{x_n})\bigr)\bigl(\mu^m + ia(\xi', -i\partial_{x_n})\bigr)u(x_n) = 0, \\ \qquad j^*bu(x_n) = h_1, \quad j^*ba(\xi', -i\partial_{x_n})u(x_n) = h_2. \end{cases}$$

Введем соответствующее подпространство $L^+_{\mu^{2m}+a^2}(x', \xi', \mu)$. Требуется доказать, что отображение

$$j^*(b, ba(\xi', -i\partial_{x_n}))\colon L^+_{\mu^{2m}+a^2}(x', \xi', \mu) \longrightarrow G_{x'} \oplus G_{x'}$$

осуществляет изоморфизм. Достаточно доказать тривиальность ядра последнего отображения. Пусть

$$u \in L^+_{\mu^{2m}+a^2}(x', \xi', \mu), \quad j^*bu = 0 \quad \text{и} \quad j^*ba(\xi', -i\partial_{x_n})u = 0.$$

Обозначим $v = (\mu^m + ia(\xi', -i\partial_{x_n}))u$. Функция v стремится к нулю при $x_n \to +\infty$ и удовлетворяет уравнению

$$(\mu^m - ia(\xi', -i\partial_{x_n}))v = 0, \quad \text{т. е.} \quad v \in L^+_{\mu^m - ia}(x', \xi', \mu).$$

Кроме того, имеем

$$j^*bv = j^*b(\mu^m + ia(\xi', -i\partial_{x_n}))u = \mu^n j^*bu + ij^*ba(\xi', -i\partial_{x_n}))u = 0.$$

Таким образом, с учетом однозначной разрешимости задачи (4.7) из вышеописанного следует, что $v = 0$. Получаем краевую задачу

$$\begin{cases} v = (\mu^m + ia(-i\partial_{x_n}))u = 0, \\ \qquad j^*bu = 0, \end{cases}$$

которая, очевидно, также однозначно разрешима (см. (4.7)). Следовательно, $u = 0$. Выполнение условия Шапиро—Лопатинского для задачи (4.6) доказано.

2. Однозначная разрешимость задачи (4.6) эквивалентна тривиальности ее ядра, поскольку ее индекс равен нулю. Пусть функция u лежит в ядре. Тогда

$$\begin{cases} (\mu^m - iA)(\mu^m + iA)u = 0, \\ i^*Bu = 0, \quad i^*BAu = 0. \end{cases}$$

Обозначим $v = (\mu^m + iA)u$. Тогда получаем, что эта функция является решением краевой задачи

$$\begin{cases} (\mu^m - iA)v = 0, \\ \quad i^*Bv = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

которая по условию теоремы 4.1 имеет только тривиальное решение. Следовательно, функция u является решением задачи

$$\begin{cases} \quad v = (\mu^m + iA)u = 0, \\ i^*Bu = 0, \quad i^*BAu = 0. \end{cases}$$

Данная задача имеет единственное решение $u = 0$ (она сводится к задаче (4.8) заменой $\mu \mapsto -\mu$). Лемма 4.1 доказана. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Ниже через A^2_B обозначим неограниченный оператор A^2 с областью определения

$$\mathcal{D}(A^2_B) = \{u \in H^{2m}(M, E) \mid i^*Bu = 0,\ i^*BAu = 0\}.$$

В силу леммы 4.1 оператор $(A^2_B + \mu^{2n})^{-1}$ существует и является ограниченным. Ясно, что имеет место разложение

$$(\mu^m - iA_B)^{-1} = (\mu^m + iA_B)(A^2_B + \mu^{2m})^{-1}.$$

Преобразуем интеграл в (4.5):

$$\begin{aligned}\fint_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}(\mu^m - iA_B)^{-1} d\mu^m = m \fint_{\mathbb{R}} \mu^{m-1}\, \mathrm{TR}\big((\mu^m + iA_B)(A^2_B + \mu^{2m})^{-1}\big) d\mu = \\ = im \fint_{\mathbb{R}} \mu^{m-1}\, \mathrm{TR}\big(A_B(A^2_B + \mu^{2m})^{-1}\big) d\mu + m \fint_{\mathbb{R}} \mu^{2m-1}\, \mathrm{TR}\big((A^2_B + \mu^{2m})^{-1}\big) d\mu = \\ = im \fint_{\mathbb{R}} \mu^{m-1}\, \mathrm{TR}\big(A_B(A^2_B + \mu^{2m})^{-1}\big) d\mu. \quad (4.9)\end{aligned}$$

Здесь подынтегральное выражение $\mu^{2m-1}\, \mathrm{TR}\big(A_B(A^2_B + \mu^{2m})^{-1}\big)$ является нечетной функцией, и ее регуляризованный интеграл равен нулю.

2. Теперь покажем, что правая часть в (4.9) совпадает с η-инвариантом Гилки—Смита (2.2). Воспользуемся следующими леммами.

Лемма 4.2 (см. [10, Corollary 1.10])**.** *Пусть число $\lambda \in \mathcal{C}$ достаточно большое. Тогда при $k > (n+1)/m$ оператор $R(\lambda)^k = (\lambda - iA_B)^{-k}$ имеет след и справедлива оценка $|\operatorname{tr}(R(\lambda)^k)| < C_k|\lambda|^{-k+(n+1)/m}$.*

Лемма 4.3. *При $k > (n+1)/m$ имеет место равенство*

$$\operatorname{tr}\big(A_B(A^2_B + x^{2m})^{-k}\big) = \sum_n \mu_n(\mu_n^2 + x^{2m})^{-k}, \quad (4.10)$$

где $x \in \mathbb{R}$, а числа μ_n пробегают спектр оператора A_B с учетом кратностей.

Доказательство.

1. Покажем, что оператор $A_B(A^2_B + x^{2m})^{-k}$ имеет след. Воспользуемся разложением

$$A_B(A^2_B + x^{2m})^{-k} = A_B(iA_B + x^m)^{-1}(iA_B + x^m)^{-(k-1)}(-iA_B + x^m)^{-k}. \quad (4.11)$$

Поскольку операторы

$$A_B(iA_B + x^m)^{-1}, \qquad (iA_B + x^m)^{-(k-1)}$$

ограничены, а оператор $(-iA_B + x^m)^{-k}$ имеет след в силу леммы 4.2, то отсюда следует, что оператор (4.11) имеет след.

2. Формула (4.10) следует из теоремы Лидского [14]. $\square$

Лемма 4.4.

1. *При достаточно больших $\operatorname{Re} s$ η-функция оператора A_B может быть записана в виде*

$$\frac{1}{m}\eta_{A_B}\left(\frac{s}{m}\right) = \frac{2}{\pi}\sin\pi\frac{s+m}{2m} \fint_{\mathbb{R}_+} x^{m-s-1}\, \mathrm{TR}\big(A_B(A^2_B + x^{2m})^{-1}\big) dx. \quad (4.12)$$

2. *Справедливо равенство*

$$\eta_{GS}(A_B) = \frac{1}{2\pi} \fint_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}\big(A_B(A^2_B + x^{2m})^{-1}\big) dx^m. \quad (4.13)$$

Доказательство.

1. Докажем равенство (4.12). Правая часть в (4.12) корректно определена, поскольку регуляризованный интеграл $⨍_{\mathbb{R}_+}$ от степенной функции равен нулю. Рассмотрим функции

$$\Psi_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^{m-1}\,\mathrm{TR}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})^{-k}\big). \tag{4.14}$$

Нетрудно проверить справедливость соотношений

$$(x^{-m}\partial_x x^{1-m})^\ell \Psi_1 = (-2m)^\ell \ell! \Psi_{\ell+1},$$

$$(x^{1-m}\partial_x x^{-m})^\ell x^{-s+2m\ell} = (x^{1-m}\partial_x x^{-m})^{\ell-1}(-s+(2m-1)\ell)x^{-s+2(m-1)\ell} = \cdots$$
$$\cdots = \prod_{j=1}^{\ell}(-s+(2j-1)m)x^{-s},$$

где $\ell \geqslant 1$, с учетом которых интегрированием по частям ℓ раз при $s \notin \mathbb{Z}$ получаем равенство

$$⨍_{\mathbb{R}_+} x^{-s}\Psi_1(x)dx = \frac{(2m)^\ell \ell!}{\prod\limits_{j=1}^{\ell}\big(-s+(2j-1)m\big)} ⨍_{\mathbb{R}_+} x^{-s+2\ell m}\Psi_{\ell+1}(x)dx. \tag{4.15}$$

Внеинтегральные слагаемые при интегрировании по частям отсутствуют, поскольку эти слагаемые имеют асимптотическое разложение по дробным степеням, что не дает вклада в значение регуляризованного интеграла.

Для краткости обозначим правую часть в (4.12) через $I(s)$. Утверждается, что при $n < \operatorname{Re} s < m(2\ell+1)$, где число ℓ выбирается достаточно большим, имеет место равенство

$$I(s) = C_\ell(s)\int_{\mathbb{R}_+} x^{-s+m(2\ell+1)-1}\,\mathrm{tr}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})^{-(\ell+1)}\big)dx. \tag{4.16}$$

В самом деле, пользуясь равенством (4.15), из (4.12) получаем

$$I(s) = \frac{2}{\pi}\sin\pi\frac{s+m}{2m} ⨍_{\mathbb{R}_+} x^{-s}\Psi_1(x)dx = C_\ell(s) ⨍_{\mathbb{R}_+} x^{-s+2\ell m}\Psi_{\ell+1}(x)dx =$$
$$= C_\ell(s) ⨍_{\mathbb{R}_+} x^{-s+(2\ell+1)m-1}\,\mathrm{TR}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})^{-(\ell+1)}\big)dx. \tag{4.17}$$

Здесь и ниже

$$C_\ell(s) = \frac{2(2m)^\ell \ell! \sin\pi\frac{s+m}{2m}}{\pi\prod\limits_{j=1}^{\ell}\big(-s+(2j-1)m\big)}.$$

Преобразуем правую часть в (4.17). Из леммы 4.3 следует, что след $\mathrm{tr}\big(A_B(A_B^2+x^2)^{-(\ell+1)}\big)$ существует при $\ell+1 > (n+1)/m$, поэтому при этом условии можно заменить TR на tr. Далее, поскольку $\operatorname{ord}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})^{-(\ell+1)}\big) = -m(2\ell+1)$, то получаем оценки

$$\begin{gathered}\mathrm{tr}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})^{-(\ell+1)}\big) = \begin{cases} O(1) & \text{при } x\to 0,\\ O\big(x^{n-m(2\ell+1)}\big) & \text{при } x\to+\infty,\end{cases}\\ x^{-s+m(2\ell+1)-1}\,\mathrm{tr}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})\big) = \begin{cases} O(x^{-\operatorname{Re}s+m(2\ell+1)-1}) & \text{при } x\to 0,\\ O(x^{-\operatorname{Re}s+n-1}) & \text{при } x\to+\infty.\end{cases}\end{gathered} \tag{4.18}$$

В силу оценок (4.18) интеграл в правой части в (4.17) существует как несобственный интеграл, который абсолютно сходится при $n < \operatorname{Re} s < m(2\ell+1)$, и поэтому он равен регуляризованному интегралу по полупрямой, откуда следует искомое равенство (4.16).

Теперь из (4.16) имеем

$$
\begin{aligned}
I(s) &= C_\ell(s)\sum_k \mu_k \int\limits_{\mathbb{R}_+} x^{-s+(2\ell+1)m-1}(\mu_k^2+x^{2m})^{-(\ell+1)}dx = \frac{C_\ell(s)}{2m}\sum_k \mu_k \int\limits_0^\infty \frac{y^{\ell-(s+m)/2m}}{(\mu_k^2+y)^{\ell+1}}dy = \\
&= \frac{C_\ell(s)}{2m}\frac{\pi\prod\limits_{j=1}^{\ell}\big(-s+(2j-1)m\big)}{(2m)^\ell \ell!\sin\pi\frac{s+m}{2m}}\sum_k \mu_k(\mu_k^2)^{-(s+m)/2m} = \frac{1}{m}\eta_{A_B}\left(\frac{s}{m}\right),
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

где первое равенство получено разложением по собственным функциям оператора A_B (см. лемму 4.3), второе равенство отвечает замене переменной $y=x^{2m}$, а третье — следует из равенств

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty \frac{y^{\ell-(s+m)/2m}}{(\lambda+y)^{\ell+1}}dy &= \lambda^{-(s+m)/2m}B\left(\ell-\frac{s-m}{2m},\frac{s+m}{2m}\right) = \lambda^{-(s+m)/2m}\frac{\Gamma\left(\ell+1-\frac{s+m}{2m}\right)\Gamma\left(\frac{s+m}{2m}\right)}{\Gamma(\ell+1)} = \\
&= \lambda^{-(s+m)/2m}\frac{\prod\limits_{j=1}^{\ell}\big(-s+(2j-1)m\big)\pi}{(2m)^\ell \ell!\sin\pi\frac{s+m}{2m}}, \quad 0<\mathrm{Re}s<(2\ell+1)m,
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

где $\arg\lambda\in(-\pi,\pi)$, а B и Γ — бета- и гамма-функции, соответственно (см., например, [2, гл. 1]). При этом первое равенство в (4.20) справедливо при $\lambda>0$, но остается верным и при $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{R}}_-$ в силу единственности аналитического продолжения. Наконец, последнее равенство в (4.19) следует из формулы

$$
\mu_k(\mu_k^2)^{-(s+m)/2m} = \begin{cases} \mu_k^{-s/m} & \text{при} \quad \mathrm{Re}\,\mu_k>0, \\ -(-\mu_k)^{-s/m} & \text{при} \quad \mathrm{Re}\,\mu_k<0. \end{cases}
$$

Итак, равенство (4.19) дает равенство функций (4.12) в полосе $n<\mathrm{Re}\,s<2\ell+1$. Но поскольку ℓ можно выбрать сколь угодно большим, то равенство (4.12) выполнено в полуплоскости $n<\mathrm{Re}\,s$.

2. Докажем равенство (4.13), пользуясь регуляризацией значения η-функции в нуле. Правая часть в (4.12) может быть записана в виде (см. (4.3))

$$
I(s) = \frac{2}{\pi}\sin\pi\frac{s+m}{2m}(\widetilde{\mathcal{M}}\Psi_1)(1-s). \tag{4.21}
$$

Поскольку функция $(\mathcal{M}\Psi_1)(1-s)$ мероморфна (см. (4.4)), а η-функция $\eta_{A_B}(s)$ имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость с простым полюсом при $s=0$ (см. предложение 2.1), то мы получаем

$$
\begin{aligned}
\eta_{GS}(A_B) &= \frac{1}{2}\mathrm{Reg}(\eta_{A_B})(0) = \frac{m}{2}\mathrm{Reg}\left(\frac{2}{\pi}\sin\pi\frac{m(s+1)}{2m}(\mathcal{M}\Psi_1)(1-ms)\right)(0) = \\
&= \frac{m}{\pi}(\widetilde{\mathcal{M}}\Psi_1)(1) = \frac{1}{2\pi}⨍\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})^{-1}\big)dx^m.
\end{aligned}
$$

Здесь первое равенство есть определение η-инварианта (2.2), второе равенство следует из (4.19) и (4.21), третье равенство получено прямым вычислением с учетом (4.4), а последнее — следует из (4.14), (4.3) и (4.2). Лемма 4.4 доказана. □

Теперь искомое равенство (4.1) следует из (4.13), (4.9) и (4.5). Теорема 4.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Усп. мат. наук. — 1964. — *19*, № 3. — С. 53–161.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, Т. 1. — М.: Наука, 1973.
3. *Жуйков К. Н., Савин А. Ю.* Эта-инвариант эллиптических краевых задач с параметром// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 4. — С. 599–620.
4. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1967. — *16*. — С. 209–292.

5. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1975. — *77.* — C. 43–69.
6. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1976. — *78.* — C. 405–432.
7. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1976. — *79.* — C. 71–99.
8. *Fedosov B., Schulze B.-W., Tarkhanov N.* The index of elliptic operators on manifolds with conical points// Selecta Math. (N. S.). — 1999. — *5*, № 4. — C. 467–506.
9. *Fedosov B., Schulze B.-W., Tarkhanov N.* A general index formula on toric manifolds with conical points// В сб.: «Approaches to singular analysis». — Basel: Birkhäuser, 2001. — C. 234–256.
10. *Gilkey P. B., Smith L.* The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1983. — *36.* — C. 85–132.
11. *Gilkey P. B., Smith L.* The twisted index problem for manifolds with boundary// J. Differ. Geom. — 1983. — *18*, № 3. — C. 393–444.
12. *Lesch M.* Differential Operators of Fuchs Type, Conical Singularities, and Asymptotic Methods. — Stuttgart—Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1997.
13. *Lesch M., Pflaum M.* Traces on algebras of parameter dependent pseudodifferential operators and the eta-invariant// Trans. Am. Math. Soc. — 2000. — *352*, № 11. — C. 4911–4936.
14. *Lidskii V. B.* Non-selfadjoint operators with a trace// Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1959. — *125.* — C. 485–487.
15. *Melrose R.* The eta invariant and families of pseudodifferential operators// Math. Research Lett. — 1995. — *2*, № 5. — C. 541–561.

К. Н. Жуйков
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `zhuykovcon@gmail.com`

А. Ю. Савин
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `a.yu.savin@gmail.com`

UDC 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-403-416
EDN: PSBLYU

On two methods of determining η-invariants of elliptic boundary-value problems

K. N. Zhuikov and A. Yu. Savin

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. For a class of boundary-value problems with a parameter that are elliptic in the sense of Agranovich–Vishik, we establish the equality of the η-invariant defined in terms of the Melrose regularization and the spectral η-invariant of the Atiyah–Patodi–Singer type defined using the analytic continuation of the spectral η-function of the operator.

Keywords: elliptic boundary-value problems with a parameter, η-invariants, spectral invariants, regularized traces.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The first author is a winner of the "Young Mathematics of Russia" contest and expresses gratitude to its sponsors and jury. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 24-21-00336.

For citation: K. N. Zhuikov, A. Yu. Savin, "On two methods of determining η-invariants of elliptic boundary-value problems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 403–416. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-403-416

REFERENCES

1. M. S. Agranovich and M. I. Vishik, "Ellipticheskie zadachi s parametrom i parabolicheskie zadachi obshchego vida" [Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general form], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1964, **19**, No. 3, 53–161 (in Russian).
2. H. Bateman and A. Erdélyi, *Vysshie transtsendentnye funktsii, T. 1* [Higher Transcendental Functions. V. 1], Nauka, Moscow, 1973 (Russian translation).
3. K. N. Zhuykov and A. Yu. Savin, "Eta-invariant ellipticheskikh kraevykh zadach s parametrom" [Eta-invariant of elliptic parameter-dependent boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 4, 599–620 (in Russian).
4. V. A. Kondrat'ev, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastyakh s konicheskimi i uglovymi tochkami" [Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1967, **16**, 209–292 (in Russian).
5. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1975, **77**, 43–69.
6. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, **78**, 405–432.
7. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, **79**, 71–99.
8. B. Fedosov, B.-W. Schulze, and N. Tarkhanov, "The index of elliptic operators on manifolds with conical points," *Selecta Math. (N. S.)*, 1999, **5**, No. 4, 467–506.
9. B. Fedosov, B.-W. Schulze, and N. Tarkhanov, "A general index formula on toric manifolds with conical points," In: *Approaches to singular analysis*, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 234–256.
10. P. B. Gilkey and L. Smith, "The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1983, **36**, 85–132.
11. P. B. Gilkey and L. Smith, "The twisted index problem for manifolds with boundary," *J. Differ. Geom.*, 1983, **18**, No. 3, 393–444.
12. M. Lesch, *Differential Operators of Fuchs Type, Conical Singularities, and Asymptotic Methods*, B. G. Teubner Verlag, Stuttgart–Leipzig, 1997.
13. M. Lesch and M. Pflaum, "Traces on algebras of parameter dependent pseudodifferential operators and the eta-invariant," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2000, **352**, No. 11, 4911–4936.
14. V. B. Lidskii, "Non-selfadjoint operators with a trace," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1959, **125**, 485–487.
15. R. Melrose, "The eta invariant and families of pseudodifferential operators," *Math. Research Lett.*, 1995, **2**, No. 5, 541–561.

K. N. Zhuikov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: zhuykovcon@gmail.com

A. Yu. Savin
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: a.yu.savin@gmail.com